Posudek oponenta na bakalářskou práci Patricie Klosse

Název práce: *Řady*

Bakalářská práce Patricie Klosse se zaobírá tématem nekonečných číselných a mocninných řad a je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola je věnována historickému úvodu, druhá kapitola obsahuje výčet několika základních faktů z teorie řad, kapitola tři je věnována Cesarovské sumaci a poslední kapitola obsahuje několik výpočtů součtů konkrétních řad. Za stěžejní lze přitom považovat zejména poměrně zajímavé Kapitoly 1 a 3.

Práce působí zřetelným dojmem, že byla napsána narychlo, bez hlubšího promyšlení a před vytištěním nebyla patrně ani jednou pozorně přečtena, protože je plná formálních, koncepčních i matematických chyb, jakož i některých překlepů patrných na první pohled. Po stránce formální je možno vytknout zejména neexistující štábní kulturu (naznačující mj. naprosté nepochopení konceptu odstavce) a špatné slohové zpracování, které se vyznačuje například hovorovým jazykem nebo vršením faktů (velmi často v jednoduchých větách) bez logického propojení. Pokud jde o koncepci práce, tak jejím logicky působícím aspektem je výše uvedené členění do kapitol. Bohužel však tyto kapitoly postrádají přirozenou návaznost i vnitřní koherenci a působí dojmem, že byly napsány hlavně proto, aby práce dosáhla určitého počtu stránek; čtenář po většinu čtení netuší, jaký máme cíl a jak se k němu chceme propracovat. Pro ilustraci tohoto v práci všudypřítomného faktu zmíním například skutečnost, že teoretický úvod k řadám (Kapitola 2) se z větší části míjí s potřebami dalších částí: většinu uvedených informací další text nijak nevyužívá, naopak věci později potřebné v teoretickém úvodu chybí. Matematické chyby jsou vesměs drobnější, zahrnují však i vážnější nedostatky, z nichž mnohé možná vznikly nadměrným kopírováním částí zdrojového textu.

Následuje netříděný seznam některých konkrétních nedostatků, které jsem v práci objevil. Neuvádím všechny překlepy ani slohové přehmaty, ačkoliv se vyskytují téměř na každé stránce.

- V historickém úvodu by bylo pěkné zmiňované matematiky alespoň stručně představit (minimálně uvést letopočty). Je jistě nevhodné, aby věta začínající „Ve 14. století žil Oresme, kterému se podařilo dokázat...“ byla první zmínkou o Mikuláši Oresmovi.

- V historickém úvodu se zmiňují dvě Zenónovy aporie; pouze druhá z nich má však vztah k nekonečným číselným řadám, ta první má souvislost s integrací. To mohlo být zmíněno.

- O řadě se neříká, že je divergující či konvergující, nýbrž že diverguje či konverguje.

- V první kapitole se používají pojmy, které jsou (pochopitelně) zavedeny až v kapitole následující; bylo by podle mě vhodné na tento fakt čtenáře upozornit (například poznámkou pod čarou nebo na začátku kapitoly).

- Str 5, ř. 6: „Obrazce mají stejný obsah, mají tedy i stejný součet.“ Co je to součet obrazce?

- Na str. 5 se zničeho nic začne mluvit o mocninných řadách, což je ponecháno bez komentáře, ačkoliv v předchozím textu se jedná pouze o řady číselné.
- Str 6, ř. 6: „Newtonovo objevení binomické řady v roce 1665“; tuto formulaci ponechám bez komentáře, za zmínku ale stojí, že právě tento letopočet je na 4. straně historického úvodu první letopočet v práci uvedený (s výjimkou citací).
- V druhé půli str. 4 je podivná formulace „... řada, které přísluší součet $\sqrt{1-x^2}$“. Existuje taková řada pouze jedna? Pokud ano, je to každému čtenáři jasné do takové míry, aby věděl, že touto formulací je řada jednoznačně určena?
- Newtonův postup popisovaný od půle strany 6 je obtížné pochopit. Místo (obtížně srozumitelných) slovních popisů zahrnujících výrazy jako „ocas“ (bez jakéhokoliv vysvětlení) by bylo vhodné napsat rovnice zachycující postupné kroky.
- Str. 7, ř. 3 odspodu uvádí neplatnou rovnici. Cílem bylo vyjádřit, že uvedená (mimochodem s chybou ve znaménku u posledního členu) řada vyjadřuje plochu pod v téže rovnici uvedenou hyperbolou. Pro tento účel ovšem není možné použít symbol „=“.
- Str. 8: chyba ve znaménku z předchozí stránky se zde opakuje na pěti dalších místech.
- Str. 8 poslední odstavec: Předpoklad, že kružnice je jednotková, měl být uveden hned na začátku, neboť jinak uvedený vztah pro obsah obrazce $SPQR$ neplatí.

  Podstatnější ale je, že by se zde mělo aspoň rámcově vysvětlit, odkud Newton tento vztah zjistil, protože jinak jeho odvození řad pro goniometrické funkce nemá žádné zakotvení. Tyto řady se dají odvodit i jinak a a priori neexistuje důvod, proč to dělat z tajuplného vzorce uvedeného bez důkazu.
- Str. 9, ř. 1: Správně mělo být: „Tam úhel odpovídá délce oblouku“, nikoliv obvodu kružnice. Nepřesné (a tedy nejasné) vyjadřování.
- Definice 2: Standardní definice je, že řada je buďto konvergentní (má-li vlastní limitu) nebo divergentní (v opačném případě). Oscilující řada je pak taková divergentní řada, která nemá součet.
- Str. 10: Je potřeba být konzistentní v používané terminologii. Není například vhodné hovořit o „konečné geometrické řadě“, když v předchozím textu zavádíme pouze (geometrickou) řadu nekonečnou. Místo toho je možné použít už definovaný termín částečného součtu. O to víc matoucí je, když toto konstatování sice přijde, ale až o několik řádků později. Proč se tedy vůbec o konečné geometrické řadě mluví?
- Věta 2 má velmi jednoduchý důkaz a v podstatě je v textu celý obsažen. Není však takto prezentován, místo toho je bůhvíproč uveden (v práci obecně nadužívaným) podmiňovacím způsobem: „Myšlenka, proč by měla platit nutná podmínka konvergence, by mohla být následující.“ Toto je stylisticky nehezké, zavádějící (na nezasvěceného

čtenáře to může bezdůvodně působit dojmem, že v důkazu ještě něco chybí) a vytváří to pocit, že si autorka není jista, jestli jde o důkaz nebo ne.

- Od Věty 5 dále následuje v podstatě zbytečný výčet osmi kritérií konvergence řad, který je součástí každých skript z analýzy prvního dvouletí. Některá kritéria jsou ilustrována na příkladech, ale tyto příklady jsou zcela základní. Většina kritérií se dále v textu nepoužívá ani nezmiňuje.

  Jeden z mála uvedených příkladů (na limitní srovnávací kritérium) navíc uvádí řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, přičemž konvergence druhé z nich se zcela nelogicky odvozuje z konvergence té první, i když přirozený a logický postup je opačným směrem. Přitom se hned v následujícím odstavci (o jedné jednoduché větě) bez vysvětlení konstatuje, že druhá z uvedených řad se nazývá teleskopická – a je to právě tento fakt, který vysvětluje, proč je logický právě mnou uvedený postup a nikoliv ten v práci. Tento případ je jedním z mnoha, odkud je patrné, že práce byla napsána bez hlubšího zamyšlení a propojování faktů. Text obsahuje ještě další chybu, tvrdí se, že se používá srovnávací kritérium (což by bylo logické a jednodušší), ale místo toho se používá limitní srovnávací kritérium.

- Str. 13 nahoře: Mělo by být uvedeno, že odmocninové kritérium dává jasnou odpověď pro některé řady *s nezápornými členy.*

- Věta 8: ve třetím bodě je uvedena stejná nerovnost jako ve druhém, což je pochopitelně přepis.

