

# Posudek diplomové práce

*RNDr. Karel Netočný, Ph.D.*

**Autor:** Bc. Oliver Nagy

**Název:** Contour methods in the mathematical theory of phase transitions

Předložená práce patří do oboru matematické statistické fyziky, která se zabývá rigorózní analýzou rovnovážných i nerovnovážných modelů interagujících částic, spinů apod. Jejím cílem primárně není vývoj spolehlivých aproximativních technik, ale spíše metod, které lze použít k matematicky korektním důkazům nejrůznějších tvrzení o vlastnostech těchto modelů. Tento podobor matematické fyziky se vyvíjí zhruba od šedesátých let 20. století a kombinuje v sobě postupy teoretické fyziky s metodami matematické analýzy, diskrétní matematiky, pokročilé algebry a dalších matematických disciplín. Historicky prvním významným výsledkem dosaženým v rámci tohoto oboru byla formulace matematicky konzistentní teorie fázových přechodů ve spinových modelech Isingova typu a nejrůznější pokusy nalézt jednodušší formulaci celé teorie v podobě, v níž by byla bezprostředně použitelná ve fyzikálních aplikacích, probíhají dodnes. Na předloženou diplomovou práci lze tedy nahlížet jako na další střípek do celkové mozaiky těchto snah.

Daná práce si položila za cíl podívat se novým nebo alespoň částečně novým způsobem na tři modelové problémy, které se objevují v matematické teorii fázových přechodů. Tím prvním je konstrukce kontrolovatelných poruchových rozvoje pro termodynamické veličiny jako je volná energie pro jistý abstraktní, tzv. polymerový model, který obvykle slouží jako jakýsi základní stavební kámen – tento byl v minulosti již mnohokrát studován a existuje pro něj celá řada různých technik. Druhým problémem je konstrukce nízkoteplotních fázových diagramů pro vícedimenzionální spinové modely na základě tzv. Pirogov-Sinajovy teorie, a třetím problémem pak analýza jednorozměrných spinových modelů Dysonova typu, čímž se označují modelové systémy s dalekodosahovou interakcí. Jak již bylo řečeno, vybrané problémy nejsou nové, avšak hledání nových přístupů k jejich rigorózní analýze je nepochybně smysluplná činnost, protože celou teorii rozhodně nelze pokládat za hotovou či uzavřenou.

Samotná diplomová práce byla pojata poměrně minimalisticky: Po krátkém úvodu, stručně shrnujícím celou práci a její hlavní výsledky, následují tři kapitoly, každá věnovaná jednomu z uvedených problémů, a nakonec stručný závěr, seznam použitých symbolů a seznam literatury. Rozsah práce je vcelku přiměřený a seznam literatury dostatečně kvalitně pokrývá řešenou problematiku. Vytknout by se dal až příliš stručný úvod, díky čemuž poněkud schází širší kontext. Hlavními výsledky této práce jsou především nové geometrické konstrukce v kapitolách 1 a 3, které mají zpřesnit poruchovou analýzu daných modelů.

Podíváme-li se nyní na jednotlivé kapitoly podrobně, pak první kapitola je celá věnována abstraktnímu polymerovému modelu. Najdeme zde přehled předchozích přístupů, obecnou definici modelu a celou řadu jeho základních i netriviálních aplikací. Jádrem této kapitoly a zřejmě i celé práce je sekce 1.4, představující nový a originální způsob klasifikace jednotlivých klastrů a jejich reprezentace prostřednictvím nových geometrických objektů – „samovyhýbajících se polymerových stromů“, které umožňují systematicky sčítat statistické váhy a velmi jemně kontrolovat výsledné sumy, což je důležité pro analýzu konvergence

klastrových rozvoji. Tato základní aplikace nové konstrukce je pak nastíněna na konci celé kapitoly.

Druhá kapitola představuje koherentní shrnutí obecné Pirogov-Sinajovy teorie nízkoteplotních fázových diagramů, inspirované některými staršími pracemi školitele, doc. Zahradníka. Z obecného hlediska tato teorie představuje základní a velmi netriviální aplikaci polymerových modelů z předchozí kapitoly, jde tedy o její přirozené pokračování. Přestože zde nenalézám originální výsledky, které by se daly nějak vypíchnout, jedná se rozhodně o kvalitní, až „pedagogickou“ prezentaci celé teorie.

Konečně třetí kapitola se zabývá aplikací polymerových a klastrových technik na nízkoteplotní analýzu Dysonových modelů, tzn. jednorozměrných spinových systémů s dalekodosahovou interakcí. Je třeba zmínit, že tyto modely se vymykají klasické Pirogov-Sinajově teorii a konstrukce vhodné polymerové reprezentace je netriviální geometrický a kombinatorický problém. Přestože v literatuře lze nalézt některé postupy, jak tuto úlohu řešit, daná práce představuje (částečně) novou metodu, jak tyto polymery systematicky konstruovat. Toto lze považovat za druhý významný výsledek dané práce. Za drobný nedostatek lze považovat absenci analytických odhadů vah daných polymerů a detailnější diskuze na konci, díky čemuž tato kapitola působí trochu nedokončeným dojmem.

I přes drobné výhrady ke stručnosti práce, některým drobným nedodělkům a typografickým chybám považuji za nesporné, že se jedná o kvalitní diplomovou práci, která prezentuje částečně i zcela originální výsledky v dané oblasti. Je také nutné ocenit úspěšné zvládnutí pokročilých kombinatorických technik a metod teorie grafů, které jsou nezbytné k matematické analýze daných modelů. Z těchto důvodů soudím, že předložená práce splňuje veškeré požadované podmínky. Navrhuji uznat ji za diplomovou práci a v případě úspěšné obhajoby ji ohodnotit stupněm výborně.

Pro Bc. O. Nagy mám následující dvě otázky:

1. Klíčovou konstrukcí v kapitole 1 jsou „samovyhýbající se polymerové stromy“ jakožto jakési „základní bloky“, do nichž lze rozložit libovolný klastř, přičemž váha clusteru je dána Teoremem 1.1. Nicméně, váhy těchto „samovyhýbajících se stromů“ nejsou nikde explicitně definovány a důkaz uvedeného teorému je jen velice stručný. Můžete celou tuto konstrukci včetně důkazu rozebrat podrobněji?
2. V kapitole 3 je diskutována role exponentu  $p$  a jsou zde citovány některé známé výsledky týkající se chování Dysonova modelu pro různé hodnoty exponentu. Zajímalo by mě, jestli lze nějak (alespoň v principu) využít výsledků z kapitoly 1 a vylepšené konstrukce polymerů v kapitole 3 ke zpřesnění či zesílení uvedených tvrzení pro Dysonův model.

V Praze 29. 1. 2020

RNDr. Karel Netočný, Ph.D.

Fyzikální ústav AV ČR, v.v.i.  
Na Slovance 2  
182 21 Praha 8

tel: +420 2 6605 2029  
e-mail: netocny@fzu.cz