Oponentský posudek diplomové práce

Název: **Multilevel methods**
Autor: **Mgr. Petr Vacek**
Obor: **Numerická a výpočtová matematika**
Vedoucí práce: **Prof. Ing. Zdeněk Strakoš, DrSc.**
Oponent: **Doc. RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D.**

Předložená práce se zabývá víceúrovňovými metodami a zaručenými odhady rychlosti jejich konvergence pro eliptické diferenciální rovnice. Z mnoha různých existujících formulací a formalizmů si autor zvolil multiplikativní V-cyklus se zhlazováním před nebo po korekci na hrubé úrovni. Cílem této práce bylo popsat a studovat rychlost konvergence metody, ve které není obecně úloha na nejhrubší úrovni řešena přesně.

Po uvedení základních pojmů z prostorů funkcí a metody konečných prvků, je popsáno dvou- a víceúrovňové schema včetně obecné maticové reprezentace. Pro toto schema je uvedeno pět abstraktních předpokladů, jejichž splnění pro základní typ metody konečných prvků je stručně předvedeno v kapitole 4. Hlavní částí práce je důkaz zaručeného odhadu rychlosti konvergence (spektrálního poloměru matice šíření chyby) pro případ nepřesného řešení nejhrubší úlohy.

K výběru tématu je třeba uvést, že velkou část inženýrských úloh lze vyřešit pouze pomocí metod, které využívají rozklad prostoru řešení, např. tedy víceúrovňovými. Proto je téma aktuální a užitečné. Obecnou formulaci víceúrovňových metod lze navíc využít i v netradičních úlohách, jako např. při řešení úloh s náhodnými parametry. Cíl práce byl formulován jasně. Text je srozumitelný, vhodně strukturovaný a stručný, osa celého příběhu je zřetelná. Důkaz hlavního tvrzení z kapitoly 3, který je uveden apendixu, lze považovat za původní autorův výsledek, i když je motivován postupem v článku [27]. Odborným přínosem práce je tedy doplnění teorie o situaci s nepřesným nejhrubším řešičem, která v literatuře zpracována dle mého názoru dosud není, ačkoliv je v praktických výpočtech téměř vždy přítomna. Práce je po formální i jazykové stránce precizní. Našla jsem jen velmi málo překlepů a pouze tyto drobné nepřesnosti:

- Strany 31-32: Norma $(\cdot,\cdot)_j$ je dána vztahem (4.10), což je v rozporu s textem za vztahem (4.15).
- Strana 32: $C_{\mathcal{B}} = c_{\mathbf{M}} \cdot C_{\mathcal{A}} \cdot C_{\mathbf{L}}$
- Strana 36: Opačná nerovnost ve vztahu (vi).
- Strana 36, vztah (viii): $\ldots \mathcal{B}_j^{-1} \mathcal{A} E_{j-1}^* \ldots$
- Strana 38, vztah (xi): $\cdots \sum_{k=0}^{J} \mathbf{M}_{kj} \ldots$

Autor používá odborný jazyk bez zaváhání. Zdroje jsou adekvátní a jsou vhodně citovány. V závěru autor vyslovuje několik směrů dalšího výzkumu: použití jiných řešičů na hrubé úrovni, aposteriorní odhady s nepřesným hrubým řešičem a uvažování konečné aritmetiky.

Práce působí jako ucelené dílo. Nabízí se však otázka, jak se budou lišit praktické hodnoty ρ, $\|E\|_{\mathcal{A}}$ a skutečný pokles $\mathcal{A}$-normy chyby. Je škoda, že se numerické experimenty do práce nedostaly. Dále by bylo vhodné upřesnit, co se míní prostorem V_j a jak je na něm definován skalární součit pro příklad v kapitole 4: vztahem (4.6) je definován skalární součin na W_j, zatímco v (4.10) je použit pro funkce z V_j. V souvislosti s tím zdůrazňuji, že víceúrovňové metody se používají v různých formách: od funkcionálních (např. S. C. Brenner, R. Rannacher) až po čistě algebraické (např. A. Brandt, Y. Notay), s různými volbami podprostorů a jejich norem. Liší se i důkazy konvergence. Je tedy poměrně obtížné zvolit popis, který by vyhovoval velké části těchto metod. Oceňuji, že v této práci se to velmi dobře zdařilo.

Předloženou práci doporučuji uznat jako práci diplomovou.

Doporučuji, aby se autor v průběhu obhajoby vyjádřil k těmto otázkám:

1. Používáme-li víceúrovňové metody pro předpodmínění např. metody sdružených gradientů, uvažujeme jejich symetrickou variantu. Zůstanou uvedené odhady rychlosti konvergence v platnosti také pro symetrickou variantu?

2. Jakou hodnotu ρ přibližně získáte pro menší modelovou úlohu popsanou v kapitole 4 pro $J = 2$ nebo 3? Lze ji snadno porovnat se skutečnou normou $\|E\|_{\mathcal{A}}$?

Ivana Pultarová

V Praze dne 21. ledna 2020