- Str. 14: V definici uvedené řady chybí závorky; dále formulace jako „Integrální kritérium, které uvádí Kopáček (1998), může vypadat následujícím způsobem:“ je zcela nevhodná. Může tak vypadat, ale nemusí? Takto se formální text nepíše.

- Str. 16: Poněkud rušivý zlozvyk poskytovat po zcela jasných formulacích vět nejasné slovní reformulace v prvním odstavci zašel už příliš daleko. Kdybych si předtím nepřečetl větu, vůbec bych nevěděl, co se tím chce říct; rozhodně však ten odstavec nemůže být interpretován jako reformulace uvedené věty o absolutní konvergenci.

- Píše se „Leibniz“, nikoliv „Leibnitz“ (a to v češtině, angličtině i němčině).

- Slavná Věta 15 se jmenuje Riemannova. Její formulace uvedená v práci je striktně vzato chybná, neboť má přehozené pořadí kvantifikátorů. Jediná správná interpretace textu v práci je, že pro danou řadu existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ takové, že jeho součet je s pro libovolné $s \in \mathbb{R}$, tj. má všechny součty současně, což je pochopitelně nesmysl. Souhlasím, že čtenářem textu bude patrně člověk – a člověk je často schopen si domyslet, jak to bylo myšleno; v matematice je ale potřeba se vyjadřovat přesně a zde nemáme jinou možnost, než říci kvantifikátory v jejich správném pořadí, tj. například *pro libovolné* $s \in \mathbb{R}^*$ (platí i pro $s \in \{-\infty, \infty\}$) *existuje bijekce* $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taková, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = s$.

Dále se hned pod Větou 5 hovoří o relativní řadě; tento termín ale nebyl definován. Proč nepostupovat v souladu s naší vlastní definicí a nenapsat prostě „Relativně konvergentní řada má tedy různé součty“ místo „Řada, která je relativní, ...“?

- Str. 17: Taylorovy řady by si zasloužily vlastní oddíl. Místo toho se o této (pro zbytek práce podstatné) části teorie hovoří pouze okrajově v nijak neoznačených odstavcích.

- Str. 18: Opět: Nesmyslné použití odstavců, nejasné vyjadřování, stylistické přehmaty jako po sobě jdoucí krátké věty začínající spojkou, „Takže by mohlo fungovat...“ apod. Co se snaží říci hned první řádek pod Definicí 8, se mi nepodařilo zjistit. Jisté je, že rovnice nedává smysl kvůli duplicitnímu použití n.

- Odstavec nad Větou 16 je pravdivý, nicméně není vysvětlen důvod pro toto tvrzení. Takovýto odstavec se měl objevit hned pod Definicí 8, případně měl být tento pojem součtu zaveden pod jiným názvem (například *cesarovský součet*); takto dochází ke kolizi Definic 8 a 2 a Věta 16 má ukázat, že to nevadí.

- Důkaz Věty 16 není dokončený (je useknutý před vyslovením závěrečného argumentu). V druhém řádku na str. 20 pod výpočtem se také píše „Potom $\frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.“ Chybí však zmínka o tom, pro která n tento vztah platí. Důkaz pro $L = \infty$ by mohl začínat novým odstavcem.

- Strany 21–25 nemají žádnou strukturu, chybí členění do číslovaných odstavců nebo číslování příkladů. Čtenář neví, kam míříme a proč. Na straně 23 je slovy *Abychom se v tom dále vyznali...* neformálně zavedeno nové značení, které je pak v podstatě zopakováno o tři strany dále v Definici 9. Na těchto stranách jinak není mnoho chyb, přesto se vyskytují nepřesné formulace, chybějící indexy a špatné zápisy jako $\alpha \in \{0, \mathbb{N}\}$ (má znamenat $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

  Poznamenávám, že na stranách 21–26 jsem napočítal celkem 73 odstavců.

