

Mgr. Kristýna Kuncová: **Nonabsolutely convergent integrals**

Posudek oponenta disertační práce

Předložená práce je věnována teorii neabsolutně konvergentních integrálů, jejíž počátky sahají do druhé dekády 20. století a jsou spojeny se jmény A. Denjoye, O. Perrona a N. Luzina. K oživení zájmu o tuto teorii došlo ve druhé polovině 20. století poté, co J. Kurzweil a R. Henstock objevili nový elementární přístup k neabsolutní integraci. Výhodou neabsolutně konvergentních integrálů ve srovnání s dobře známým Lebesgueovým integrálem je skutečnost, že umožňují rekonstruovat funkce z jejich derivací.

Práce K. Kuncové je tvořena úvodem a třemi dalšími kapitolami, které postupně odpovídají článkům publikovaným či přijatým k otištění v časopisech *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Mathematische Nachrichten* a *Mathematica Bohemica*. Spoluautorem prvního a třetího článku je školitel prof. J. Malý. První článek získal prestižní ocenění JMAA Ames Award za rok 2013. V disertaci není uvedeno, jaký byl autorský podíl obou autorů na společných článcích, přepokládám tedy, že byl vyvážený.

Text obsahuje hned několik nových definic neabsolutně konvergentních integrálů Stieltjesova typu. Zároveň v klasické Kurzweilově-Henstockově definici integrálu reálné funkce se definiční obor dělí na nepřekrývající se intervaly, v předložené práci se uvažuje obecnější případ dělení na intervaly (resp. koule ve vícerozměrném případě), jejichž „ α -násobky“ se nepřekrývají.

V kapitole 1 je nově zaveden tzv. packing integrál, který umožňuje integrovat reálné funkce definované na metrickém prostoru vzhledem k distribucím na tomto prostoru, resp. obecněji funkce, jejichž hodnotami jsou distribuce. Definice kombinuje funkcionální přístup (distribuce) s kurzweilovským přístupem (δ -jemné systémy koulí). Kromě jiných výsledků je dokázáno, že packing integrál je ekvivalentní s tzv. UC integrálem, který v případě eukleidovských prostorů dříve zkoumal J. Malý. Autoři uvádějí, že jednou z hlavních motivací pro zavedení nového integrálu byla snaha o platnost dostatečně obecné verze Stokesovy věty; tomuto tématu je věnován závěr první kapitoly.

V kapitole 2 je studována integrace reálných funkcí n proměnných. Jsou zavedeny další dva nové integrály, tzv. packing R integrál a jeho varianta packing R^* integrál. Jejich definice kombinuje dřívější přístupy J. Malého a W. Pfeffera s packing integrálem z kapitoly 1. Pozornost je věnována netriviálnímu důkazu jednoznačnosti obou integrálů a odvození obecné verze Gaussovy-Greenovy věty. V závěru kapitoly jsou zkoumány vztahy mezi packing R a R^* integrály a tzv. MC_α integrály, které zavedli T. Ball a D. Preiss jakožto modifikaci původního MC integrálu od J. Malého a H. Bendové.

Kapitola 3 je zaměřena na integraci funkcí jedné reálné proměnné. Je zde opět zaveden další nový integrál nazvaný HKS_α^p integrál, v jehož definici vystupují dva reálné parametry α a p . Jedná se tedy vlastně o celou škálu nových integrálů, u kterých třída integrovatelných funkcí závisí na volbě α a p . Parametr α má stejný význam jako u výše zmíněného MC_α integrálu a jedním z pěkných výsledků této kapitoly je alternativní definice a zobecnění pojmu MC_α integrálu. Zbytek textu je věnován porovnání tříd integrovatelných funkcí v závislosti na volbě integrálu – kromě HKS_α^p integrálu se zde vyskytují jednorozměrné verze integrálů z předchozích kapitol, ale i tzv. Denjoyův-Chinčinův integrál.