- Věta 18 se u nás obvykle uvádí jako Stolzova věta, nese však i název Stolzova-Cesarova věta, což by v tomto kontextu jistě stálo za zmínku. Její standardní aplikace (což by se také mohlo v práci uvést) je jako analogie l'Hospitalova pravidla typu „$\frac{a}{\infty}$“ pro posloupnosti.

  V textu pod větou se píše „Pokud to platí, je možné zavést i vyšší řády.“ – čtenáři není jasné, jestli to tedy platí nebo ne. Dovolím si nabídnout odpověď: Ano, platí „to“ (tedy Věta 18), nicméně vyšší řády je možné zavést každopádně – bez ohledu na platnost nějakého výroku. V textu by mělo být vysvětleno, co se tím myslí.

- Poslední řádek na straně 26 (definice Cesarova součtu) je špatně, správně je $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^\alpha}{E_n^\alpha}$. V definici jsou i další chyby.

- 4. Kapitola je po věcné stránce vesměs správně a nebudu zde už vypisovat podrobnější seznam chyb (vyskytují se o dost méně než v předchozích sekcích). Obsah této kapitoly je základní a lze ho najít lépe zpracovaný v různých učebnicích základů matematické analýzy. Zajímavá je úvodní část o triku, jímž lze vypočítat $1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}$; důmyslné chyby skryté v tomto výpočtu by si ale zasloužily podrobnější a hlavně jasnější komentář. Formulace typu „tato úprava by díky linearitě měla být v pořádku“ působí od autorky vyhýbavě a čtenáři, který není odborník, nedají jasnou odpověď na to, jestli daná úprava je, či není, korektní. Tento dojem podtrhuje závěrečné konstatování, že „Je vidět, že někde je chyba.“

Zmínka o funkci ζ by si jistě zasloužila konstatování, že se jedná o slavnou Riemannovu funkci.

- Na stranách 30, 31 se pomocí Taylorova polynomu počítá přibližná hodnota Eulerova čísla. V práci je uveden výsledek $e \doteq 2,718\,278 \pm 0,000\,001$, který je chybný, neboť správně jest (k zapamatování snadné) $e = 2,718\,281\,828\ldots$.

- V Příkladě 3 se bez přesné formulace nebo aspoň stručného vysvětlení používá zajímavá Abelova věta, která by si jistě zasloužila (i delší) zmínku v teoretické části. Místo toho se konstatuje, že jisté tvrzení z této věty plyne a je poskytnut odkaz na literaturu. Práce jako celek by dávala smysl, pokud bychom si dopředu ujasnili, jaké příklady chceme ukázat a co je k tomu potřeba, a pak tyto prerekvizity vyložili v teoretickém úvodu.

- Str 35: Na poslední stránce vlastního textu práce (kromě závěru) se z ničeho nic poprvé a bez vysvětlení objeví pojem poloměru konvergence.

  Nakonec se ještě píše: „Aby řada konvergovala, musí být $|x| < 1$.“ To je sice pravda, ale je to pro nás irelevantní a ani jsme to neověřovali. Ve skutečnosti jsme ověřili opačnou implikaci, což je ta, kterou potřebujeme, tedy správné: „Aby řada konvergovala *stačí*, aby $|x| < 1$.“

Závěr: Práce na mě silně působí dojmem zcela nepromyšleného textu, který byl pouze narychlo „hozen na papír“, a že se tak stalo pouze z toho důvodu, že obhajoba práce je jednou z podmínek úspěšného zakončení studia. Text působí schematicky a postrádá soudržnost a cíl; jeho valnou většinu bylo přitom možné snadno převzít ze zdrojů, které jsou pro tuto základní látku hojně dostupné. To znamená, že k sepsání této práce stačilo jen udělat vcelku nahodilé výpisky z literatury a „dát je k sobě“; místo přemýšlení o obsahu byla většina času věnována prostému opisování. Práce obsahuje množství i závažnějších chyb, z nichž některé jasně ukazují na základní nedostatky v matematické erudici autorky. Podle mého názoru by se od prací na MFF UK mělo požadovat více, a proto práci *nedoporučuji k obhajobě.*

Martin Rmoutil