Téma disertační práce považuji za přínosné a velmi aktuální. Navazuje na nedávné výsledky světových matematiků, podstatným způsobem je zobecňuje a zavádí řadu nových pojmů, jejichž podrobné studium bude jistě předmětem dalšího bádání. V práci jsem nenalezl žádné odborné chyby, důkazy jsou z velké části netriviální a matematická úroveň je podle mého názoru nadprůměrná.

Na několika místech jsem objevil drobná formální nebo jazyková nedopatření a překlepy, např.: s. 5¹³: partitions is replaced \rightarrow partitions are replaced, s. 10¹⁰: they differs \rightarrow they differ, s. 11⁷: that that, s. 30: přebytečné “For th”, s. 59¹⁴: $A_i \cup x_i \rightarrow A_i \cup \{x_i\}$, s. 92₉: each $j \rightarrow$ each i . Vzhledem k rozsahu práce je však počet takových nedostatků zanedbatelný.

Jisté výhrady mám k úvodní kapitole, jejímž smyslem by mělo být srozumitelné a přehledné shrnutí tří článků, které tvoří jádro disertace. Podle mého názoru se tento cíl nepodařilo zcela naplnit, úvodní část je místy psána velmi stručně a navíc se bez komentáře používá značení, které je zavedeno až v dalších kapitolách, např. symboly $C_0(X)$ a $C_b(X)$ v definici E, symbol d v definici N nebo symbol cl_* v definici P. Některým pasážím v úvodu jsem proto porozuměl až poté, co jsem přečetl zbývající část práce.

Ani zbytek práce příliš nevyčníká „didaktickým“ zpracováním: Pro čtenáře by bylo patrně nejjednodušší začít s jednorozměrnými integrály, které jsou studovány až v závěrečné kapitole, a teprve poté postoupit

k funkcím více proměnných, resp. funkcím v metrických prostorech. Na druhou stranu jsou v poslední kapitole diskutovány i integrály zavedené v předchozích kapitolách, proto chápu, že jednotlivé části nebylo možné jednoduše permutovat. I při zachování stávajícího uspořádání si myslím, že některé části bylo možné podat přístupnější formou. Např. hned definice packing integrálu na s. 25 je dost abstraktní a čtenář může tápat, co si má představit pod integrací funkce, jejíž hodnoty jsou distribuce. Pěkný příklad I.21, který vše osvětlí, je až o 4 strany dále.

Rozumím tomu, že hlavním cílem disertace je prezentace nových výsledků ve formě kolekce článků, nikoliv monografické pojednání o dané problematice. Výše uvedené výtky tedy nijak nesnižují odbornou kvalitu práce, poněkud čtivější zpracování by však ke studiu této pěkné partie matematické analýzy mohlo přilákat více zájemců.

Po čtení disertace mě napadly některé otázky; budu rád, když se k nim doktorandka při obhajobě vyjádří:

- (1) Je známo, jaký je pro funkce jedné reálné proměnné vztah mezi třídami integrovatelných funkcí PR^* a α -Lip, tj. mezi packing R^* integrálem z kapitoly 2 a packing integrálem z kapitoly 1? Z textu (viz např. schémata na straně 11) mám dojem, že se neví, zda jedna třída je podmnožinou druhé.
- (2) Pro Henstockův-Kurzweilův-Stieltjesův integrál je známo, že integrál $\int_a^b f dg$ existuje, pokud jedna z funkcí f, g má konečnou p -variaci a druhá má konečnou q -variaci, kde $1/p + 1/q > 1$. (Viz např. R. M. Dudley, R. Norvaiša, *Differentiability of six operators on nonsmooth functions and p -variation*, Springer, 1999.) Bylo by možné tento výsledek zesílit, pokud bychom místo HKS integrálu uvažovali některý z integrálů studovaných v disertační práci?
- (3) Mělo by smysl v definici HKS_α^p integrálu nahradit p -oscilaci p -variací? Jak by vypadala třída integrovatelných funkcí?

Závěr: Autorka prokázala schopnost samostatné vědecké práce. Předložený text jednoznačně splňuje podmínky kladené na disertační práci v oboru *4M3 Matematická analýza* a s potěšením jej doporučuji k obhajobě.

V Praze dne 6. září 2019

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK