Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Osobnost žáka a řešení úloh školské matematiky heuristickými strategiemi

Pupil's personality and solving problems of school Mathematics by heuristic strategies

Mgr. Markéta Škutová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2019

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *„Osobnost žáka a řešení úloh školské matematiky heuristickými strategiemi“* vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 18. 4. 2019 …………………

podpis studentky

Poděkování:

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za cenné rady a připomínky, za její velmi vstřícný, laskavý a konstruktivní přístup a v neposlední řadě za tu obrovskou spoustu času a nadšení, které mé práci věnovala. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Mileně Zapletalové a jejím žákům, bez jejichž pomoci by práce nebyla nikdy dokončena. V neposlední řadě bych chtěla poděkovat své rodině a nejbližším za podporu po celou dobu psaní této práce, za cenné komentáře, připomínky a prostě za to, že jste to se mnou vydrželi.

Abstrakt

Název práce: Osobnost žáka a řešení úloh školské matematiky heuristickými strategiemi

Autor: Mgr. Markéta Škutová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Diplomová práce se zabývá vztahem mezi typem osobnosti žáka v dimenzi příjmu informací a jeho způsoby řešení úloh školské matematiky s využitím heuristických strategií na 2. stupni základních škol a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií. V teoretické části jsou shrnuty poznatky z oblasti heuristických strategií ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ a jejich aplikace na příkladech. Dále jsou zde objasněna teoretická východiska teorie typů a její využití ve výchově a vzdělávání.

V praktické části jsou uvedeny výsledky analýzy odpovědí z typologického dotazníku a rozsáhlá kvalitativní analýza žákovských řešení úloh. Výsledná zjištění jsou doložena konkrétními ukázkami žákovských řešení. V diplomové práci lze nalézt důkazy toho, že zkoumaní intuitivní žáci používají častěji heuristické strategie řešení úloh než smysloví žáci a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh.

Klíčová slova: heuristické strategie, MBTI, teorie typů, řešení problémů

Abstract

Title: Pupil's personality and solving problems of school Mathematics by heuristic strategies

Author: Mgr. Markéta Škutová

Supervisor: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc

This thesis deals with the relationship between the type of pupil's personality in the dimension of information reception and their ways of solving problems of school Mathematics with the use of heuristic strategies at the lower secondary education of basic school and in the corresponding years of grammar schools. The theoretical part summarizes the knowledge of heuristic strategies in the teaching of mathematics at the lower secondary education of basic school and their application on examples. Furthermore, the theoretical basis of type theory and its use in education is explained.

In the practical part the results of the typological questionnaire are presented and an extensive qualitative analysis of the student's problem solving is offered. The resulting findings are supported by concrete examples of students' solutions. In this diploma thesis, there is evidence that the intuitive pupils use the heuristic strategies of problem solving more often than the sensory pupils and are more successful in solving non-traditional tasks.

Keywords: heuristic strategies, MBTI, type theory, problem solving

Obsah

1 Úvod

Problematika individualizace ve výuce a vzdělávání je v současné době zaměřena především na práci s žáky se speciálními vzdělávacími potřebami a na druhé straně (v menší míře) s nadanými žáky. Ještě méně se pak ve vzdělávání mluví o vzdělávacích potřebách jednotlivých žáků. Ačkoliv si široká veřejnost uvědomuje, že nejsme všichni stejní, že každému je přirozené něco jiného, na tyto odlišnosti se v oblasti vzdělávání často zapomíná. Domnívám se, že stále existuje v našem vzdělávacím systému velká část učitelů, kteří využívají výhradně ty výukové prostředky, které vyhovují především jim a přirozeně žákům stejného osobnostního typu jako jsou oni. Rozhodně tím nechci říci, že je to chyba jen učitelů, protože velkou roli v této problematice hrají i nejrůznější nařízení z MŠMT, která nezohledňují vzdělávací potřeby všech žáků v populaci. (Šteffl, 2015b)

Kromě tématu individualizace výuky je práce zaměřena na konkrétní oblast vzdělávání, kterou je výuka matematiky a řešení úloh heuristickými strategiemi. Tyto strategie lze označit také jako nestandardní, nealgoritmické, aplikovatelné jen na některé případy, využívající vhledu do řešení problému, umění vidět úlohu a její řešení v souvislostech, mít dobrý nápad, jak úlohu vyřešit co nejjednodušším způsobem bez zdlouhavých „otrockých“ výpočtů.

Impulsem pro sepsání této práce bylo navázání na vlastní bakalářskou práci Heuristické strategie řešení úloh (Mátlová, 2016), která se zabývala výčtem a aplikací nejčastěji používaných heuristických strategií na 2. stupni základních škol a na středních školách, a na grant GAČR č. 407/12/1939 Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi. Dalším podnětem pro vznik této práce bylo využití námětu pro další zkoumání vyplývající z disertační práce Jiřího Přibyla: Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií, 2016. V námětech na další výzkum Přibyl uvádí: *„Z hlediska školní praxe existuje více typologií žáka. V určité fázi experimentu jsem se zabýval možností zkoumat vztah typu osobnosti žáka (Miková a Stang, 2010) a přístupu žáka k úloze a úspěšností žáka při řešení úloh. (...) Domnívám se, že výsledky tohoto výzkumu by mohly pomoci učiteli v přístupu k žákovi při řešení úloh, a to nejen z hlediska obtížnosti úloh (někdo má rád výzvy, naopak jiný žák může upřednostňovat jednodušší úlohy, jejichž řešení ho uspokojuje, ale i z hlediska další učitelovy spolupráce se žákem.“* (Přibyl, 2016, s. 114)

Diplomová práce je zaměřena na zkoumání vztahu mezi typem osobnosti žáka a jeho využitím heuristických strategií při řešení úloh. Z mnoha typologií osobnosti byla vybrána typologie MBTI, která se kromě diagnostiky dospělých zabývá i diagnostikou dětí a dospívajících. Podle typologie osobnosti MBTI existují skupiny lidí, kteří inklinují k vyhledávání výzev. Právě tito žáci by měli inklinovat i k řešení nestandardních úloh a více využívat heuristické strategie.

Cílem práce je analýza souvislostí mezi osobnostním typem vybraných žáků v dimenzi příjmu informací a jejich způsoby řešení úloh školské matematiky s využitím heuristických strategií na 2. stupni základních škol a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií. K naplnění cíle byly stanoveny dvě výzkumné otázky:

1) Jak souvisí typ osobnosti žáků s jejich přístupem k řešení úloh školské matematiky?

2) Používají intuitivní žáci častěji heuristické strategie řešení úloh než žáci smysloví a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh?

V souladu s cílem práce byla zvolena taková struktura práce, v jejíž teoretické části je čtenář seznámen s pojmem a ukázkami heuristických strategií řešení úloh a teorií osobnostních typů. V praktické části se pak nachází rozsáhlá analýza žákovských řešení, jejíž dílčí zjištění jsou diskutována v celkovém shrnutí.

Cílem teoretické části je stručně objasnit, co to jsou heuristické strategie, a představit je na konkrétních příkladech. Celkem je představeno 12 různých heuristických strategií od těch základních po specifické matematické strategie. Dalším dílčím cílem teoretické části je najít teoretické východisko využití typologie osobnosti ve vzdělávání. Kromě historického okénka s náznakem vývoje typologií osobnosti je tato část práce zaměřena na charakteristiku vybrané jungovské typologie osobnosti tzv. MBTI (Myers Briggs Type Indicator), resp. teorii typů. Teoretická část je ukončena rozborem rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání a školních vzdělávacích programů vybraných škol v oblasti řešení nestandardních úloh, individualizace výuky a průřezových témat osobnostní a sociální výchovy.

Cílem praktické části práce je zodpovědět, zda vybraní intuitivní žáci používají častěji heuristické strategie řešení úloh než žáci smysloví a zda jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh. Hlavní náplní této části je diagnostika osobnostního typu žáků v dimenzi příjmu informací inspirovaná typologií MBTI a rozsáhlá analýza žákovských řešení s důrazem na úspěšnost řešení a mapování výskytu různých strategií řešení.

Práce je určena především učitelům matematiky, kteří se zajímají o individualizaci ve výuce a kteří chtějí lépe porozumět svým žákům. Dále je práce určena studentům učitelství, rodičům a všem zájemcům z řad odborné i laické veřejnosti.

2 Heuristické strategie ve školské matematice

Tato část je převzata z teoretické části vlastní bakalářské práce Heuristické strategie řešení úloh (Mátlová, 2016, str. 9-10, 27-44), na kterou tato diplomová práce navazuje. Text je pro účely této práce zkrácen a upraven.

„Heuristika (z řec. heuréka = objevil jsem, nalezl jsem) je věda zkoumající tvůrčí myšlení, také heuristická činnost, tj. způsob řešení problémů.“ (Maňák, Švec, 2003, s. 113) Pojmenování této vědy (někdy též nazývané heurologie), staré jako lidstvo samo, odkazuje na jeden z nejslavnějších výroků významného starořeckého matematika, fyzika a technika Archiméda ze Syrákús.

Slavný výkřik „Heuréka!“ je spojován s Archimédovým zákonem[1] a s historkou „o koruně krále Hieróna“. Protože je tento příběh úzce spjat s radostí z objevování a mohl by být použit i k motivaci žáků v hodině matematiky, rozhodla jsem se ho na tomto místě uvézt celý v původní podobě, tak jak ho ve svém díle Deset knih o architektuře zvěčnil římský stavitel a architekt Marcus Vitruvius Pollio (cit. z Halas, 2012, s. 11).

„Ačkoliv Archimédových objevů bylo mnoho a podivuhodných, zdá se, že největším důmyslem a bystrostí ze všech se vyznačuje ten, který uvedu. Když se totiž Hierón v Syrákúsách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.

Když přišlo později ovšem udání, že zlata bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hierón, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden, a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti. Archimédés, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále řecky heuréka, heuréka (našel jsem to, našel jsem to).

[1] Znění Archimédova zákona: Těleso ponořené do vody je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze vody o stejném objemu, jako je objem ponořené části tělesa. (Jandora, 2004)

Vycházeje potom z tohoto objevu, dal prý udělat dva kusy stejné váhy, jako měl věnec, a to jeden ze zlata, druhý ze stříbra. (…)

Vyzkoumav to, vnořil podobně do nádoby kus zlatý a po jeho vynětí dolil týmž způsobem míru a zjistil z menšího počtu sextariů, oč má kus zlata při téže váze menší objem než kus stříbra. Načež znovu naplnil nádobu a vnořil do téže vody samotný věnec a shledal, že při věnci vyteklo více vody než při kusu zlata téže váhy. Výpočtem z toho, oč bylo při věnci více vody než při kusu zlata, prokázal ve zlatě příměs stříbra a očividnou výrobcovu zpronevěru. ([Vi], str. 293–295)"

Podobně jako Archimédes našel neobvyklé, nové a překvapivé řešení nelehkého problému, objevují i žáci v hodinách matematiky překvapivé postupy řešení zadaných úloh, na které učitel při své přípravě na hodinu ani nepomyslel. Právě taková řešení budeme v tomto textu nazývat jako heuristické strategie a vymezíme je jako opak k algoritmickému řešení úloh.

Slovem algoritmus budeme označovat sled úkonů, činností, kroků, které za přítomnosti mechanických výpočtů povedou k řešení všech úloh určitého typu bez ohledu na schopnosti řešitele a jeho pochopení podstaty úlohy. To znamená, že algoritmus musí být jasně, jednoznačně a srozumitelně popsaný proces, musí být snadno přenositelný z řešitele na řešitele, dále musí mít konečný počet kroků, které může provádět i stroj. Vhodným příkladem v matematickém prostředí je například výpočet kořenů kvadratické rovnice, Euklidův algoritmus k určení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel, Hornerovo schéma a další. Za algoritmický postup řešení úloh budeme v této práci předpokládat přímé řešení klasickou (naučenou) cestou například algebraicky rovnicí, geometricky atd. (Zelina, 1990, s. 68)

Heuristický postup (strategie) bude reprezentovat neobvyklé (alternativní) řešení, které se neshoduje s klasickým řešením. Při tomto postupu řešitel střídá konvergentní (myšlenky se sbíhají k cíli – k jedinému správnému řešení) a divergentní (řešení ve více rovinách, směrech) myšlení. Vymýšlení a používání heuristických strategií není možné bez předchozí znalosti některých základních algoritmů.

S popularizací heuristiky přibývalo i heuristických schémat a strategií, či návodů řešení problémů například fáze řešení problémů podle Maňáka a Švece (2003, s.116), základní kroky heuristické metody podle Polyi (cit. ze Zelina, 1990, s. 70), Zelinovo schéma DITOR (Zelina, 1990, s. 73), Kopkův (2013, s. 18) výzkumný přístup. Tyto návody na řešení problémů mohou být aplikované i mimo oblast matematiky, protože řeší, jak obecně uchopit problém a vyřešit ho. Mohou být tedy podkladem zkoumání a objevování ve všech přírodovědných i humanitních vědách.

V této kapitole se zaměříme pouze na příklady konkrétních strategií, které lze využít v hodinách matematiky na druhém stupni základních škol a na středních školách. Vzhledem k jejich různorodosti a počtu však uvedeme jen některé heuristické strategie, se kterými se ve školské praxi můžeme setkat nejčastěji. V této části budeme vycházet z Kopkovy (2013, s. 26–76) taxonomie heuristických strategií, kterou doplníme o strategie vytvořené kolektivem autorů Novotná, Eisenmann, Přibyl (2015, 13–22).

Kopka (2013, s. 26–76) dělí nejčastěji se vyskytující heuristické strategie ve školské matematice na:

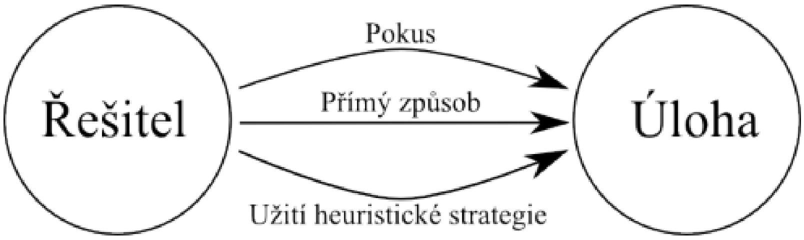
- výchozí (základní) strategie,
- další obecné strategie,
- specifičtější matematické strategie.

Toto dělení je využito i v této práci.

2.1 Výchozí (základní) strategie

Mezi základní strategie, které jsou schopni žáci bez větších problémů, často i intuitivně, použít, lze zařadit například strategie systematické experimentování a strategie odhad, ověření a oprava. Kopka do této kategorie dále řadí strategii pokus – omyl, algebraickou cestu (sestavení rovnice nebo soustavy rovnic) a geometrickou cestu (grafické znázornění). Vzhledem k teoretickému vymezení pojmu algoritmus a heuristická strategie nebudeme dvě poslední vyjmenované strategie uvádět jako základní heuristické strategie, protože svojí podstatou patří spíše mezi algoritmy. Mohou se však objevit příklady, kdy budou tyto strategie využity jako heuristické. Co se týče strategie pokus – omyl, názor na její zařazení mezi heuristické strategie není mezi autory jednotný. Někteří ji mezi heuristické strategie zařazují jako například Kopka, někteří ji vyčleňují jak ze skupiny algoritmů, tak ze skupiny heuristických strategií například Zelina, Novotná, Eisenmann, Přibyl. (Kopka, 2013, s. 26; Zelina, 1990, s. 67; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 14)

Pro ilustraci uvedeme přístup k heuristickým strategiím kolektivu autorů Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 14: *„Řešení úlohy chápeme jako kognitivní proces, který lze realizovat jedním ze tří způsobů v závislosti na angažovanosti, schopnostech a dovednostech řešitele (viz obr. 1).*



Obr. 1

První způsob označujeme jako pokus. *Jedná se o nejprimitivnější způsob vypořádání se s problémem, který předpokládá pouze vnější motivaci řešitele. Řešitel si neklade otázku, zda úlohu správně vyřešil, a plní pouze cíl „vyřešit problém“, a to většinou pouze jednou, bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení.*

Druhý způsob označujeme jako přímý způsob *a je založen na aplikaci naučené znalosti. Řešitel zná požadovaný proces řešení, a navíc je s to si uvědomit, že ho má použít, a aplikuje ho.*

Třetí způsob řešení označujeme jako užití heuristické strategie. *Řešitel nemá požadované znalosti nebo je neumí použít, nemůže tedy úlohu řešit přímým způsobem. Je motivován k řešení úlohy. Heuristická strategie mu umožní úlohu vyřešit.“*

2.1.1 Strategie pokus – omyl

Podle Kopky je tato strategie nejjednodušší možnou metodou, jak dojít k cíli. Úskalí této metody však spočívá v náhodném experimentování a v přítomnosti možného neúspěchu. Jedná se ve své podstatě o nesystematické experimentování. Ukázkovým příkladem této metody může být situace v hodině matematiky na prvním stupni, kdy se žák snaží doplnit neznámé číslo do následující rovnosti: $3 + \square = 8$. Pokud žák zkouší doplňovat různá čísla bez jakéhokoliv pravidla a doufá, že některé z nich bude hledaným řešením, pak využívá plně této strategie. Pokud si ale začne uvědomovat nějaký vztah mezi svými předchozími pokusy a důvody neúspěchu, je na cestě k další heuristické strategii odhad, ověření, oprava. (Kopka, 2013, s. 26)

Dalším příkladem může být situace ze střední školy, kdy se během výuky exponenciálních funkcí objeví rovnice $2^x + 3^x = 13$ a studenti začnou hádat výsledek. Ti bystřejší a motivovanější k řešení úloh najdou poměrně rychle výsledek $x = 2$ a jsou často spokojeni s řešením. Problém této strategie v tomto příkladu je ten, že studenti náhodným experimentováním sice mohou najít jedno řešení, ale již neověřují, zda má tato úloha jen to jediné řešení, když vyřešili úlohu korektně.

Právě na základě výše uvedeného příkladu je někdy tato strategie řazena mimo okruh heuristických strategií v hodinách matematiky. Podle Novotné, Eisenmanna, Přibyla (2015) je řešení touto cestou většinou doprovázeno pouze vnější motivací řešitele, protože se řešitel nezabývá tím, zda úlohu vyřešil správně, ale pouze tím, že splnil zadání a našel většinou jen jedno vyhovující řešení.

Strategii pokus – omyl neřadí k heuristickým strategiím ani Zelina (1990, s. 67), který dělí metody učení a výuky podobně jako Novotná, Eisenmann, Přibyl (2015) na tři skupiny: učení se pomocí pokusu a omylu, učení se pomocí algoritmů, učení se pomocí heuristiky. I když se strategie pokus-omyl z pohledu matematiky nezdá být heuristická, v jiných oborech, například v přírodovědeckých nebo technických, stojí tato strategie za četnými objevy, proto má své místo v Kopkově taxonomii heuristických strategií a zároveň i v tomto výčtu.

2.1.2 Strategie systematické experimentování

Systematické experimentování je často přítomno při řešení úloh, které vedou ke hledání nějakého vzorce, či zákonitosti. Pokud je to možné, je vhodné jednotlivé kroky pro přehlednost zapisovat do tabulky, ve které je po dostatečně velkém počtu experimentů často patrná nějaká pravidelnost. (Kopka, 2013, s. 26)

Za využití systematického experimentování lze k výsledku dojít pomocí určitého systému v opakování pokusů. Na začátku si často řešitel zvolí tzv. „odrazový pokus“, od jehož výsledku se pomocí dalších pokusů snaží přiblížit hledanému řešení. Velmi výhodné je spojení této strategie s použitím počítače, který může dobu řešení zkrátit a řešení tak zefektivnit. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 13)

Ukažme tuto strategii rovnou na konkrétním příkladu.

Příklad č. 1: *„Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?“* (Kopka, 2013, s. 33)

Řešení: Nejdříve si stejně jako většina řešitelů zkusíme vypsat několik čtyřciferných palindromů a vydělíme je číslem 11.

$$1221/11 = 111$$

$$2552/11 = 232$$

$$5665/11 = 515$$

$$4994/11 = 454$$

Z prvních pokusů je vidět nejen, že se v těchto případech potvrdila zadaná vlastnost, a navíc se i ve výsledcích objevují palindromy. Jak je to možné? K objasnění pozorovaných vlastností můžeme přistoupit například tak, že se pokusíme najít protipříklad, nebo budeme nadále ověřovat různé čtyřciferné palindromy. Použijeme-li systematické experimentování, vypíšeme do tabulky všechny čtyřciferné palindromy (tab. 1).

Tab. 1: Ukázka systematického experimentování při řešení příkladu č. 1

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{abba/11=}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{abba/11=}$
1	0	0	1	**91**	5	0	0	5	**455**
1	1	1	1	**101**	…	…	…	…	**…**
1	2	2	1	**111**	6	0	0	6	**546**
…	…	…	…	**…**	…	…	…	…	**…**
1	9	9	1	**181**	6	9	9	6	**636**
2	0	0	2	**182**	7	0	0	7	**637**
2	1	1	2	**192**	…	…	…	…	**…**
2	2	2	2	**202**	7	9	9	7	**727**
…	…	…	…	**…**	8	0	0	8	**728**
2	9	9	2	**272**	…	…	…	…	**…**
3	0	0	3	**273**	8	9	9	8	**818**
3	1	1	3	**283**	9	0	0	9	**819**
3	2	2	3	**293**	…	…	…	…	**…**
…	…	…	…	**…**	9	9	9	9	**909**

Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 15 (zpracování Mátlová, 2016)

Po vyzkoušení zadané vlastnosti u všech devadesáti palindromů jsme dospěli k závěru, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Odpověď na zadanou otázku zní: Ano, je tomu tak. Můj přítel měl pravdu. Zároveň se nám podařilo vyvrátit naši domněnku, že výsledkem po dělení budou opět palindromy, protože jsme našli protipříklad například 1001, 2002, 3003.

2.1.3 Strategie odhad, ověření a oprava

Tato strategie je ve skutečnosti pouze modifikací strategie pokus – omyl (viz 2.1.1). Na rozdíl od strategie pokus – omyl je strategie odhad, ověření a oprava zahrnována mezi heuristické strategie a její průběh vypadá následovně. Nejprve uděláme odhad řešení a zkontrolujeme jeho správnost. Pokud nebyl odhad správný, v dalším kroku odhadneme, jak moc jsme se zmýlili. Na základě předchozí práce s chybou vytvoříme nový odhad, který by měl být blíže výsledku, a postup opakujeme, dokud nedojdeme ke správnému závěru. Stejně jako v případě systematického zkoumání je, pokud to typ úlohy umožňuje, výhodné zaznamenávat si kroky do tabulky, kterou je vhodné doplnit o poslední sloupec s poznámkami k mylnému odhadu. Tento způsob záznamu může pomoci odhalit hledanou zákonitost rychleji, než by tomu bylo u jiného typu záznamu. Ukázkovým příkladem této strategie je písemné dělení víceciferného čísla číslem minimálně dvouciferným, kdy žák nejdříve odhadne, kolikrát je dělenec větší než dělitel, pak svůj odhad ověří výpočtem a pokud byl jeho odhad špatný, snaží se o korekci odhadu nejbližší správnému výsledku. (Kopka, 2013, s. 27; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 15)

Pro názornost si tuto strategii ukážeme na konkrétním příkladu, který vymyslel žák 9. ročníku během Kopkova experimentu. Protože však zadaná čísla nevedou k řešení, upravila jsem je tak, aby bylo možné danou situaci vyřešit.

<u>Příklad č. 2:</u>

Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Drak má 7 hlav a 5 nohou a drakouš má 3 hlavy a 6 nohou. Astronauti na planině napočítali 136 hlav a 155 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli? (Kopka, 2013, s. 32, upraveno[2])

<u>Řešení:</u> K nalezení výsledku této úlohy lze užít více metod a strategií, od klasické algebraické cesty s využitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých přes heuristické

[2] Viz Mátlová, 2016, s. 31

systematické experimentování po strategii odhad – ověření – oprava. Pro účely této práce však uvedu řešení této úlohy výhradně přes strategii odhad – ověření – oprava.

Za první „odrazový“ odhad zvolíme například, že na planetě je 10 draků a 10 drakoušů. Jednotlivé výpočty si budeme zaznamenávat do následující tabulky (viz tab. 2). Kromě počtu draků, drakoušů a celkového počtu hlav a nohou byly do tabulky přidány ještě dva sloupce, které ukazují, jak se odhad liší od zadaného počtu hlav a nohou. Pomocí těchto rozdílů se pak snažíme zpřesňovat další odhad a přibližovat se zadaným číslům. Počet kroků tak závisí na schopnostech řešitele. Všichni řešitelé by se však po konečném počtu kroků měli dostat do situace, kdy jim v obou sloupcích s rozdíly vyjde 0. Řešením jsou následně počty draků a drakoušů uvedené na začátku tohoto řádku.

Tab. 2: Ukázka strategie odhad, ověření a oprava při řešení příkladu č. 2

Odhad	Počet draků	Počet drakoušů	Počet všech hlav	Rozdíly	Počet všech nohou	Rozdíly
1.	10	10	100	36	110	45
2.	13	16	139	-3	161	-6
3.	12	17	135	1	162	-7
4.	13	15	136	0	155	0

Zdroj: Mátlová, 2016, s. 32

Odpověď na zadanou otázku zní: Astronauti viděli 13 draků a 15 drakoušů.

2.1.4 Grafické znázornění

Předchozí úloha je ve skutečnosti variací častěji zadávaného typu úloh týkajících se prasat a slepic, kdy je žákům zadán pouze celkový počet hlav a nohou, který pozorovatel napočítal na dvorku. Protože mají vybrané druhy zvířat pouze jednu hlavu, je úloha o poznání snazší a dá se u ní ukázkově využít strategie grafického znázornění. Pro prezentaci této strategie jsem však vybrala zjednodušenou verzi příkladu č. 2. Uvažujme tedy případ, kdy mají draci i drakouši všichni 4 nohy a liší se pouze počtem hlav, draci mají 5 hlav a drakouši 3 hlavy. Astronauti pak napočítali celkem 110 hlav a 112 nohou.

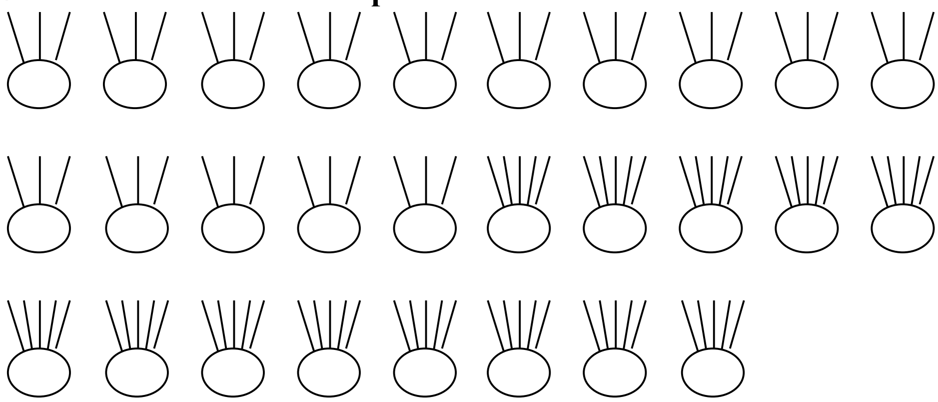
Příklad č. 3:

Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Oba druhy mají 4 nohy a liší se pouze počtem hlav, draci mají 5 hlav a drakouši 3 hlavy. Astronauti napočítali celkem 110 hlav a 112 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli? (Kopka, 2013, s. 32, upraveno[3])

Při grafickém řešení modifikované úlohy je vhodným prvním krokem určit, kolik oblud celkem vlastně astronauti viděli. Výpočet je poměrně snadný, protože mají všechny obludy čtyři nohy, stačí celkový počet zpozorovaných nohou vydělit tímto počtem: $112/4 = 28$.

Dále je možné postupovat tak, že si načrtneme 28 oválků znázorňujících těla oblud. Každá obluda má minimálně tři hlavy, tak ke každému tělu (oválu) přikreslíme 3 čáry znázorňující krky. Z celkového počtu 110 hlav jsme již zakreslili $3 \cdot 28 = 84$ hlav. Zbývá tedy rozmístit 26 hlav, které rozdělujeme po dvou, protože draci mají místo 3 hlav 5. Z obrázku č. 1 je na první pohled vidět, že tímto postupem jsme vytvořili 13 pětihlavých draků a 15 tříhlavých drakoušů.

Obr. 2: Grafické znázornění řešení příkladu č. 3



Zdroj: Mátlová, 2016, s. 33

Protože se nejedná o algoritmické řešení úlohy, lze v tomto případě požadovat grafické znázornění za heuristickou strategii a zařadit ji do kategorie základních heuristických strategií.

[3] Upraveno autorkou viz Mátlová, 2017, s. 32

2.2 Další obecné strategie

Základní strategie nám umožnily podívat se na řešení problému z jiného úhlu pohledu, než připouští algoritmická cesta. Užité postupy mohou žákům zjednodušit nalézání řešení a ukázat matematiku ve zcela novém světle jako tvůrčí, zábavnou a překvapující. Vybrané problémy představené v předchozí části této práce lze řadit k motivačním úlohám, které přitáhnou své řešitele a už je nepustí, dokud nepřijdou na způsob řešení.

V této části se přesuneme ke strategiím, které tvoří základní pilíře matematiky a práce matematika. Kopka (2013) je nazval obecné strategie a zařadil do této skupiny následující strategie: konkretizace a zobecnění, analogie, přeformulování problému, cesta zpět, zavedení pomocného prvku, vypuštění podmínky, opakování určitého postupu. Využití těchto metod řešení již předpokládá řešitelovu orientaci v dané problematice, zkušenosti a vhled do matematických situací. To je také hlavním důvodem, proč jsou tyto strategie využívány žáky a studenty méně než základní strategie. (Kopka, 2013, s. 32–59)

2.2.1 Konkretizace a zobecnění

Konkretizace a zobecnění patří mezi strategie, které se v matematice často používají. Lze říci, že se navzájem doplňují. Pokud řešíme obecný problém, který bývá často zadán například vzorcem, parametrem, obecnou situací, budeme pravděpodobně nejdříve využívat konkretizaci problému. Naopak pokud chceme z konkrétních experimentů a výsledků vyvodit platnost obecného tvrzení, budeme se snažit daný jev zobecnit. (Kopka, 2013, s. 32–35)

V matematické praxi je časté, že vyjdeme z obecného problému, který si nejdříve přiblížíme prostřednictvím specifické situace. Pokud máme již představu o problému a problém nám dává smysl, začneme s dalšími systematickými konkretizacemi, popřípadě s rafinovanými konkretizacemi (konkretizace využívající vhledu do situace), které nám mohou výrazně pomoci v řešení problému. Na závěr jsme pak opět schopni přejít od konkrétních případů k obecnému problému a vyřešit ho. Pro názornost opět ukážeme konkretizaci i zobecnění na příkladech. Nejdříve začneme s konkretizací.

Příklad č. 4

„Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?“ (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 18)

Řešení: Aby bylo možné představit si obchodníkovu situaci, určíme si nejdříve konkrétně původní cenu, například 112 Kč. Obchodník tedy koupil knihu za 16 Kč a prodal ji 42 Kč. Zisk v tomto případě byl 26 Kč, což je 162,5 % $\left(\frac{26}{16} \cdot 100\right)$. Na základě této konkretizace jsme schopni vytvořit i další situace. Protože výsledek vychází ve všech případech stejný[4], tedy 162,5 %, dojdeme k závěru, že výsledný zisk nezávisí na původní ceně knihy, takže můžeme bez újmy na obecnosti přejít k závěru a odpovědět na otázku. Obchodníkův zisk je 162,5 %.

Další příklad bude ilustrovat použití strategie zobecnění.

Příklad č. 5:

„*Víme, že trojice [3, 4, 5] je pythagorejská, což znamená, že platí:* $3^2 + 4^2 = 5^2$. *Nalezněte více pythagorejských trojic.*" (Kopka, 2013, s. 35)

Řešení: Zajisté lze tento problém řešit pouze strategií pokus – omyl, pokud není řečeno, kolik dalších trojic máme nalézt. Časově výhodnější je však převést problém do obecné roviny a hledat všechna nebo alespoň nekonečně mnoho řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ kde } x, y, z \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Při hledání řešení obecné rovnice je vhodné ihned na začátku využít známou rovnost $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, kde $a \in \mathbb{N}$. Problém bude vyřešen, pokud se nám podaří nalézt taková čísla *a*, pro která bude platit, že čísla $2a + 1$ budou čtvercová, tedy

$$2a + 1 = b^2, \text{kde } b \in \mathbb{N}.$$

Pokud z této podmínky vyjádříme, čemu se rovná *a,* a dosadíme tento výraz do obecné rovnice (1), dostaneme následující rovnost:

$$(b^2 + 1)^2 = (b^2 - 1)^2 + (2b)^2.$$

Nyní již stačí jen hodnotám v závorkách přiřadit neznámé *x*, *y, z* a lze generovat nekonečně mnoho pythagorejských trojic, pokud budeme za *b* dosazovat všechna přirozená

[4] Pro korektní řešení by bylo třeba vyzkoušet všechny konkretizace původní ceny, kterých je však nekonečně mnoho, což není možné. Součástí řešení by tedy měl být důkaz, že výše zisku nezávisí na výši původní ceny. Důkaz bychom získali přes algoritmické řešení úlohy jako podíl rozdílu prodejní a pořizovací ceny ku pořizovací ceně, to celé vyjádřeno v procentech. Tak bychom zjistili, že v čitateli i jmenovateli se nachází neznámá původní cena, kterou lze ze zlomku vykrátit. Ze zbylých hodnot lze pak také vyjádřit přesnou hodnotu zisku.

čísla. Dalšími pythagorejskými trojicemi jsou například [6, 8, 10], [17, 15, 8], [26, 24, 10], [37, 35, 12].

2.2.2 Analogie

Nejen v matematice, ale i v běžném životě a jiných vědách předpokládáme, že podobné jevy, vztahy, závislosti, charakteristiky se přenášejí i do jiných struktur, například ze světa zvířat do světa lidí a podobně. Přírodovědci často používají analogie k objasnění dějů a procesů kolem nás, například práci mozku s ukládáním a vybavováním informací připodobňují k práci v archivu a skladu. Heuristická strategie založená na analogii pak vypadá takto: nejdříve najdeme analogickou úlohu k zadanému problému, která se většinou týká analogického objektu, vztahu, vlastnosti atd. Poté tuto úlohu vyřešíme a nalezené řešení aplikujeme na původní problém. Aby byla strategie analogie dobře pochopena, vysvětlíme ji na následujícím příkladu. (Kopka, 2013, s. 39–40; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 11)

Příklad č. 6:

„Marie ujela 423 km a spotřebovala při tom 29,5 l benzinu. Jakou mělo její auto průměrnou spotřebu na 100 km?" (Kopka, 2013, s. 40)

Řešení: Pro některé žáky je řešení této úlohy automatické, protože znají algoritmus (například využití trojčlenky). Jednoduše si tedy do trojčlenky dosadí zadaná čísla a mají výsledek. Pro některé žáky je však počítání s desetinnými čísly noční můrou, a pokud ještě k tomu neznají vhodný algoritmus řešení této úlohy, je pro ně obtížně řešitelná. Právě v tomto případě je velmi vhodné řešit analogickou úlohu, kterou sestavíme pomocí „vlídnějších" čísel. Marie v našem případě ujede pouze 200 km a spotřebuje při tom 16 l benzínu. Nyní je už řešení průhlednější, stačí 16 vydělit dvěma, protože $200 = 2 \cdot 100$. Nalezení odpovědi k původní úloze již není tak složité. Stačí vypočítat následující výraz: $29{,}5 : (423/100) = \frac{29{,}5}{\frac{423}{100}} = \frac{29{,}5 \cdot 100}{423} \doteq 6{,}973\,995\,27 \doteq 7.$[5]

Odpověď na zadanou otázku: Mariino auto mělo spotřebu přibližně 7 l na 100 km.

[5] Spotřeba je podle zvyklostí zaokrouhlena na jedno desetinné místo.

2.2.3 Strategie přeformulování problému

Při použití této strategie, jak její název napovídá, přeformulujeme zadaný problém na nový, který se od původního problému může výrazně lišit. Důvodem pro přeformulování problému je většinou existence snadnějšího řešení přeformulovaného problému, na jehož základě můžeme zadaný problém vyřešit ihned, nebo nám alespoň výrazně napomůže k řešení zadaného problému. Ukažme si tuto strategii na následujícím příkladu.

Příklad č. 7:

„Nechť p je prvočíslo větší než 3. Ukažme, že číslo $p^2 - 1$ *je vždy dělitelné číslem 24."* (Kopka, 2013, s. 43)

Řešení: Jako první krok se nabízí rozložit zadaný výraz na následující součin:

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Nyní se můžeme ptát, jakými čísly jsou dělitelné výrazy $(p-1), p, (p+1)$ tzn., že jsme přeformulovali zadaný problém. Protože p je prvočíslo větší než 3, budou oba zbylé výrazy sudé, tedy dělitelné dvěma. Protože navíc víme, že p je prvočíslo větší než 3, bude jeden ze zbylých výrazů dělitelný čtyřmi. A nakonec si můžeme všimnout, že uvažované výrazy reprezentují tři po sobě jdoucí čísla, tedy že jedno z nich je dělitelné třemi. Uvažované prvočíslo p to být nemůže, protože je to prvočíslo větší než tři, z čehož vyplývá, že jeden ze zbylých výrazů musí být dělitelný třemi. Po vynásobení nalezených dělitelů výrazu $(p-1)(p+1)$ dostaneme $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Z toho vyplývá, že i číslo $p^2 - 1$ je dělitelné číslem 24. Tím se nám podařilo dokázat, že zadaný předpoklad vždy platí.

Přeformulování problému nám v tomto případě výrazně zjednodušilo práci a vedlo rovnou k řešení zadaného problému. Zároveň jsme využili i strategii zavedení pomocného prvku, která bude vysvětlena v podkapitole 2.2.5, když jsme zkoumali též vlastnosti čísla p, jež nebylo součástí přeformulovaného výrazu.

2.2.4 Cesta zpět

Cesta zpět je jednou z nejčastěji užívaných strategií v matematice. V rámci školské matematiky ji můžeme najít například při rozboru konstrukčních úloh v geometrii, kdy předpokládáme, že úloha má řešení a že náčrtek, který jsme vytvořili, reprezentuje jedno z řešení. Dalším příkladem užití této strategie je konstruování důkazu, ve kterém předpokládáme, že to, co máme dokázat, platí. Následně postupujeme od konce k něčemu, co už víme, je obecně známo, či zadáno. Ve stručnosti postupujeme od toho, co chceme dokázat, k tomu, co už víme. Dalším krokem ale musí zkouška, že nás cesta zpět dovedla ke správnému závěru. Demonstrujme tuto strategii a následujícím příkladu.

Příklad č. 8:

„Myslím si číslo. Když přičtu 300 a odečtu 165, dostanu číslo, které je pětkrát větší než číslo 79. Jaké číslo si myslím?" (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 19, překlad)

Řešení: Jednoduchou cestou k nalezení výsledku je jít od poslední informace k první. K nalezení čísla využijeme následující sled výpočtů.

$$5 \cdot 79 = 395;\ 395 + 165 = 560;\ 560 - 300 = 260$$

Odpověď: Myšlené číslo je 260.

2.2.5 Zavedení pomocného prvku

Pomocný prvek se při řešení příkladů ze školské praxe zavádí často v případech, kdy si myslíme, že se tímto krokem přesuneme do jednodušší situace, nebo do situace známé, dříve řešené. Pomocný prvek definujeme stejně jako Novotná, Eisenmann, Přibyl podle Pólyi (1945). Pomocný prvek je objekt, který není součástí zadání, ale který využíváme v řešení s nadějí, že nám pomůže dojít k výsledku jednodušeji. Jako pomocný prvek bývá často označována přímka, bod, kružnice a další geometrické objekty při řešení geometrických problémů. V algebraických postupech se s pomocným prvek setkáme často v podobě substitucí, zavedení nové neznámé, nebo při přičtení stejné hodnoty k oběma stranám rovnice. S využitím pomocného prvku jsme se v tomto textu již setkali například v příkladu č. 6, kde pomocným prvkem je prvočíslo *p*. Nyní uveďme dva příklady užití pomocného prvku nejdříve v jednoduchém algebraickém příkladu, poté v geometrii. (Kopka, 2013, s. 52; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 19)

Příklad č. 9:

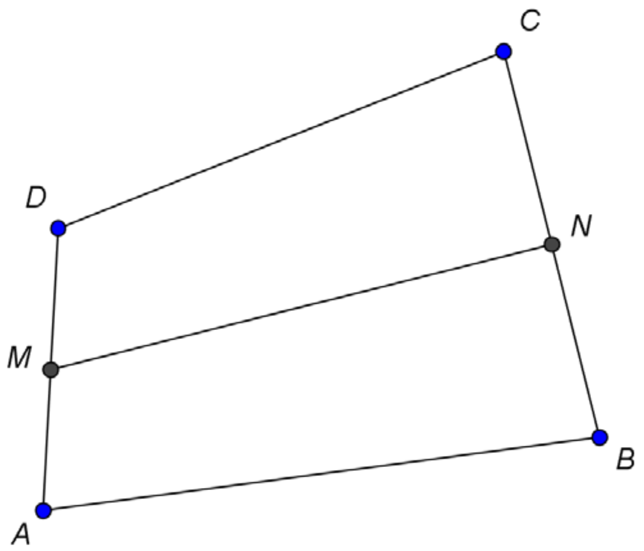
„V oboru reálných čísel R řešte rovnici: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$*"* (Kopka, 2013, s. 52)

Řešení: Výhodným řešením této rovnice je použití substituce $y = x^2$, kdy je nová neznámá *y* tzv. pomocným prvkem. Nyní již lze řešit jednodušší situaci, namísto řešení rovnice čtvrtého řádu řešíme pouze rovnici druhého řádu. Dořešení příkladu již nechám na čtenáři.

Příklad č. 10:

„Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník ABCD (viz obr. 3). Body M, N reprezentují středy příslušných stran AD, BC. Spojte středy stran M a N a zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ *a* $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$. *“* (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16)

Obr. 3: Čtyřúhelník *ABCD*



Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16 (zpracování v GeoGebra, Mátlová, 2016)

Řešení: Jako pomocný prvek si v tomto případě zvolíme úsečku *AC*, která čtyřúhelník rozdělí na dva trojúhelníky (viz obr. 4). Nyní označíme *S* střed *AC*. Spojením bodů *S, M, N* dostaneme trojúhelník *SMN*, jehož dvě strany *MS* a *NS* jsou v tomto pořadí středními příčkami trojúhelníků *ACD* a *ABC* (viz obr. 4). Pro úsečky *MS* a *NS* platí:

$$|MS| = \frac{1}{2}|CD| \text{ a } |NS| = \frac{1}{2}|AB|.$$

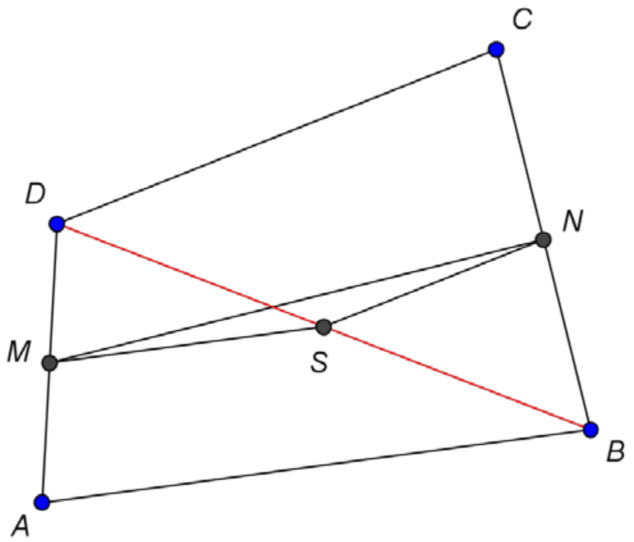
Z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku *SMN* vyplývá vztah:

$$|MN| > |NS| + |MS| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

V případě, že by čtyřúhelník *ABCD* byl lichoběžník, bod S by ležel přímo na úsečce *MN*, takže by žádný trojúhelník *SMN* nevznikl a platilo by, že $|MN| = |MS| + |NS|$.
Nakonec jsme získali vztah mezi zadanými objekty a můžeme odpovědět na zadanou otázku:

$$|MN| \geq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Obr. 4: Pomocný prvek



Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16 (zpracování v GeoGebra, Mátlová, 2016)

2.2.6 Vypuštění podmínek

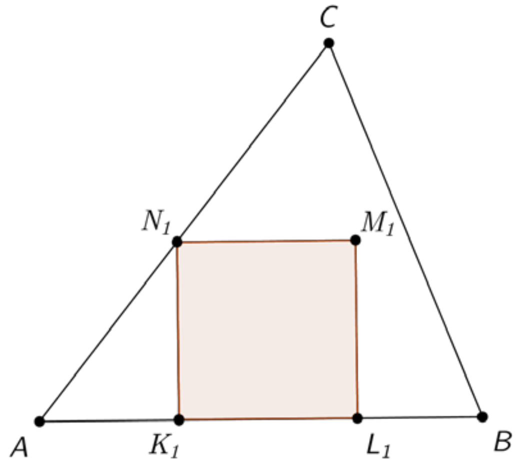
Nejen matematické problémy většinou obsahují řadu podmínek, které není vždy jednoduché ihned splnit, popřípadě zohlednit při řešení již od počátku. Proto se při jejich řešení nabízí postupně dané podmínky vynechat. Tím se zadaná úloha zjednoduší a my ji budeme schopni vyřešit. Nakonec nesmíme zapomenout opět začlenit všechny vynechané podmínky. Rozhodující je u této strategie rozhodnutí, kterou z podmínek vynechat jako první. Tuto strategii si ukážeme na typickém příkladu jejího využití v planimetrii. (Kopka, 2013, s. 55; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 20)

__**Příklad č. 11:**__

„Je dán trojúhelník ABC. Vepište do tohoto trojúhelníku čtverec KLMN tak, aby strana KL ležela na straně AB, vrchol M na straně BC a vrchol N na straně AC.“ (Kopka, 2013, s. 55)

__**Řešení:**__ Je velmi pravděpodobné, že se nám, ani žákům ihned nepodaří takový čtverec sestrojit. Proto se pro začátek pokusíme vynechat jednu z podmínek, například aby vrchol *M* ležel na straně *BC*. Nyní již takový čtverec sestrojit není problém. Označme ho $K_1L_1M_1N_1$ (viz obr. 5).

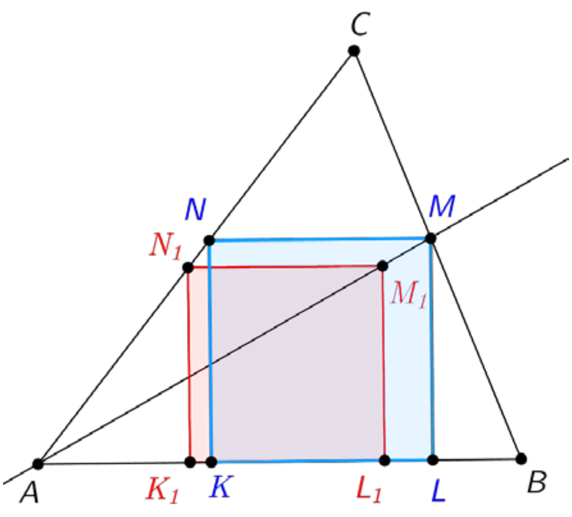
Obr. 5: Čtverec $K_1L_1M_1N_1$



Zdroj: Kopka, 2013, s. 55 (zpracování v GeoGebra, Mátlová, 2016)

Hledaný čtverec *KLMN* je vlastně stejnolehlý se středem stejnolehlosti *A* a koeficientem $k = \frac{|AM|}{|AM_1|}$ se čtvercem $K_1L_1M_1N_1$, proto vynechanou podmínku snadno splníme, když čtverec $K_1L_1M_1N_1$ zobrazíme ve stejnolehlosti s bodem *A*. Tam, kde polopřímka AM_1 protne stranu *BC*, bude ležet bod *M*. Zkonstruovat čtverec *KLMN* již nebude problém (viz obr. 6). Jestliže tuto úlohu řešíme s žáky, kteří ještě neznají stejnolehlost, můžeme příklad dořešit pomocí systematického experimentování (viz 3.1.2).

Obr. 6: Hledaný čtverec *KLMN*



Zdroj: Kopka, 2013, s. 55 (zpracování v GeoGebra, Mátlová, 2016)

2.3 Specifické matematické strategie

Poslední skupinu naší klasifikace heuristických strategií v hodinách matematiky tvoří strategie, které jsou žáky a studenty používané jen ojediněle. Do této skupiny patří ryze matematické strategie, které využívají čistě matematický aparát a které používají výhradně zkušení řešitelé. Z tohoto důvodu vybereme jen ty zajímavější strategie využitelné ve školské praxi, které reprezentujeme na příkladech. Seznámení se zbylými strategiemi a jejich použitím, které je přehledně shrnuto například Kopkou, necháme na čtenáři. (Kopka, 2013, s. 59–77)

Kopka řadí do skupiny specifických heuristických strategií tyto strategie: využití invariantu vzhledem k zobrazení, rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku, metoda nekonečné regrese, parita (sudý, lichý), Dirichletův princip, hledání výjimek a speciálních případů. Podrobně představím pouze rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku a Dirichletův princip. Tyto vybrané strategie jsou podle mé zkušenosti snadnější na vysvětlení i na pochopení žáky, proto by se jejich principy daly jednodušeji aplikovat ve školské praxi.

2.3.1 Rozklad na jednodušší případy

Hlavní ideou této strategie je rozložit obtížně řešitelný problém jako celek na několik jednodušších případů podle výhodného kritéria či podmínky. Jestliže vyřešíme jednotlivé případy, pak celkovým řešením je spojení těchto částečných výsledků. V hodinách matematiky na střední škole se s touto strategií studenti běžně setkávají například při řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou. Řešení v celém oboru reálných čísel je vhodné rozdělit na řešení na jednotlivých disjunktních intervalech vymezených nulovými body uvažované rovnice či nerovnice. V rámci řešení na daném intervalu je již možné řešit pouze jednodušší rovnice či nerovnice bez absolutní hodnoty. Závěrečným krokem je pak sjednocení dílčích řešení z jednotlivých intervalů a vznik celkového řešení. (Kopka, 2013, s. 67)

2.3.2 Užití extrémního prvku

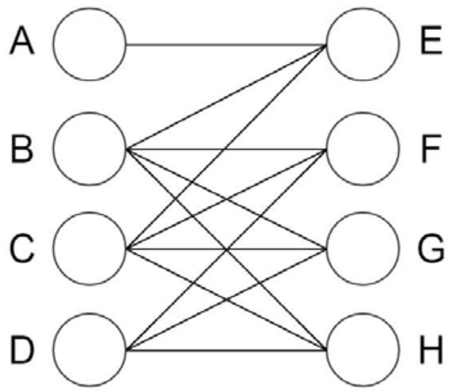
Využití tohoto principu je nevhodnější v případech, kdy v rámci zadaného problému zkoumáme uspořádanou množinu. Právě uspořádání vede často k situacím, kdy je velmi výhodné zabývat se v první řadě jedním z extrémních případů, buď nejmenším prvkem, nebo naopak největším prvkem. Ovšem pouze za předpokladu že takové prvky v množině existují. Zohlednění těchto prvků při řešení nám může problematickou situaci výrazně usnadnit. Ukažme nyní tuto strategii na následujícím příkladu. (Kopka, 2013, s. 69)

Příklad č. 12:

„Na večírku žádný chlapec netancoval se všemi dívkami a každá dívka tancovala aspoň s jedním chlapcem. Dokažte, že existují dvě dvojice CD a C′D′, které spolu tancovaly, a přitom chlapec C netancoval s dívkou D′ a chlapec C′ netancoval s dívkou D.“ (Kopka, 2013, s. 70)

Řešení: K řešení tohoto problému bude zapotřebí použít několik heuristických strategií. V první řadě provedeme konkretizaci problému, abychom získali do problému lepší vhled. Zvolme například 4 páry (4 děvčata a 4 chlapce), které popíšeme pomocí písmen A, B, C, D pro dívky a E, F, G, H pro chlapce. Pro ilustraci situace použijeme následně grafické znázornění (viz obr. 7). Uvažujme například situaci, kdy každý z chlapců tančil právě se třemi dívkami a každá dívka tančila alespoň s jedním chlapcem.

Obr. 7: Grafické znázornění příkladu č. 12



Zdroj: Kopka, 2013, s. 70 (zpracování Mátlová, 2016)

Nyní lze konkrétní řešení popsat maticí, ve které číslem 1 znázorníme situaci, kdy spolu dvojice tančila, a číslem 0, když spolu příslušná dvojice netančila. Výsledná matice má tento tvar:

$$\begin{pmatrix}A & B & C & D\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E\\F\\G\\H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Pokud uvažujeme například situaci, že každý chlapec tančil právě se třemi dívkami, vidíme, že v každém řádku je právě jedna 0. Podmínka, že každá dívka tančila s alespoň jedním chlapcem, zajišťuje, že v každém sloupci bude alespoň jedna 1. Dvojice, které splňují předepsanou vlastnost (viz zadání), jsou v našem konkrétním případě dvojice EA a DF, EA a DG, EA a HD.

Na závěr je nutné opět zobecnit tuto konkrétní maximální situaci. Zápis pomocí matic umožní zobecnění situace pro libovolný počet chlapců (počet řádků) a dívek (počet sloupců) bez újmy na obecnosti. Jestliže víme, že žádný chlapec netancoval se všemi dívkami, bude v každém řádku matice vždy alespoň jedna 0. Podmínka, že každá dívka tančila aspoň s jedním chlapcem, se v matici projeví tak, že v každém sloupci bude alespoň jedna 1. Spojením obou podmínek vznikne matice s prvky 0 nebo 1, ve které budou některé její prvky tvořit „obdélník (resp. čtverec)“, v jehož jedné dvojici protilehlých vrcholů budou pouze prvky stejné hodnoty 1 nebo 0 a druhá dvojice protilehlých vrcholů bude nabývat opačných hodnot oproti té první (viz následující matice a dvě dvojice zvýrazněných prvků).

$$\begin{pmatrix}A' & C & E & A & C'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}B\\D\\F\\B'\\B''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 0 & \cdots & \mathbf{1} & 0\\0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\\mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\0 & \mathbf{0} & \cdots & 1 & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Takovýto „obdélník nebo čtverec“ se bude v matici vyskytovat vždy alespoň jeden, což vede k závěru, že na taneční zábavě bude vždy existovat minimálně jedna kombinace dvojic CD a C´D´, které spolu tančili, ale chlapec C netančil s dívkou D´, a chlapec C´ netančil s dívkou D.

2.3.3 Dirichletův princip

Dirichletův princip (někdy též nazývaný princip holubníku, nebo zásuvkový či hromádkový princip) v sobě skrývá jednoduchou úvahu. Pokud máme *n* zásuvek a *n* + 1

objektů, které rozmisťujeme, je jisté, že v alespoň jedné zásuvce budou minimálně 2 předměty. Matematicky lze tento princip formulovat takto:
„Jestliže je $kn + 1$ *objektů, kde* $k \geq 1$*, rozděleno do n přihrádek, pak alespoň jedna přihrádka obsahuje alespoň* $k + 1$ *objektů."* (Kopka, 2013, s. 75) Ukažme si nyní tento princip na jednoduchém příkladu.

Příklad č. 13:

Ve třídě 9. B je 25 žáků. Dokažte, že jsou v této třídě alespoň 3 žáci, kteří se narodili ve stejném znamení zvěrokruhu.

Řešení: Celkem 25 žáků máme rozdělit podle znamení zvěrokruhu, kterých je celkem 12. Mohou nastat různé varianty tohoto rozdělení od situace, kdy se všichni žáci narodili ve stejném znamení po situaci, kdy se v každém znamení narodili alespoň dva žáci. Uvažujme nejméně vhodnou situaci ze zadaných podmínek, a to že se v každém znamení narodili alespoň dva žáci.

Pokud vydělíme 25 žáků dvanácti znameními, dostaneme 2 zbytek 1. Poslední zbylý žák bude jistě patřit do jedné skupiny, která bude mít nakonec tři členy. Tak jsme dokázali, že alespoň jedno znamení zvěrokruhu bude zastoupeno minimálně třemi žáky z 9. B. (konec převzaté části bakalářské práce viz Mátlová, 2016)

Jak bylo uvedeno výše v této kapitole, heuristické strategie nelze z jejich podstaty všechny vyjmenovat, co úloha, to možnost výskytu originálního řešení. Některé úlohy jsou již tvořené tak, aby k jejich vyřešení byl použit nějaký trik vyžadující výbornou znalost „matematického řemesla". Kromě děl zaměřených na vybrané heuristické strategie jako Kopka (2013), Novotná, Eisenmann, Přibyl (2014) vznikala i souhrnná díla zaměřená obecně na metody řešení úloh, kde se vedle heuristických strategií vyskytují i algoritmické postupy. Autoři jako např. Hecht, Sklenáriková (1992), Herman, Šimša, Kučera (1990) shrnuli do jednoho celku úlohy z různých tematických oblastí jako rovnice, nerovnice, posloupnosti atd. a doplnili je o nejrůznější a nejvhodnější strategie řešení úloh, kde se vedle sebe objevují jak tradiční algoritmická řešení, tak heuristické strategie. Seznámení s dalšími heuristickými strategiemi necháváme na čtenáři.

3 Teorie typů ve vzdělávání

Heuristické strategie řešení úloh školské matematiky kladou u žáků a studentů velký důraz na objevování, tvůrčí myšlení a motivaci úlohu vyřešit, i když přímou cestu neznají. V hodinách matematiky můžeme pozorovat žáky, kteří takové nestandardní úlohy vyhledávají a pro které jsou tyto úlohy výzvou k vymýšlení originálních řešení. A naopak lze zaznamenat, že některým žákům je tato část matematiky zcela cizí a nevidí v ní smysl. Proč by měli vymýšlet jiná originální řešení, když si ve většině případů poradí s nějakým algoritmem jako například rovnicemi?

Cílem této kapitoly je objasnit, jaké jsou vzdělávací potřeby různých typů žáků a jak jim heuristické strategie co nejefektněji přiblížit. Řešení nestandardních aplikačních úloh a problémů je důležitou součástí výuky matematiky na základních a středních školách. Rámcový vzdělávacího program základního vzdělávání (RVP ZV) přímo obsahuje oddíl s tímto názvem a součástí definovaných očekávaných výstupů je i nalézání různých řešení předkládaných a zkoumaných situací. To znamená, že s řešením nestandardních úloh mají mít zkušenosti všichni žáci, nejen ti, které to baví a kteří se s touhou po výzvách narodili. Více o problematice RVP je uvedeno v kapitole 4. (RVP ZV, 2017, s. 37)

Každý učitel si je vědom, že žáci jsou různí, různě přemýšlejí, různě jednají, různě vnímají předkládaná fakta a učivo obecně, mají různý zdroj motivace, preferují různé předměty – někoho baví více sport, jiného zase fyzika. Různý je i přístup žáků k matematice samotné. Někdo se ji snaží zvládnout celou pamětí, potřebuje přesně sepsaný postup řešení, který se pak naučí zpaměti, někdo v ní hledá zajímavá zákoutí a překvapivá řešení. I když je obecně známé, že jsou lidé různí, jsou v oblasti lidských aktivit obory, kde se s touto rozdílností počítá méně. Mezi takové obory patří podle Šteffla (2015a) často i škola a výchova dětí. V samotné náplni jednotlivých vyučovacích hodin se výrazně odráží osobnost učitele, co se při učení osvědčilo jemu samotnému, to se často snaží zprostředkovat i svým žákům. Jeho výuka však nesklízí úspěch u všech žáků, pouze u těch, kteří mají stejný nebo podobný typ osobnosti.

Potřeba rozdělení lidí do určitých typů je stará jako lidstvo samo. Abychom se dokázali orientovat ve vnějším světě a v nepřeberném množství nových informací, pomáhá nám náš mozek sdružovat podobné jevy do skupin a generalizovat je. Stejně tak automaticky přistupujeme k neznámým lidem, když se s nimi seznamujeme. Snažíme se je připodobnit podle určitých znaků, rysů a chování k nějaké osobě, kterou už známe lépe. Toto „škatulkování“ založené na nahodilém pozorování druhých osob může být však často matoucí, vnější projevy chování jednoho člověka nemusejí odpovídat jeho skutečným vlastnostem a typu osobnosti. Proto se tato problematika stala součástí četných výzkumů, které se pokusily dát této oblasti systém a přehlednost.

3.1 Historie typologie osobnosti

„První typologie osobnosti je připisována řeckému lékaři Galénovi z Pergamu. Za jejího duchovního praotce je ovšem pokládán slavný Hippokratés. Ten rozlišoval čtyři temperamenty v závislosti na převaze základních tělních tekutin. Převaha životodárné krve vede k temperamentu sangvinickému*, vazký hlen produkuje letoru* flegmatickou*, žluč je odpovědná za povahu* cholerickou *a tzv. černá žluč působí, že po světě chodí* melancholici.*“* (Čakrt, 1996, s. 11)

Sangvinici jsou již od dob starověkého Řecka popisováni jako čilí, dobrosrdeční, optimističtí, společenští. Flegmatik je označován jako člověk, který je klidný a málokdo nebo co ho z tohoto klidu vyvede. Cholerik je podle Galéna vzteklý, snadno se rozčílí, výbušný. Melancholik má často tendenci k lítosti a splínu, je přecitlivělý, pesimista, obtížně se přizpůsobuje. (Čakrt, 1996, s. 11)

I když je tato teorie z dnešního pohledu překonaná a kritizovaná, je zajímavé, že dělení lidí na čtyři skupiny se zachovalo i v dalších kategorizacích. Z dnešního pohledu je ale nepřípustné, aby byl člověk zařazen pouze do jednoho typu podle přítomnosti či nepřítomnosti některých rysů v chování. Ve starověkém Řecku si nepřipouštěli existenci smíšených typů, což je dnes naprosto legitimní. Dnešní typologové totiž chápou osobnost jako jedinečnou kombinaci preferencí, které jsou vrozené. Během života se učíme jednat i způsobem, který nám není přirozený, pro vnější pozorovatele to může i vypadat, že takové vlastnosti jsou nám vlastní, ale na druhou stranu nás takové aktivity stojí mnohem více energie než ty, s jejichž preferencemi jsme se narodili.

Mezi další slavné typologie osobnosti patří Adickesovo rozdělení lidí podle 4 světových názorů nebo Kretschmerovo dělení lidí podle jejich tělesné stavby (astenik, pyknik, atletik, displastik). Významnou osobností, která se zasloužila o jiný pohled na typologii osobnosti, byl psycholog a psychiatr Carl Gustav Jung. (Čakrt, 1996, s. 14)

Jung byl žákem zakladatele psychoanalýzy Sigmunda Freuda. Ve 20. letech 20. století se ale jejich bádání rozešla jinými směry. Freud stále trval na tom, že *„většina lidského snažení vychází z neuspokojených a potlačených sexuálních pudů, neúprosné tělesné touhy po slasti.“* (Čakrt, 2017, s. 27) Kdežto Jung trval na tom, že *„lidská osobnost v sobě zahrnuje* *ještě jiné principy, nejenom touhu po rozkoši a vztazích, ale také po moci a ovládání, stejně jako po umění se adaptovat a vyrovnat se se svým okolím.“* (Čakrt, 2017, s. 27)

Na základě Jungovy celoživotní práce vznikla dodnes používaná teorie typologie osobnosti, která je založená na tom, že na svět přicházíme se čtyřmi základními psychickými dispozicemi, jejichž kombinace pak ovlivňuje, jak se chováme a jak jednáme. Jung (1921) dále tvrdí, že lidé se stejnou kombinací dispozic neboli „psychologického typu“ jsou mezi sebou rozdílní a jedineční, i když mají mnoho společných rysů. Miková (2018) to přirovnává k různým druhům květin, ze semínka macešky vyroste maceška, nikoliv slunečnice, ale vlivem okolních podmínek je každá maceška jinak vysoká, má jinou barvu, jinak bohaté listy, jinak intenzivní vůni apod. (Čakrt, 2017, Miková, 2018)

Kromě Jungovy typologie vznikly v té době další práce zaměřené na rozdělení lidí do různých skupin s podobnými rysy. Například Alfred Adler podle Čakrta (1996) si všímal čtyř mylných cílů, o které lidé usilují, když jsou v nerovnováze. Mezi tyto cíle patří uznání, odplata, moc a služba. Spranger podle Čakrta (1996) zase přišel s rozdělením lidí podle jejich hodnot: religiózní (sakrální), teoretické, ekonomické a artistické (umělecké). Po této vlně různých typologií navazujících na Hippokratovy temperamenty, která vrcholila ve 20. letech minulého století, přišlo podle Čakrta (1996) období útlumu až pozapomnění.

Další vlnu rozvoje typologií osobnosti rozdmýchaly až v 50. letech americké psycholožky Isabela Myers a její matka Katheryn Cook Briggs. Těm se podařilo dostat typologie osobnosti do povědomí široké veřejnosti, když na základě Jungovy teorie vytvořily praktický nástroj známý později jako Myers-Briggs Type Indicator v překladu indikátor osobnostních typů podle Myersové a Briggsové, v dnešní době známý především ve zkratce MBTI. (Čakrt, 1996, s. 15)

V současnosti, především v personalistice, se typologie osobnosti používají především k sebepoznání, k formulování životní vize a výběru povolání. To, jací jsme, totiž velmi ovlivňuje vnímání reality kolem nás. Cílem typologií je nyní spíše objasnit lidem, že je v pořádku, že jsme každý jiný, a že žádný typ není lepší nebo horší než druhý. K odhalení osobnostního typu se používají různé testy temperamentu, MBTI nebo teorie Big Five, Cattelův 16 faktorový model a další.

Tato práce bude zaměřena na diagnostiku osobnosti založenou na Jungově teorii, poznatcích MBTI, a především na práci Šárky Mikové a její Teorii typů (2018). Důvodem pro výběr tohoto nástroje je především velká teoretická základna s množstvím článků a výzkumů. Dalším důvodem je aplikace této teorie do mnoha příbuzných oborů psychologie jako je komunikace s pacienty ve zdravotnictví (Čakrt, 2017) a pro nás důležitější oblast výchovy a vzdělávání (Miková, 2018).

Jsem si ale také vědoma všech rizik spojených s touto typologií, jako například „škatulkování" žáků na základě několika výrazných projevů jejich chování, které v podstatě nemusí vůbec korespondovat s typem jejich osobnosti. Stále budu brát na vědomí, že vlastní typ může určit pouze osoba sama sobě. Sami nejlépe víme, které činnosti jsou pro nás příjemnější a jednodušší než jiné.

Pro tuto práci bude stěžejní fakt, že učitel má ve třídě různé žáky a těmto rozdílným typům osobnosti je třeba již předem připravit výuku, při které se budou efektivně učit a využívat jak své silné, tak slabé stránky. Dále je také důležité, aby učitel poznal svůj typ osobnosti a věděl, jaký typ výuky je jemu přirozený, ale nemusí být vhodný pro všechny typy žáků ve třídě. Jestliže máme 16 základních typů osobnosti podle MBTI, je velmi pravděpodobné, že ve třídě budou i žáci, kteří mají typ nejvíce vzdálený typu učitele. Již tato skutečnost přináší pro práci učitele velkou výzvu, protože jeho pohled na svět je přirozeně zcela odlišný pohledu jeho žáka. Je tedy na učiteli, aby se co nejpodrobněji seznámil s vrozeným nastavením mozku svých žáků a studentů.

3.2 Typologie MBTI

Typologie MBTI je založena na práci významného švýcarského psychiatra a psychologa C. G. Junga (1921) a jeho pojmu psychologický typ, což je vrozená tendence používat psychiku specifickým způsobem. Jungovy objevy jsou založeny na dlouholetém pozorování jeho klientů, u kterých si všiml, že rozdíly v nastavení jejich mozku jsou nad rámec běžných odlišností a že takových nastavení existuje omezený počet. (Crkalová, Riethof, 2012, s. 33)

Jung jako první přišel s myšlenkou, že v lidské psychice probíhají dva základní psychické procesy:

1. Přijímání informací (vnímání).
2. Zpracování těchto informací a utváření závěrů (rozhodování).

Každý z těchto procesů pak může podle Junga (1921) nabývat dvou protikladných podob. Lidé přijímají informace buď pomocí tzv. smyslového vnímání, nebo prostřednictvím intuice. Podobně je to i s rozhodováním, které může být učiněno na základě myšlení nebo cítění. (Crkalová, Riethof, 2012, s. 33)

Dále Jung vypozoroval, že lidé se výrazně liší ve způsobu obnovy energie, buď k doplnění energie dochází ve vnějším světě prostřednictvím kontaktu s dalšími lidmi, za přítomnosti zážitků, aktivit, nebo se lidé naopak zaměřují na vnitřní svět a přirozeně raději tráví čas přemýšlením, reflexí, rozjímání. Tyto dvě protikladné preference nazval Jung jako extraverze (zaměření na vnější svět) a introverze (zaměření na vnitřní svět).

Čtvrtá dimenze a název MBTI přišly až s badatelskou prací Američanek Briggs a Myers o dvě desetiletí později. Jung sice tuto dimenzi přesně nepopsal, ale je v jeho díle obsažena implicitně. Nakonec však i Jung v korespondenci s Američankami uznal, že jím založená typologie by měla obsahovat celkem čtyři dimenze. Od té doby se k příjmu a zpracování informací a způsobu čerpání energie přidává ještě způsob, jakým toužíme uspořádat svět kolem nás a v jakém světě chceme žít. Jedním pólem je touha po uspořádaném světě nazvaná usuzování, resp. rozhodování (v originále Junging) a protipólem je improvizace, otevřená rozhodnutí apod. nazvané souhrnně vnímání (v originále Perceiving). (Crkalová, Riethof, 2012, s. 33-35)

Jungovská a nástupnická MBTI typologie pracuje celkem se 4 dimenzemi osobnosti. Každá dimenze má 2 krajní meze a někde mezi těmito krajnostmi se nachází individuální preference každého jednotlivce. Neexistují téměř případy, že by byl někdo ze 100 % introvert a z 0 % extrovert, realita je někde mezi. Všechny krajní hodnoty lze označit jedním písmenem podle jejich anglického názvu. Z těchto 8 písmen rozdělených do 4 dimenzí lze pak jednoduchým kombinatorickým výpočtem dospět k celkovému počtu typů osobnosti, kterých je 16. Přehledně tyto poznatky zobrazují tab. 3 a 4.

Tab. 3: Dimenze osobnostní typologie

Kde získáváme energii?	
Extraverze (E) – ve vnějším světě	**Introverze (I)** – ve vnitřním světě
Extraversion	**I**ntroversion
Jak získáváme informace?	
Smysly (S) - konkrétně	**iNtuicí (N)** - abstraktně
Sensing	i**N**tuition
Jak se rozhodujeme?	
Myšlení (T) - logicky	**Cítění (F)** - hodnotově
Thinking	**F**eeling
Jak si organizujeme život?	
Usuzování, resp. Rozhodování (J)	**Vnímání (P)**
Judging	**P**erceiving

Zdroj: Crkalová, Riethof, 2012, s. 35, upraveno

Tab. 4: 16 osobnostních typů podle MBTI

ISTJ	**ISFJ**	**INFJ**	**INTJ**
ISTP	**ISFP**	**INFP**	**INTP**
ESTP	**ESFP**	**ENFP**	**ENTP**
ESTJ	**ESFJ**	**ENFJ**	**ENTJ**

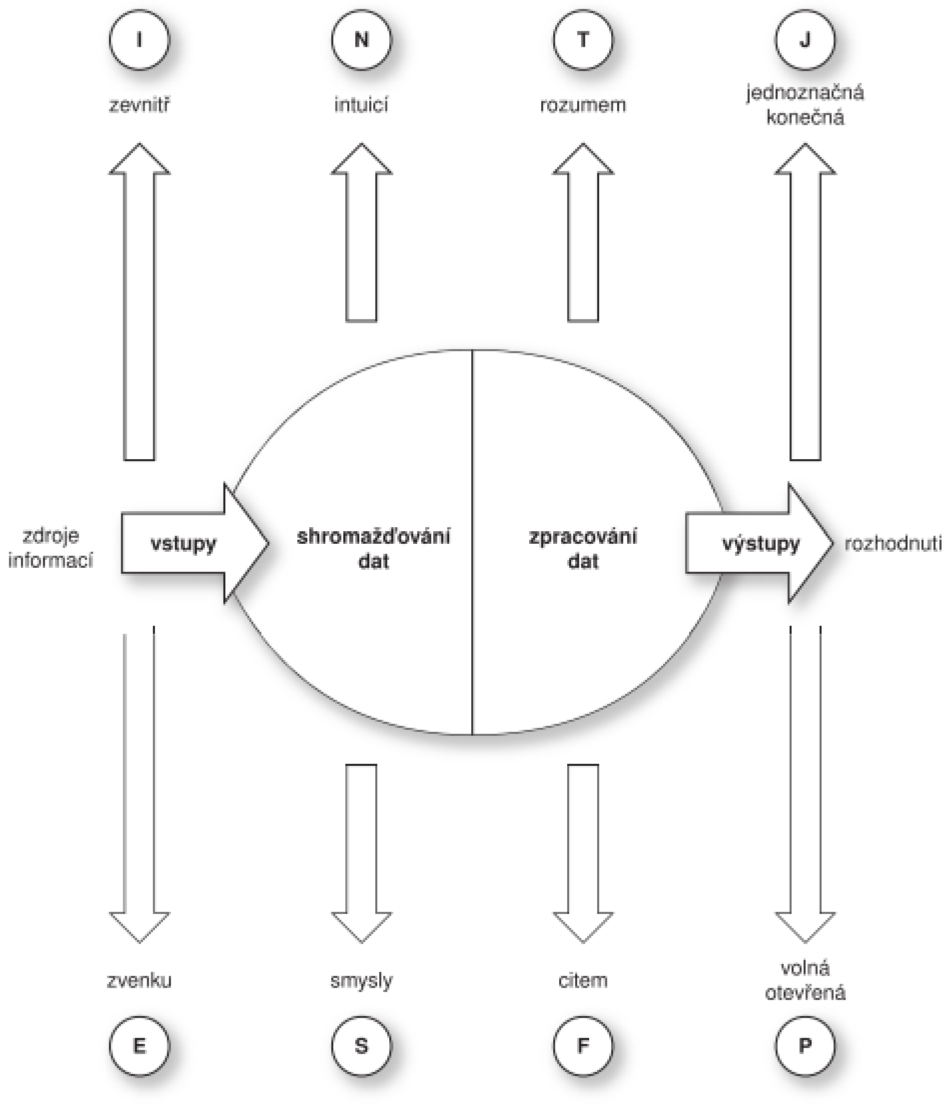
Zdroj: Crkalová, Riethof, 2012, s. 36

Vzhledem k tomu, že Jungova teorie je založena na tzv. preferencích, pokládáme na tomto místě za důležité objasnit tento termín, i když Jung sám ho nikdy nedefinoval. Zřejmě předpokládal, že to není třeba. Preference jsou obecně jakousi předností, prioritou, kterou dáváme jistým činnostem, způsobu řešení problémů v každodenních situacích. Velmi často se v odborné literatuře zaměřené na MBTI (Čakrt, 2017, 1996, Crkalová, Riethof, 2012, Miková, 2018) objasňují preference na příkladu pravo/levorukosti. Pokud jsme praváci, nejčastěji píšeme preferovanou pravou rukou. Pokud ji máme ale třeba zlomenou, jsme schopni psát i levou rukou. Je to ale o poznání těžší, musíme se na to více soustředit, a i tak nedosahujeme takové rychlosti psaní a kvality krasopisu jako rukou preferovanou. Co je dále analogické s typologií osobnosti, při narození nebo později jako malé děti jsme si nevybrali, zda chceme být praváci nebo leváci.

Další analogií by mohlo být například barvení vlasů. Přirozenou barvu rozhodně neovlivníme a když chceme mít místo hnědé blonďatou, stojí nás to hodně úsilí a často i peněz, aby taková barva vlasů vypadala, že je naše přirozená. Různé odstíny barvy vlasů také analogicky poukazují na to, že i když máme nějaké základní barvy vlasů jako blond, hnědá, černá, rezavá, má každý člověk svůj originální odstín, který je mixem těchto barev. Obdobně je to i v typologii osobnosti, kdy osobnost každého jedince obsahuje něco od každého protipólu. Je tedy zcela v pořádku, že například v 50,1 % situací rozhodujete myšlením a ve 49,9 % cítěním. V takovémto případě by byl člověk mixem typů F a T a týkala by se ho charakteristika dvou ze 16 typů osobnosti v závislosti na preferencích ve zbylých 3 rovinách. Čakrt (1996) tyto smíšené typy označuje písmenem X, například INXJ (smíchání INTJ a INFJ).

Než se přesuneme k objasnění jednotlivých protipólů všech čtyř dimenzí, uvedeme na tomto místě ještě jednu interpretaci typologie MBTI, kterou používá ve svých dílech Plamínek (2013). Čtyři dimenze osobnosti přenáší do procesu řešení úloh (nejen matematických) a schematicky tento proces zakresluje na obr. 8.

Obr. 8: Schéma řešení úloh podle Plamínka (2013)



Zdroj: Plamínek, 2013, s. 43

S rozvojem vědy, a především moderních technologií bylo možné dokázat Jungovo tvrzení, že *„osobnostní rozdíly jsou výsledkem seskupení funkčních preferencí."* (Čakrt, 2017, s. 31) K potvrzení této hypotézy již nebylo třeba využít jen psychologické důkazy, ale potvrdila to i tzv. tvrdá data. Čakrt (2017, s. 31-32) konkrétně uvádí: *„Soudobá technika hlubinné analýzy a funkčního zobrazování mozku metodami magnetické rezonance umožňuje vidět, jak jednotlivé jít před mnoha desítkami let popsané funkce fungují i na neurologické úrovni a jak užití jedné určité funkce má v mozku zřetelné a měřitelné projevy.*

Mozek je soustředěním nervových buněk, neuronů, propojených synapsemi, umožňujícími jim mezi sebou komunikovat. Když začneme používat některou z funkcí více než jinou, například „napneme" uši nebo začneme přísně logicky uvažovat, začnou se buňky v příslušné části mozku navzájem propojovat, spolupracovat a přenášet signály. Čím častěji danou funkci aktivujeme, tím pevnější a trvalejší vzniknou neuronová spojení. Komunikace mezi nimi je pak rychlejší a bohatší. Časem je pak pro nás stále snadnější používat naše oblíbené funkce, protože „architektura" příslušné části mozku se odpovídajícím způsobem vyvine k větší dokonalosti. Vznikne jakýsi čip s velkou mírou integrace, který do jisté míry začíná žít svým vlastním životem. V něm se odehrává většina našeho mentálního života, naše vjemy, nápady, obrazy či představy související s našimi jedinečnými preferencemi (...). Mozek si do těchto struktur navykne „delegovat" stále více úloh, zejména nových, spletitých a náročných." Preference určitého typu jednání tedy vede ke konkrétnímu nastavení mozku, které mají lidé stejného typu společné.

3.2.1 Extraverze a introverze

Dimenze získávání energie přináší dva pojmy, které se používají i v běžném životě a dalo by se říci, že v hovorové řeči zdomácněly. Každý má tušení, jak se chová extrovert a jak introvert. Riziko těchto rozšířených pojmů je ale v jejich definici, ne vždy se totiž mluví o introvertovi a extrovertovi v Jungově pojetí. Proto budu i v tomto textu rozlišovat pojmy extrovert a extravert. Extrovert je hovorový pojem, který nemá s Jungovou teorií nic společného, kdežto termíny extravert a extraverze vycházejí z Jungovy teorie. Pro teorii MBTI není směrodatné, jak se lidé chovají, prezentují navenek, zda jsou schopni přednášet před sálem plným posluchačů, nebo zda to jsou tzv. tiché myšky, které se děsí jen pomyšlení na veřejný přednes referátu. Důležitým předpokladem je, že se introvert dokáže naučit chování extraverta a naopak. V této dimenzi totiž v pravém slova smyslu nejde o specifické chování, jak vystupujeme na venek, ale o preferenci, jak čerpáme energii a také naopak, co nám ji výrazně odčerpává. Je to orientace, kterou lidé vyrovnávají svoji psychickou únavu.

Čakrt (2017) odlišuje oba póly čerpání energie pomocí šesti komponent, které jsou často zastoupeny u lidí dané část spektra. Jak už ale bylo řečeno dříve, ani „čistokrevný" extravert nemusí splňovat charakteristiku všech 6 bodů. Extravert (E) má podle Čakrta (2017, s. 38) tyto charakteristiky: iniciativnost, expresivnost, vstřícnost, participativnost, energii a nadšení, společenskost. Naopak u introverta (I) spatřuje typicky: reaktivnost, rezervovanost, intimnost, uvážlivost, poklid, nezávislost.

O charakteristikách extravertů a introvertů bylo napsáno nespočet děl po celém světě, takže není možné, a není to ani naším cílem, jich zde více vyjmenovat. Vzhledem k tomu, že se tato práce zaměřuje na oblast vzdělávání, použijeme ještě charakteristiku podle Mikové, Stang (2015, s. 18-21), které se touto problematikou intenzivně zabývají. Extraverti jsou podle nich především ti, kteří potřebují většinou bezprostředně sdělovat ostatním, o čem přemýšlí, co zažili, myslí tzv. nahlas. Neustále ostatním skáčou do řeči, nedokáží udržet myšlenku, která se dere ven. Vypadají, že neumějí naslouchat, ačkoliv opak je pravdou, protože rádi pracují ve skupině a jsou obohacováni o názory ostatních, dostávají okamžitou zpětnou vazbu. Iniciují často společenské interakce, bez zábran sdělují své názory, ukazují emoce. Mají mnoho známých a přátel, připojují se k různým skupinám. Potřebují ruch, pohyb, změny, nesetrvávat na jednom místě.

Naopak introverti potřebují k dobití svých „baterek" čas strávený přemýšlením o samotě. Raději se zabývají osamělejšími činnostmi, reflexí zážitků, přehrávají si v hlavě rozhovory, situace, a tím tyto informace zpracovávají. Potřebují čas na promyšlení. Jejich odpovědi jsou stručnější. Pokud má introvert dostatek času na odpověď, může si ji v hlavě tak podrobně nachystat až do posledních detailů, že je pevně přesvědčen, že už odpověděl. Obecně preferují spíše individuální práci před skupinovou. V komunikaci dávají prostor druhým, spíše naslouchají. V mezilidských vztazích se zaměřují na důvěrnost, to znamená, že osobní věci sdělují jen pár vybraným lidem a očekávají, že tyto věci nebudou dále šířit. Oproti extravertům mají méně přátel, zato je jejich přátelství pevnější a dlouhodobější. (Miková, Stang, 2015, s. 18-21)

3.2.2 Smysly a intuice

Další dimenze popisuje, jaký typ informací je pro nás skutečně důležitý a nosný, co vlastně bereme na vědomí. Smysly (S) a iNtuice (N) tvoří protiklad práce s informacemi, buď totiž mozek zaměstnávají více konkrétní fakta (smyslové vnímání), nebo tzv. vhledy, interpretace informací a jejich souvislosti (intuice). U této dimenze jsou rozdíly mezi lidmi zvenku ještě hůře pozorovatelné než u čerpání energie. I když budeme opět pojmenovávat příklady projevů smyslů a intuice na vnějším chování lidí, je důležité si uvědomit, že jen sami o sobě jsme schopni říci, zda preferujeme smysly nebo intuici.

Podle Mikové a Stang (2015, s. 24) jsou smyslově orientovaní lidé silně ukotveni na realitu teď a tady. Zajímají je věci běžné, skutečné, využívají je k původnímu účelu popsanému v návodu. Jsou zaměřeni především na současnost, budoucnost je pro ně velmi nejistá, bez kontur. Ve vyjadřování používají přesné termíny, nehledají skryté významy, bývají doslovní, precizní v pozorování detailů. Postupují od jednotlivosti k celku, rádi se učí od konkrétního k abstraktnímu. Ocení, když vidí spojitost s realitou, když jsou výsledky jejich práce vidět. Vyhovují jim strukturovaná a jasně vymezená zadání úloh, v otevřených úkolech se těžko orientují. Při řešení se opírají o osvědčené postupy, nemají rádi úlohy, u kterých nevědí, jak aplikovat dosavadní dovednosti. Jsou často pohlceni krokem, který právě řeší, že jim uniká smysl úkolu jako celku. V partnerských vztazích se zaměřují na praktické, účelné a užitečné věci.

Intuitivně orientovaní lidé se naopak zaměřují na možnosti, významy a interpretace, které jsou v informacích obsaženy. K porozumění přicházejí skrze proniknutí do podstaty věci než praktickou zkušeností. Jejich komunikace je plná metafor, připodobnění, slovních hříček. V zájmu jejich pozornosti je budoucnost, to nové, bezprecedentní. Fakta sama o sobě pro ně nic neznamenají, takže i do paměti si je ukládají s nějakým významem, okolností, kterou si k tomu připojili. Když si je pak vybavují, zjeví se jim právě ten dojem, jaký z dané věci měli, nikoliv konkrétní zkušenost, informace. Výhodou tohoto způsobu práce s informacemi je, že intuitivně zaměření lidé si pomocí mentálních spojek, můstků, dojmů lehce osvojují předkládané pojmy a teorie, aniž by museli mít oporu v realitě. Nevadí jim, že daná věc, informace nemá ihned využití, lehce se smíří s tím, že ji využijí někdy v budoucnosti, kterou si už dávno vykreslují. Při výkladu ocení, když dostanou nejprve obrázek o celé situaci, jaký je cíl dané aktivity, jaké kroky bude obsahovat a jak ty kroky pomohou naplňovat vytyčené cíle. (Miková, Stang, 2015, s. 25-26)

Pro účely této práce je právě tato dimenze osobnosti velmi důležitá, protože rozlišuje postoje lidí k řešení úkolů. Miková, Stang (2015, str. 26) konkrétně uvádějí: *„Na rozdíl od smyslově orientovaných lidí, kteří preferují činnosti, při nichž mohou použít osvědčené postupy, intuitivně založení vítají úkoly nové, neobvyklé, tzv. výzvy. Rádi odkrývají nové možnosti, formulují hypotézy, tvoří koncepce či teorie, pracují se symboly. Potřebují prostor* *pro vlastní nápady a tvořivost; zadání úkolů, které mají zvládat, by tedy mělo být dostatečně široké, aby sami mohli zvolit způsob jejich řešení. Nevyhýbají se spletitým otázkám, zvažují varianty. Přestože problém řeší zdánlivě chaoticky, pomocí rychlého vhledu a spíše ve skocích, na první pohled bez jasné posloupnosti, jejich postupy nepostrádají vnitřní propojení a logiku – mezi jednotlivými jevy a kroky hledají souvislosti a významy tak, aby zapadaly do smysluplného celku. Někdy jsou však tak silně zaujati možnostmi, které zadání obsahuje, že řešení, jež navrhnou, prakticky nelze uplatnit.“*

3.2.3 Myšlení a cítění

Třetí dimenzí je v MBTI dimenze zpracování dat, na jejímž základě utváříme naše rozhodnutí, závěry řešených situací a problémů. Naše rozhodování je založeno na výběru z možných variant. Pokud dáváme větší váhu těm možnostem, které jsou přísně objektivní s neosobními fakty, preferujeme myšlení (T). Jestliže naopak dáváme větší váhu osobním záležitostem a vztahům, dáváme přednost cítění (F). Neznamená to však, že by lidé s převahou cítění rozhodovali ve víru emocí a zcela jimi pohlceni. Rozhodování s převahou cítění je stejně jako to s převahou myšlení racionální. Často tato dimenze naráží na tzv. mužskou a ženskou roli, tedy že muži jsou ti odosobnění od řešených problémů, tvrdí, neústupní a že ženy by měly být duší rodiny, společnosti, organizace díky jejich citu pro harmonii ve vztazích, jemnějšímu jednání i podávání zpětné vazby. (Miková, Stang, 2015, 28)

„Proces rozhodování u lidí, kteří preferují myšlení, probíhá tak, že se na věc podívají jakoby bez osobní angažovanosti a logicky ji zhodnotí, zváží všechna pro a proti i možné důsledky volby a prozkoumají jednotlivé varianty. Za nejlepší zvolí logicky správné a zdůvodnitelné řešení, které vyhovuje stanoveným pravidlům a zásadám. Nejdůležitější je pro ně nestrannost.“ (Miková, Stang, 2015, s. 30) Lidé s převahou myšlení jsou velmi obratnými v logické argumentaci, ale neregistrují neverbální projevy komunikačního partnera, proto mohou působit jako tvrdí, neohleduplní k citům druhých. Jsou hrdí na svoji logičnost, ale těžce se smiřují s kritikou a s tím, že někdo odhalil nějaké jejich nedokonalosti.

Naopak lidé, kteří jsou zaměřeni na cítění, jsou v procesu rozhodování osobně angažovaní. *„Nejlepší řešení je pro ně takové, které vyhovuje co nejširšímu okruhu lidí. Může se proto někdy stát, že hledají výjimky, jež by mohly zmírnit tvrdost domluvených pravidel.“* (Miková, Stang, 2015, s. 31) Jsou velmi vnímaví vůči neverbálním signálům, empatičtí vůči komunikačním partnerům, citliví vůči emoční nepohodě, nesnášejí nezájem, neosobní zacházení, agresivitu. Při poskytování zpětné vazby raději chválí, než říkají negativní věci. Kritiku se snaží zaobalit tak, aby nezraňovala, což může vést k zamlženosti jádra sdělení. Stejně tak to mají i s konflikty, pokud mohou, vyhnou se jim, případně jim předcházejí pochopením názorů druhé strany. (Miková, Stang, 2015, s. 31)

3.2.4 Usuzování a vnímání

Poslední dimenze, kterou na základě svých zkušeností přidaly Američanky Briggs a Myers, rozlišuje, jak přistupujeme k vnějšímu světu, zda máme tendenci svými rozhodnutími věci ukončovat (preference usuzování J) nebo nechávat otevřené, improvizovat, přizpůsobovat se aktuálnímu dění (preference vnímání P). Zkratka J jako by sama o sobě říkala, že lidi s převahou usuzování budou toužit mít ve všech oblastech splněno, tzv. odfajfkováno, stejně jak se J silně podobá symbolu pro hotovo. Tito lidé tíhnou k organizování a vytváření strukturovaného prostředí, rádi plánují a vyhovuje jim mít věci na svém místě. Naopak lidé s převahou vnímání lze charakterizovat jejich vyčkáváním, jak se věci vyvinou, jejich pružností, flexibilitou, bezprostředností.

Lidé s preferencí usuzování mají obrovskou touhu po ukončenosti. Svá rozhodnutí neodkládají, i když vědí, že budou muset situaci ještě přehodnotit. *„Zaměřují se na výsledek, své záležitosti chtějí co nejrychleji uzavřít, vyřídit a úkol splnit. Nejprve rozhodnou o postupu, který použijí, a připraví si plán, jímž se budou řídit. V průběhu činnosti se raději soustředí na jednu věc, které se důkladně věnují. Uchovávají si stále přehled o všem, co se děje, vědí, jak jsou v řešení problémů daleko a kolik ještě zbývá udělat. Než přistoupí k další fázi úkolu, rádi dokončí, co začali. Sepisují si seznamy toho, co je třeba vykonat nebo zařídit. Stává se dokonce, že pokud udělají něco, co neuvedli v seznamu, tuto činnost si do něho zpětně dopíší, aby si její splnění mohli „odfajfkovat“*. (Miková, Stang, 2015, s. 33)

Naopak lidé se silným vnímáním se místo na výsledek zaměřují na proces s heslem „I cesta je cíl.“ Často čekají, až nasbírají co nejvíce informací o dané věci a věří, že nejlepší řešení přinese sám život. *„Jsou zaujati vlastní činností, není pro ně důležité dospět do cíle. Nevěnují se dlouhým přípravám, do úkolu skočí rovnýma nohama. V průběhu aktivit jsou velmi vnímaví k dalším podnětům, které dokážou při řešení svého úkolu dobře využít.“* (Miková, Stang, 2015, s. 35) Jsou to lidé, pro které jsou termíny jen orientační, vždy se může objevit něco atraktivnějšího, co pohltí jejich pozornost. Jsou to často studenti, kteří vytváří prezentace noc před výstupem, jsou schopni vydat velké množství energie v krátkém čase a tento způsob jim velmi vyhovuje. Stejně tak mohou mít z vnějšího pohledu spoustu rozpracovaných projektů a v nich chaos, což vede k iluzi nepořádku. Pokud bychom jim však uklidili například jejich pracovní místo, byli by tím velmi překvapeni, protože oni v tom chaosu měli systém. Za všech okolností se potřebují vyhnout rutině.

3.3 Dynamika osobnostního typu

V kapitole 3.2 jsou podrobně rozebrány jednotlivé preference, které tvoří osobnostní typ. Ke zjištění, jaký jsme opravdu osobnostní typ, lze využít jak detailnější charakteristiku daných dimenzí, která je popsána v dílech Miková (2018), Čakrt (1996, 2017), nebo přímo dotazník MBTI sestavený Američankami Myers a Briggs. Tento dotazník byl testován na tisících lidech a je hojně využíván dodnes. V českém jazyce ho lze nalézt zdarma v internetovém vyhledávači v mnoha podobách a grafickém zpracování, tištěný dotazník lze nalézt například v publikaci Čakrt (1996, s. 29-35).

Nalezení osobnostního typu pouze pomocí vyplnění dotazníku však může být velmi krátkozraké. Jednak významně záleží, zda dotazovaný člověk dobře rozuměl otázkám, jejich podstatě, a také je důležité, jak na základě svého chování člověk odpovídá, zda se zaměřuje více na osobní nebo pracovní život. Spoléhat se na diagnostiku typu osobnosti pouze na základě dotazníku MBTI, nebo hůře na základě vyplnění dotazníku žáky ve třídě určit, jaké typy osobností má učitel ve třídě, je z pohledu odborníků např. Miková (2018) chybné.

Z pohledu typologie osobnosti ve vzdělávání je mnohem důležitější vzít na vědomí fakt, že ve třídě má učitel zastoupené všechny osobnostní typy (samozřejmě v různém poměru), než že bude jednotlivé žáky učitel diagnostikovat a na základě toho s jimi jednat. Podle Mikové (2018) je v jedné třídě statisticky nejvíce žáků s preferencí smyslové příjmové funkce (až 80 %) a mnohem méně dětí s preferencí intuice (až 25 %). Toto rozdělení dokládá i článek Šteffla (2015a), který uvádí, že v populaci je 24 % intuitivně orientovaných (12 % NF, 12 % NT) a 76 % smyslově orientovaných (38 % SJ, 38 % SP). Mezi učiteli je podle Mikové (2015) i Šteffla (2015a) výskyt smyslově orientovaných dokonce mnohem vyšší (70–80 %) než v běžné populaci.

Pro práci s teorií typů je dále důležité, že získáním všech čtyř písmen osobního typu a seznámením se s jejich charakteristikami, ještě nezískáme vše, co zjistila jungovská teorie. Jung i Myers a Briggs se dále domnívali, že například typ INTJ není jen složením I+N+T+J, ale že tento celek se sám dohromady vyznačuje ještě dalšími synergickými vlastnostmi a charakteristikami. Tento objev připodobňuje Čakrt (2017, s. 81) k popisu sloučenin jako voda nebo bronz. K popisu obou látek nestačí popis vlastností jejich jednotlivých složek u vody kyslíku a vodíku a u bronzu mědi a cínu. Je nutný popis vlastností sloučeniny, která dosahuje jiných kvalit než sečtení kvalit jednotlivých složek. Lze tedy dále zkoumat a seznamovat se s tím, co mají společné jednotlivé typy obsahující například ES, konkrétně ESFJ, ESFP, ESTJ, ESTP.

Cílem této práce není seznámit čtenáře s charakteristika jednotlivých 16 typů, ani jejich skupinami. Důležité pro tuto práci je zaměřit se ještě na tzv. hierarchii preferencí a jejich dynamiku, tzn. zda se jednotlivé typy během života mění a zda se dítě ISTP bude chovat stejně jako dospělý ISTP.

Miková (2018) i Čakrt (2017) se v problematice hierarchie preferencí odkazují na Jungovy poznatky, že všechny typologické preference jsou rovnocenné, ale nejsou u lidí zastoupeny ve stejné síle. Čakrt (2017) uvádí: *„V Jungově pojetí se lidé liší tím, že každý člověk má nějakou svou dominantní, oblíbenou mentální funkci. Ta může být buď z dvojice preferencí příjmu informací, nebo preferencí rozhodování.“* Pokud je naše dominantní funkce příjmová, automaticky preferujeme vnímání (posledním písmenkem našeho typu je P), v opačném případě u dominantní funkce rozhodovací inklinujeme k usuzování (J).

Kromě dominantní funkce máme i funkci sekundární, kterou vybíráme z jiné dimenze než funkci dominantní. Pokud je dominantní funkce příjmová, sekundární funkce je rozhodovací a naopak. Celou naši osobnost dále dotváří třetí, resp. čtvrtá mentální funkce, které tandemově doplňují druhou, resp. první mentální funkci. Naši dynamiku typů dále ovlivňuje zaměření dominantní funkce. Pokud jsme introverty, je naše dominantní funkce introvertní (I), pokud jsme naopak extroverty, je extrovertní (E). Sekundární funkce pak vyvažuje toto zaměření a má opačný náboj.

K objasnění problematiky dynamiky typu použijeme přirovnání Nardiho (2005, s. 20), které je založené na tandemovém kole se dvěma cyklisty. *„Ten vpředu šlape do pedálů a řídí. Ten vzadu „pouze“ šlape. Bez toho vzadu je šlapání mnohem těžší. Můžeme jet na kole sami, ale ve dvou toho můžeme zvládnout mnohem více než sami se sebou.“* Například u typu INTP je dominantní funkcí T_I (rozhodovací funkce myšlení T s orientací dovnitř – introvertní I), sekundární funkcí je N_E (příjmová funkce intuice N s orientací ven – extrovertní E), třetí funkcí je S_I (opačná dimenze příjmové funkce k sekundární funkci – smysly orientované dovnitř) a poslední čtvrtou funkcí je F_E (opačná dimenze rozhodovací funkce k dominantní funkci – extrovertní cítění). Souhrnně by se dalo říci, že dynamická rovnováha typu spočívá podle Čakrta (2017) na dvou pilířích – vyváženosti příjmu a zpracování informací a vybalancovanosti extraverze i introverze.

Vzhledem k tomu, že je tato práce zaměřena na aplikaci MBTI ve vzdělávání žáků 2. stupně ZŠ a studentů SŠ, věnujeme ještě prostor vývoji typu během života. Podle Mikové (2018, s. 42) se v průběhu vývoje musí dítě na jednu stranu vypořádat s požadavky okolí, ale na druhé straně své vrozené nastavení mozku nezmění. Již při narození je všech osm psychických funkcí uloženo v nevědomí, ale je také dáno pořadí, v jakém budeme tyto funkce rozvíjet.

Cílem vývoje každého osobnostního typu je jednotlivé funkce postupně ovládat tak, aby ony neovládaly nás. Naší snahou je tedy dostat je z nevědomí do vědomí. Nejdříve si osvojujeme naši dominantní funkci, při jejím osvojování ale neustále zkoušíme a hledáme, co nám opravdu vyhovuje, proto je u dětí předškolního věku velmi složité diagnostikovat, o jakou dominantní funkci jde. Chování dítěte totiž může nasvědčovat rozvoji všech dominantních funkcí. V období předškolního věku, a především puberty se k osvojování dostává i druhá (sekundární) funkce, kdy dochází až k překompenzování jejích projevů. Dítě nejdříve testuje, co vše mu nová funkce přináší, a hojně využívá strategie pokus – omyl, nebo později i pokus – ověření – oprava. Naučit se ovládat sekundární funkci je možné pouze na základě četných zkušeností a citlivé zpětné vazby od okolí.

Během rozvoje sekundární funkce totiž dochází k vyvažování jednostrannosti dominantní funkce. Dítě se učí jednak kompenzovat zaměření na vnitřní, resp. vnější svět a zároveň vybalancovat dobře rozvinuté přijímání informací, resp. rozhodování. Nebezpečná až útočná zpětná vazba může v tomto období přispět ke špatnému rozvoji sekundární funkce a způsobit dítěti velké psychické problémy. Miková (2018, s. 49) konkrétně uvádí, že na vývoj typu osobnosti u dítěte mají velký vliv výchova, rodiče jako model, genderová očekávání, sourozenecké konstelace, vrstevníci, změny v dospívání a škola, především typové preference a učební styl.

Vliv typových preferencí na vývoj osobnostního typu se projevuje tak, že učitel učí podle toho, co jemu osobně vyhovuje, dává důraz na informace a fakta, která jsou pro něho osobně důležitá, a očekává, že to bude vyhovovat i všem jeho žákům. Ve skutečnosti jeho učební metody vyhovují jen některým žákům, těm, kteří mají stejný osobnostní typ. Miková (2018, s. 55) uvádí, že *„typové preference člověka totiž předurčují také učební styl, tedy podmínky, které potřebuje, aby se učit mohl, a cesty, díky kterým bude učení efektivní."* Nabízí se tedy jednoduché řešení, že budou děti při vstupu do školy diagnostikovány, jaký jsou osobnostní typ, a podle toho jim bude vybrán učitel a spolužáci ve třídě. Tento záměr však není podle Mikové (2018, s. 56) možný ani žádoucí, protože dítě teprve svůj typ hledá, rozvíjí své preferované funkce a učí se je ovládat. *„Potřebuje proto zkoušet různé typy úkolů a činností, aby zjistilo, co mu vyhovuje více a co méně. V průběhu vývoje osobnosti je pro každého z nás výhodné naučit se zvládat i takové úkoly, které neodpovídají našim preferencím – osvojit si jednak způsoby, jak odhalit, že mi úkol zcela nevyhovuje (tzn. že jeho perfektní zvládnutí ode mne vyžaduje zvýšené úsilí, popř. je pravděpodobné, že v něm budu dělat chyby), a následně si osvojit strategie, jak takový úkol zvládnout. Když se ale děti tyto dovednosti učí, neměly by být za jejich nedokonalé zvládnutí negativně hodnoceny."*

Teorie typů (Miková, 2018 s. 56-57) nabízí konkrétní strategii, jak učit různé typy osobnosti v jedné třídě. Zaprvé je třeba znát typ osobnosti učitele a zadruhé je třeba upravit výuku tak, aby byla efektivní pro různé typy dětí, i pro ty, kteří nemají stejný osobnostní typ jako jejich učitel. Dále je vhodné, aby učitel rozšířil repertoár typů úloh, které zadává, a při práci ve třídě používal možnost volby, aby si žáci vybrali, která zadání jsou pro ně vhodnější (samozřejmě za předpokladu, že učební obsah je na stejné úrovni obtížnosti). Dopad této jednoduché strategie lze pozorovat ve větší angažovanosti a úspěšnosti žáků ve výuce. Takovéto zapojení znalosti Teorie typů lze ve třídě využít, i když učitel nezná osobnostní typ jednotlivých žáků. Diagnostiku osobnostního typu je vhodné realizovat ve spolupráci s odborníkem především u žáků, kteří mají nějaký problém. Lze touto cestou hledat příčiny problému a možné strategie jeho řešení.

3.4 Učební styly

V této části se již detailně zaměříme na charakteristiku učebního stylu, který nejvíce vyhovuje jednotlivým osobnostním typům žáků. Vzhledem k tomu, že existuje celkem 8 dominantních funkcí S_E, S_I, N_E, N_I, T_E, T_I, F_E, F_I (viz kapitola 3.3), není v možnostech této práce detailně charakterizovat všechny typy. Zaměříme se pouze na ty dominantní funkce, které ovlivňují příjem informací, a tím i preferenci jednotlivých typů úloh a způsobů řešení. Cílem této části je objasnit vzdělávací potřeby žáků s dominantní funkcí příjmovou skrze smysly (S_E, S_I) a skrze intuici (N_E, N_I). Tyto i další dominantní funkce jsou precizně charakterizované v díle Miková (2018, s. 93-488).

Charakteristika smyslových žáků podle Mikové (2010):

- Absorbují informace výhradně všemi smysly.
- Při učení potřebují mít kontakt s realitou, potřebují se věcí dotýkat, vidět je, slyšet je, cítit je.
- Preferují ustálené postupy, raději stavějí na něčem, co už znají.

- Nemají rádi abstraktní teorie, ale pomáhá jim, když se jim dávkují po menších částech a mají vazbu na realitu, dále potřebují procvičení na konkrétních úlohách, které prochází krok za krokem a následně tento postup opakují.
- Preferují úlohy s konkrétním zadáním a krátkodobým horizontem ukončení.
- Uvítají, když jim učitel nejdříve ukáže, jak úlohu řešit a sdělí jim konkrétně, co od nich chce, pokud ne dožadují se vysvětlování.
- Vyhovují jim úlohy, u kterých se nemusí zabývat alternativami řešení, možnostmi.

Konkrétně v matematice jsou smysloví žáci podle Mikové (2010):

- Méně zdatní ve slovních úlohách,
- Dělají méně často numerické chyby při výpočtech,
- Mohou mít problémy s pochopením zadání a vymyšlením strategie řešení,
- Potřebují často pomoci s rozborem úlohy, další kroky jsou pro ně již snadné, když věcí, co a jak řešit.
- Používají často naučené postupy řešení.
- Je pro ně obtížné něco samostatně odvodit.

Žáky s převahou intuice lze podle Mikové (2010) charakterizovat tak, že:

- Hledají význam přicházejících informací, nespokojí se pouze se smyslovými informacemi.
- Jsou fascinováni možnostmi a souvislostmi, které informace přinášejí.
- Mají potřebu věnovat se neustále novým, zajímavým a spletitým otázkám.
- Nebaví je rutinní úkoly, procvičování, memorování dat bez souvislostí.
- Chápou celkem rychle abstraktní pojmy a teorii, dokážou si představit i její využití v praxi bez větších problémů.
- Přitahují je spíše obecné systémy, koncepty, pojetí než detailní fakta a praktičnost.
- Nejdříve potřebují mít jasno o celku a až poté jsou ochotni se zabývat detaily.
- Tito žáci vyhledávají úkoly, které jsou pro výzvou a vedou je k originalitě a vynalézavosti.
- Preferují otevřené úkoly, které je neomezují v diktování postupu řešení – chtějí uplatnit svoji iniciativu, hledat vlastní cesty řešení, zkoušet nové postupy.
- Mají schopnost generovat množství představ a konstruktů, které ale nemusejí být realizovatelné, často jim chybí praktické dovednosti.
- Učitel by jim měl vycházet vstříc maximální možností volby ve způsobu řešení.

Konkrétně v matematice jsou intuitivní žáci podle Mikové (2010):

- Ti, kteří po přečtení zadání úkolu, velmi rychle pochopí, co se po nich požaduje a co se má počítat.
- Sami navrhují postupy řešení i úloh, které vidí poprvé.
- Mohou chybovat v takových detailech jako numerické výpočty, přehlídnout něco konkrétního v zadání nebo v průběhu řešení úlohy.
- Mají sklon k chybnému dosazení do vzorce.
- Mívají ucelený přehled o postupu řešení a spíše si poradí s novinkami.

Miková (2010) uzavírá přehled charakteristik jednotlivých typů dvěma radami pro učitele, kteří jsou sami intuitivní a učí smyslové děti, tak i naopak, na co si má dát pozor smyslově orientovaný učitel při výuce intuitivních dětí. Smyslovým žákům by měli učitelé poskytovat více konkrétních informací o splnění úkolu, jakou formu to má mít atd., protože takoví žáci nejsou nadšení z otevřeného zadání, kterému díky častým metaforám ani nerozumějí. Intuitivní žáci naopak ocení, když je nebudeme nutit do rutinních úkolů a neustálému opakování dovedností, které už si osvojili.

3.4.1 S_E – Extravertní smysly

„Aby se mohly děti s dominantním S_E dobře učit, potřebují:

- *Být aktivní, tj. mluvit nebo něco dělat (pohybovat se, manipulovat s předměty atd.);*
- *Učení vizualizovat, sáhnout si na to, o čem se učí, přímo vidět, jak co funguje;*
- *Nejdřív vidět a zažít v praxi, teprve potom studovat teorii;*
- *Vidět, jaký užitek má to, co se učí, v jejich každodenní realitě;*
- *Konkrétní zadání úkolu s příkladem výsledku;*
- *Plnit spíše krátkodobé úkoly s rychlými výsledky; u dlouhodobých projektů vidět už v průběhu nějaké hmatatelné dopady;*
- *Atmosféra ve smyslu „učení je zábava";*
- *Mít příležitost pracovat ve skupinách;*
- *Nebýt rušeny okolními podněty, mají-li se na něco plně soustředit."* (Miková, 2018, s. 146)

3.4.2 SI – Introvertní smysly

„Aby se mohly děti s dominantním S_I dobře učit, potřebují:

- *Stanovení pravidel a průběžnou kontrolu jejich dodržování, důslednost učitele;*

- *Plán výuky, který se dodržuje a jehož plnění mohou průběžně sledovat;*
- *Jasné zadání úkolu a pokyny k plnění „krok za krokem";*
- *Příklady řešení úkolu, díky kterým zadání lépe pochopí a mohou ho napodobit při hledání vlastního řešení;*
- *Konkrétní odpovědi na otázky, když si s něčím nevědí rady;*
- *Podporu a průběžnou zpětnou vazbu k úkolům, které vyžadují něco jiného než znalost fakt a využívání osvědčených postupů;*
- *Čas na přemýšlení předtím, než musí odpovědět nebo pracovat na úkolu;*
- *Učení krok za krokem, čas na dostatečné trénování dovedností, které se naučily (přechod k novému učivu až ve chvíli, kdy mají pocit, že už to současné dobře zvládají);*
- *Trénování nového ve spojení s praktickým životem."* (Miková, 2018, s. 187)

3.4.3 N_E – Extravertní intuice

„Aby se mohly děti s dominantním N_E dobře učit, potřebují:

- *Mít možnost příchozí informace s někým prodiskutovat (s učitelem, ve dvojicích, skupinách);*
- *Učivo probírané v souvislostech, které mohou i samy odhalovat;*
- *Přicházet s vlastními hypotézami a možnostmi, jak věci jsou a jak by mohly být, a samy si je ověřovat;*
- *Takové zadání úkolu, které ukazuje výsledek, nikoliv však cestu, jak se k němu dostat. Potřebují mít prostor najít vlastní způsob řešení, i když to někdy znamená zjistit, že tudy cesta nevede;*
- *Mít prostor pro své originální nápady a tvořivost, mít možnost být zábavnými pro ostatní nebo je něco učit;*
- *Co nejméně rutiny a stereotypu, procvičování ozvláštnit zajímavou formou nebo novým kontextem;*
- *Toleranci k chybám, kdy si (v důsledku preference N_E) něco „špatně přečtou" nebo „něco přehlédnou"."* (Miková, 2018, s. 242)

3.4.4 N_I – Introvertní intuice

„Aby se mohly děti s dominantním N_I dobře učit, potřebují:

- *Mít možnost jít hlouběji do témat, která je zajímají;*
- *Tvůrčí úkoly, v rámci kterých mají čas na přemýšlení a vynoření vnitřní inspirace;*

- *Mít možnost pracovat individuálně, když se učí něco nového nebo se prověřují jejich znalosti;*
- *Mít možnost volit vlastní postupy, uplatnit svou kreativitu;*
- *Prostor pro samostatné čtení a psaní;*
- *Úkoly, které jsou pro ně intelektuální výzvou, ale zároveň v zóně nejbližšího vývoje (jejich zvládnutí je náročné, ale neselžou přitom);*
- *Podílet se na stanovování cílů, ke kterým pak budou upínat své úsilí." (Miková, 2018, s. 302)*

Kapitola 3 byla věnována typologii osobnosti a zaměřena konkrétně na využití teorie typů ve vzdělávání. V první části je čtenář seznámen s vývojem typologií osobnosti od Hippokrata po Junga a MBTI (Myers Briggs Type Indicator). Vedle objevů světových teoretiků jsou v této části prezentovány i poznatky českých autorů jako například Čakrta a Mikové.

Ve druhé části jsou objasněny základní pojmy a podstata teorie MBTI a teorie typů. Jsou zde obecně popsány všechny čtyři dimenze osobnosti. Třetí část je zaměřena na vysvětlení dynamiky osobnostního typu a jeho vývoj během celého života s důrazem na rozvoj primárních a sekundárních funkcí u dětí. Kapitola vrcholí charakteristikami všech osmi dominantních funkcí v oblasti výuky a vzdělávání. Jsou zde souhrnně vyjmenovány vzdělávací potřeby smyslových a intuitivních žáků.

O teorii typů by bylo možné napsat mnohem více a stejně by to nebylo dostačující. Proto je tato práce zaměřena pouze na dimenzi příjmu informací, která se u dětí projevuje spolu s intoverzí a extravezí jako první dominantní funkce. Již na druhém stupni základní školy lze určit, který žák preferuje příjem skrze smysly a který pomocí intuice. Dalším důvodem pro zúžení teorie typů pouze na preference smyslů nebo intuice byl vliv těchto preferencí na způsoby řešení problémů a úloh školské matematiky.

Teorie typů potvrdila, že jsou mezi žáky výrazné rozdíly v oblasti příjmu informací. Smyslově orientovaní žáci dávají častěji přednost naučeným postupům, rutinním úlohám a vyžadují co nejkonkrétnější zadání. Kdežto intuitivně orientovaní žáci naopak vyžadují úlohy, které jsou pro ně výzvou, mají častěji potřebu řešit úlohy kreativně a originálně, objevovat souvislosti mezi informacemi.

4 Analýza RVP ZV a ŠVP vybraných škol

4.1 RVP ZV

Hlavními dokumenty, které řídí obsah vzdělávání na všech úrovních počátečního vzdělávání, jsou rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP) od předškolního vzdělávání po střední vzdělávání. Tyto programy jsou kodifikovány zákonem č. 561/2004 a představují tzv. státem garantovanou úroveň vzdělávání na jednotlivých stupních.

V systému kurikulárních dokumentů je hlavním pramenem Národní program vzdělávání, který určuje směřování počátečního vzdělávání jako celku. V současné době takový národní program vzdělávání neexistuje a jako hlavní strategický dokument pro obsah vzdělávání je brána Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2020, na kterou bude navazovat již připravovaný dokument Strategie vzdělávací politiky do roku 2030+. RVP pak rozpracovávají závazné rámce jednotlivých etap vzdělávání. Na státní úroveň navazují pak školní kurikulární dokumenty tzv. školní vzdělávací programy, které upravují obsah a formy vzdělávání na jednotlivých školách. (MŠMT, 2019)

Vzhledem k zaměření této práce na zkoumání řešitelských strategií v matematice na 2. stupni základních škol se budeme dále věnovat jen Rámcovému vzdělávacímu programu základního vzdělávání (dále jen RVP ZV), který upravuje vzdělávací obsah jak na 1. stupni základních škol, tak na 2. stupni a odpovídajících ročnících víceletých gymnázií. Poslední verze RVP ZV s účinností od 1.9.2017 má 4 hlavní části, z nichž pro naše účely je nejdůležitější část C, která vymezuje pojetí a cíle základního vzdělávání, klíčové kompetence, náplně vzdělávání v jednotlivých vzdělávacích oblastech, obsah průřezových témat a poznámky k rámcovému učebnímu plánu. (RVP ZV, 2017)

Formulace použité v RVP ZV dokládají, že náplň této práce je v souladu s cíli vzdělávání a že individualizace výuky nemusí být cílena pouze na žáky se speciálními potřebami učení, ale na všechny žáky se zaměřením na jejich osobnostní typ. *„Základní vzdělávání vyžaduje na 1. i na 2. stupni podnětné a tvůrčí školní prostředí. Je založeno na poznávání, respektování a rozvíjení individuálních potřeb, možností a zájmů každého žáka. Zajišťuje, aby se každý žák prostřednictvím výuky přizpůsobené individuálním potřebám, případně s využitím podpůrných opatření, optimálně vyvíjel a dosahoval svého osobního maxima. K tomu se vytvářejí i odpovídající podmínky pro vzdělávání všech žáků. Hodnocení žáků musí být postaveno na plnění konkrétních a splnitelných úkolů, na posuzování individuálních* *změn žáka a pozitivně laděných hodnotících soudech. Žákům musí být dána možnost zažívat úspěch, nebát se chyby a pracovat s ní.“* (RVP ZV, 2017, s. 8)

Matematický rozměr této práce, kterým jsou heuristické strategie řešení úloh, nalezneme v části RVP ZV, která popisuje klíčové kompetence především kompetenci k řešení problémů a v části matematika a její aplikace. Kompetence k řešení problémů je v RVP ZV konkrétně vymezena pomocí výstupů na konci základního vzdělávání. *„Žák:*

- *vnímá nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpozná a pochopí problém, přemýšlí o nesrovnalostech a jejich příčinách, promyslí a naplánuje způsob řešení problémů a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností*
- *vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému*
- *samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy*
- *ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů*
- *kriticky myslí, činí uvážlivá rozhodnutí, je schopen je obhájit, uvědomuje si zodpovědnost za svá rozhodnutí a výsledky svých činů zhodnotí“* (RVP ZV, 2017, s. 11)

Z oblasti Matematika a její aplikace je problematika heuristických strategií nejblíže svojí náplní čtvrtému vzdělávacímu okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. V RVP ZV (2017, s. 30) je tato oblast uvedena jako důležitá součást matematického vzdělávání, kterou jsou právě *„Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.“*

Na základě vymezení očekávaných výstupů v RVP ZV (2017, s. 34) byl měl žák na konci 2. období 1. stupně základní školy (na konci 5. ročníku) řešit *„jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky."* Učivo, které vede k naplnění tohoto výstupu, jsou podle RVP ZV (2017) slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce a prostorová představivost.

Na konci 2. stupně základní školy (konec 9. ročníku) a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií by se pak měli žáci v oblasti nestandardních aplikačních úloh a problémů užívat logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézat různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací a dále řešit úlohy na prostorovou představivost, aplikovat a kombinovat poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí. Učivo, které vede k naplnění těchto výstupů jsou číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy. (MŠMT, 2017, s. 37)

Úzkou spojitost mezi typem osobnosti, učebním stylem a prací v matematice jednotlivých žáků, která byla detailně popsána v kapitole 3.4, lze využít i k naplňování průřezových témat, především v oblasti osobnostní a sociální výchovy. Využívání poznatků teorie typů může pomoci k naplňování cílů v oblasti postojů a hodnot konkrétně v těchto bodech (MŠMT, 2017, s. 127):

- *„pomáhá k utváření pozitivního (nezraňujícího) postoje k sobě samému a k druhým*
- *vede k uvědomování si hodnoty spolupráce a pomoci*
- *vede k uvědomování si hodnoty různosti lidí, názorů, přístupů k řešení problémů"*

Pokud jsou žáci vedeni k využívání heuristických strategií při řešení úloh, mohou si lépe uvědomit rozdílnost mezi lidmi v přístupu k řešení úloh, mohou si uvědomit, zda jim vyhovuje spíše algoritmické řešení nebo hledání nových postupů řešení, to vše může podnítit spolupráci ve třídě, kdy smysloví žáci žádají intuitivní o objasnění jejich postupu řešení, kterému na první pohled z přirozenosti jejich typu nerozumí a naopak.

4.2 ŠVP vybraných škol

V návaznosti na provázanost kurikulárních dokumentů je nutné kromě RVP ZV analyzovat i školní vzdělávací programy (ŠVP) jednotlivých škol, kde byl výzkum realizován. Více o výběru škol zapojených do výzkumu je uvedeno v kapitole 5. Do projektu výzkumu byly zapojeny 2 školy, které budu dále pro zachování anonymity označovat

Škola H a Škola K. Oba školní vzdělávací programy si kladou za cíl vychovat ze svých žáků dospělé lidi, kteří si najdou uplatnění v životě v 21. století a budou rozvíjet svoji osobnost stejně jako společnost, ve které žijí.

V oblasti klíčové kompetence k řešení problémů, která je pro tuto práci důležitá, přistupují jednotlivé školy následovně:

Škola H: „*Všichni učitelé naší školy se dohodli, že budou ve výuce:*

- *navozovat problémové situace,*
- *dávat dětem prostor k řešení problémů dle jejich individuálních schopností,*
- *učit žáky sebehodnocení.“* (ŠVP Školy H)

Škola K: „*Kompetence k řešení problémů žáků:*

- *jsou motivováni problémovými úlohami z praktického života,*
- *učí se tvořivému a kritickému myšlení, logickému uvažování,*
- *jsou vedeni k vnímání, rozpoznání a pochopení problémů,*
- *promýšlejí vhodné způsoby řešení problémů,*
- *umí svá řešení obhájit,*
- *umí pracovat s informacemi, které si vyhledávají z různých dostupných zdrojů, třídí je a vhodným způsobem využívají.“* (ŠVP Školy K)

V oblasti Matematika a její aplikace deklarují obě školy práci na všech klíčových kompetencích, aplikaci matematiky v reálných situacích, osvojování terminologie, symboliky, vzdělávání žáků ve všech čtyřech tematických okruzích: číslo a proměnná, geometrie v rovině a prostoru, závislosti, vztahy a práce s daty a nestandardní aplikační úlohy. Obě školy dále deklarují užití různých forem a metod práce s žáky, škola H navíc odkazuje více na konstruktivistické pojetí výuky a aktivní činnosti žáků, podle personálních možností je matematika vyučována Hejného metodou. Učební plány obou škol obsahují témata, která byla využita ve výzkumné části. Učební plán školy K je rozsáhlejší a obsahuje více probírané látky než učební plán školy H. Ve výstupech školy H je na několika místech uvedeno, že žák používá různé metody řešení úloh jako například pokus – omyl, tabulaci, vizualizaci, modelování, jazyk algebry, řeší logické a netradiční geometrické úlohy.

5 Výzkumná část

Diplomová práce je zaměřena na zkoumání vztahu mezi typem osobnosti žáka a jeho využitím heuristických strategií při řešení úloh. Cílem práce je analýza souvislostí mezi osobnostním typem vybraných žáků v dimenzi příjmu informací (inspirováno typologií MBTI viz kapitola 3) a jejich způsoby řešení úloh školské matematiky s využitím heuristických strategií na 2. stupni základních škol. K naplnění cíle byly stanoveny dvě výzkumné otázky:

1) Jak souvisí typ osobnosti žáků s jejich přístupem k řešení úloh školské matematiky?

2) Používají intuitivní žáci častěji heuristické strategie řešení úloh než žáci smysloví a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh?

Tato část práce seznamuje s průběhem a strukturou výzkumu, jeho metodologií a výzkumnými závěry. Kromě toho jsou v této části detailně analyzovány zadané úlohy s uvedením jejich ukázkového řešení a rozborem žákovských strategií řešení.

5.1 Metody výzkumu

V rámci diplomové práce se zaměřuji konkrétně na souvislosti mezi osobnostním typem vybraných žáků 2. stupně ZŠ a odpovídajících tříd víceletých gymnázií v dimenzi příjmu informací a jejich řešením úloh školské matematiky s důrazem na heuristické strategie. Ke zodpovězení výše uvedených výzkumných otázek byl využit kvalitativní výzkum, který šel sice do hloubky zkoumaného problému, ale jeho závěry nebylo možné aplikovat celoplošně. Cílem je na vybraném souboru respondentů zkoumat konkrétní projevy jejich osobnostního typu v řešení úloh školské matematiky a efektivita využívání heuristických strategií řešení. Výstupy práce budou moci využít učitelé matematiky ve své každodenní práci se žáky, ve výběru vhodných úloh pro jednotlivé typy žáků, při individualizaci práce v hodině. Poznatky z výzkumu je možné využít i při plánování hodin a výběru výukových metod tak, aby učitelé oslovili co největší počet žáků ve třídě nejen ty, kteří jsou typologicky blízcí osobnostnímu typu učitele.

5.1.1 Cílová skupina

Cílovou skupinou jsou žáci 9. ročníku, kteří navštěvují školu H, kde probíhá dlouhodobá spolupráce s odborníky v oblasti teorie typů. Celý pedagogický sbor vybrané školy byl odborníky důkladně proškolen v typologii MBTI. Každý pedagog si stanovil vlastní osobnostní typ, což je předpokladem pro správné využívání poznatků teorie typů nejen ve vzdělávání. Na základě dlouhodobého školení všech pedagogických pracovníků školy H se typologie MBTI stala nedílnou součástí kultury školy. Důkazem může být vlastní pozorování při návštěvě školy, kdy jsem byla náhodou svědkem rozhovoru dvou asistentek pedagoga o rodinných plánech na víkend a individuálních nárocích na podobu odpočinku jednotlivých členů rodiny. Typologické termíny byly v tomto rozhovoru přítomné snad v každé větě. I sami učitelé si při mém příchodu chválili, jak jim školení teorie typů pomohlo nejen v práci se žáky, ale především v pracovních vztazích s kolegy.

Základní soubor respondentů tvořilo celkem 34 žáků 9. ročníku, kteří byli diagnostikováni proškolenými učiteli, jednak třídním učitelem a jednak učitelem matematiky. Vzhledem k tomu, že diagnostika probíhala na základě dlouhodobého záměrného pozorování proškolených pedagogických pracovníků v teorii typů, lze ji pro účely této práce pokládat za reprezentativní. Z časových a technických důvodů nebylo možné zařadit do souboru respondentů žáky, kteří by byli diagnostikováni přímo odborníky na teorii typů. Tato diagnostika je velmi časově náročná a v českém vzdělávání velmi ojedinělá. Na základě osobního rozhovoru s Šárkou Mikovou, autorkou publikací o teorii typů, jsou v České republice jen jednotky základních škol, kde pracují proškolení učitelé v teorii typů a používají tuto typologii ve vzdělávání.

Druhý zkoumaný celek tvořili žáci kvarty víceletého gymnázia (škola K) v celkovém počtu 32 žáků. Jedná se o žáky odpovídající věkem žákům 9. ročníku. Tato škola nepatří k proškoleným pracovištím v teorii typů. Žáci z této školy byli diagnostikováni pouze na základě odpovědí v dotazníku a rozhovoru. Tato skupina žáků byla do výzkumu zařazena z důvodu dostupnosti a nutnosti rozšířit výzkumný vzorek na dvojnásobný počet. Nejedná se sice o žáky, kteří by prošli typologickou diagnostikou proškoleného personálu, ale jsou to žáci, kteří se v hodinách matematiky setkali s heuristickými strategiemi, což obohatilo analýzu žákovských řešení.

5.1.2 Techniky sběru dat

Jedná se o kvalitativní výzkum, který je zaměřený na vztah mezi typem osobnosti žáka a jeho řešením úloh školské matematiky s důrazem na využití heuristických strategií řešení. Klíčovou částí výzkumu je validní určení osobnostního typu žáků. Pro účely této práce byla vybrána diagnostika pouze v jedné rovině osobnosti, a to v dimenzi příjmu informací, která má dva protipóly Smysly nebo iNtuici (více v kapitole 3). Právě tato dimenze osobnosti je nejvíce spjata s preferovanou podobou řešení problémů a učení se (Miková, Stang, 2015, str. 26).

Diagnostika preference smyslů nebo intuice byla s ohledem na rozsah a časovou náročnost této práce provedena na základě triangulace několika metod. Cílová skupina byla vybrána tak, aby bylo v co největší míře možné při diagnostice využít kvalitativní poznatky získané dlouhodobým pozorováním proškoleného pedagogického pracovníka, který s žákem přichází do denního kontaktu po dobu několika let. Dále byla u všech žáků ze vzorku využita kvantitativní metoda mnou modifikovaného dotazníku MBTI, který zjišťoval individuální preference žáků pouze v oblasti příjmu informací, a to konkrétně v matematice. Nejvyšší validitu diagnostiky osobnostního typu by zajišťovalo ještě získání informací o daném žákovi od jeho rodičů, to ale nebylo možné pro účely této práce z mnoha důvodů zajistit.

Metoda dotazníkového šetření byla ještě u nejvíce vyhraněných žáků podle zkoumání učitelů doplněna o polostrukturovaný rozhovor s jednotlivými žáky, který objasnil žákovy preference v příjmu informací při řešení úloh v matematice i v jiných předmětech. Tento rozhovor také sloužil k validaci výsledků získaných z dotazníkového šetření.

Typologický dotazník (viz Příloha 5) jsem sestavila z 9 uzavřených otázek a 1 otevřené otázky. Uzavřené otázky byly vytvořeny podle osobnostního dotazníku MBTI, který je publikovaný v Čakrt (1996, str. 29-34, viz Příloha 7). Oficiální osobnostní dotazník k určení preference intuice nebo smyslů jsem modifikovala pro potřeby diplomové práce tak, aby odpovědi odpovídaly vybrané věkové skupině (žáci 9. ročníku ZŠ) a odrážely jejich postoje při řešení problémů především v matematice. V tvorbě odpovědí byly využity popsané učební styly smyslových a intuitivních žáků, které jsou uvedené v kapitole 3. 4.

Další použitou metodou výzkumu byla analýza žákovských řešení na základě písemného řešení vybraných 4 úloh z matematiky. Pro účely výzkumu byly vytvořeny dvě rovnocenné varianty testu, aby bylo zamezeno opisování řešení od spolužáka sedícího ve stejné lavici. Každý žák dostal pracovní listy se zadáním úloh, na které úlohy následně řešil. Každá úloha byla na samostatné straně, aby měli žáci dostatek prostoru na řešení. Na samostatné řešení úloh dostali žáci 40 minut čistého času. Ihned v další hodině proběhl společný rozbor řešení úloh, kdy žáci identifikovali nejčastější strategie řešení a problémy, na které při řešení úloh narazily a které jim bránili v úspěšném řešení úlohy.

Poslední částí výzkumu byl rozhovor s vybranými žáky, kteří se v matematice projevovali podle učitele významně smyslově nebo významně intuitivně. Tyto rozhovory byly polostrukturované a zaměřené na objasnění použitých strategií při řešení předložených úloh. Rozhovory byly nahrávané, aby bylo možné některé poznatky přímo citovat.

Zpracování diplomové práce a výzkumu probíhalo nakonec podle tohoto harmonogramu:

- Stanovení výzkumného problému: květen 2018
- Studium odborné literatury a analýza dokumentů: květen – listopad 2018
- Zpracování teoretické části práce: září 2018 – leden 2019
- Příprava výzkumu
    - Oslovení klíčové cílové skupiny: listopad 2018
    - Realizace předvýzkumu: prosinec 2018
    - Vyhodnocení předvýzkumu: únor 2019
- Realizace hlavního výzkumu
    - Sestavení testu a dotazníku MBTI: únor 2019
    - Sběr dat – řešení úloh: 1. 3. 2019
    - Diagnostika žáků, rozhovory: 1. 3. 2019
    - Analýza žákovských řešení: březen 2019
- Zpracování praktické části: únor – duben 2019
- Finalizace a odevzdání diplomové práce: duben 2019

5.2 Předvýzkum

V přípravné fázi výzkumného šetření, která probíhala souběžně se zpracováním teoretické části, jsem původně plánovala zaměřit výzkum na žáky 7. ročníku, protože bych měla přístup k žákům, které jsem sama rok učila. Předpokládala jsem, že bych pak diagnostiku typu osobnosti provedla sama nebo s využitím dotazníku MBTI. Na základě poznatků z odborné literatury jsem tento způsob diagnostikování osobnosti žáků zavrhla, protože by nebyl významně validní (více v kapitole 3.3)

V mezičase jsem však již realizovala předvýzkum ve dvou třídách 7. ročníku, který měl za cíl zjistit, zda je zadání úloh pro žáky srozumitelné a které úlohy žáci nejčastěji řeší heuristickými strategiemi a tyto úlohy tak mají potenciál, aby byly zařazeny do hlavního testování. Dále jsem se zaměřila na časovou náročnost řešení zadaných úloh, abych měla představu, kolik úloh dát do hlavního testu, aby bylo reálné je vyřešit v jedné vyučovací hodině.

Sestavila jsem celkem 4 varianty testů, kdy každý obsahoval 4 úlohy, které lze řešit heuristickými strategiemi. Úlohy byly většinou převzaty nebo inspirovány úlohami z učebnic, z matematických soutěží Pythagoriáda a Matematický klokan, z publikací a výzkumů zaměřených na heuristické strategie. Tematicky byly úlohy zaměřené více na práci se zlomky, protože podle ŠVP byla tato tématika právě probírána. Ke každé úloze jsem si v pracovní verzi poznamenala, jakou heuristickou strategií by ji bylo možné řešit. Tato pracovní verze je součástí příloh (viz Příloha č. 1). Žáci pak obdrželi zadání, kde byl jen text úlohy bez odkazu na zdroj a možné strategie řešení.

Pre-test byl zadán ve dvou třídách 7. ročníku na základní škole v Praze. Obě třídy vede jeden učitel, který klade důraz na objevování řešení úloh žáky a volnost ve výběru řešitelské strategie. Předpokládala jsem, že v řešení žáků těchto tříd by se mohly vyskytnout heuristické strategie.

V každé třídě byl test zadán s pokynem, že úlohy mohou žáci řešit jakýmkoli způsobem, pokud nebudou rozumět zadání, mohou se zeptat učitele. Dále byli žáci vyzváni, aby napsali, v jaké oblasti nastala překážka v řešení. Hodiny nebyly nahrávané a testy byly anonymní. Doba řešení byla omezena na 1 vyučovací hodinu.

Výsledky pre-testu (viz Příloha 2) ukázaly, že zadané úlohy jsou pro vybrané žáky 7. ročníku obtížné. Jako nejobtížnější se ukázal test A (viz Příloha 1), kde byly zařazeny hned 2 úlohy, které neměly žádného úspěšného řešitele. Jedná se o úlohy 1Aa, 1Ac a 4A. U úlohy 1A byla největší překážkou správného řešení absence výskytu dvou způsobů dělení čtverce zároveň. Žáci používali výhradně jeden způsob dělení čtverce. Úloha 4A obsahovala složitou kombinatorickou úvahu, která byla nad rámec schopností žáků dané věkové skupiny. Jako obtížná se ukázala i úloha 3A, kterou neřešilo více než 50 % žáků, kteří řešili test A.

Pro vyčlenění úloh, které lze hodnotit jako řešitelsky úspěšné, jsem zvolila systém obodování jednotlivých žákovských řešení podle následujícího systému:

- 2 body – řešení správné strategicky i numericky
- 1 bod – řešení strategicky správná s numerickou chybou
- 0 bodů – neúplná nebo chybná řešení
- N – absence jakéhokoliv řešení

Na základě těchto údajů jsem pak u každé úlohy vyčíslila, jaký byl průměrný bodový zisk žáků, kteří se alespoň pokusili úlohu řešit (tzn. počet všech žáků, kteří řešili dané zadání bez žáků ze skupiny N). Úlohy, které měly úspěšnost 1 a více, byly: 2A (1,8), 1B (1,6), 3D (1,25), 2D (1,14), 4C (1,0) (více v Příloze 2).

Získaná řešení jsem dále podrobila analýze výskytu heuristických strategií (viz Příloha 3). Vzhledem k faktu, že vybraní žáci často neznali přímé řešení zadané úlohy, využívali často strategii pokusu nebo některou z heuristických strategií. Tato analýza také poukázala na problémové hodnocení některých úloh. Z dalšího hodnocení byla vyřazena všechna hodnocení úlohy 1A a 3C. U úlohy 1A nebylo možné určit, co je a co není heuristická strategie, úloha 3C nebyla vhodně zadaná, protože všichni žáci našli pouze přibližné řešení, nikoliv přesné. Buď za pomoci rýsování nebo náčrtku nějak vepsali do trojúhelníku čtverec a vůbec neověřovali, zda to čtverec je. Tato řešení nebyla analyzována.

Následující tab. 5 ukazuje, jaká část úloh byla řešena přímou cestou, pokusem nebo heuristickou strategií. Celkem bylo analyzováno 196 řešení.

Tab. 5: Četnosti typů strategií řešení úloh v pre-testu

	Přímá cesta	**Pokus**	**Heuristika**	**Neřešeno**
Absolutní	32	52	86	26
Relativní	16 %	27 %	44 %	13 %

Mezi 86 použitými heuristickými strategiemi se vyskytovaly všechny základní strategie, tak i velké množství dalších obecných strategií (dělení strategií viz kapitola 2). Pro reprezentaci strategií v následující tab. 6 jsou použity pouze jejich zkratky: SE – systematické experimentování, OOO – odhad-ověření-oprava, GZ – grafické znázornění, K – konkretizace, Z – zobecnění, A – analogie, PP – přeformulování problému, CZ – cesta zpět, ZPP – zavedení pomocného prvku. Nejčastěji využívanými heuristickými strategiemi byly 3 základní strategie systematické experimentování, odhad-ověření-oprava a grafické znázornění.

Tab. 6: Četnosti výskytu heuristických strategií řešení úloh v pre-testu

	SE	**OOO**	**GZ**	**K**	**Z**	**PP**	**CZ**	**ZPP**
Absolutní	31	13	25	2	5	7	2	1
Relativní	36 %	15 %	29 %	2 %	6 %	8 %	2 %	1 %

Úlohy, které byly nejčastěji řešeny heuristickými strategiemi, jsem identifikovala pomocí výpočtu podílu řešení HS na všech řešeních. Výpočet např. pro úlohu 2A vypadal takto: $\left(\frac{7}{12-2}\right) \cdot 100\,\%$, kde 7 je počet řešení HS, 12 je celkový počet řešitelů, 2 je počet žáků, kteří úlohu vůbec neřešili. Detailní výsledky lze nalézt v Příloze 4. Nejvyšší podíl řešení heuristickými strategiemi je patrný u úloh: 3A, 2A, 2B, 3B, 4D, 4A. To, jakou řešitelskou strategii žák zvolil, rozhodovalo o tom, zda žák dojde ke správnému výsledku. Nejvíce úspěšných řešitelů, kteří využili heuristické strategie, se mezi všemi úspěšnými řešiteli objevilo u úloh: 3A, 3B, 4B, 1D (viz Příloha 4).

Předvýzkum byl velmi přínosný především v tom, že mi pomohl zorientovat se v problematice rozboru jednotlivých žákovských řešení a poukázal na konkrétní problémy. Jedním z problémů byly nejasnosti v zadání například u úlohy 3C, kdy všichni žáci uváděli pouze přibližné řešení bez komentářů a zdůvodňování postupu. Dále jsem zjistila, že zadání, která obsahují velké množství podúloh (jako např. úlohy 1A a 2C) nejsou pro analýzu řešení vhodná. Je nutné ke každé podúloze přistupovat jako k samostatné úloze, nelze je obodovat pouze jedním číslem za celou úlohu jako celek, protože podúlohy tvoří samostatné části. Ukázalo se, že v hlavním výzkumu bude dále nutné rozpracovat detailně jednotlivá řešení úloh, aby bylo na první pohled patrné, které řešení je považováno za heuristické, které za řešení pokusem nebo přímou cestou. To v rámci předvýzkumu nebylo z kapacitních důvodů možné.

Dále jsem si díky předvýzkumu uvědomila, že do hlavního výzkumu bude vhodné zařadit i úlohy, které lze jednoduše řešit algoritmicky a se kterými se testovaní žáci již dříve seznámili. Výrazně jsem přehodnotila i cílovou skupinu, rozhodla jsem se, že místo žáků 7. ročníku budu hlavní výzkum provádět u žáků 9. ročníku, kteří jsou již schopni řešit mnohé úlohy přímou cestou a mají bohatší zkušenosti s řešením úloh.

I přes analýzu úloh z pre-testu podle úspěšnosti a podle jejich potenciálu na řešení heuristickou strategií jsem nakonec zvolila jiné kritérium, podle kterého jsem vybrala úlohy do hlavního výzkumu. Tím kritériem bylo vygradování testu z hlediska nutnosti využít k řešení heuristickou strategii. V hlavní testu budou úlohy řešitelné pouze přímou cestou, úlohy řešitelné přímou cestou i heuristickou strategií a úlohy řešitelné pouze heuristickou strategií. Více o úlohách zařazených do hlavního testu je uvedeno v kapitole 5.3.

5.3 Hlavní výzkum

Cílem hlavního výzkumu bylo zodpovězení dvou výzkumných otázek:

1) Jak souvisí typ osobnosti žáků s jejich přístupem k řešení úloh školské matematiky?

2) Používají intuitivní žáci častěji heuristické strategie řešení úloh než žáci smysloví a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh?

V analýze žákovských řešení jsem se dále zabývala zodpovězením dalších dvou vedlejších výzkumných otázek, jejichž odpovědi by mohly částečně objasnit souvislost mezi typem osobnosti žáka a jeho řešením úloh školské matematiky.

3) Jakých chyb se dopouštějí žáci při řešení netradičních úloh?

4) Dělají intuitivní žáci častěji numerické chyby?

Hlavní testování proběhlo 1. 3. 2019 ve dvou třídách 9. ročníku, kdy bylo přítomno 28 žáků. Všichni didaktický test odevzdali, až na jednu dívku s individuálním vzdělávacím plánem, která měla zadanou vlastní práci. V první vyučovací hodině řešili žáci 4 zadané úlohy z testu (viz Příloha 6). Na začátku další vyučovací hodiny během 15 minut vyplnili typologický dotazník (viz Příloha 5) a ve zbytku hodiny jsme společně rozebírali řešení jednotlivých úloh. Žáci se střídali u tabule a prezentovali spolužákům vlastní řešení, často probíhaly i diskuse nad častými chybami a možnými způsoby řešení jedné úlohy. Třetí vyučovací hodinu probíhaly rozhovory s šesti vybranými žáky, kteří byli učitelem diagnostikováni jako výrazně smysloví nebo výrazně intuitivní.

Druhý sběr dat proběhl 12. 3. 2019 na víceletém gymnáziu ve třídě s 27 žáky. Průběh výzkumu byl zcela totožný jako v předchozím sběru dat. Jednu vyučovací hodinu žáci řešili zadané úlohy a druhou hodinu jsme společně rozebírali možná řešení zadaných úloh. Další hodinu probíhaly rozhovory.

5.3.1 Typologický dotazník

K diagnostice osobnostního typu žáků byl zvolen mnou modifikovaný dotazník MBTI (Příloha 5), který zjišťoval preference žáků v rovině příjmu informací (preference intuice nebo smyslů). Vzorem pro sestavení tohoto dotazníku byl osobnostní dotazník podle Čakrta (1996, s. 29-35), ze kterého byly vybrané pouze otázky identifikující převahu smyslů nebo intuice a přizpůsobené jazyku patnáctiletých žáků. Některé otázky jsou pozměněné na oblast práce v matematice, která by měla být žákům blízká. Kromě jedné otevřené otázky je dotazník složen z 9 uzavřených otázek, kde žák vybírá pouze jednu ze dvou možností, která ho lépe charakterizuje nebo je méně nevyhovující než ta druhá. Jedna varianta odpovědi vždy charakterizuje intuitivně zaměřeného člověka a druhá smyslově.

Testy jsem vyhodnocovala podle pokynů k dotazníku MBTI, započítala jsem jen jasně označený výběr mezi variantami. Pokud se žák nerozhodl ani pro jednu možnost z výběru, nebo naopak zakroužkoval obě varianty k dané otázce, jeho odpověď na danou otázku nebyla započítána do celkových výsledků. Proto nemusí součet bodů S a N dávat dohromady celkový počet otázek, tj. 9. Nakonec jsem sečetla všechny odpovědi s preferencí smyslů (S) a intuice (N). Podle toho, jaké číslo bylo větší, takový typ žák reprezentuje. Například žák s výsledkem z dotazníku 5S a 4N je vyhodnocen jako s preferencí smyslů. V případě rovnosti čísel vyšel smíšený typ X.

Tab. 7: Žáci 9. ročníku školy H podle preference smyslů (S) nebo intuice (N)

Žák	Typ osobnosti		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H1	S	9S	4	S	S	S	S	S	S	S	S	S
H2	S	8S, 1N	4	S	S	S	S	S	S	N	S	S
H3	S	7S, 2N	4	S	S	S	S	N	S	N	S	S
H4	S	7S, 2N	4	S	S	S	S	S	N	N	S	S
H5	S	7S, 3N	3	S	S	S	S	S	N	N	N	S
H6	S	6S, 2N	1	S	S	-	S	S	S	N	N	S
H7	S	6S, 3N	4	S	S	S	S	-	N	N	N	s
H8	S	6S, 3N		S	S	S	S	S	N	N	N	S
H9	S	6S, 3N	4	N	N	S	S	S	N	S	S	S
H10	S	6S, 3N		S	S	S	S	N	S	N	N	S
H11	S	6S, 3N	1	S	N	S	S	S	N	N	S	S
H12	S	6S, 3N	4	S	S	N	N	S	S	S	N	S
H13	S	5S, 3N	3, 1	N	S	S	S	S	-	N	N	S
H14	S	5S, 4N	1	S	S	N	S	S	N	N	N	S
H15	S	5S, 4N	3	N	S	S	S	S	N	N	N	S
H16	S	5S, 4N	3	S	S	N	S	S	S	N	N	N
H17	S	5S, 4N	1	S	S	N	S	S	N	N	N	S
H18	S	4S, 3N		S	S	N	S	-	N	N	-	S
H19	X	3S, 3N	4	S	S	S	N	N	N	-	-	-
H20	X	4S, 4N	4	N	N	S	N	S	N	-	S	S
H21	N	4N, 3S		S	N	-	N	-	S	S	N	N
H22	N	5N, 4S	3	N	S	S	S	N	N	N	N	S
H23	N	5N, 3S	2	S	S	N	N	S	N	N	N	N
H24	N	6N, 3S	1	N	S	N	S	S	N	N	N	N
H25	N	7N, 2S	4	N	N	N	N	S	N	N	S	N
H26	N	7N, 2S	4	N	N	S	N	N	N	N	N	S
H27	N	7N, 2S	4	N	S	N	S	N	N	N	N	N

Odpověď na otevřenou otázku č. 1 měla za cíl určit, jaké úloze z testu by se daný žák nejraději vyhnul, pokud by mohl. Předpokládala jsem, že žáci s preferencí smyslů se budou častěji vyhýbat spíše netradičním úlohám, kde je nutné najít řešení pomocí heuristické strategie, a naopak žáci s preferencí intuice se budou chtít raději vyhnout úlohám, které chtějí po řešiteli, aby prokázal, že umí aplikovat jednoduchý algoritmus. Toto očekávání se nepotvrdilo, protože většina žáků ze školy H by se raději vyhnula řešení úlohy 4, bez rozdílu preference smyslů nebo intuice. Rozdíly byly spíše mezi třídami než mezi smyslovými a intuitivními žáky, proto se dále rozborem otázky č. 1 nezabývám.

Tab. 8: Žáci kvarty školy K podle preference smyslů (S) nebo intuice (N)

Test	Typ osobnosti		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K1	S	8S, 1N	3	S	S	S	S	N	S	S	S	S
K2	S	7S, 2N	3	N	S	S	S	S	S	N	S	S
K3	S	7S, 2N	3	S	S	S	S	S	N	N	S	S
K4	S	7S, 2N	3	N	N	S	S	S	S	S	S	S
K5	S	6S, 3N	3	N	S	S	S	S	S	N	N	S
K6	S	6S, 3N	3	N	S	S	S	S	N	N	S	S
K7	S	6S, 3N	4	S	S	S	S	S	N	N	N	S
K8	S	6S, 3N	3	N	S	N	S	S	N	S	S	S
K9	S	5S, 3N	3	S	S	S	S	N	N	-	N	S
K10	S	5S, 4N	3	N	N	S	S	S	N	S	N	S
K11	S	5S, 4N	3	N	N	S	S	S	N	N	S	S
K12	S	5S, 4N	2	N	S	N	S	N	S	N	S	S
K13	S	5S, 4N	2	N	S	S	S	N	N	N	S	S
K14	S	5S, 4N		N	S	S	S	S	N	N	N	S
K15	S	5S, 4N	1	N	S	S	S	N	N	N	S	S
K16	S	5S, 4N	3	S	N	S	S	N	N	N	S	S
K17	S	5S, 4N	3	N	S	S	S	S	N	N	N	S
K18	X	4S, 4N	3	N	S	S	S	-	N	N	S	N
K19	X	4S, 4N	1	N	S	S	N	S	-	N	S	N
K20	N	5N, 4S	2	N	S	S	N	S	N	N	N	S
K21	N	5N, 4S	1	N	S	N	S	S	N	N	N	S
K22	N	5N, 4S	3	S	N	S	N	N	N	S	N	S
K23	N	5N, 4S	3	N	S	S	S	N	N	N	S	N
K24	N	4N, 2S	3	N	N	-	N	-	N	S	S	-
K25	N	6N, 3S	3	N	S	N	N	S	N	N	N	S
K26	N	7N, 2S	1	N	S	N	N	S	N	N	N	N
K27	N	8N, 1S	3	N	N	N	N	N	N	N	N	S

Výsledky typologického dotazníku uvádím v tab. 7 a 8 srovnané od výrazně smyslového žáka k výrazně intuitivnímu. Z celkem 27 žáků 9. ročníku školy H bylo 18 žáků diagnostikováno jako smyslových (67 %), 7 jako intuitivních (26 %) a 2 jako smíšený typ (7 %). Z celkem 27 žáků kvarty školy K bylo 17 diagnostikováno jako smyslových (63 %), 2 jako smíšený typ (7 %) a 8 jako intuitivní (30 %). Obě rozložení osobnostních typů ve skupinách odpovídá statisticky nejčastějšímu rozložení typů v jedné třídě (viz kapitola 3.3).

Pro analýzu žákovských řešení jsem oba zkoumané vzorky spojila do jednoho celku, který měl 54 žáků, z toho 35 smyslově orientovaných (65 %), 4 smíšené (7 %) a 15 intuitivních (28 %) žáků.

5.3.2 Didaktický test

Test pro vybrané žáky 9. ročníku ZŠ a odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia byl složen ze 4 úloh a žákům byly náhodně rozdány 2 varianty tohoto testu F a G (viz Příloha 6). První úloha v obou variantách byla zaměřena na řešení rovnic nebo úpravu výrazů. Vyřešení této úlohy předpokládá od žáků aplikaci algoritmu. Druhá úloha byla slovní úloha na směsi. Obě skupiny tento typ slovních úloh již řešily v rámci hodin matematiky, takže to pro ně nemělo být nic nového. Očekávala jsem, že tuto úlohu budou převážně řešit přímou cestou – přes rovnici. V případě, že přímou cestu neznají, mohou si pomoci různými heuristickými strategiemi. Třetí úloha byla ze skupiny netradičních úloh, a ještě ke všemu geometrická, od žáků jsem očekávala hledání způsobu řešení nové, pro ně neznámé úlohy, kdy způsob řešení je otevřený, neexistuje přímá cesta. Poslední čtvrtá úloha byla v obou skupinách také netradiční a pomocí ní jsem zkoumala, jak si žáci poradí se zobecňováním a konkretizací, zda objeví v obou úlohách nějaký systém, který by jim pomohl úlohu vyřešit zcela správně.

Tematicky byl test zaměřen na poznatky, které by měli znát jak žáci 9. ročníku, tak žáci odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Konkrétně se jedná o řešení rovnic, úpravu algebraických výrazů, řešení slovní úlohy na míchání směsí, určení obsahu čtyřúhelníku, hledání vztahů v dekadické poziční soustavě a při sčítání sudých a lichých čísel.

První dvě úlohy by měly vyhovovat spíše smyslovým žákům, protože se při jejich řešení mohou opřít o minulé zkušenosti, aplikovat jednoduše algoritmus a úlohu vyřešit bez většího bádání a objevování. Třetí a čtvrtá úloha by měly vyhovovat spíše intuitivním žákům, protože při jejich řešení mohou zcela uvolnit svoji kreativitu a hledat nejefektivnější řešení. Z odpovědí typologického dotazníku na otázku 1 jsem však zjistila, že výběr nejméně oblíbené úlohy z testu se lišila spíše mezi školami než mezi osobnostními typy žáků. Žáci ze školy H by se častěji vyhnuli poslední na zobecňování zaměřené úloze. Naopak žáci ze školy K častěji vybírali geometrickou úlohu jako tu nejméně oblíbenou na řešení a v komentářích dávali jasně najevo, že je geometrie a počítání obsahů nebaví.

5.4 Analýza žákovských řešení úloh

V rámci hlavního výzkumu jsem analyzovala 54 testů po 4 úlohách přesněji po 5, protože úloha 1 obsahovala 2 zadané podúlohy. Celkem to bylo 260 žákovských řešení. Tab. 9 představuje počty žáků a variantu zadání, kterou řešili. Variantu F řešilo celkem 27 žáků z nichž bylo 16 smyslových a 9 intuitivních. Variantu G řešilo také 27 žáků z nichž bylo 19 smyslových a 6 intuitivních. V obou variantách byly 2 smíšení žáci. Rozložení osobnostních typů žáků mezi obě varianty testu lze brát jako rovnoměrné.

Tab. 9: Počty řešitelů jednotlivých variant testu

	Počet smyslových žáků	Počet intuitivních žáků	Počet smíšených žáků
Varianta F	**16**	**9**	**2**
Varianta G	**19**	**6**	**2**
Celkem	**35**	**15**	**4**

Jednotlivé řešitele jsem kódovala tak, že jsem si testy z dané školy seřadila od nejvíce smyslově orientované žáka po toho nejvíce intuitivního (na základě odpovědí z dotazníku) a přiřadila jsem jim číslo od 1 do 27. Počáteční písmeno určuje, z jaké je žák školy – H určuje školu H, 9. ročník, a K školu K, kvartu.

Na základě analýz několika řešení jsem vytvořila následující kategorie, podle kterých jsem pak jednotlivá řešení kódovala a přiřazovala jim zároveň body:

- Kategorie 0 – absence řešitelského procesu (tzv. odevzdání prázdného papíru),
- Kategorie 1 – neúplné, závažně chybné nebo neuchopené řešení (tzn. žák si vypsal jen údaje ze zadání, případně následovala náhodná početní operace s čísly ze zadání), řešení, které obsahovalo chybný předpoklad (patří sem i řešení, která sice kumulací několika chyb nalezla správný výsledek, ale při změně čísel v zadání by to nefungovalo),
- Kategorie 2 – správné a dokončené řešení s numerickou chybou, nepozorností v přepisu apod. méně závažnou chybou,
- Kategorie 3 – zcela správné řešení.

Dále jsem si u jednotlivých žákovských řešení kódovala, zda:

- Žák řešil úlohu přímou algoritmickou cestou nebo heuristickou strategií.
- Žák řešil úlohu pokusem.
- V čem žáci nejčastěji chybovali.

- Jakou konkrétní heuristickou strategii při řešení využili.

U každé úlohy jsem určila absolutní a relativní četnost počtu řešení v jednotlivých kategoriích 0 až 3. Úspěšnost řešení každé úlohy byla posuzována jak na základě průměrného bodového zisku (tzv. průměrná úspěšnost), tak relativním podílem správných řešení (tj. relativní četnost řešení kategorie 3). Průměrnou úspěšnost jsem vypočítala tak, že jsem každému řešení přiřadila tolik bodů, jaké bylo číslo kategorie, do které bylo zařazeno (0 bodů: absence řešení až 3 body: zcela správné řešení). Číslo kategorie jsem pak vynásobila počtem řešitelů dané kategorie a výsledky všech kategorií sečetla a vydělila celkovým počtem řešitelů dané úlohy. Příklad výpočtu průměrné úspěšnosti pro všechny žáky při řešení úlohy 1F1: $10 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 8 = 48; \frac{48}{27} = 1{,}78$.

Úlohy, u kterých se objevila řešení heuristickými strategiemi, pokusem a přímou cestou, jsem navíc analyzovala úspěšnost jednotlivých strategií řešení a úspěšnost jednotlivých typů žáků při řešení různými strategiemi. Řešení smíšených žáků nebyla podrobně analyzována, protože se jednalo o zanedbatelný počet žáků.

5.4.1 Úlohy 1F a 1G

Zadání

Úloha 1F: Zjednodušte: (Výsledný výraz nesmí obsahovat závorky).

1F1) $(-r \cdot s) - 3(r-s)^2 + 3r \cdot (r-s)$.

1F2) $3m - \frac{m}{2} \cdot (2-m) - \frac{m^2}{2}$.

Úloha 1G: Řešte rovnici:

1G1) $13 \cdot (2x+3) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}x + 2\right) - 2$.

1G2) $\frac{t-7}{8} + 2 = \frac{1}{4} \cdot (3-t)$.

Řešení přímou algoritmickou cestou

1F1) $= -rs - 3r^2 + 6rs - 3s^2 + 3r^2 - 3rs = \underline{2rs - 3s^2.}$

1F2) $= 3m - m + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = \underline{2m.}$

1G1)

$$26x + 39 = -x + 14 - 2$$

$$27x = -27$$

$$\underline{x = -1}$$

$Zk.: L\ =\ 13(-2+3) =\ 13;\ P = 7\left(\frac{1}{7}+2\right) - 2 = 1 + 14 - 2 = 13 \rightarrow L = P = 13.$

1G2)

$$t - 7 + 16 = 6 - 2t$$

$$3t = -3$$

$$\underline{t = -1}$$

$Zk.: L\ = -1 + 2 = 1;\ P = 1 \rightarrow L = P = 1.$

Očekávání

Na základě teorie typů a popisu smyslových a intuitivních žáků v matematice (viz kapitola 3.4.) jsem předpokládala, že smysloví žáci by mohli být při řešení rovnic a úpravě výrazů úspěšnější než intuitivní žáci, kteří mohou lehce přehlédnout znaménko, nedůsledně roznásobit závorku apod. Na druhou stranu by intuitivním žákům mohlo vyhovovat, že rovnice a úpravy výrazů jsou dostatečně abstraktní záležitostí. Smysloví žáci se v těchto úlohách mohou opřít o v minulosti nabité zkušenosti s řešením tohoto typu úloh, zadání je konkrétní, neobsahuje žádné skryté významy. Je možné, že se intuitivní žáci těmto úlohám raději vyhnou, nebudou je řešit, protože pro ně nebudou dostatečně atraktivní.

V*ýsledky úlohy 1F1*

Výsledky řešení úlohy 1F1 jsou uvedeny v tab. 10. Úlohu správně vyřešilo 10 z 27 žáků, kteří zadání obdrželi. Celkem však úlohu řešilo pouze 23 žáků, 4 žáci nezačali úlohu vůbec řešit (řešení kategorie 0). Průměrná úspěšnost intuitivních žáků je vyšší než žáků smyslových, ale smysloví žáci mají vyšší relativní četnost správných řešení než žáci intuitivní. Intuitivní žáci relativně častěji udělali při řešení numerickou chybu než žáci smysloví (33 % versus 13 %). Smysloví žáci zase častěji chybovali v užití vzorce $(a-b)^2$, nebo chybovali jinak.

Správná řešení smyslových a intuitivních žáků se od sebe příliš nelišila. Obě skupiny žáků používali často podtrhávání a škrtání podobných členů, většinou upravovali výrazy souvisle za sebou a neměli potřebu rozepisovat si některé úpravy mimo hlavní proud řešení. Naopak žáci, kteří si psali některé úpravy mimo hlavní proud řešení, častěji chybovali. Výrazně se obě skupiny nelišily ani v počtu jednotlivých kroků úprav, smysloví i intuitivní žáci seskupovali několik úprav do jednoho kroku.

Řešení kategorie 2 (řešení s méně závažnou chybou) obsahovala drobné chyby z nepozornosti jako například chybně zapsané znaménko při roznásobování závorky, chybu v přepisování jednotlivých členů výrazu (člen $3rs$ opsán pouze jako člen $3s$) apod. Do kategorie 1 (řešení neúplné, chybné nebo neuchopené) byla zařazena řešení, která obsahovala chybu v úpravě vzorce $(a-b)^2$.

Tab. 10: Úspěšnost řešení úlohy 1F1

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ (v %)			
1F1	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,78	27	10	5	8	4	37	19	30	15
intuitivní	1,89	9	3	3	2	1	33	33	22	11
smysloví	1,69	16	6	2	5	3	38	13	31	19
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Ukázky žákovských řešení úlohy 1F1

Níže uvádím několik reprezentativních řešení každé z kategorií 1 až 3, aby čtenář lépe pochopil prezentované výsledky výše. Z kategorie 3, zcela správných řešení, jsem vybrala řešení intuitivního i smyslového žáka, kde je patrné podtrhávání a škrtání jednotlivých členů výrazu při práci s nimi. U každého řešení je v závorce uveden kód žáka a písmeno S – smyslový, X – smíšený, nebo N – intuitivní, což odkazuje na osobnostní typ žáka.

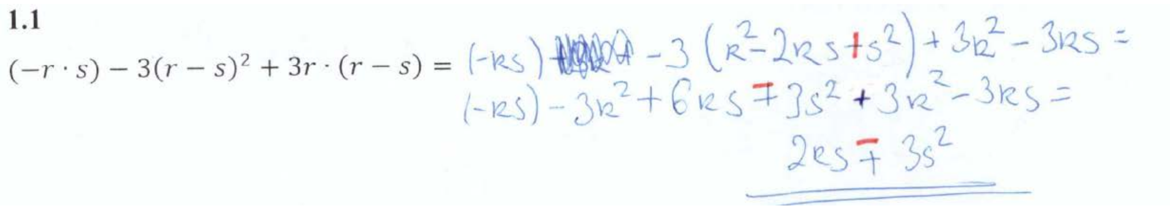
$$(-r\cdot s)-3(r-s)^2+3r\cdot(r-s)=(-rs)-3(r^2-2rs+s^2)+3r^2-3rs=$$
$$(-rs)-3r^2+6rs-3s^2+3r^2-3rs$$
$$-rs-3r^2+6rs-3s^2+3r^2-3rs=2rs-3s^2$$

(Žák H2, S)

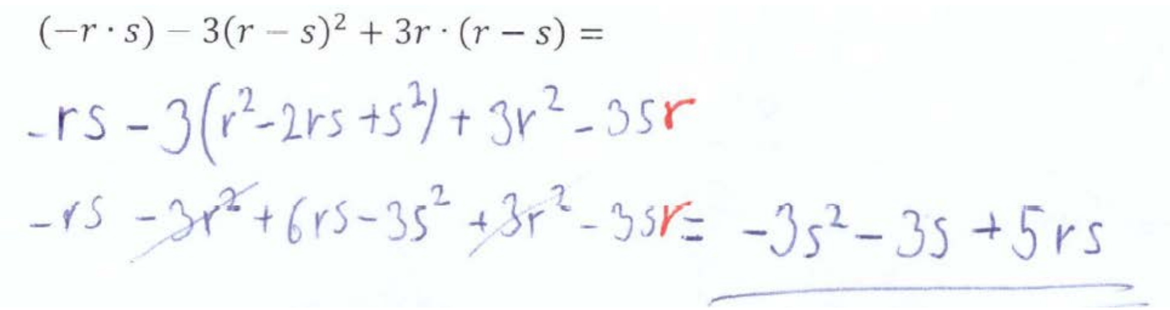
$$(-r\cdot s)-3(r-s)^2+3r\cdot(r-s)=-rs-3(r^2+s^2-2rs)+3r^2-3rs=$$
$$=-rs-\cancel{3r^2}-3s^2+6rs+\cancel{3r^2}-3rs=$$
$$=2rs-3s^2$$

(Žák K21, N)

Z řešení kategorie 2 jsem vybrala reprezentanta chyby z nepozornosti ve znaménku a v opisu členů výrazu.

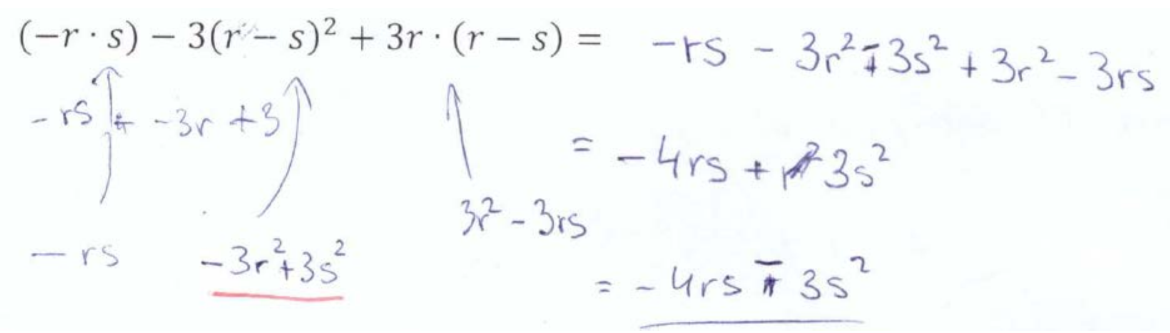


(Žák K7, S)

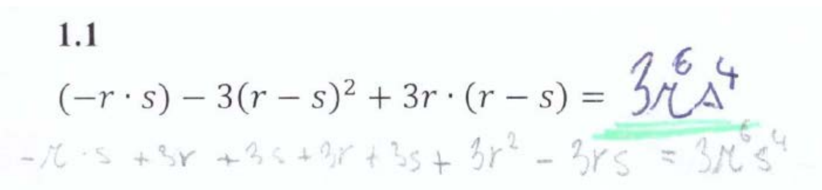


(Žák K26, N)

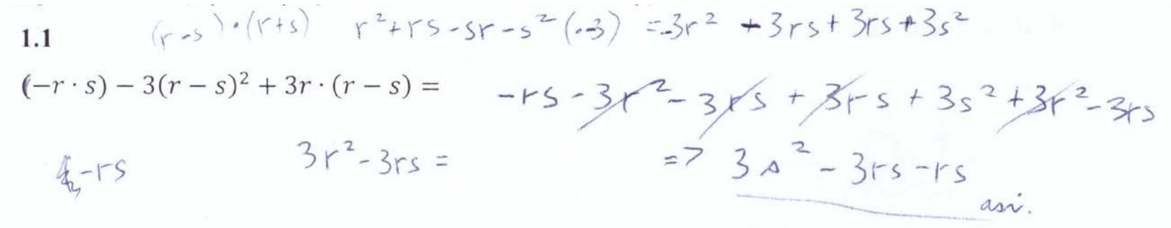
Skupinu kategorie 1 v tomto souhrnu zastupují řešení, kde se vyskytuje hrubá chyba v úpravě a odvozování vzorce $(a - b)^2$, špatná práce s algebraickými výrazy. Řešení žáka H21 také reprezentuje řešení, kdy jsou jednotlivé úpravy vytvářeny mimo hlavní proud řešení a kdy vedou mimo jiné k chybě ve znaménku u členu $3s^2$.



(Žák H21, N)



(Žák H27, N)


1.1 $(r-s)\cdot(r+s)$ $r^2+rs-sr-s^2(\cdot-3)$ $=-3r^2+3rs+3rs+3s^2$

$(-r\cdot s)-3(r-s)^2+3r\cdot(r-s)=$ $-rs\cancel{-3r^2}\cancel{-3rs}\cancel{+3rs}+3s^2\cancel{+3r^2}-3rs$

$4-rs$ $3r^2-3rs=$ $\Rightarrow 3s^2-3rs-rs$

asi.

(Žák K14, S)

Výsledky úlohy 1F2

Výsledky řešení úlohy 1F2 jsou uvedeny v tab. 11. Úloha byla pro žáky velmi obtížná, protože z 27 žáků ji správně vyřešili pouze 4 žáci (kategorie 3), další 4 žáci udělali v řešení méně závažnou chybu (například z nepozornosti, kategorie 2), 11 žáků ji vyřešilo chybně nebo nedokončilo svoje řešení (kategorie 1) a 8 žáků ji vůbec neřešilo (kategorie 0).

Průměrná úspěšnost intuitivních žáků je sice vyšší než u žáků smyslových, ale smysloví žáci mají vyšší relativní podíl správných výsledků než intuitivní žáci, a naopak nižší podíly v kategoriích s chybami. U intuitivních žáků je pak nižší podíl absence řešení.

Tab. 11: Úspěšnost řešení úlohy 1F2

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ (v %)			
1F2	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,15	27	4	4	11	8	15	15	41	30
intuitivní	1,22	9	1	2	4	2	11	22	44	22
smysloví	1	16	2	2	6	6	13	13	38	38
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Hlavní překážkou správného vyřešení úlohy se ukázaly zlomky. 41 % všech řešitelů mělo tendenci vypořádat se se zlomky jako v případě rovnic, tedy převést na společný jmenovatel a poté vynásobit celou rovnici hodnotou jmenovatele. Tato hrubá chyba se vyskytovala u smyslových i intuitivních žáků.

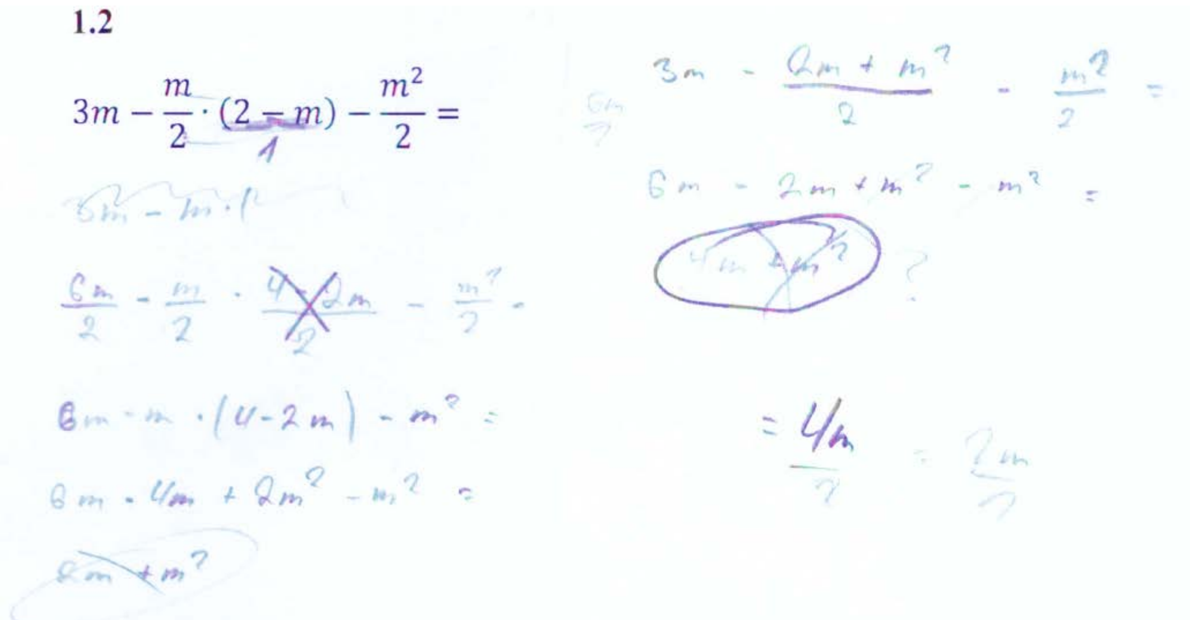
Řešení kategorie 1 obsahovala chyby například v roznásobení závorky a krácení zlomků, někdy k tomu docházelo v jednom kroku. Dále jsem sem zařadila chyby způsobené přehlédnutím nějakého členu apod.

Vzhledem k tolika chybným řešením jsem za správný výsledek považovala řešení v následujících tvarech: $2m, \frac{2m}{1}, 3m - \frac{2m}{2}$. Řešení s výsledkem *2m* obsahovala jen několik úprav a řešitel velmi rychle došel ke správnému výsledku. Řešení s výsledkem $\frac{2m}{1}$ a $3m -$

$-\frac{2m}{2}$ obsahovala navíc původně chybné řešení. Řešitel si v průběhu upravování uvědomil chybu (v jednom případě upravení zlomků jako v rovnici, ve druhém případě chybný opis členu) a začal nové řešení, které už vedlo k téměř správnému výsledku.

Ukázky žákovských řešení úlohy 1F2

Z kategorie 3 jsem vybrala jedno krátké řešení (bez opravného procesu, K13) a řešení, kde si žák K4 uvědomil, že zlomky v úpravě algebraických výrazů nelze upravovat jako v rovnici. Kategorii 2 reprezentuje v této části řešení žáka K27 a žáka K8, kde je viditelná chyba zřejmě z nepozornosti u roznásobování závorky a znaménka. Z kategorie 1 jsem také vybrala dvě řešení. Jedno řešení (K21) ukazuje sice správný výsledek, ale cesta, která k němu vedla, je zcela špatná, s úpravou výrazu je zacházeno jako s úpravou rovnice. Tato hrubá chyba je zde samostatně prezentována v řešení žáka H26.



(Žák K4, S, 1. část)

(Žák K4, S, 2. část)

$$3m - \frac{m}{2}\cdot(\underset{1}{2} - \underset{1}{m}) - \frac{m^2}{2} =$$

$$= 3m - m + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = 2m$$

(Žák K13, S)

$$3m - \frac{m}{2}\cdot(2 - m) - \frac{m^2}{2} =$$

$$3m - \frac{2m}{2} + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = m$$

(Žák K27, N)

$$3m - \frac{m}{2}\cdot(2 - m) - \frac{m^2}{2} = \frac{3m}{1} - \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{2-m}{1}\right) - \frac{m^2}{2} = \frac{6m}{2} - \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{4-2m}{2}\right) - \frac{m^2}{2} =$$

$$\frac{6m}{2} - \frac{4m-2m^2}{4} - \frac{m^2}{2} = \frac{12m - 4m + 2m^2 - 2m^2}{4} = \frac{8m-4m^2}{4}$$

$$=$$

(Žák K8, S)

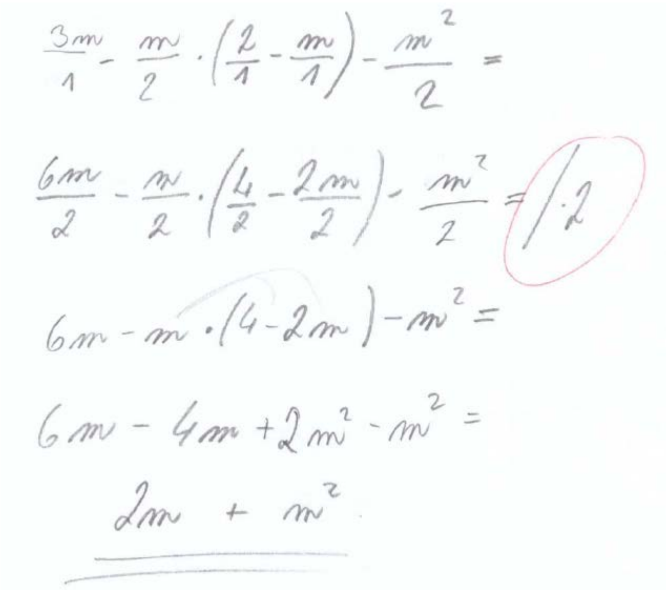
$$\frac{6m}{2} - \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{4}{2} - \frac{2m}{2}\right) - \frac{m^2}{2} = /\cdot 2$$

$$= 6m - m\cdot(4 - m) - m^2 =$$

$$= \cancel{6} \; 6m - 4m \cancel{+m^2} \cancel{-m^2} =$$

$$= 2m$$

(Žák K21, N)



$$\frac{3m}{1}-\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{2}{1}-\frac{m}{1}\right)-\frac{m^2}{2}=$$

$$\frac{6m}{2}-\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{4}{2}-\frac{2m}{2}\right)-\frac{m^2}{2}= /\cdot 2$$

$$6m-m\cdot(4-2m)-m^2=$$

$$6m-4m+2m^2-m^2=$$

$$\underline{2m+m^2}$$

(Žák H26, N)

Výsledky úlohy 1G1

Výsledky řešení úlohy 1G1 jsou představeny v tab. 12. Rovnice byla pro žáky jednoduchá, správně ji vyřešilo 59 % všech řešitelů. Úlohu neřešil pouze 1 žák. V řešení této úlohy byli jednoznačně úspěšnější intuitivní žáci, všichni ji vyřešili správně a bez jakýchkoliv chyb.

Do kategorie 3 byla zařazena všechna řešení, která dospěla k výsledku $x = -1$. Povinnost provedení zkoušky nebylo v zadání zmíněno, proto řešení kategorie 3 nemusely obsahovat zkoušku. Zkouška se mezi všemi řešeními objevila pouze jednou. Domnívám se, že pokud by ji žáci zařadili do všech řešení, nebylo by tolik neúspěšných řešení.

Kategorie 2 obsahuje řešení pouze smyslových žáků s numerickou chybou (například $\frac{7}{7} = 7$, chybné roznásobení závorky), kdy řešitel dospěl k nějakému výsledku. Naopak v kategorii 1 jsou všechna neúplná řešení často také zapříčiněná numerickou chybou.

Tab. 12: Úspěšnost řešení úlohy 1G1

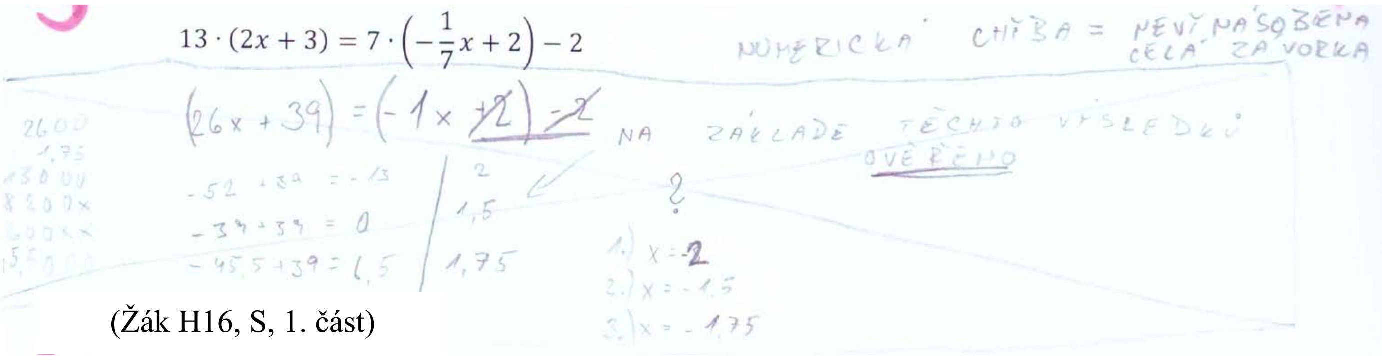
			ABSOLUTNÍ				**RELATIVNÍ v (%)**			
1G1	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	2,26	27	16	3	7	1	59	11	26	4
intuitivní	3	6	6	0	0	0	100	0	0	0
smysloví	1,95	19	8	3	7	1	42	16	37	5
smíšení	3	2	2	0	0	0	100	0	0	0

Mezi převážně algoritmickými řešeními se vyskytly i dvě řešení, která by bylo možné zařadit mezi heuristické strategie. Strategii těchto řešení by bylo možné nazvat odhad-ověření-oprava (viz řešení H16, S).

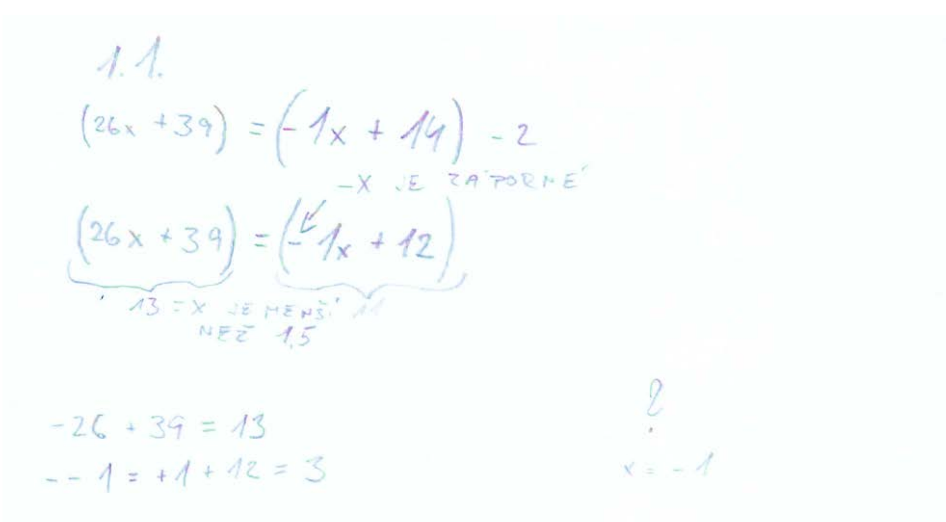
Ukázky žákovských řešení úlohy 1G1

Algoritmická správná řešení na tomto místě neuvádím, protože byla téměř shodná s ukázkovým řešením. Místo toho zde představím úspěšně realizované řešení heuristickou strategií (H16). Na základě pěti pokusů dosazení hodnoty neznámé, žák dospěl ke správnému výsledku. Řešení je rozložené na dvě části, protože žák úlohu řešil na dvou částech listu. Dále uvádím jediné řešení, které obsahovalo zkoušku, a navíc bylo v posledním kroku úpravy dořešeno pokusem (H25)

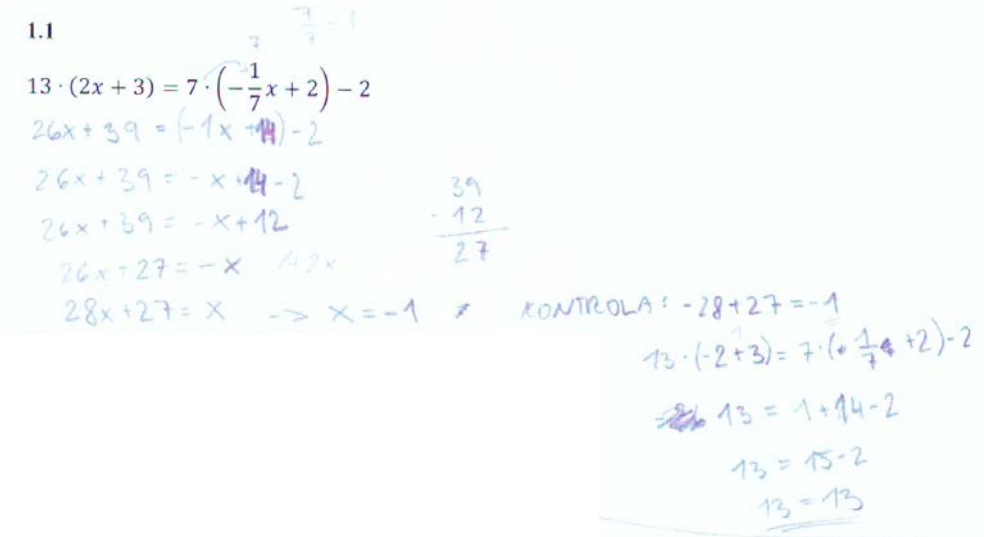
Z kategorie 2 jsem vybrala řešení s chybou v krácení zlomků u silně smyslového žáka (K1, S). Z kategorie 1 jsem vybrala jedno z nedokončených řešení, které bylo také způsobeno drobnou chybou (H8).



(Žák H16, S, 1. část)



(Žák H16, S, 2. část)



1.1

$$13 \cdot (2x + 3) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}x + 2\right) - 2$$

$26x + 39 = (-1x + 14) - 2$

$26x + 39 = -x + 14 - 2$

$26x + 39 = -x + 12$

$26x + 27 = -x$

$28x + 27 = x \rightarrow x = -1$

$39 - 12 = 27$

KONTROLA: $-28 + 27 = -1$

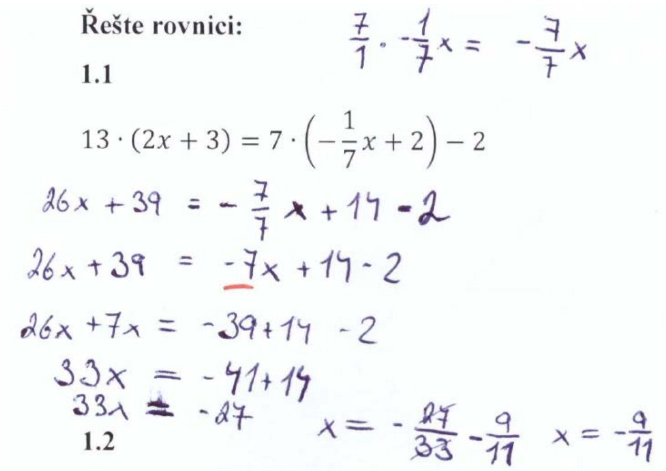
$13 \cdot (-2 + 3) = 7 \cdot (\frac{1}{7} + 2) - 2$

$13 = 1 + 14 - 2$

$13 = 15 - 2$

$13 = 13$

(Žák H25, N)



Řešte rovnici: $\frac{7}{1} \cdot -\frac{1}{7}x = -\frac{7}{7}x$

1.1

$$13 \cdot (2x + 3) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}x + 2\right) - 2$$

$26x + 39 = -\frac{7}{7}x + 14 - 2$

$26x + 39 = -7x + 14 - 2$

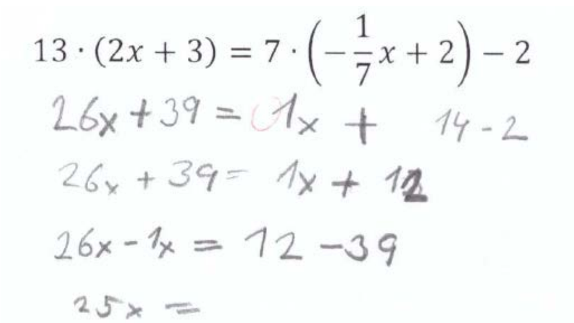
$26x + 7x = -39 + 14 - 2$

$33x = -41 + 14$

$33x = -27 \quad x = -\frac{27}{33} - \frac{9}{11} \quad x = -\frac{9}{11}$

1.2

(Žák K1, S)



$$13 \cdot (2x + 3) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}x + 2\right) - 2$$

$26x + 39 = 1x + 14 - 2$

$26x + 39 = 1x + 12$

$26x - 1x = 12 - 39$

$25x =$

(Žák H8, S)

Výsledky úlohy 1G2

Úlohu 1G2 vyřešilo správně 8 žáků (30 %), což dokládají data z tab. 13. Nejvíce řešení bylo kategorie 1 (37 %). Relativně úspěšnější v řešení této úlohy byli intuitivní žáci, kteří dosahovali vyšší průměrné úspěšnosti, měli i relativně vyšší podíl správných řešení. Intuitivní žáci měli opět vyšší relativní chybovost než smysloví žáci, ale na rozdíl od smyslových žáků se všichni pokusili o řešení úlohy.

Do kategorie 3 byla zařazena všechna řešení, která správným postupem dospěla k výsledku $x = -1$. Zkouška nebyla vyžadována. Do kategorie 2 byla zařazena řešení, která obsahovala méně závažnou chybu jako chybu ve znaménku, v násobení. Kategorie 1 pak zahrnovala taková řešení, která byla buď neúplná, nebo obsahovala závažnější chyby jako například dvojí násobení závorky (viz řešení K18).

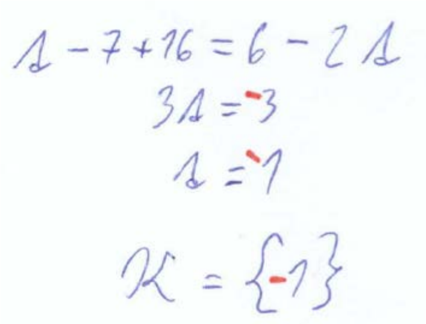
Stejně jako u úlohy 1F2 dělali žákům problém zlomky. Někteří se je snažili upravit na desetinné číslo, jiní používali dvojí rozšiřování zlomku (viz řešení K18). Ve spojitosti se zlomky se mezi řešeními objevilo i jedno grafické znázornění, které mělo vést k odhadu hodnoty neznámé, což se bohužel řešiteli nepovedlo (řešení H22). Jiný náznak heuristické strategie se mezi řešeními nevyskytl.

Tab. 13: Úspěšnost řešení úlohy 1G2

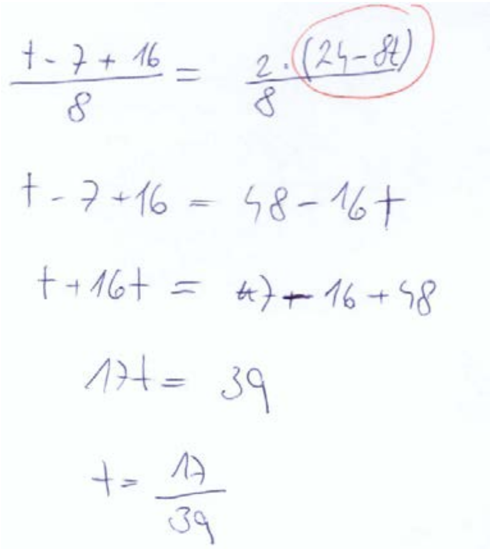
			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
1G2	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,56	27	8	4	10	5	30	15	37	19
intuitivní	1,83	6	2	1	3	0	33	17	50	0
smysloví	1,47	19	6	2	6	5	32	11	32	26
smíšení	1,50	2	0	1	1	0	0	50	50	0

Ukázky žákovských řešení úlohy 1G2

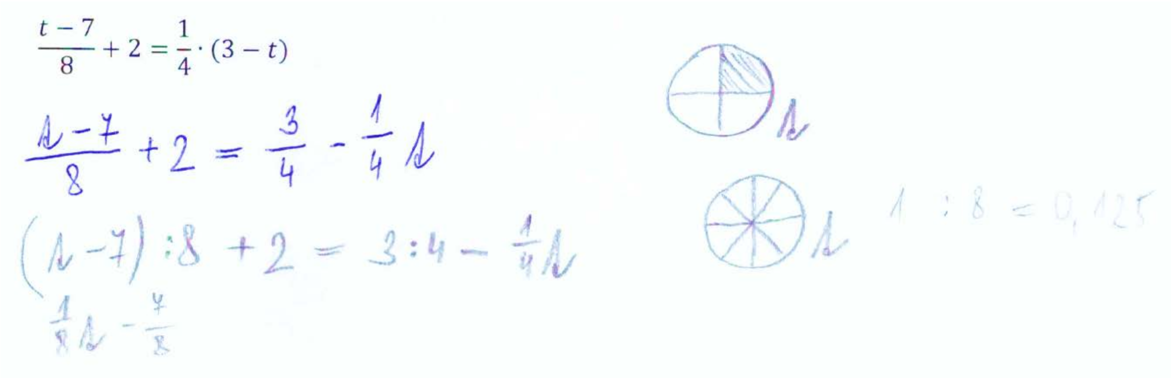
Úloha 1G2 byla řešena převážně algoritmicky. Mezi správnými výsledky se nevyskytla jiná strategie řešení než ta, kterou uvádím v rozboru úlohy, proto zde nebude prezentováno žádné správné řešení. Vybrala jsem 3 ukázky řešení, které by měly objasnit rozdíl mezi kategoriemi 2 a 1. V kategorii 2 jsou dokončená řešení s pouze 1 méně závažnou chybou způsobenou pravděpodobně nepozorností (jako např. řešení K19). V kategorii 1 jsou jednak nedokončená řešení a jednak řešení se závažnější chybou (např. K18). Dále bych na tomto místě ráda prezentovala řešení H22, které obsahuje grafické znázornění.



(Žák K19, X)



(Žák K18, X)



(Žák H22, N)

Shrnutí výsledků řešení úloh 1F a 1G

Z řešení úloh zaměřených na úpravy algebraických výrazů a řešení rovnic, tedy úloh, kde je nejvhodnější aplikovat přímou cestu řešení pomocí algoritmu, vyplývá, že jsou v nich úspěšnější intuitivní žáci. Za svá řešení obdrželi v průměru více bodů (body odpovídají kategoriím 0 až 3). Pokud se na úspěšnost zaměříme z pohledu relativního podílu správných řešení, jsou v úpravě výrazů úspěšnější smysloví žáci a v rovnicích intuitivní. Získaná data nepotvrdila, že by se vybraní intuitivní žáci vyhýbali častěji řešení tohoto typu úloh, kde je nutné aplikovat neoriginální způsob řešení. Domnívám se, že je to způsobeno tím, že úlohy 1F a 1G jsou dostatečně abstraktní, takže v nich mohou intuitivní žáci hledat zlepšení v podobě kumulace několika úprav do jednoho kroku apod.

Dalším očekáváním bylo, že intuitivní žáci budou častěji dělat numerické chyby než smysloví žáci. Tato hypotéza byla potvrzena, protože intuitivní žáci mají ve 3 ze 4 úloh vyšší relativní podíl řešení v kategorii 2.

5.4.2 Úlohy 2F a 2G

Zadání

Úloha 2F: Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Drak má 7 hlav a 5 nohou a drakouš má 3 hlavy a 5 nohou. Astronauti na planině napočítali 103 hlav a 85 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli?

Úloha 2G: Část lístků do divadla pro děti stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Řešení přímou algoritmickou cestou – rovnicí

Úloha 2F: Zvolím neznámé x a y, kde x je počet draků a y počet drakoušů. Sestavím dvě rovnice o dvou neznámých a určím jednotlivé počty draků a drakoušů.

$$5x + 5y = 85 \qquad (0)$$

$$\underline{7x + 3y = 103}$$

$$x + y = 17 \rightarrow x = 17 - y = 17 - 4 = 13 \qquad (1)$$

$$\underline{7x + 3y = 103}$$

$$7(17 - y) + 3y = 103$$

$$4y = 16$$

$$\underline{y = 4}$$

<u>Odpověď:</u> Astronauti viděli 13 draků a 4 drakouše.

<u>Poznámka:</u> Protože mají všechny obludy ze zadání 5 nohou, můžu ještě před sestavením soustavy rovnic určit celkový počet oblud, které astronauti viděli. $85 : 5 = 17$ Astronauti viděli celkem 17 draků a drakoušů. Tím rovnou dostanu jednodušší soustavu rovnic (1). Bez této úpravy je řešení původní soustavy rovnic (0) komplikovanější.

Úloha 2G: Analogicky vyřeším i úlohu 2G. Opět zvolím neznámé pro počet lístků za 8 Kč (x) a pro počet lístků za 11 Kč (y). Sestavím soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$x + y = 97 \rightarrow x = 97 - y = 34$$

$$\underline{8x + 11y = 965}$$

$$8(97 - y) + 11y = 965$$

$$3y = 965 - 776$$

$$\underline{y = 63}$$

Odpověď: Prodalo se 63 lístků po 11 Kč a 34 lístků po 8 Kč.

Poznámka: Tato úloha je oproti úloze 2F jednodušší v tom, že celkový počet kusů lístků už známe, u úlohy 2F jsme museli dopočítat. Naopak je úloha 2G náročnější v tom, že jsou zadaná větší čísla než s úloze 2F.

Řešení pokusem

Úlohu 2F lze jednoduše vyřešit dosazováním konkrétních hodnot, protože celkový počet oblud je poměrně nízký. U úlohy 2G je to s metodou pokusu složitější kvůli větším číslům.

Řešení heuristickou strategií – systematické experimentování (SE)

U úlohy 2F lze pomocí kalkulačky sestavit následující tabulku (viz tab. 14) a určit správný výsledek. Nejdříve ale musíme zjistit, kolik oblud je tam celkem (17), jinak by se tato strategie nedala aplikovat.

Tab. 14: Systematické experimentování – úloha 2F

Počet draků	Počet drakoušů	Počet hlav celkem
0	17	51
1	16	55
2	15	59
3	14	63
4	13	67
5	12	71
6	11	75
7	10	79
8	9	83
9	8	87
10	7	91
11	6	95
12	5	99
13	**4**	**103**
14	3	107
15	2	111
16	1	15
17	0	119

Analogicky lze touto strategií řešit i úlohu 2G, ale vzhledem k velkému celkovému počtu lístků by to žákům zabralo více času, i když by si pomohli kalkulačkou. Vhodnou technickou pomůckou by bylo v tomto případě využití tabulkového procesoru MS Excel.

Řešení heuristickou strategií – odhad-ověření-oprava (OOO)

Úlohu 2F lze řešit metodou odhad-ověření-oprava. Více o tomto řešení v kapitole 2.1.3. Touto metodou lze řešit též úlohu 2G, ale kvůli vyšším číslům to bude náročnější.

Řešení heuristickou strategií – grafické znázornění (GZ)

Úlohu 2F lze řešit též graficky viz kapitola 2.1.4. Nejdříve určíme celkový počet oblud (17), nakreslíme 17 bublin a každé bublině přiřadíme 3 hlavy, protože každá obluda má minimálně 3 hlavy. Zbytek hlav rozdělíme po 4 a určíme tím počet draků.

$17 \cdot 3 = 51; 103 - 51 = 52; 52 : 4 = 13 \rightarrow$ počet draků. Počet drakoušů je 4.

Poznámka: Řešení žáků, kteří využijí jen výpočtovou část této strategie bez kreslení obrázků, bude také označeno jako grafické znázornění.

Analogicky lze řešit i úlohu 2G, ale bez kreslení. Celkový počet lístků je na to moc velký.

Řešení heuristickou strategií – užití extrémního prvku (EP)

Úlohu 2G je možné řešit přes určení ceny 97 lístků, pokud by stály všechny maximální možnou cenu, tedy 11 Kč. Dostali bychom tak maximální cenu za lístky ($11 \cdot 97 = 1\,067$), kterou porovnáme s cenou v zadání (965). Dále je postup podobný jako u výpočtů v grafickém znázornění jen s tou odlišností, že rozdíl maximální celkové ceny a celkové ceny ze zadání ($1067 - 965 = 102$) určuje, kolik dražších lístků musí být nahrazeno levnějšími, daný rozdíl je nutné vydělit rozdílem jednotkových cen lístků. ($11 - 8 = 3$) Bude potřeba $102 : 3 = 34$ levnějších lístků a $97 - 34 = 63$ dražších lístků.

Analogicky lze tuto řešitelskou strategii použít pro úlohu 2F.

Očekávání

Úlohy 2F a 2G lze řešit jak přímou cestou přes rovnice, tak několika heuristickými strategiemi, které jsou dostupné žákům 9. ročníku ZŠ a odpovídajícímu ročníku gymnázia. Obě třídy zařazené do výzkumu již problematiku slovních úloh na míchání směsí mají probranou, takže jsem očekávala, že úlohy budou řešit spíše přímou cestou. Vzhledem k tomu, že úloha 2F obsahuje menší čísla, budou u této úlohy žáci více experimentovat a hledat řešení nejen přímou cestou, vyšší čísla u úlohy 2G je od experimentování mohou odradit.

Předpokládala jsem také, že v řešení obou úloh budou úspěšní jak smysloví žáci, kteří se mohou opřít o již známý způsob řešení tohoto typu úloh, tak intuitivní žáci, kteří mohou najít ještě další způsoby řešení. Smysloví žáci by mohli mít problém s porozuměním zadání, proto jsem v obou třídách při zadávání testu nabídla, že se žáci mohou kdykoliv přihlásit, pokud neporozumí zadání. Smysloví žáci by mohli mít též problém rozlišit, co mají vůbec vypočítat, je tedy možné, že budou častěji méně úspěšní v uchopování úlohy (součást řešení kategorie 1). Intuitivní žáci by měli častěji řešit úlohu heuristickými strategiemi než žáci smysloví.

Výsledky úlohy 2F

V řešení úlohy 2F byli podle očekávání úspěšní jak smysloví, tak intuitivní žáci. Úlohu 2F správně vyřešilo 70 % vybraných žáků. Za zmínku stojí, že úlohu řešili úplně všichni žáci, nikdo neodevzdal prázdný papír. Dalším překvapením bylo, že se mezi řešeními nevyskytlo žádné řešení s méně závažnou chybou (kategorie 2 neobsahuje žádné řešení). Zbylých 30 % žáků se pokusilo úlohu řešit, 3 z 8 žáků byli neúspěšní již v uchopení úlohy, většinou udělali jeden nahodilý výpočet a nevěděli, jak dále řešit, jakou strategii zvolit. Zbylí 4 žáci se pokusili o řešení, ale nedokončili ho (3 řešili rovnici, 1 strategií OOO) a 1 žák odevzdal řešení strategií pokus, ale se špatným výsledkem. Výsledky řešení úlohy 2F jsou přehledně shrnuty v tab. 15.

Tab. 15: Úspěšnost řešení úlohy 2F

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
2F	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	2,407407	27	19	0	8	0	70	0	30	0
intuitivní	2,555556	9	7	0	2	0	78	0	22	0
smysloví	2,375	16	11	0	5	0	69	0	31	0
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Úloha 2F je na rozdíl od úloh 1F a 1G již zaměřená na řešení heuristickými strategiemi, proto jsem všechna řešení analyzovala z pohledu použitých strategií řešení. V tab. 16 jsou uvedeny konkrétní výsledky této analýzy. Řešení smíšených žáků jsou zahrnuta pouze v souhrnném přehledu řešení všech žáků, samostatná analýza této skupiny žáků byla vynechána z důvodu zanedbatelného počtu řešitelů. Kromě zjištění, zda žák řešil úlohu přímou cestou, pokusem nebo heuristickou strategií (HS), jsem dále zkoumala, jakou konkrétní strategii použil: odhad-ověření-oprava (OOO), grafické znázornění (GZ), systematické experimentování (SE) nebo užití extrémního prvku (EP). Pokud žák úlohu začal řešit, ale udělal jen jeden výpočet, že kterého nebylo patrné, o jakou strategii se jedná, nebo pokud si jen přepsal údaje ze zadání, je jeho řešení zařazeno ve skupině neuchopeno.

Tab. 16: Analýza řešitelských strategií úlohy 2F

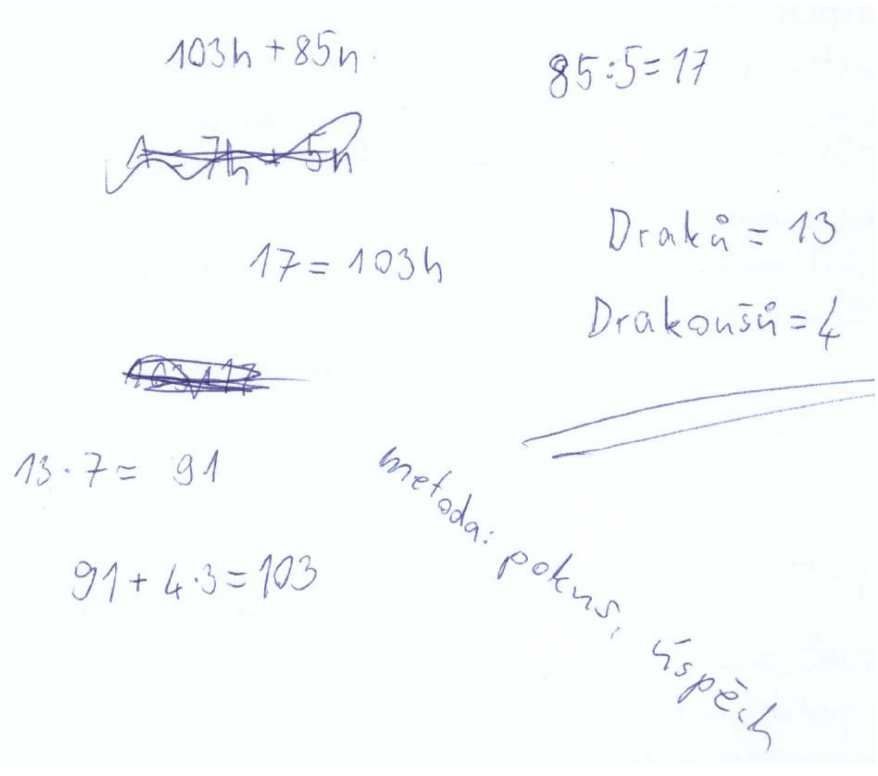
2F - VŠICHNI	Průměrná úspěšnost	Počet řešitelů (absolutní)	Počet řešitelů (relativní)	3 body	1 bod	Podíl správných odpovědí
přímá cesta	2	6	22 %	3	3	50 %
pokus	2	2	7 %	1	1	50 %
HS	2,87	16	59 %	15	1	94 %
OOO	2,82	11	41 %	10	1	91 %
GZ	3	1	4 %	1	0	100 %
SE	3	2	7 %	2	0	100 %
EP	3	2	7 %	2	0	100 %
neuchopeno		3	11 %			
2F - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
přímá cesta	2,33	3	33 %	2	1	67 %
pokus	2	2	22 %	1	1	50 %
HS	3	4	44 %	4	0	100 %
OOO	3	3	33 %	3	0	100 %
EP	3	1	11 %	1	0	100 %
2F - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
přímá cesta	2	2	13 %	1	1	50 %
HS	2,82	11	69 %	10	1	91 %
OOO	2,71	7	44 %	6	1	86 %
GZ	3	1	6 %	1	0	100 %
SE	3	2	13 %	2	0	100 %
EP	3	1	6 %	1	0	100 %
neuchopeno		3	19 %			

Z tab. 16 vyplývá, že úspěšnější byli žáci, kteří úlohu řešili heuristickou strategií (HS). Nejčastěji žáci řešili úlohu strategií OOO a 10 z 11 žáků ji vyřešilo správně. Pokud žáci k řešení využili strategie GZ, SE nebo EP, byli 100% úspěšní. U přímé cesty a pokusu to bylo jen 50 %.

Předpoklad, že tuto úlohu budou intuitivní žáci častěji řešit heuristickou strategií se nepotvrdil, pokud ale společně vyhodnotíme řešení HS a metodou pokusu, budou relativní podíly řešení u obou typů žáků vyrovnané (smysloví 69 % a intuitivní 66 %). Metoda pokusu se u smyslových žáků vůbec neobjevila. Další předpoklad, že budou mít smysloví žáci častěji problém s uchopením úlohy, se u testovaných žáků potvrdil, protože všechna řešení označená jako neuchopeno patří právě smyslovým žákům. Častější řešení přímou cestou u intuitivních žáků si vysvětluji jejich dispozicí ke zobecňování, stejně tak v metodě pokusu se mohli opřít o vlastní intuici.

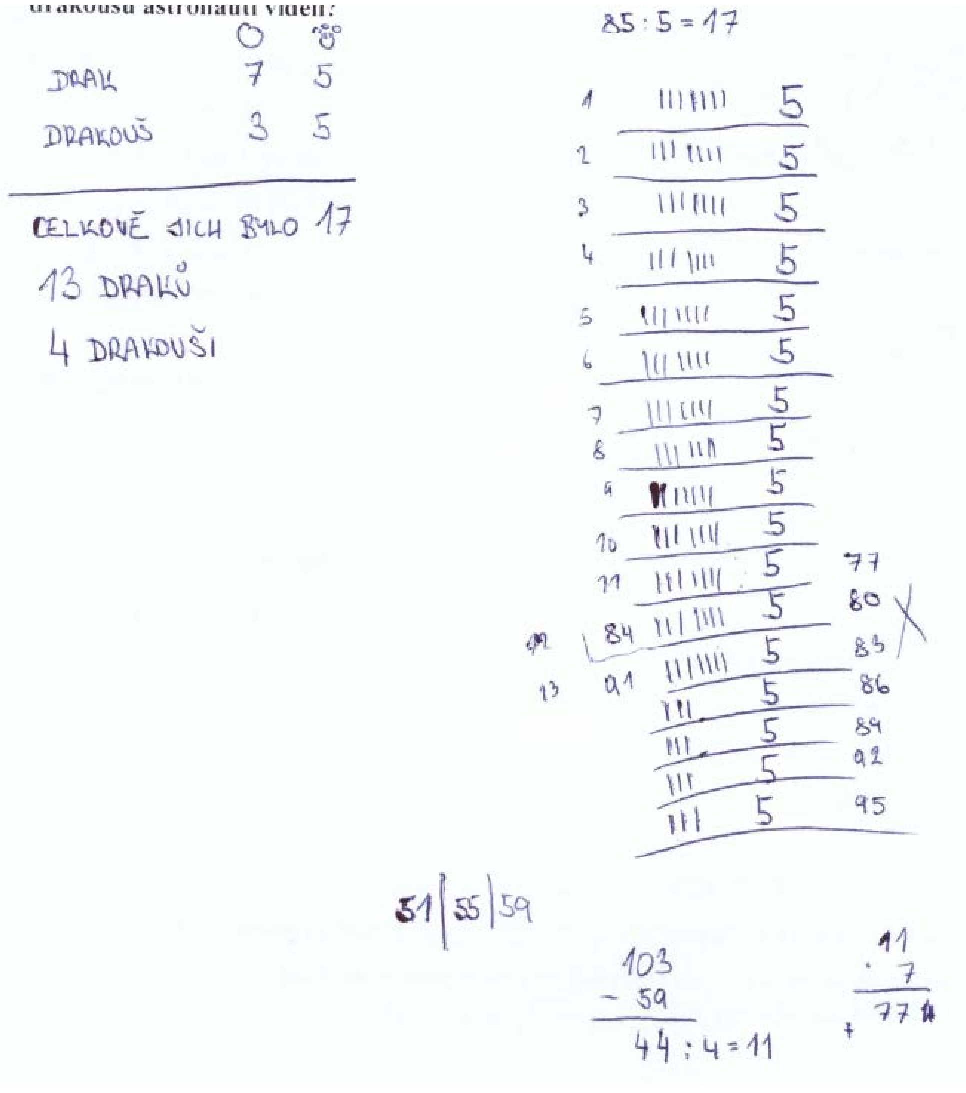
Ukázky žákovských řešení úlohy 2F

Z žákovských řešení jsem vybrala ukázky pouze správně řešených úloh 2F pomocí různých heuristických strategií. Řešení žáka K26 ukazuje na jediné správné řešení metodou pokusu, sám žák místo komentářů, jak dospěl k výsledku, napsal: *„metoda: pokus, úspěch“*. Zřejmě měl štěstí, že jeho první odhad byl hned ten správný.



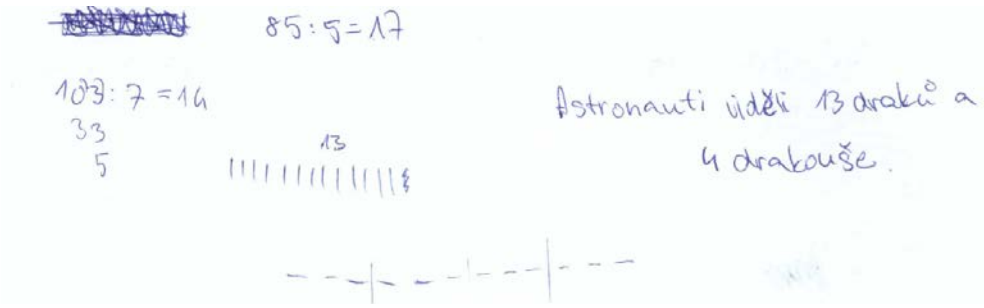
(Žák K26, N, metoda pokus)

Řešení žáka H13 je již plně grafické, místo oválků představujících těla oblud si žák vytvořil 17 řádků s číslicí 5. Poté ke každé pětce připsal 3 čárky, je vidět, že na každém řádku je vlevo shluk 3 čárek, proto usuzuji, že žákovo řešení šlo v tomto pořadí. Pak ale žák udělal zřejmě chybu ve výpočtu již obsazeného počtu hlav, místo čísla 51 odečetl od celkového počtu hlav 59. To si ale později uvědomil, když mu v pravém sloupečku vyšlo, že celkem použil jen 95 hlav. Dalšími výpočty ve sloupci úplně vlevo nakonec došel ke správnému výsledku. Nakonec řadou od 1 do 13 přepočítal stav „sedmičárkových“ řádků a vyšel mu počet draků.

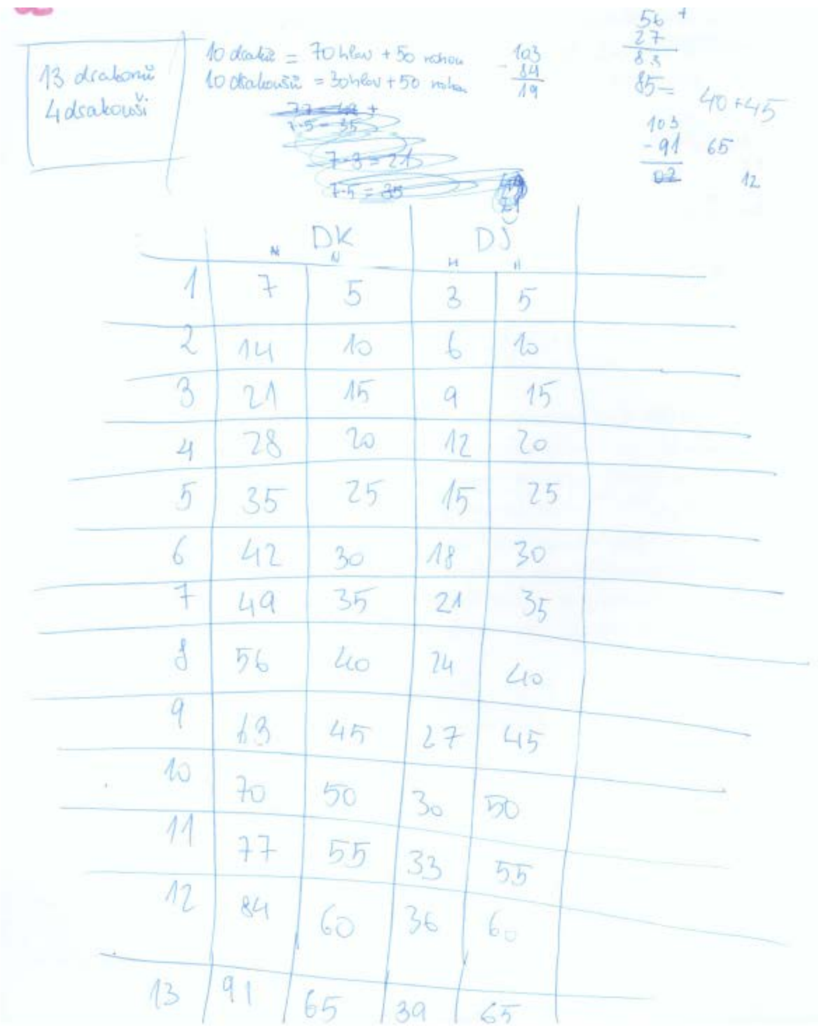


(Žák H13, S, strategie GZ)

Řešení žáka K17 jsem po dlouhém uvažování přiřadila strategii užití extrémního prvku, protože žák nejdříve zjistil, kolik draků se 7 hlavami mohlo mít maximálně dohromady 103 noh. Zjistil, že to mohlo být maximálně 14, a pak následovalo grafické řešení, kdy svislé čárky značí počet draků a vodorovné čárky počet zbylých noh. Domnívám se, že nejdříve udělal žák 14 svislých čar a 5 vodorovných jako výsledek písemného dělení 14, zbytek 5. Poté snížil počet draků o jednoho a doplnil 7 vodorovných čárek. U vodorovných čárek sledoval, jestli jsou dělitelné 3, aby zjistil počet drakoušů. To se mu hned ve druhém kroku podařilo, takže vodorovné čárky rozdělil do skupin po třech. Tak mu vyšlo, že astronauti viděli 13 draků a 4 drakouše.



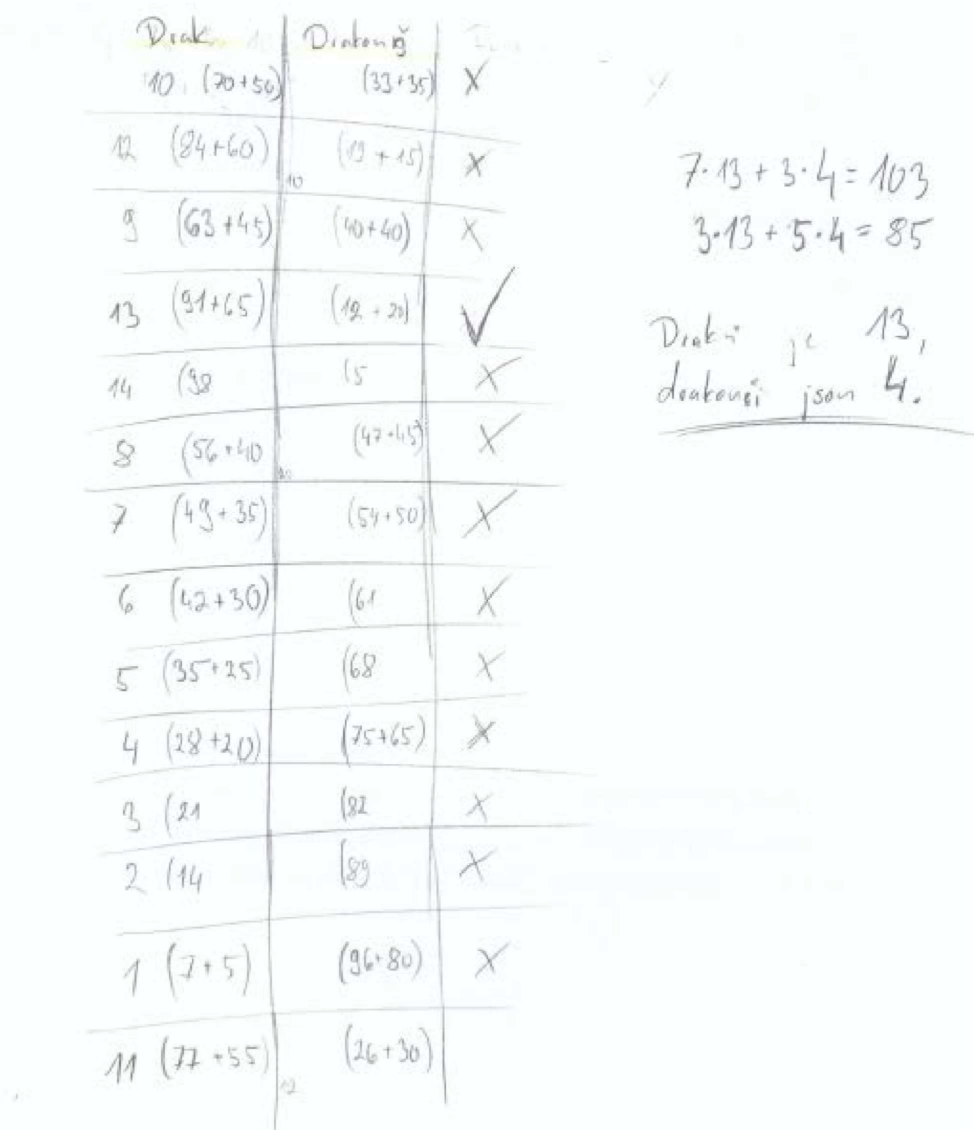
(Žák K17, S, strategie EP)



(Žák K15, S, strategie SE)

Další dvě řešení (K15 a K13) jsem vybrala kvůli originálnímu pojetí strategie systematického experimentování. Řešení K15 obsahuje tabulku s celkovými počty hlav a nohou draků i drakoušů. Bohužel řešitel nepřišel na to, že oblud je dohromady 17. Nicméně ani tato překážka nebránila úspěšnému vyřešení úlohy. Řešitel měl z mého pohledu velké štěstí, že se mu na list papíru vešlo vyčíslení počtu nohou a hlav právě 13 draků a drakoušů. Řádek 13 byl umístěn úplně na konci stránky. Domnívám se, že v závěru řešení pak žák experimentoval, které údaje z tabulky mu dají odpovídají součet hlav a nohou, to dokazují i výpočty v pravém horním rohu.

Žák K13 se také vypořádal s tím, že neznal celkový počet oblud. Strategie systematického experimentování je zde založena na učení počtu hlav a nohou 1 až 13 draků, dopočítání zbylých noh a hlav a určení, zda zbytek odpovídá proporcím drakouše.



Drak	Drakouš	
10 (70+50)	(33+35)	X
12 (84+60)	(19+15)	X
9 (63+45)	(40+40)	X
13 (91+65)	(12+20)	✓
14 (98	(5	X
8 (56+40	(47+45)	X
7 (49+35)	(54+50)	X
6 (42+30)	(61	X
5 (35+25)	(68	X
4 (28+20)	(75+65)	X
3 (21	(82	X
2 (14	(89	X
1 (7+5)	(96+80)	X
11 (77+55)	(26+30)	

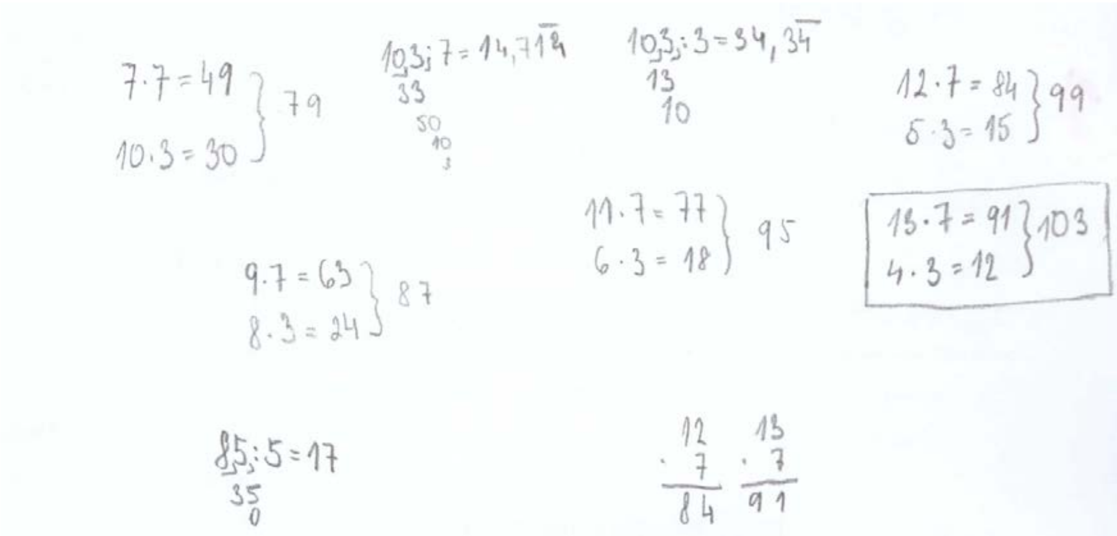
$7 \cdot 13 + 3 \cdot 4 = 103$

$3 \cdot 13 + 5 \cdot 4 = 85$

Draků je 13, drakouši jsou 4.

(Žák K13, S, strategie SE)

Nakonec ještě prezentuji řešení žáka H4, který úspěšně a přehledně použil řešení strategií odhad-ověření-oprava.



(Žák H4, S, strategie OOO)

Výsledky úlohy 2G

Úloha 2G byla podle očekávání pro žáky náročnější než úloha 2F, celkově ji vyřešilo správně pouze 44 % žáků. Úspěšnější v řešení úlohy byli smysloví žáci, kteří dosáhli vyšší průměrné úspěšnosti i vyššího podílu správných řešení. Intuitivní žáci měli výrazně vyšší podíl řešení v kategorii 1, kde jsou chybná a neúplná řešení. Častěji než smysloví žáci se také vyhnuli jakémukoliv řešení, tzv. odevzdali prázdný papír. Číselné podklady pro tato tvrzení jsou uvedeny v tab. 17.

Tab. 17: Úspěšnost řešení úlohy 2G

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
2G	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,85	27	12	2	10	3	44	7	37	11
intuitivní	1,50	6	2	0	3	1	33	0	50	17
smysloví	1,95	19	9	2	6	2	47	11	32	11
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Stejně jako u úlohy 2F budou dále analyzována řešení z pohledu použité strategie řešení (viz tab. 18). Řešení smíšených žáků jsou zahrnuta pouze v souhrnném přehledu řešení všech žáků, samostatná analýza této skupiny žáků byla vynechána z důvodu zanedbatelného počtu řešitelů. Řešení kategorie 0 jsou v tab. 18 uváděna v řádku

„neuchopeno“, kde se nacházejí nedokončená řešení, která obsahovala pouze 1 – 2 nahodilé výpočty a nebylo u nich možné určit strategii řešení, protože na ni žák nepřišel. Skupina řešení HS obsahuje souhrnně všechna řešení heuristickými strategiemi, která jsou rozepsána v dalších řádcích (OOO, GZ, EP).

Tab. 18: Analýza řešitelských strategií úlohy 2G

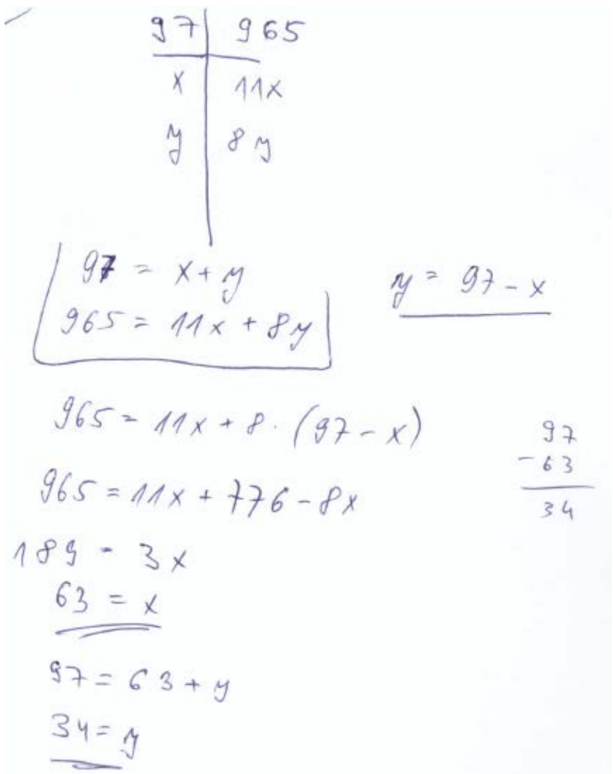
2G - VŠICHNI	Průměrná úspěšnost	Počet řešitelů (absolutní)	Počet řešitelů (relativní)	3 body	2 body	1 bod	Podíl správných odpovědí
přímá cesta	2,5	12	44 %	8	2	2	67 %
pokus	1	2	7 %	0	0	2	0 %
HS	2,33	6	22 %	4	0	2	67 %
OOO	2,33	3	11 %	2	0	1	67 %
GZ	3	2	7 %	2	0	0	100 %
EP	1	1	4 %	0	0	1	0 %
neuchopeno		7	26 %				
2G - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
přímá cesta	2	2	33 %	1	0	1	50 %
HS	2	2	33 %	1	0	1	50 %
OOO	1	1	17 %	0	0	1	0 %
GZ	3	1	17 %	1	0	0	100 %
neuchopeno		2	33 %				
2G - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
přímá cesta	2,56	9	47 %	6	2	1	67 %
pokus	1	1	5 %	0	0	1	0 %
HS	2,50	4	21 %	3	0	1	75 %
OOO	3	2	11 %	2	0	0	100 %
GZ	3	1	5 %	1	0	0	100 %
EP	1	1	5 %	0	0	1	0 %
neuchopeno		5	26 %				

Úlohu 2G řešili žáci dvakrát častěji přímou cestou než heuristickými strategiemi a byli v obou strategiích řešení stejně úspěšní (67 % správných řešení). Řešení intuitivních žáků se rozdělila po třetinách mezi přímou cestu, HS a neuchopeno. Smysloví žáci volili častěji řešení přímou cestou a byli v ní úspěšnější než intuitivní žáci. Intuitivní žáci zase častěji řešili úlohu HS, ale byli v nich méně úspěšní než smysloví žáci. Strategie, která vedla vždy ke správnému výsledku, byla strategie GZ. Naopak nejméně úspěšnou byla strategie EP a pokus.

Očekávání, že budou mít smysloví žáci častěji problém s uchopením úlohy, se u vybraných žáků nepotvrdilo, protože relativní četnost těchto řešení byla vyšší u intuitivních žáků. Obecně si smysloví žáci vedli v úloze 2G lépe než intuitivní žáci. Možným vysvětlením je, že úloha 2G je na rozdíl od úlohy 2F velmi podobná slovním úlohám o směsích, takže se mohli smysloví žáci opřít o minulé zkušenosti s řešením těchto úloh. Další výhodou oproti úloze 2F bylo, že všechny potřebné hodnoty k sestavení rovnice byly zadané, žáci nemuseli dopočítat celkový počet lístků.

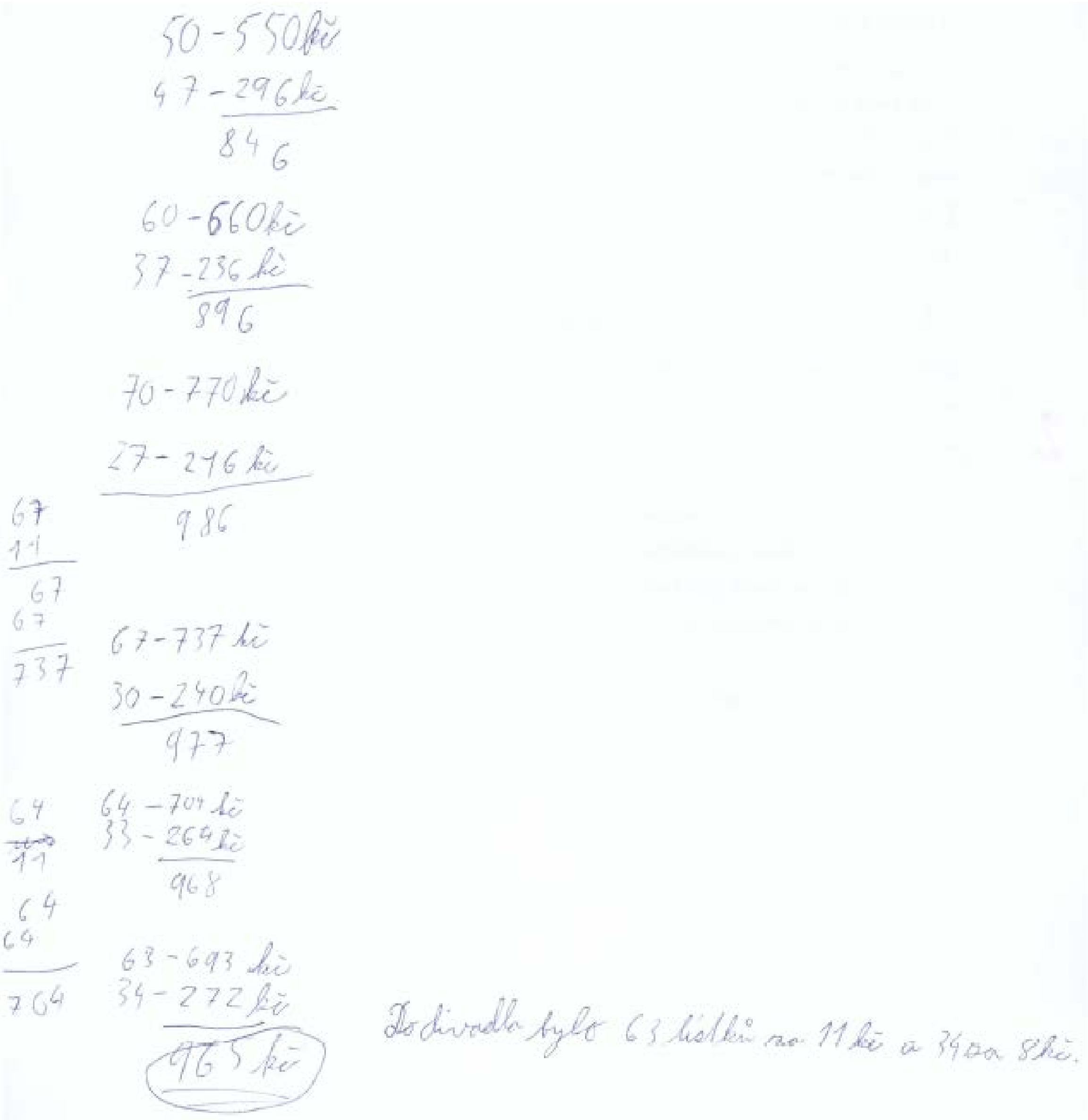
Ukázky žákovských řešení úlohy 2G

Ze všech řešení jsem vybrala 3 zcela správná řešení – jedno řešení přímou cestou (H3), jedno řešení strategií OOO (K12), jedno řešení strategií na principu GZ (K25) – a jedno řešení kategorie 2. U řešení H3 mě zaujalo, že si řešitel před sestavováním rovnice vytvořil jednoduchou tabulku, kde v jednom sloupci byly počty lístků a ve druhém ceny. Po rozhovoru s učitelkou jsem zjistila, že tento způsob uchopování úlohy o směsích se jí velmi osvědčil u žáků, kteří nevědí, jak úlohu začít řešit a jak sestavit rovnice.



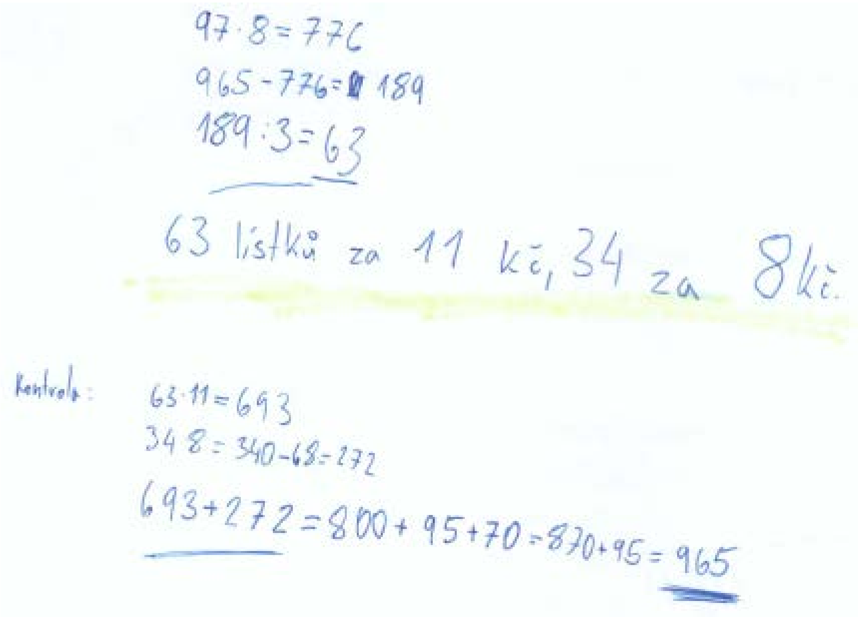
(Žák H3, S, přímá cesta)

Řešení žáka K12 jsem vybrala kvůli ukázkovému příkladu řešení strategií OOO. Je vidět, jak postupně zpřesňuje odhad a dostává se blíže ke správnému řešení, až ho nakonec najde.



(Žák K12, S, strategie OOO)

Řešení žáka K25 sice není v pravém slova smyslu grafické, ale využívá princip této strategie. Nejdříve žák vypočítal, kolik by stály lístky, pokud by byly všechny za 8 Kč, to znamená všem lístkům přiřadil nejnižší možnou hodnotu. Poté zjistil, jaká hodnota mu ještě zbývá rozdělit a vydělil ji rozdílem mezi dražším a levnějším lístkem. Tak zjistil počet dražších lístků a počet levnějších lístků už nebylo složité dopočítat.



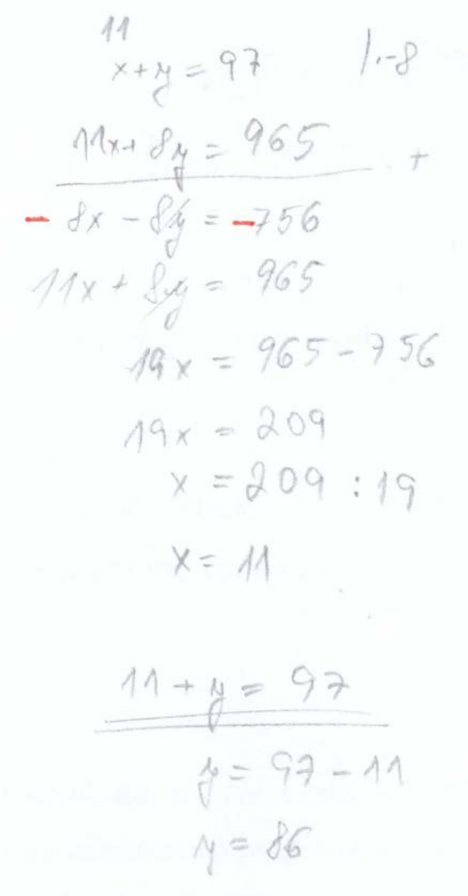
$97 \cdot 8 = 776$
$965 - 776 = 189$
$189 : 3 = 63$

63 lístků za 11 kč, 34 za 8kč.

Kontrola: $63 \cdot 11 = 693$
$34 \cdot 8 = 340 - 68 = 272$
$693 + 272 = 800 + 95 + 70 = 870 + 95 = 965$

(Žák K25, N, strategie GZ)

Nakonec uvádím část řešení H9 z kategorie 2, které bylo řešeno s méně závažnou chybou ve znaménku.



$x + y = 97 \quad | \cdot -8$
$11x + 8y = 965$
$-8x - 8y = -756$
$11x + 8y = 965$
$19x = 965 - 756$
$19x = 209$
$x = 209 : 19$
$x = 11$

$11 + y = 97$
$y = 97 - 11$
$y = 86$

(Žák H9, S, přímá cesta)

Shrnutí výsledků řešení úloh 2F a 2G

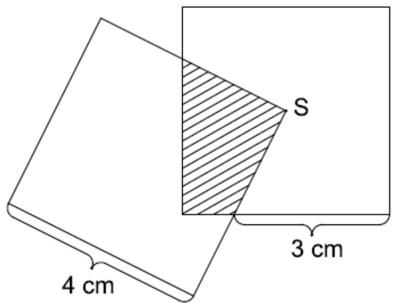
Z řešení úloh, které byly zaměřené na oblast, se kterou se v matematice setkali žáci z obou zkoumaných tříd, a kde bylo možné využít jak přímou cestu řešení, tak některou z heuristických strategií, vyplývá, že v úloze 2F byli úspěšnější intuitivní žáci a v obtížnější úloze 2G žáci smysloví. Úspěšnost byla posuzována na základě průměrného bodového zisku a relativním podílem správných řešení v dané skupině žáků.

Dalším očekáváním bylo, že intuitivní žáci budou častěji dělat numerické chyby než smysloví žáci. Toto očekávání nebylo potvrzeno, protože intuitivní žáci neudělali v úlohách 2F a 2G žádnou numerickou nebo méně závažnou chybu. Chyby z nepozornosti se v úlohách 2F a 2G objevily pouze u smyslových žáků při úpravě soustavy rovnic.

5.4.3 Úlohy 3F a 3G

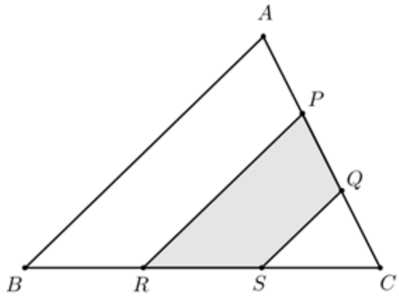
Zadání

Úloha 3F: Vypočítejte obsah vyšrafovaného čtyřúhelníku, který je průnikem shodných čtverců podle obrázku 9. S je střed čtverce.



Obr. 9

Úloha 3G: Trojúhelník ABC na obrázku 10 má jednotkový obsah. Body P, Q, R, S dělí strany AC a BC na tři stejně velké části. Jaká je plocha vybarveného čtyřúhelníku?



Obr. 10

Řešení přímou algoritmickou cestou

Úlohy 3F a 3G byly do testu zařazeny především proto, že se jedná o netradiční úlohy, které nelze řešit přímou algoritmickou cestou, respektive je takové řešení komplikovanější. Při řešení těchto úloh na základní škole je efektivnější použít některou z heuristických strategií. Obě úlohy lze řešit více heuristickými strategiemi.

V úloze 3F je úkolem řešitele určit obsah čtyřúhelníku, u kterého známe délku pouze 2 stran. Řešení přímou cestou by znamenalo rozdělit čtyřúhelník na dva trojúhelníky, vypočítat délku jedné z výšek každého trojúhelníka a určit součet obsahů trojúhelníků. Tato cesta je ale komplikovaná a nad rámec schopností většiny žáků základní školy nebo nižšího stupně gymnázia.

Úlohu 3G je možné řešit obecně s využitím podobnosti trojúhelníků *BCA* (velký), *RCP* (střední) a *SCQ* (malý). Protože jsou strany *BC* a *AC* rozděleny na třetiny, platí následující rovnosti:

$$|PR| = 2|QS|, |AB| = 3|QS|.$$

Stejný vztah platí i u velikosti výšek trojúhelníků, výšku trojúhelníku *ABC* označme *v*, pak výška trojúhelníku *RCP* má velikost $\frac{2}{3}v$. Výška trojúhelníku *SCQ* velikost $\frac{1}{3}v$.

Nyní je možné určit obsahy všech tří trojúhelníků a pomocí nich zjistit, jakou část zabírá vybarvená plocha. Obsah trojúhelníku:

- *BCA* je: $S_{BCA} = \frac{a \cdot v}{2}$, kde *a* je délka strany *BC*,
- *RCP* je: $S_{RCP} = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}v}{2} = \frac{2av}{9}$,
- *SCQ* je: $S_{SCQ} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v}{2} = \frac{av}{18}$.

Obsah čtyřúhelníku *RSQP* je $S_{RSQP} = S_{RCP} - S_{SCQ} = \frac{2av}{9} - \frac{av}{18} = \frac{av}{6}$.

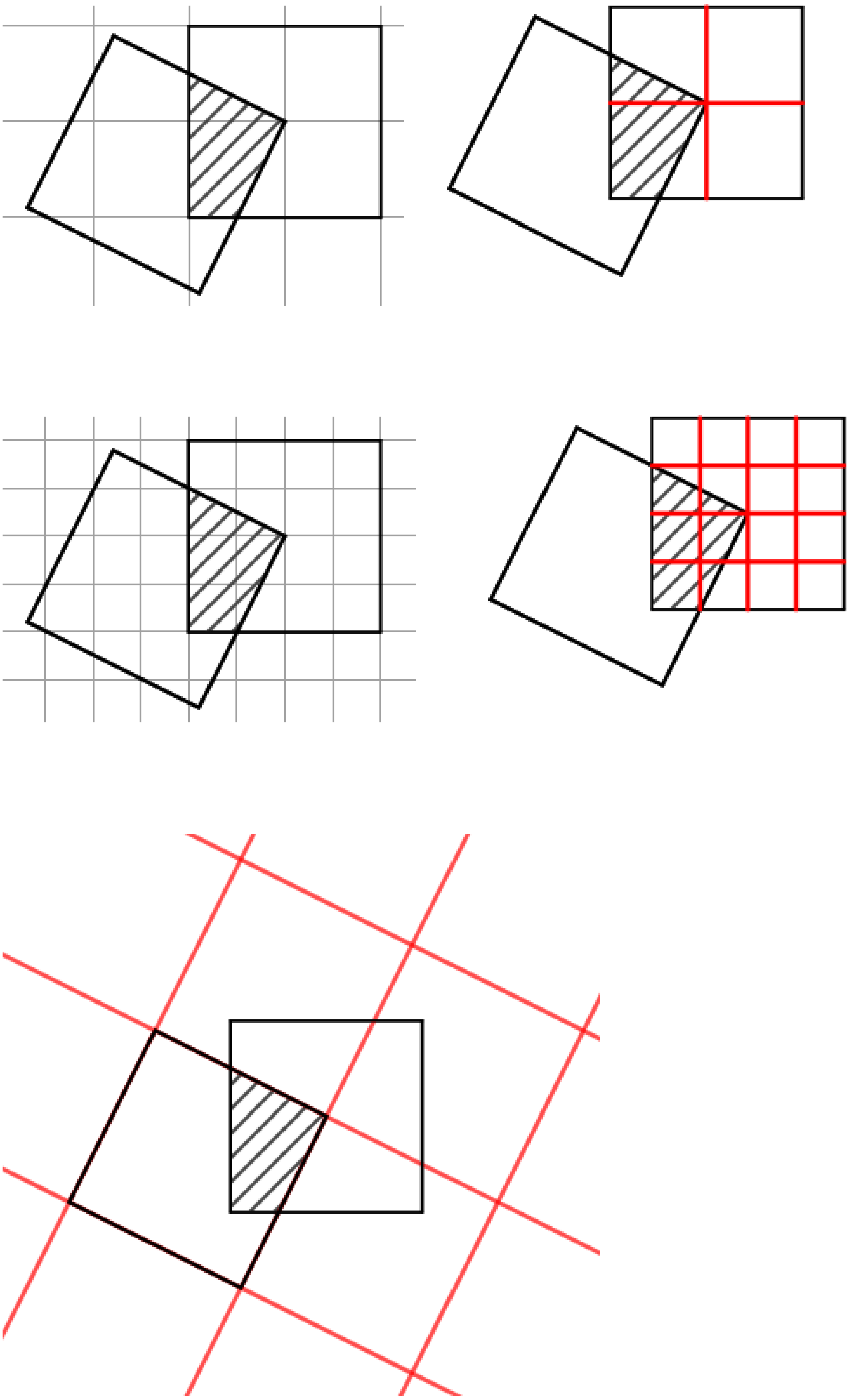
Jestliže $S_{BCA} = \frac{a \cdot v}{2} = 1$, pak $S_{RSQP} = \frac{av}{6} = \frac{1}{3}$.

Odpověď: Vybarvená plocha je $\frac{1}{3}$ obsahu trojúhelníku *ABC*.

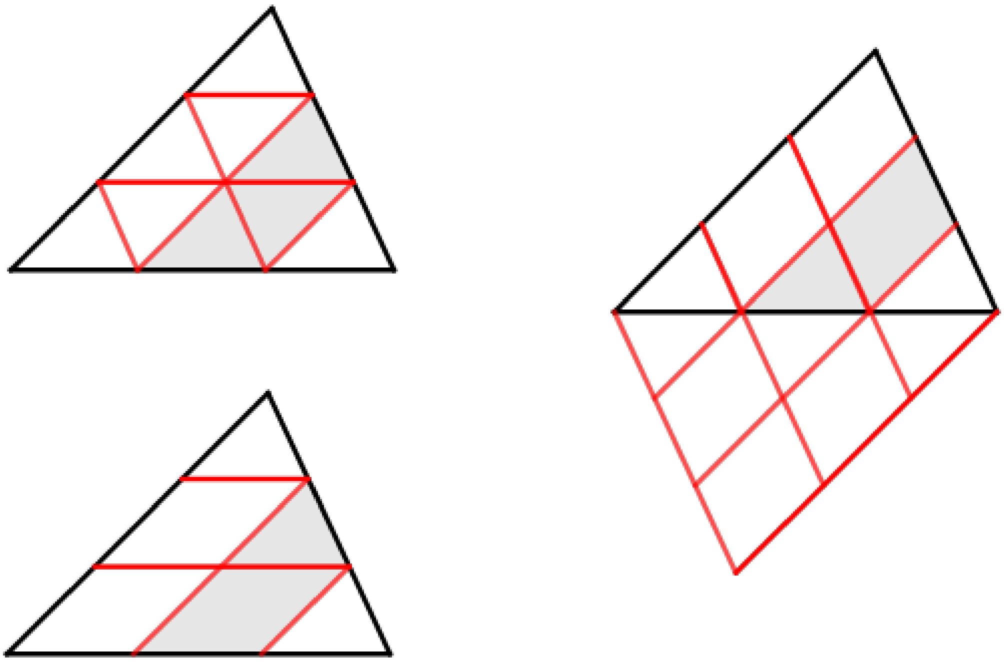
Řešení heuristickou strategií – zavedení pomocného prvku (ZPP)

V úlohách 3F i 3G je možné každý z obrázků proložit sítí, tzn. zavést pomocný prvek (více o strategii v kapitole 2.2.5). V úloze 3F je vhodné zvolit čtvercovou síť 2 cm x 2 cm, 1 cm x 1 cm nebo 4 cm x 4 cm (viz obr. 11). V úloze 3G je pomocným prvkem myšlena primárně trojúhelníková síť, ale lze využít i kombinovanou trojúhelníkovo-čtyřúhelníkovou síť nebo jen čtyřúhelníkovou síť (viz obr. 12).

Obr. 11: Ukázky zavedení pomocného prvku v úloze 3F



Obr. 12: Ukázky zavedení pomocného prvku v úloze 3G



Z takto upravených obrázků lze pak zjistit, že obsah vyšrafované části čtverce v úloze 3F je $\frac{1}{4}$ obsahu čtverce, tedy v přepočtu 4 cm^2, neboli polovina poloviny obsahu čtverce. Alogicky je tomu i v dořešení úlohy 3G, z počtu shodných trojúhelníků lze zjistit, že vybarveny jsou 3 shodné trojúhelníky z 9, tedy třetina obrazce. Pokud je trojúhelník rozdělen na 3 shodné trojúhelníky a 3 shodné kosodélníky, je vybarven jeden trojúhelník a jeden kosodélník (resp. jeden a půl kosodélníku), což je opět třetina obrazce.

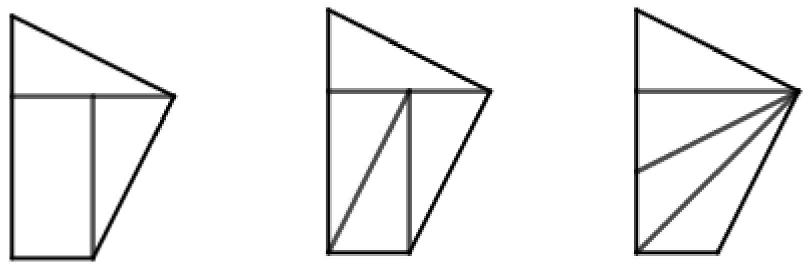
Řešení heuristickou strategií – rozklad na jednodušší případy (RJP)

V úloze 3F jsou zadané rozměry obrazce, proto se více nabízí rozdělit si vyšrafovaný čtyřúhelník na jednodušší útvary, u kterých je snazší určit obsah (více o strategii v kapitole 2.3.1). V přímém řešení jsme hledali rozdělení čtyřúhelníku na 2 trojúhelníky, to ale v úloze 3F nevede ke zjednodušení situace. Bude tedy nutné rozdělit čtyřúhelník na 3 a více částí (příklady dělení viz obr. 13).

Obdélníky na obr. 13 mají rozměry 1 cm x 2 cm, stejně tak odvěsny pravoúhlých trojúhelníků. Složením dvou pravoúhlých trojúhelníků vznikne obdélník. Zjistíme-li obsah pravoúhlého trojúhelníku, určíme pak jednoduše obsah celého čtyřúhelníku. Obsah trojúhelníku je 1 cm^2, takže obsah celého čtyřúhelníku je 4 cm^2. Poslední dělení na obr. 13

prezentuje rozklad na 4 trojúhelníky, které mají stejnou délku jedné strany (1 cm) a stejně dlouhou výšku na tuto stranu (2 cm), proto musí mít i stejný obsah. Jeden z trojúhelníků je pravoúhlý, jehož obsah je 1 cm^2, proto lze snadno dopočítat, že čtyřúhelník má obsah 4 cm^2.

Obr. 13: Ukázky rozdělení obrazce na jednodušší případy v úloze 3F



Poznámka: Pokud bych zadávala úlohu 3G znovu, použila bych místo jednotkového obsahu konkrétní hodnoty, například obsah trojúhelníka SCQ. Představa jednotkového obsahu a práce se zlomky dělala žákům při řešení problémy. Domnívám se, že by se pak i v úloze 3G mohlo vyskytnout řešení, kdy si žák rozdělí vybarvený čtyřúhelník na 3 trojúhelníky a přes konkrétní výpočty určí jeho obsah. Právě přítomnost výpočtů by od sebe odlišila strategii ZPP a RJP v úloze 3G.

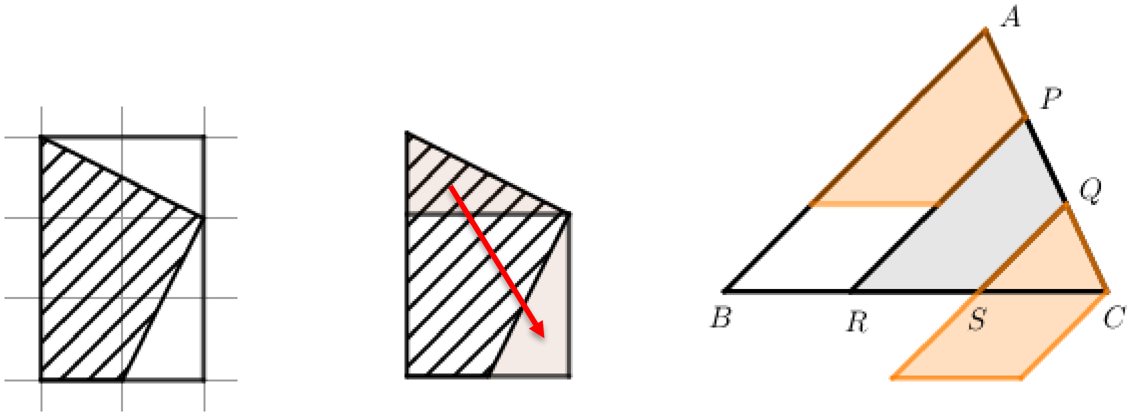
Řešení heuristickou strategií – přeformulování problému (PřP)

Přeformulováním problému nazývám všechny strategie řešení úloh 3F a 3G, ve kterých dochází k přesunu objektů, jejich rotaci nebo doplnění na jiný obrazec, pokud tzv. vyjde řešitel z objektu ven (více o této strategii v kapitole 2.2.3).

V úloze 3F lze vyšrafovaný čtyřúhelník orámovat například do tvaru obdélníka, u kterého známe jeho obsah, a pak odečíst obsah dvou trojúhelníků, jejichž obsah lze jednoduše dopočítat. Dalším způsobem je rotace trojúhelníku o 90° proti směru hodinových ručiček, díky které vznikne čtverec 2 x 2 cm (viz obr. 14).

Analogicky lze v úloze 3G přesunout vybarvený čtyřúhelník $RSQP$ ve směru $\overrightarrow{PA}$ a ve směru $\overrightarrow{QC}$. Čtyřúhelník, který v horním obrazci přebývá, v dolním obrazci zase chybí, takže vybarvený čtyřúhelník tvoří třetinu původního trojúhelníku (viz obr. 14).

Obr. 14: Ukázky přeformulování problému v úloze 3F a 3G



Očekávání

Úlohy 3F a 3G jsou úlohy s velkým heuristickým potenciálem. Cesta k nalezení řešení problému není známá, existuje sice univerzální algoritmus na určení obsahu čtyřúhelníku (rozdělení na dva trojúhelníky a vypočtení jejich obsahů), ale v těchto případech je složitě aplikovatelný. Jednodušší způsob řešení problému nabízejí heuristické strategie.

Úlohy mají též podobu výzvy, protože v sobě skrývají mnoho matematických vztahů a je jen na schopnostech řešitele, jaké vztahy objeví a využije. Zadání jsou dostatečně obecná, aby si řešitel mohl vybrat libovolnou řešitelskou strategii. Právě proto by tyto úlohy měly vyhovovat intuitivním žákům, takže jsem očekávala, že budou úspěšnější a budou se méně vyhýbat řešení úloh. Dále jsem očekávala, že intuitivní žáci budou častěji využívat strategii přeformulování problému, kdy je nutné vyjít tzv. z obrazce ven a přesouvat objekty.

Na druhou stranu jsem očekávala, že smysloví žáci se budou častěji snažit řešit úlohu algoritmem, tj. rozdělení čtyřúhelníku na dva trojúhelníky s výpočtem jejich obsahu, budou se snažit dopočítat všechny délky stran, když to nebude možné, budou měřit potřebné délky na ilustračním obrázku v zadání.

Výsledky úlohy 3F

V řešení úlohy 3F byly podle očekávání úspěšnější intuitivní žáci (viz tab. 19), měli vyšší jak průměrnou úspěšnost (o 1,46 bodu), tak relativní podíl správných řešení (o 64 procentních bodů). V absolutních hodnotách úlohu správně vyřešilo 8 z 9 žáků a jeden žák udělal v řešení úlohy závažnou chybu, místo obsahu počítal obvod obrazce.

Na rozdíl od smyslových žáků se úlohu pokusili řešit všichni intuitivní žáci. Ze smyslových žáků téměř pětina nezačala úlohu ani řešit. A více než polovina smyslových žáků řešení buď nedokončila, nebo měla problémy již v uchopování úlohy (viz kategorie 1).

Tab. 19: Úspěšnost řešení úlohy 3F

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
3F	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,85	27	13	0	11	3	48	0	41	11
intuitivní	2,77	9	8	0	1	0	89	0	11	0
smysloví	1,31	16	4	0	9	3	25	0	56	19
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Tab. 20: Analýza řešitelských strategií úlohy 3F

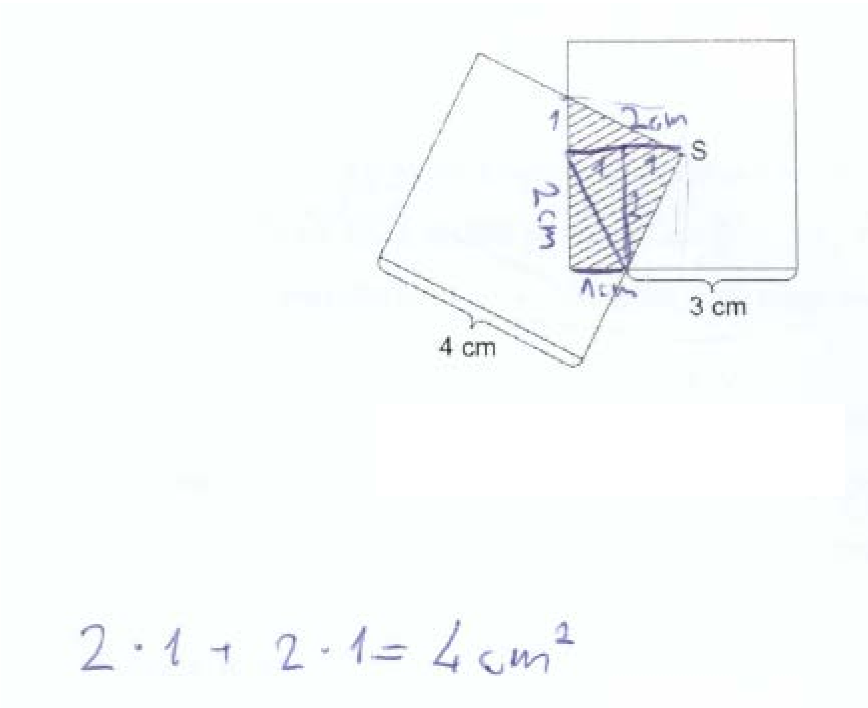
3F - VŠICHNI	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**podíl správných odpovědí**
pokus	3	1	4 %	1	0	0	100 %
HS	2,6	15	56 %	12	0	3	80 %
RJP	2,2	5	19 %	3	0	2	60 %
PřP	3	6	22 %	6	0	0	100 %
ZPP	2,5	4	15 %	3	0	1	75 %
3F - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**podíl správných odpovědí**
pokus	3	1	11 %	1	0	0	100 %
HS	3	7	78 %	7	0	0	100 %
RJP	3	2	22 %	2	0	0	100 %
PřP	3	5	56 %	5	0	0	100 %
3F - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**podíl správných odpovědí**
HS	2,14	7	44 %	4	0	3	57 %
RJP	1,67	3	19 %	1	0	2	33 %
PřP	3	1	6 %	1	0	0	100 %
ZPP	2,33	3	19 %	2	0	1	67 %

Tab. 20 prezentuje detailní analýzu použitých strategií řešení žáků. Všechna úspěšná i neúspěšná řešení byla řešena heuristickými strategiemi, až na jedno řešení vhledem, které jsem zařadila do kategorie pokusů. Největší podíl správných odpovědí (100 %) měli žáci, kteří si vybrali strategii přeformulování problému (PřP), menší podíl (75 %) měla strategie zavedení pomocného prvku (ZPP) a nejméně úspěšní (60 %) byli žáci při řešení strategií rozklad na jednodušší případy (RJP).

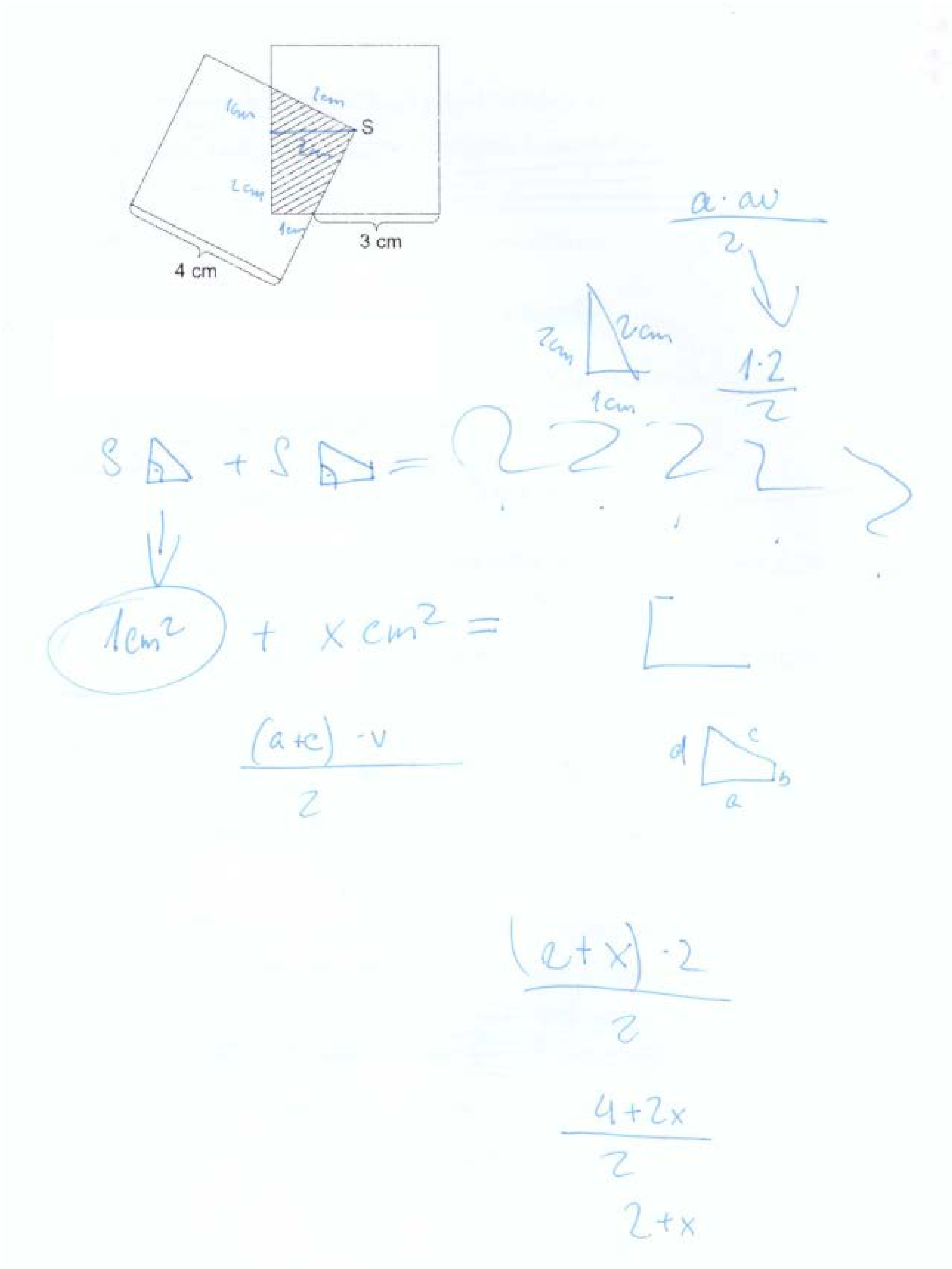
Neúspěšná řešení na rozdíl od těch úspěšných obsahovala více vyčíslených údajů délek stran a méně pomocných čar, které rozdělovaly vyšrafovaný čtyřúhelník nebo ho rámovaly. Někteří žáci nepřipustili možnost, že by si čtyřúhelník mohli rozdělit na více než 2 části, proto je i strategie RJP nejméně úspěšná. Naopak nejúspěšnější byli ti žáci, kteří dokázali rotovat trojúhelník tak, aby jeho přemístěním vznikl ze čtyřúhelníku čtverec (strategie PřP).

Ukázky žákovských řešení úlohy 3F

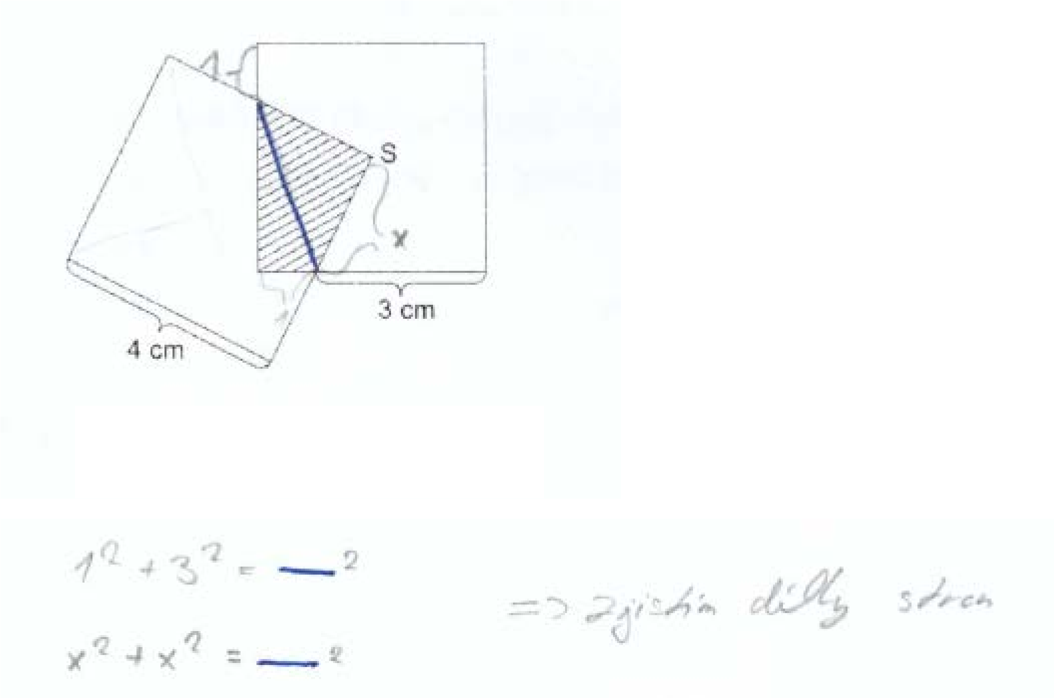
Z žákovských řešení jsem vybrala jedno řešení strategií RJP, které bylo úspěšné (řešení žáka K26), a dvě řešení touto strategií, která úspěšná nebyla (řešení žáka K15 a K4). Vybraná řešení prezentují, jak si žáci poradili s rozdělením obrazce na více než dvě části (řešení žáka K26) a jak se naopak žáci snažili neúspěšně použít algoritmus rozdělením obrazce pouze na pouze dvě části (řešení žáka K15 a K4). Žák K15 rozdělil vyšrafovaný obrazec na trojúhelník a čtyřúhelník a u čtyřúhelníku nedokázal určit, jak spočítat jeho obsah. Žák K4 rozdělil vyšrafovaný obrazec na dva pravoúhlé trojúhelníky, kde se snažil dopočítat délky zbylých stran.



(Žák K26, N, strategie RJP)

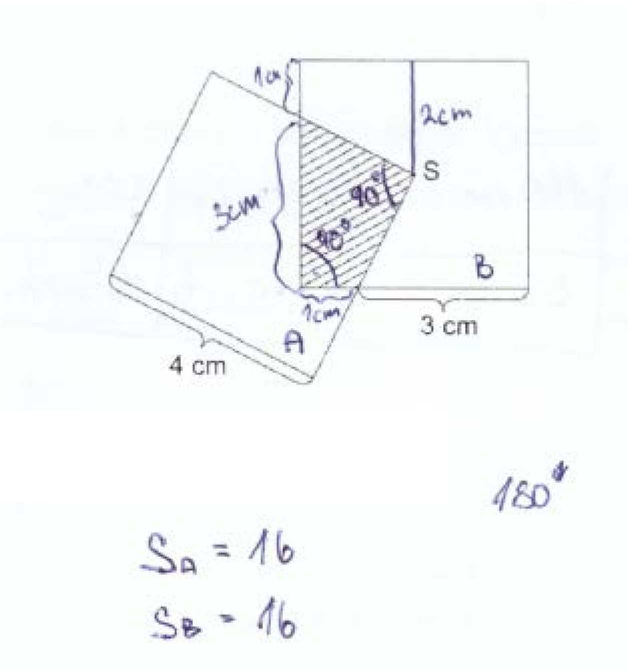


(Žák K15, S, strategie RJP)



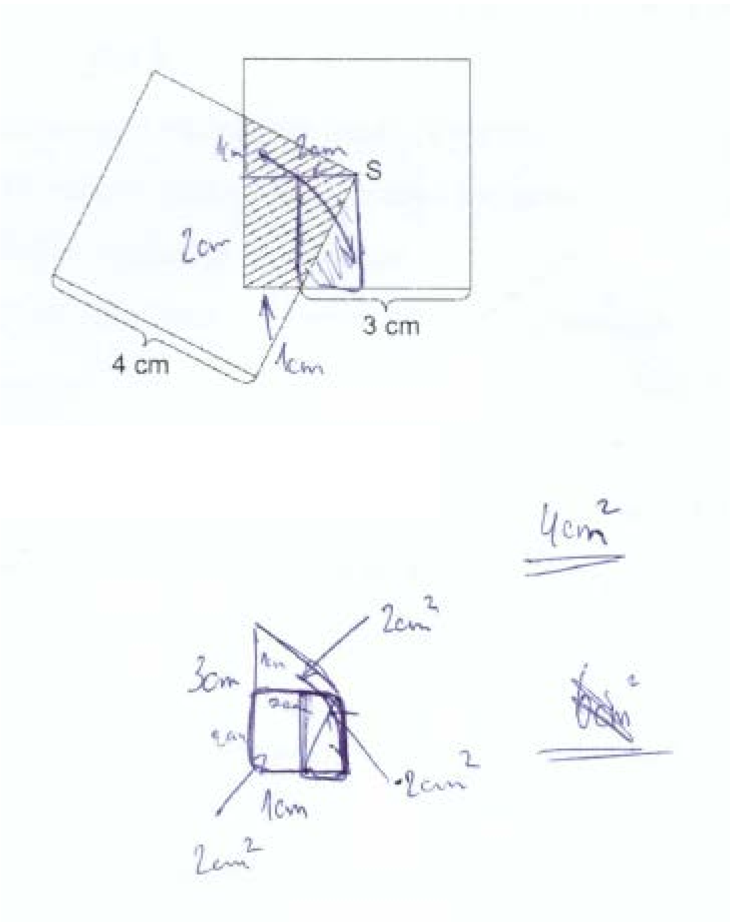
(Žák K4, S, strategie RJP)

Dále jsem vybrala řešení žáka H13, který měl problémy již v uchopení úlohy. Řešitel se pokusil zaznamenat všechny vztahy, které zná, ale tím také skončil. K samotnému řešení už nedošlo.



(Žák H13, S, neuchopeno)

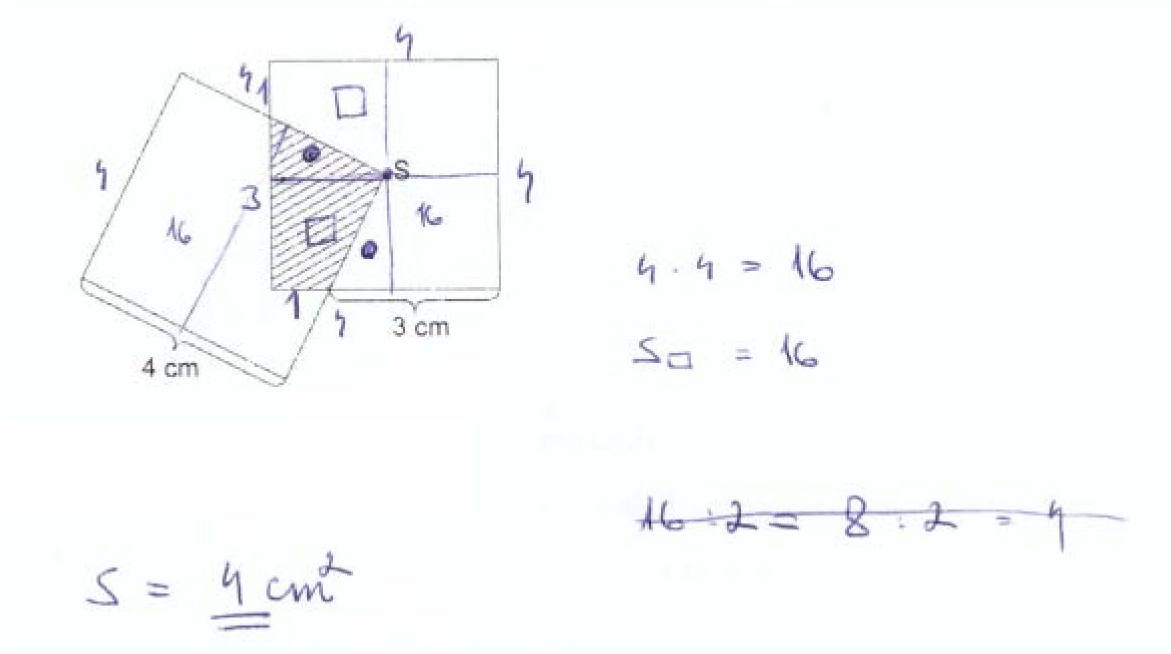
Z žákovských řešení na tomto místě ukazuji také úspěšná řešení dalšími heuristickými strategiemi. Řešení žáka H21 prezentuje strategii přeformulování problému, kdy žák jasně šipkou naznačuje, že si uvědomil, že je možné horní trojúhelník rotovat o 90° a získat tak čtverec s rozměry 2 cm x 2 cm.



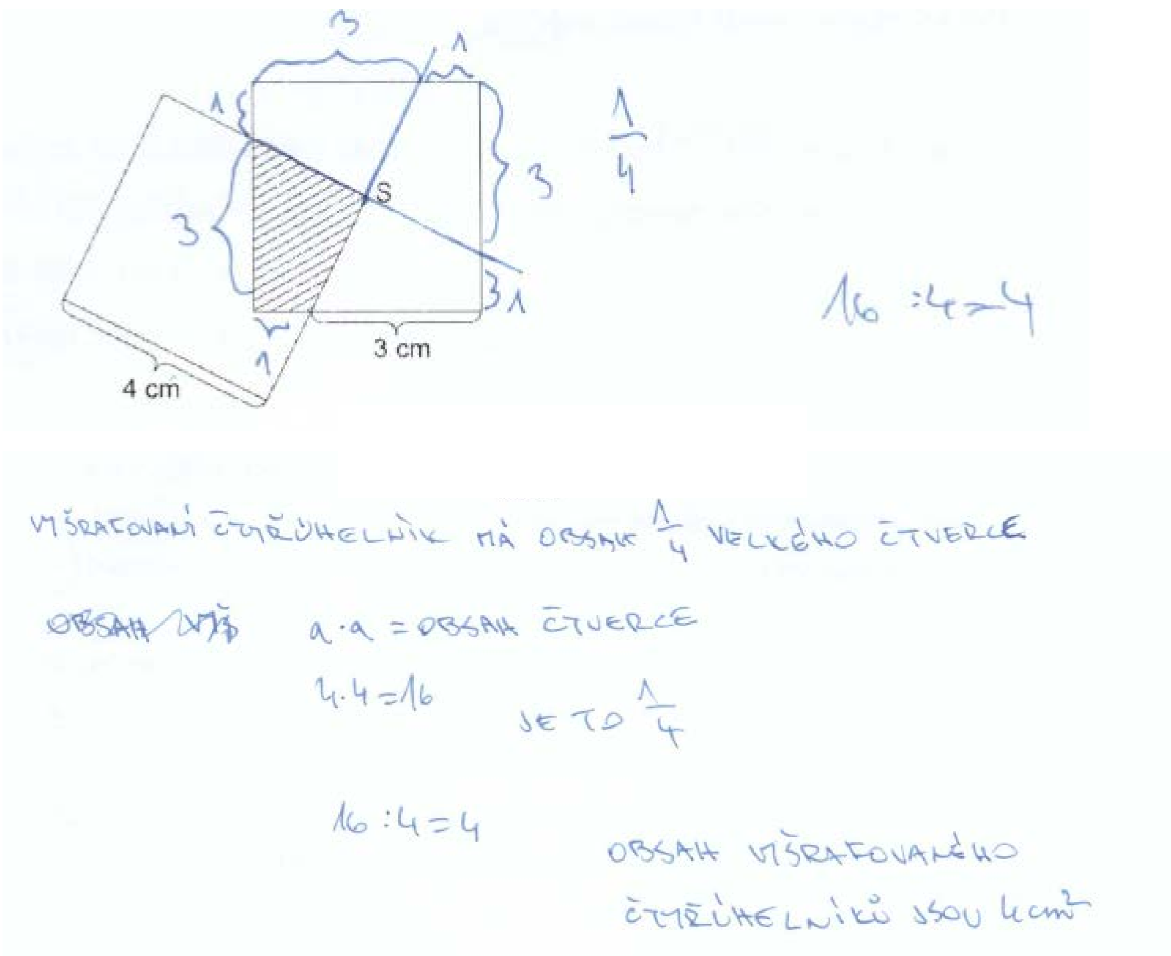
(Žák H21, N, strategie PřP)

V neposlední řadě uvádím úspěšná řešení strategií zavedení pomocného prvku. Žák H20 využil znázornění mříže o velikosti 2 cm x 2 cm, kde následně rozpoznal výskyt dvou typů stejných obrazců, které si označil čtvercem a modrou tečkou. Zjistil tak, že vyšrafovaný obrazec zaujímá polovinu z poloviny čtverce (viz přeškrtnutý výpočet).

Žák H2 zvolil čtvercovou mříž 4 cm x 4 cm, která navazuje na levý čtverec a v pravém čtverci rozděluje jeho strany v poměru 1 : 3 (viz délky částí stran v řešení žáka). Díky tomuto pomocnému prvku žák zjistil, že vyšrafovaná část je čtvrtina obsahu čtverce, protože pravý čtverec je rozdělen na čtyři stejné části.



(Žák H20, X, strategie ZPP)



(Žák H2, S, strategie ZPP)

Výsledky úlohy 3G

Úloha 3G byla pro žáky náročnější než úloha 3F. Úlohu řešilo necelých 60 % žáků a pouze 22 % řešení bylo úspěšných. Úspěšnější při řešení této úlohy byli intuitivní žáci, kteří měli o 0,12 bodu lepší průměrnou úspěšnost a větší podíl správných výsledků. Na druhou stranu se ale polovina intuitivních žáků ani nepokusila úlohu řešit.

Smysloví žáci se méně vyhýbali řešení úlohy 3G, ale jejich řešení byla častěji chybná, jednalo se o méně závažné i hrubé chyby, nebo problémy s uchopením úlohy. Další detaily k rozdělení řešení do kategorií 0 až 3 lze nalézt v tab. 21.

Tab. 21: Úspěšnost řešení úlohy 3G

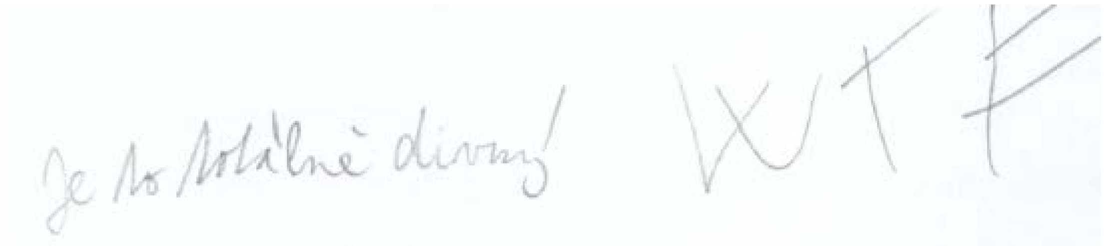
			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
3G	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,11	27	6	2	8	11	22	7	30	41
intuitivní	1,17	6	2	0	1	3	33	0	17	50
smysloví	1,05	19	3	2	7	7	16	11	37	37
smíšení	1,5	2	1	0	0	1	50	0	0	50

Tab. 22 prezentuje, jakými strategiemi řešili žáci úlohu a zda došli ke správnému výsledku. Mezi strategiemi byly přítomné všechny 3 obecné cesty k řešení problémů – přímá cesta (7 %), pokus (7 %) a heuristická strategie (26 %). Z heuristických strategií použili žáci pouze strategii zavedení pomocného prvku (ZPP). U zbylých řešení řešitelská strategie buď úplně chyběla, nebo se jednalo jen o uchopování úlohy, kde nebylo možné rozeznat strategii.

Vzhledem k tomu, že celkem bylo možné analyzovat jen 11 řešení z 27, nejsou následující závěry reprezentativní. Nejúspěšnější byli žáci ve strategii pokusu, poté v řešení přímou cestou (algebraicky nebo aritmeticky) a nejméně úspěšní byli v řešení heuristickou strategií zavedení pomocného prvku.

Překvapující je ale rozložení výběru strategií mezi smyslovými a intuitivními žáky. Intuitivní řešili úlohu pouze přímou cestou nebo heuristikou a smysloví namísto toho pouze pokusem nebo heuristikou. Smysloví žáci použili heuristiku častěji než intuitivní žáci, ale byli v ní méně úspěšní (pouze v pětině případů, u intuitivních to bylo 100 %, ale absolutní počty jsou velmi malé).

Smysloví žáci chybovali především v tom, že místo obsahu počítali obvod. Žák H17 dokonce na základě výpočtů s obvodem došel ke správnému výsledku 1/3, ale takové řešení nemohlo být uznáno jako správné. Dále se objevily případy, kdy žáci určili, že obsah vybarvené části je jeden a půl kosočtverce (například žák H15). Takové výsledky jsem řadila mezi řešení s méně závažnou chybou, protože se domnívám, že dořešení bránil hodně abstraktní jednotkový obsah trojúhelníku. Výskyt jednotkového obsahu v zadání byl pro mnohé smyslově orientované žáky opravdu velkou překážkou. Žákyně G10 měla dokonce potřebu zanechat komentář.



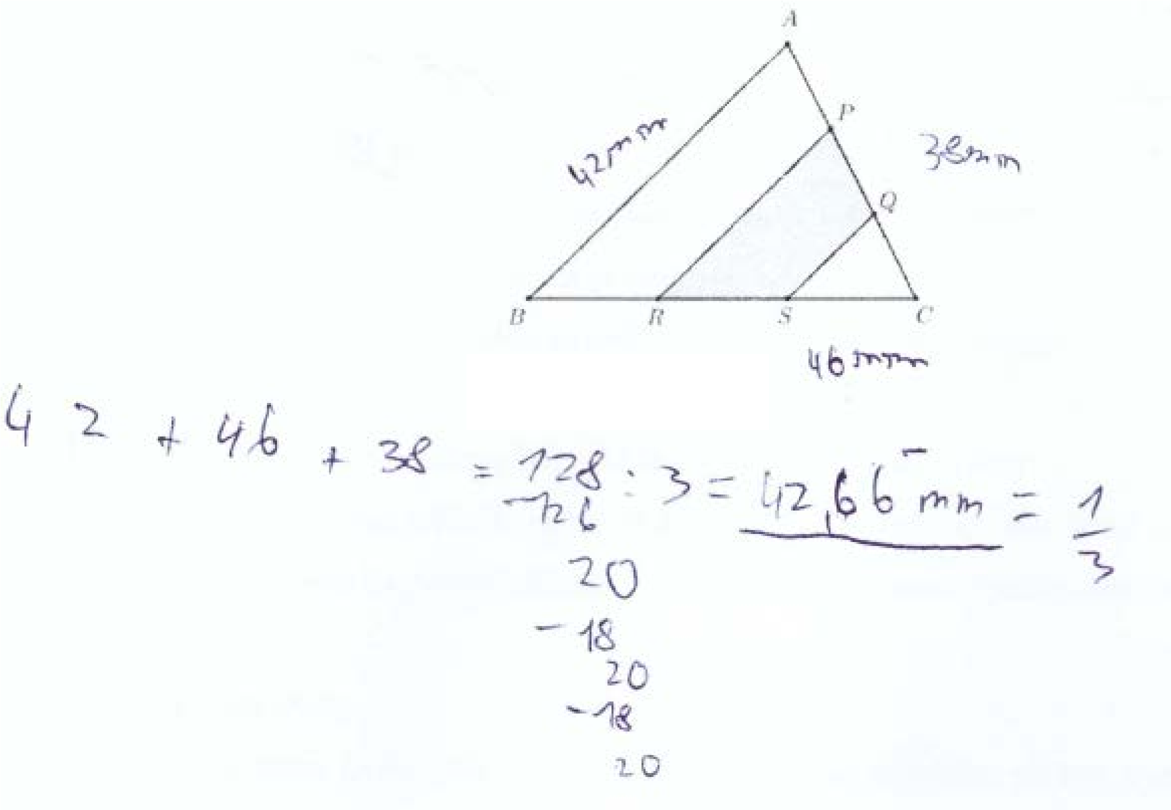
(Žák K10, S)

Tab. 22: Analýza řešitelských strategií úlohy 3G

3G - VŠICHNI	Průměrná úspěšnost	Počet řešitelů (absolutní)	Počet řešitelů (relativní)	3 body	2 body	1 bod	Podíl správných odpovědí
PŘÍMÁ	2	2	7%	1	0	1	50%
POKUS	3	2	7%	2	0	0	100%
HS	2,14	7	26%	3	2	2	43%
ZPP	2,14	7	26%	3	2	2	43%
3G - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	2	2	33%	1	0	1	50%
HS	3	1	17%	1	0	0	100%
ZPP	3	1	17%	1	0	0	100%
3G - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
POKUS	3	2	11%	2	0	0	100%
HS	1,8	5	26%	1	2	2	20%
ZPP	1,8	5	26%	1	2	2	20%

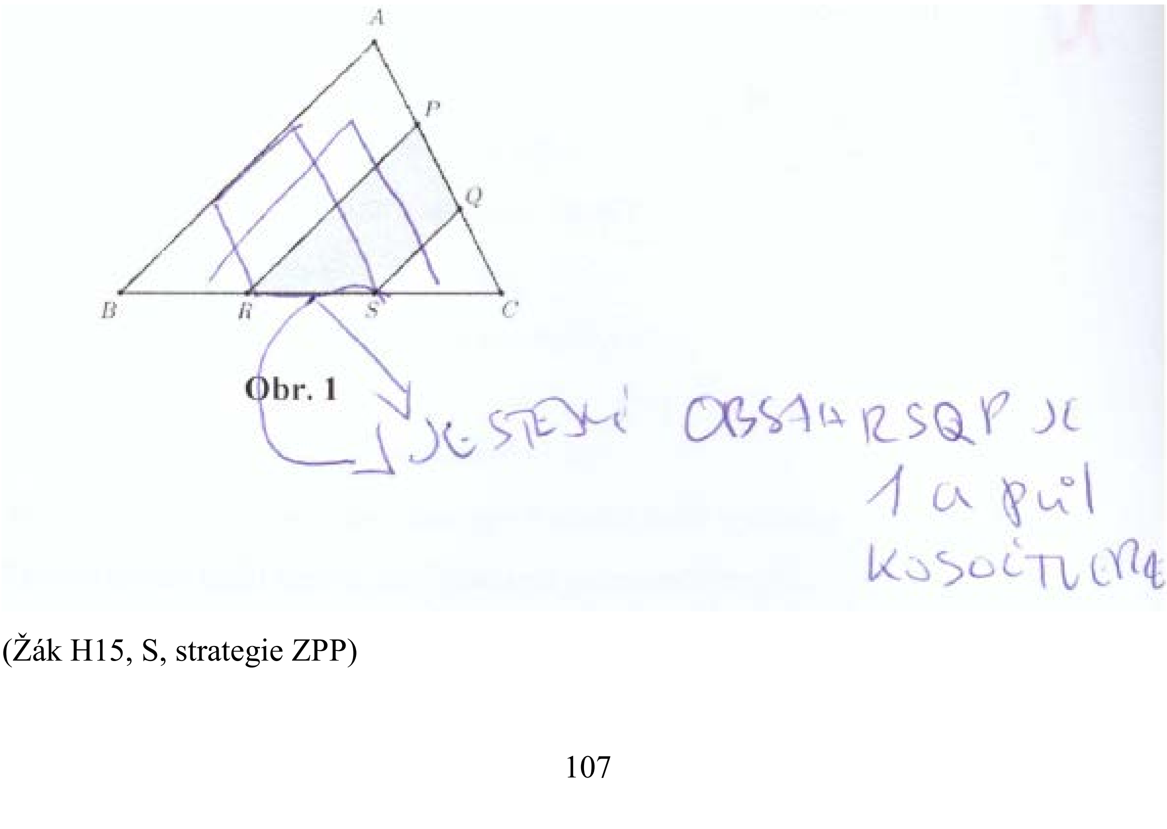
Ukázky žákovských řešení úlohy 3G

Ze všech žákovských řešení jsem vybrala 3 správná řešení a 3 řešení s chybami. Jako první uvádím řešení žáka H17, který přes výpočty s obvodem namísto obsahu došel ke správnému výsledku. Nicméně bylo toto řešení hodnoceno jako řešení se závažnou chybou.



(Žák H17, S)

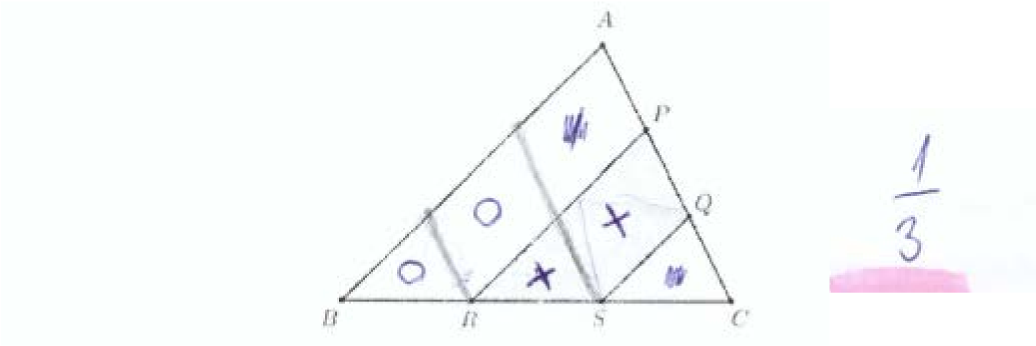
Další řešení (žáka H15) zastupuje řešení s mírně závažnou chybou, kterou bylo nedopočítání konkrétní hodnoty obsahu vybarvené části.



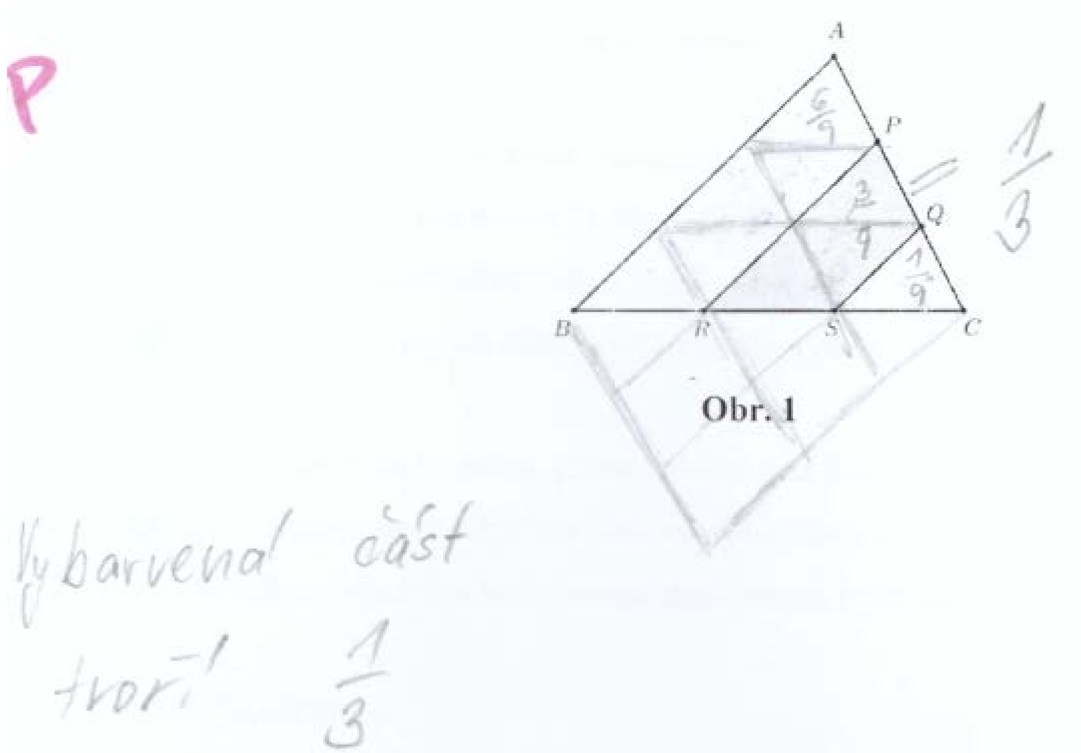
(Žák H15, S, strategie ZPP)

Řešení žáků H23, K19 a H9 jsou řešení zcela správná, ve kterých žák použil heuristickou strategii zavedení pomocného prvku. Žák H23 rozdělil trojúhelník na 3 kosodélníky a 3 trojúhelníky, značkami kolečko, křížek a skvrna označil, které části tvoří stejný útvar. Je možné, že žák udělal v hlavě přesun horního kosodélníku ke straně *CQ*, a tak zjistil, že vybarvená část tvoří třetinu trojúhelníku.

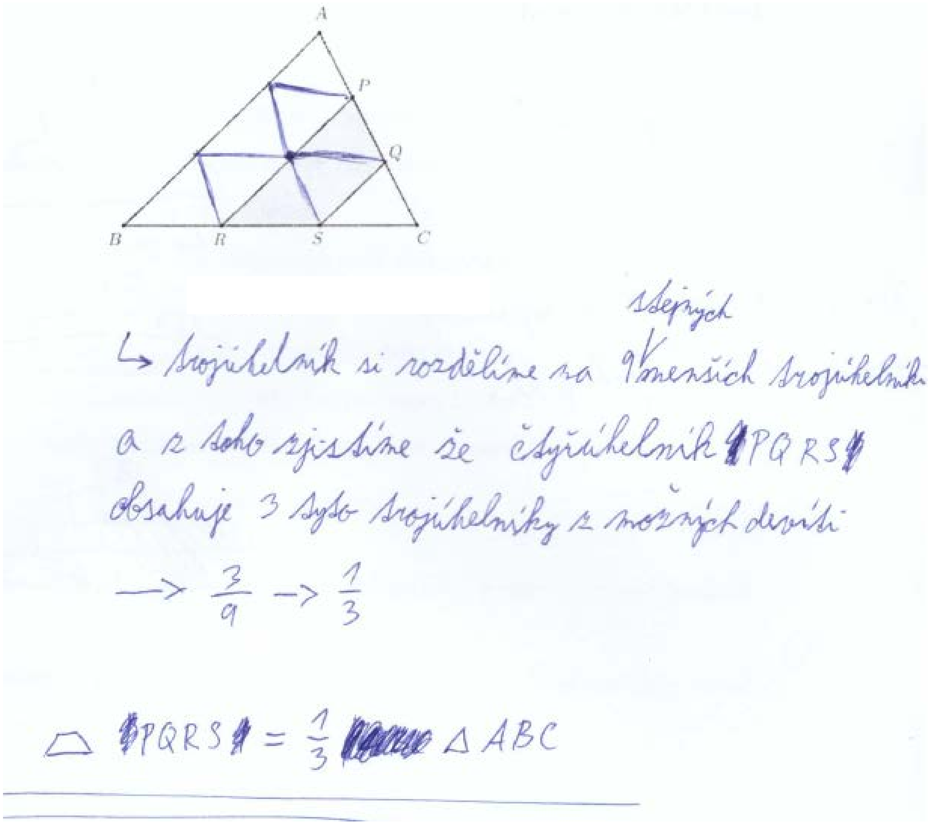
Žák K19 zavedl pomocný prvek, kterým je trojúhelníková síť o velikosti trojúhelníku *SCQ*. Žák H9 použil rozšířenou trojúhelníkovou síť o spodní část.



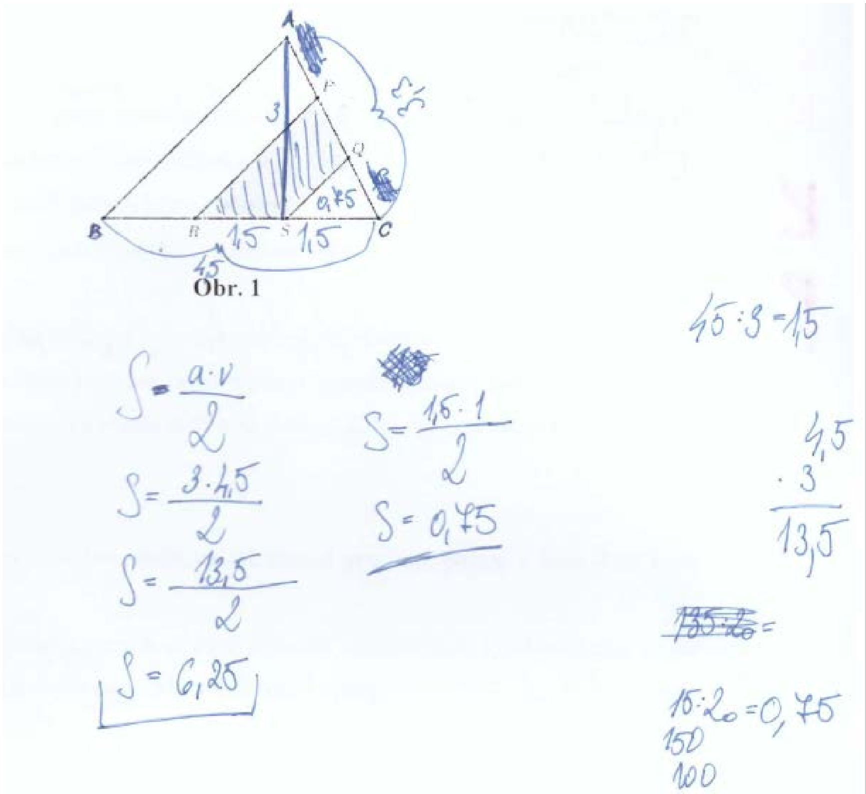
(Žák H23, N, strategie ZPP)



(Žák H9, S, strategie ZPP)

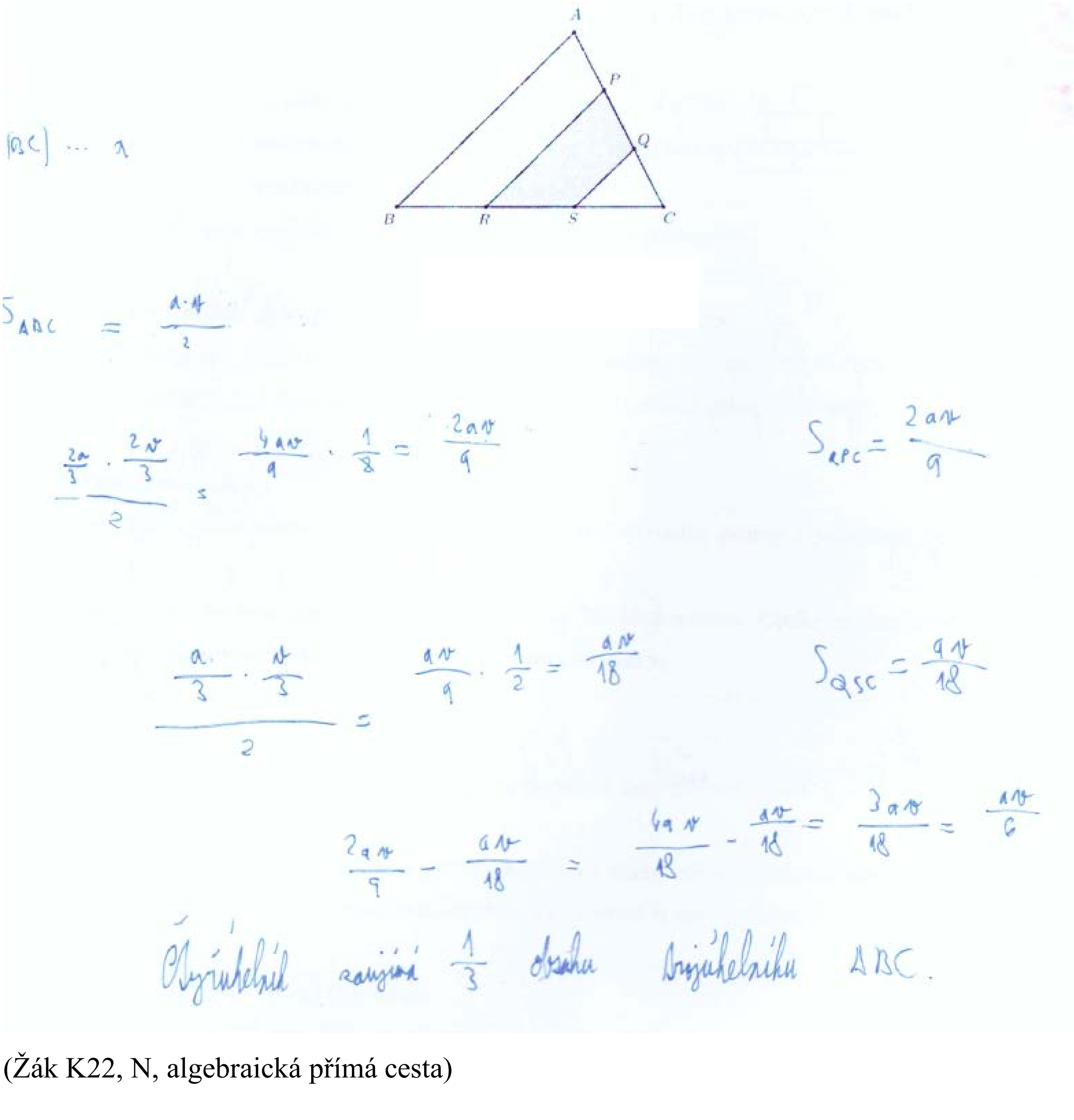


(Žák K19, X, strategie ZPP)



(Žák K6, S, aritmetická přímá cesta)

Poslední dvě vybraná řešení – žáka K6 a K22 – představují řešení přímou cestou. Jedná se o nejobecnější řešení, která se mezi řešeními vyskytla. Žák K6 však úlohu nedopočítal. Naproti tomu intuitivně orientovaný žák K22 své algebraické řešení dokončil a jeho výsledek byl správný. Algebraické řešení žáka K22 je možné považovat za zobecněné aritmetické řešení žáka K6. Z tohoto úhlu pohledu by žáci použili při řešení heuristické strategie konkretizace (žák K6) a zobecnění (žák K22). Řešení žáka K22 lze totiž využít pro jakýkoliv typ trojúhelníka nejen toho, který je vyobrazen v zadání úlohy.



(Žák K22, N, algebraická přímá cesta)

Shrnutí výsledků řešení úloh 3F a 3G

Z řešení úloh 3F a 3G, které byly vybrané jako úlohy řešitelné především heuristickou strategií a představovaly výzvy pro mnohé žáky, vyplývá, že v řešení úloh tohoto typu byli podle očekávání úspěšnější intuitivní žáci. Úspěšnost byla posuzována jak na základě průměrného bodového zisku, tak relativním podílem správných řešení v dané skupině žáků.

Dalším očekáváním bylo, že intuitivní žáci se budou méně vyhýbat řešení úloh typu výzva. Toto očekávání se nepotvrdilo, protože řešení úlohy 3G se vyhnulo poměrově méně smyslových žáků než intuitivních. Pokud se ale intuitivní žáci pustili do řešení, vyskytovaly se v jejich řešení matematicky zajímavé nápady (například řešení žáků K22, H23, K26).

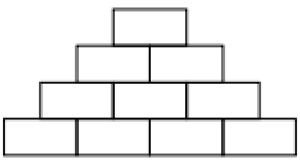
Smysloví žáci měli podle předpokladů potřebu častěji dopočítávat délky všech stran, počítat s konkrétními hodnotami. Dále se potvrdilo, že smysloví žáci byli obecným zadáním především úlohy 3G velmi zaskočeni (viz komentář žáka K10) a měli problémy s rozdělením obrazce v úloze 3F na více než 2 části.

5.4.4 Úlohy 4F a 4G

Zadání

Úloha 4F: Při jízdě na dálnici se mi objevilo na počítadle kilometrů zajímavé symetrické číslo: 24942. Po dvou hodinách jízdy se opět objevilo symetrické číslo. Které? Jel jsem podle předpisů? Pokud existují další řešení, najdi je.

Úloha 4G: Honza vepisuje přirozená čísla do polí pyramidy. Pokud pole neleží ve spodní řadě, je v něm zapsána hodnota součtu dvou čísel v polích bezprostředně pod ním. Urči <u>nejvyšší</u> počet lichých čísel, které může Honza do pyramidy vepsat.



Řešení přímou algoritmickou cestou

V řešení úlohy 4F lze využít algoritmus písemného sčítání. Normální auto za dvě hodiny ujede po dálnici podle předpisů maximálně 260 kilometrů, proto rovnou omezíme číslo, které budeme přičítat, na trojmístné. Ze zadání lze pak sestavit následující algebraický vztah, kde *abc* je trojmístné číslo vyjadřující počet ujetých kilometrů za 2 hodiny jízdy a symetrické číslo *xyzyx*, které bude po dvou hodinách na tachometru.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ \hline x & y & z & y & x \end{array}$$

Z principu písemného sčítání vyplývá, že $x = 2$, protože sčítání na místě tisíců nepřejde přes 10 a nezmění tím hodnotu na místě desetitisíců. Analogicky na místě tisíců mohou nastat dvě situace: $y = 4$ nebo $y = 5$. Pokud bude $y = 4$, pak $z = 9$ a na tachometru se ukáže stejné číslo, jako bylo na začátku (24942). To by znamenalo, že mělo auto poruchu a zůstalo na místě.

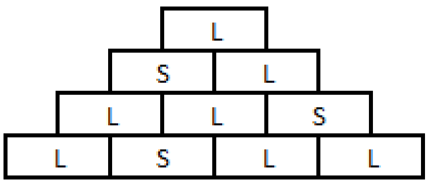
Uvažujme tedy, že $y = 5$, pak $b = 1$; $a \in \{1, 2\}$, z čehož plyne, že $z \in \{0, 1\}$. Odpověď: Na tachometru se mohla ukázat pouze čísla 25 052 a 25 152, pokud jel řidič podle předpisů. Pokud řidič nejel podle předpisů, mohla se ještě ukázat čísla 25 252 a 25 352.

V řešení úlohy 4G aplikujeme obecné znalosti o sčítání sudých (S) a lichých (L) čísel, zapsané schematicky:

$$S + S = S;$$
$$S + L = L; L + S = L;$$
$$L + L = S;$$

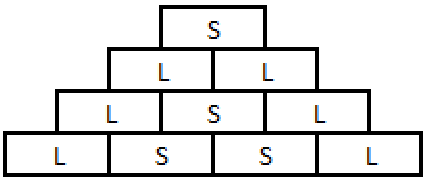
Jestliže chceme maximalizovat počet lichých čísel ve sčítací pyramidě, budeme se snažit maximalizovat počet lichých čísel v každém řádku. Začneme od horního řádku, kde dosadíme liché číslo. V polích pod ním pak musí být jedině liché a sudé číslo, analogicky pro 3. a 4. řádek s tím, že sudé číslo rozepisuje jako součet dvou lichých čísel (viz obr. 15). Tímto způsobem dostaneme do pyramidy celkem 7 lichých čísel.

Obr. 15: Doplnění sčítací pyramidy – horní číslo liché



V dalším kroku ještě ověříme, jak by vypadalo rozložení čísel v pyramidě, pokud by v horním řádku bylo sudé číslo. Opět doplňujeme čísla tak, abychom maximalizovali počet lichých čísel, tzn. sudé číslo rozkládáme na součet dvou lichých čísel (viz obr. 16). Tímto způsobem se podařilo do pyramidy vepsat pouze 6 lichých čísel.

Obr. 16: Doplnění sčítací pyramidy – horní číslo sudé



<u>Odpověď:</u> Do pyramidy lze vepsat maximálně 7 lichých čísel.

Řešení heuristickou strategií – systematické experimentování (SE)

Při řešení úlohy 4F je řešitelsky výhodné využít např. MS Excel, který jednodušší cestou řešiteli ukáže, jaká čísla se budou postupně objevovat na tachometru. Tento nástroj může sloužit k zachycení procesu generování čísel na tachometru. Pokud si řešitel uvědomí, že se za 2 hodiny jízdy po dálnici nemůže u tachometru auta změnit číslice na místě desetitisíců a tisíců, bude možné sestavit jednodušší tabulku pro systematické experimentování (viz tab. 23). Symetrie čísla totiž rovnou určuje, jaké číslo bude tím pádem na místě jednotek a desítek.

Zadání úlohy 4F je velmi obecné, co se týče zjištění, zda řidič jel podle předpisů. Zadání totiž neobsahuje konkrétní hodnotu, pro jaké rychlosti jel řidič podle předpisů a pro jaké ne. Zda je nalezená průměrná rychlost v pořádku nebo nikoliv, musí žák určit na základě vlastního všeobecného přehledu. Dále v zadání chybí, kde se dálnice nachází, zda je tuzemská nebo zahraniční. To totiž také potřebuje řešitel vědět, než se rozhodne určit, zda jel řidič podle předpisů nebo ne. Pro náš rozbor uvažujme, že se jedná o českou dálnici, kde je povolená maximální rychlost 130 km/h a nemají na ni přístup vozidla, která mají nižší maximální povolenou rychlost než 80 km/h. Předpokládejme také, že jedeme v autě, to také není v zadání uvedeno.

Na tachometru se tak mohlo ukázat číslo 25052 v případě, že byla na dálnici kolona, která zpomalila provoz na 55 km/h. Další možností je číslo 25152, kdy jel řidič podle předpisů. Další symetrická čísla se objevit nemohla, protože průměrná rychlost je vyšší než povolených 130 km/h.

Tab. 23: Ukázka systematického experimentování v úloze 4F

	Číslo na tachometru	**Počet ujetých kilometrů**	**Průměrná rychlost**	**Jel podle předpisů?**
0.	24942	0	-	-
1.	25052	110	55	Mohl
2.	25152	210	105	ANO
3.	25252	310	155	NE
4.	25352	410	205	NE

Systematické experimentování v řešení úlohy 4G spočívá v sestavení všech možností, jak může vypadat rozložení sudých a lichých čísel v dolním řádku. Od toho se pak odvíjí, kolik lichých čísel bude celkem v pyramidě. Celkem je takových možností 16 (tj. 2^4 možností složených ze 2 prvků – sudý, lichý – a 4 pozic). Dále uvažujme, že symetrické možnosti mají stejný počet lichých čísel, proto je možné využít k experimentování pouze 9 možností rozložení sudých (S) a lichých (L) čísel v dolním řádku pyramidy. V tab. 24 je zaznamenáno všech 9 možností rozložení dolního řádku spolu s celkovým počtem lichých čísel v pyramidě. V pyramidě může být nejvíce 7 lichých čísel.

Tab. 24: Ukázka systematického experimentování v úloze 4G

	Rozložení dolního řádku				**Počet lichých čísel v pyramidě**
1.	L	L	L	L	4
2.	S	S	S	S	0
3.	L	S	S	S	4
4.	S	L	S	S	5
5.	L	L	S	S	5
6.	L	S	L	S	5
7.	L	S	S	L	6
8.	L	L	L	S	6
9.	**L**	**L**	**S**	**L**	**7**

<u>Poznámka:</u> Při systematickém experimentování v úloze 4G lze místo obecného vyjádření L a S pro lichá a suchá čísla pracovat s konkrétními hodnotami například s číslem 1 (zástupce lichých čísel) a číslem 2 (zástupce sudých čísel). Strategii SE při řešení doplňují strategie konkretizace a zobecnění.

<u>Poznámka 2:</u> Podobně lze postupovat i při strategii odhad-ověření-oprava (OOO). Protože však řešitel neví, jaký je nejvyšší počet lichých čísel v pyramidě, měl by pro zdůvodnění výsledku 7 vyzkoušet všechny možnosti rozložení sudých a lichých čísel v dolním řádku pyramidy. Jinak nemá jistotu, že je to opravdu nejvyšší možný počet lichých čísel.

Očekávání

Úlohy 4F a 4G jsou úlohy netradiční, které lze řešit heuristickými strategiemi. Cesta k nalezení řešení problému není známá, i když existuje řešení přímou cestou. To ale vyžaduje od žáků hluboké abstraktní znalosti z oblasti písemného sčítání (úloha 4F) a sčítání sudých a lichých čísel (úloha 4G). Navíc jsou obě zadání ve velké míře obecná a vybízejí k hledání více možností řešení.

Na základě výše uvedených důvodů jsem očekávala, že řešení úloh bude spíše vyhovovat intuitivním žákům, takže by měli být i úspěšnější než smysloví žáci. Intuitivní žáci by si měli lépe poradit s vysokou mírou obecnosti v zadání. Očekávala jsem, že budou úlohy řešit spíše zobecněním než konkretizacemi. Hledat více řešení jim nebude dělat problémy.

U smyslových žáků jsem naopak očekávala větší výskyt konkretizací a námitky k příliš obecnému zadání. Bylo také možné očekávat, že jejich řešení budou častěji pokusná, protože obecně neinklinují ke zjištění, zda existuje více řešení. Jedno řešení, které splňuje podmínky zadání, jim bude stačit.

Výsledky úlohy 4F

Za vyřešení úlohy 4F dostávali 3 body, pouze ti žáci, kteří našli více řešení zadané úlohy a určili, zda jsou rychlosti podle předpisů (řešení odpovídající kategorii 3). Za méně závažnou chybu jsem považovala řešení, jejichž řešitel prostřednictvím správné strategie nalezl pouze 1 řešení a zároveň rozhodl o reálnosti výsledku (řešení odpovídající kategorii 2). Jedním bodem (řešení odpovídající kategorii 1) byla ohodnocena řešení, která obsahovala závažnější chyby (např. výsledek nebyl symetrické číslo, řešení neobsahovalo rozhodnutí o tom, jakou rychlostí auto jelo, řešení nebylo dokončené atd.). Žádným bodem byla ohodnocena absence řešení (řešení kategorie 0).

Tab. 25: Úspěšnost řešení úlohy 4F

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
4F	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,74	27	8	8	7	4	30	30	26	15
intuitivní	1,89	9	3	3	2	1	33	33	22	11
smysloví	1,63	16	4	5	4	3	25	31	25	19
smíšení	2	2	1	0	1	0	50	0	50	0

Úlohu vyřešilo správně celkem 30 % řešitelů. Dalších 30 % řešitelů našlo pouze 1 řešení. Více než čtvrtina řešitelů se dopustila závažné chyby nebo řešení nedokončila a 15 % žáků úlohu vůbec neřešilo. Úspěšnější byli v řešení úlohy intuitivní žáci, kteří měli o 0,26 bodu vyšší průměrnou úspěšnost a o 8 procentních bodů vyšší podíl správných odpovědí. Oproti smyslovým žákům se méně častěji vyhýbali řešení úlohy. Tab. 25 shrnuje úspěšnost řešení úlohy 4F.

Tab. 26: Analýza řešitelských strategií úlohy 4F

4F - VŠICHNI	Průměrná úspěšnost	Počet řešitelů (absolutní)	Počet řešitelů (relativní)	3 body	2 body	1 bod	Podíl správných odpovědí
PŘÍMÁ	1,5	2	7 %	0	1	1	0 %
POKUS	1,9	10	37 %	1	7	2	10 %
HS	3	7	26 %	7	0	0	100 %
SE	3	7	26 %	7	0	0	100 %
4F - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	1,5	2	22 %	0	1	1	0 %
POKUS	2	2	22 %	0	2	0	0 %
HS	3	4	44 %	4	0	0	100 %
SE	3	4	44 %	4	0	0	100 %
4F - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
POKUS	1,71	7	44 %	0	5	2	0 %
HS	3	3	19 %	3	0	0	100 %
SE	3	3	19 %	3	0	0	100 %

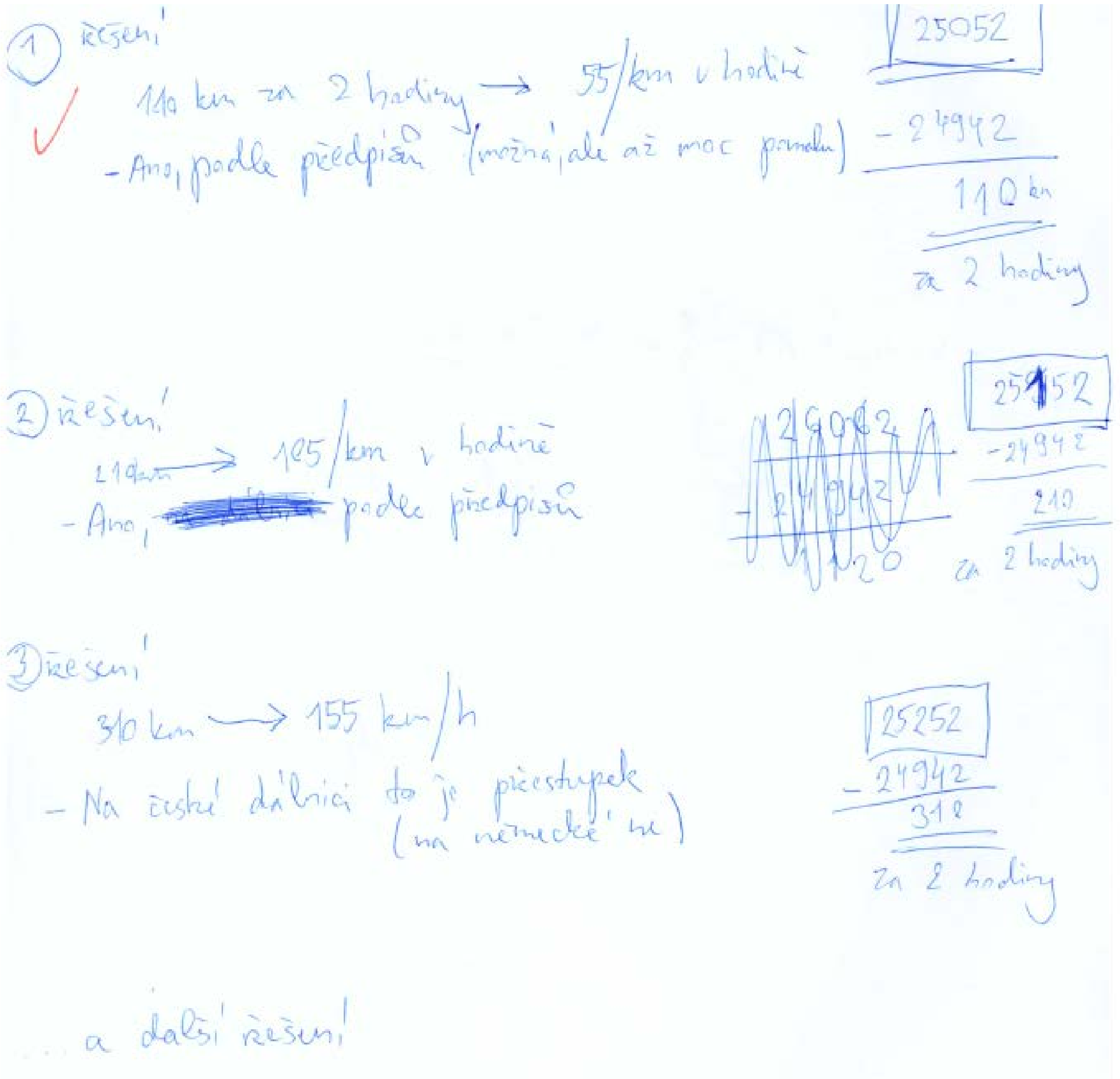
Úlohu 4F řešili nejčastěji žáci pokusem, ale uspěl jeden z deseti. Objevila se i řešení přímou cestou, ale ani jedno z nich nebylo úspěšné. Úspěšní při řešení byli především ti, kteří zvolili heuristickou strategii systematické experimentování (SE, viz řešení žáka K24 a K7). Intuitivní i smysloví žáci řešili úlohu heuristickou strategií a pokusem, intuitivní žáci navíc řešili úlohu i přímou cestou (řešení žáka H26). Intuitivní žáci řešili úlohu heuristikou dvakrát častěji než smysloví žáci. Podrobné výsledky lze nalézt v tab. 26.

Žáci při řešení chybovali především v tom, že našli jen 1 řešení a další už nehledali (viz např. řešení žáků H21, K17). Čtyři žáci (3 smysloví a 1 intuitivní) našli pouze řešení 25052 a čtyři žáci objevili pouze řešení, které odporuje fyzikálním zákonům, tj. 25952 a 58785 (2 smysloví a 2 intuitivní). Všech 8 řešení bylo zařazeno do kategorie pokusů, protože se jejich řešitelé vyhnuli hledání dalších řešení.

Ze závažnějších chyb lze jmenovat například neurčení průměrné rychlosti a chybějící rozhodnutí, zda řidič jel podle předpisů, nebo ne. Jedno řešení intuitivního žáka dokonce uvádělo mezi výsledky i nesymetrické číslo (viz řešení žáka K21). Neúspěšní v uchopení úlohy byli celkem 3 žáci (2 smysloví a 1 smíšený). Jeden smyslový žák měl potřebu místo řešení úlohy vyjádřit svůj názor k z jeho pohledu chybnému zadání (viz řešení žáka K14).

Ukázky žákovských řešení úlohy 4F

Na tomto místě uvádím ukázky žákovských řešení, o kterých se zmiňuji výše.


1) řešení
110 km za 2 hodiny → 55/km v hodině
- Ano, podle předpisů (možná, ale až moc pomalu)
25052 − 24942 = 110 km za 2 hodiny

2) řešení
210 km → 105/km v hodině
- Ano, podle předpisů
25152 − 24942 = 210 za 2 hodiny

3) řešení
310 km → 155 km/h
- Na české dálnici to je přestupek (na německé ne)
25252 − 24942 = 310 za 2 hodiny

… a další řešení!

(Žák K7, S, SE)

110 km/2h

→ 24942

55 km/h

nejbližší vyšší symetr. číslo je 25052

řešení č. 1: Po dvou hodinách jízdy se na tachometru objevilo číslo 25052. Buď je dálnice ucpaná a jede jen 55 km/h, anebo porušuje předpisy a jede pod 80 km/h.

– další nejbližší vyšší symetrické číslo je 25152 – od 24942 je rozdíl 210 km

$210/2 = 105$

řešení č. 2: Na tachometru se objevilo číslo 25152, potom by jel podle předpisů (105 km/h).

– další číslo splňující zadané podmínky je 25252
rozdíl od 24942 : 310
→ potom by musel jet rychlostí 155 km/h

řešení č. 3: Pokud jede po německé dálnici, na které rychlostní zákony nejsou, může být ještě mnoho dalších řešení. Limitem by pro něj byly jen zákony fyzikální. → na tachometru se nadále objevoval čísla (25252, 25352, ...).

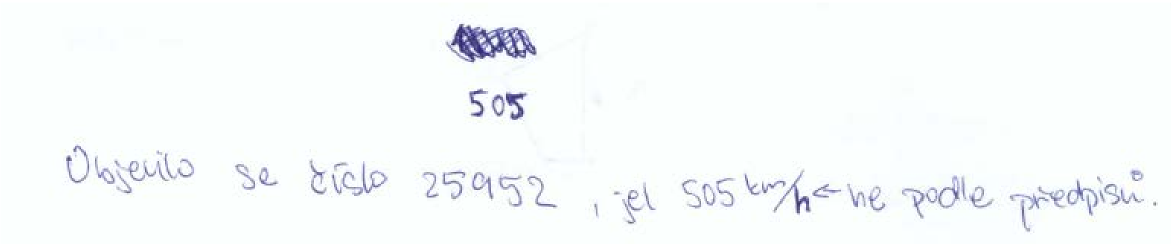
(Žák K24, N, SE)

Po dvou hodinách jízdy se opět objevilo symetrické číslo. Které? Jel jsem podle předpisů? Pokud existují další řešení, najdi je.

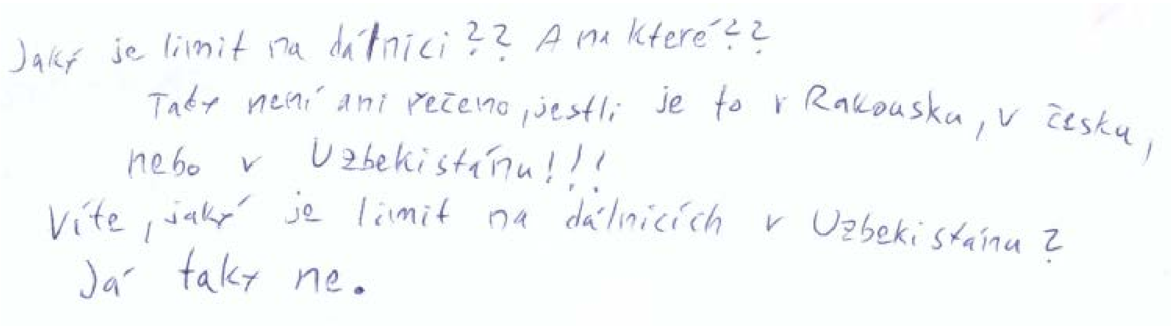
25052 ANO

25052 = 110 km/2 h
= 55 km/h

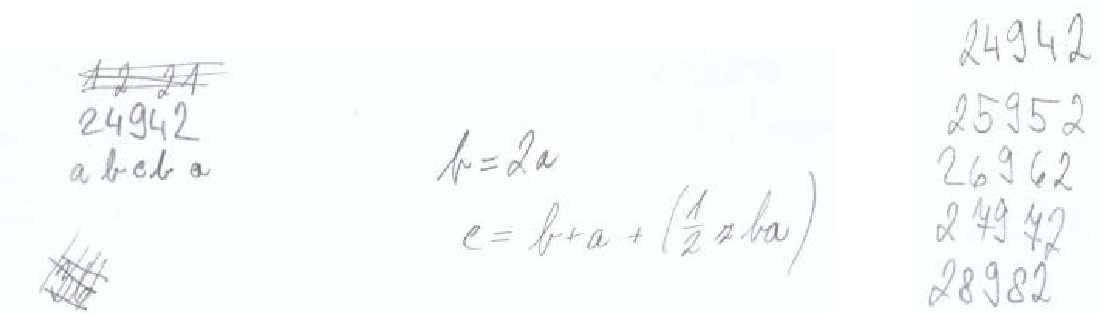
(Žák H21, N, pokus)



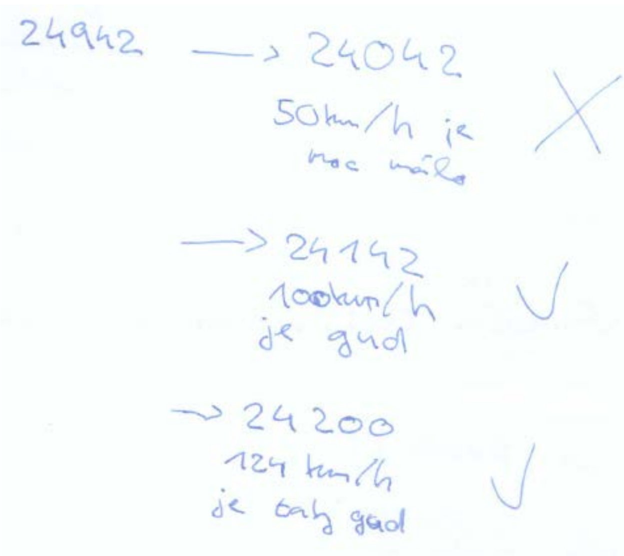
(Žák K17, S, pokus)



(Žák K14, S)



(Žák H26, N, algebraické řešení)



(Žák K21, N, SE)

Výsledky úlohy 4G

Za vyřešení úlohy 4G dostávali 3 body pouze ti řešitelé, kteří našli jediné správné řešení (řešení odpovídající kategorii 3). Dva body dostali ti, kteří měli správnou strategii řešení, ale neudělali dostatek konkretizací, takže měli špatný výsledek (řešení odpovídající kategorii 2). Jedním bodem byla ohodnocena řešení, ve kterých měl řešitel problém úlohu uchopit (řešení odpovídající kategorii 1). Žádným bodem byla ohodnocena absence řešení (řešení odpovídající kategorii 0).

Při řešení úlohy 4G byli na základě údajů z tab. 27 úspěšnější intuitivní žáci, kteří měli jak mírně vyšší průměrnou úspěšnost, tak především téměř dvojnásobný podíl správných řešení, než měli smysloví žáci. Intuitivní žáci se ale častěji vyhýbali řešení úlohy, a naopak neměli problém s uchopováním úlohy.

Žádné závažné chyby se v řešení žáků nevyskytly, takže kategorie 1 obsahuje pouze případy, kdy se žák snažil úlohu řešit, ale nepodařilo se mu ji uchopit. V takových případech nelze určit, jakou strategii žák využil, protože jeho řešitelský proces skončil vypsáním údajů ze zadání. V tab. 28 tak chybí sloupec pro řešení kategorie 1.

Tab. 27: Úspěšnost řešení úlohy 4G

			ABSOLUTNÍ				**RELATIVNÍ v (%)**			
4G	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
všichni	1,63	27	8	8	4	7	30	30	15	26
intuitivní	1,84	6	3	1	0	2	50	17	0	33
smysloví	1,53	19	5	5	4	5	26	26	21	26
smíšení	2	2	0	2	0	0	0	100	0	0

V analýze řešení nebylo jednoduché odlišit od sebe řešení heuristickou strategií a přímou cestou. Rozdíl nebyl totiž na první pohled viditelný, protože žáci svá řešení většinou nekomentovali. Jediným znakem, který od sebe řešení rozlišoval, bylo, zda žák psal do pyramidy čísla od shora (přímá cesta) nebo zdola (heuristika). Podle písma a kreseb čar pyramidy jsem se pokusila o odhad směru vyplňování, ale ne vždy jsem byla úspěšná. Další indicií bylo, jaké hodnoty se objevovaly v dolním řádku pyramidy. Pokud žák vyplňoval pyramidu zdola, byla v posledním řádku většinou 2 malá čísla – jedno zastupovalo lichá čísla a jedno sudá (např. 0, 1 nebo 1, 2). Pokud naopak postupoval žák shora, byla v posledním řádku jakákoliv čísla, naopak v 2. řádku shora se vyskytovala 2 čísla, která „pěkně“ rozkládala číslo v horním řádku.

Domnívám se, že nejčastěji řešili žáci úlohu přímou cestou a nejméně pokusem (viz hodnoty v tab. 28). Strategie, která vedla ve všech případech k úspěchu, byla některá z heuristik – SE nebo OOO. Zde stojí za zmínku, že se vyskytlo pouze 1 řešení SE a 3 řešení OOO a všechna řešení OOO byla zcela správná, i když si žáci neprověřili všechny možnosti rozmístění dolního řádku. Je možné, že zbylé varianty si prověřili pouze výpočtem zpaměti, nebo si to jinak odůvodnili.

Tab. 28: Analýza řešitelských strategií úlohy 4G

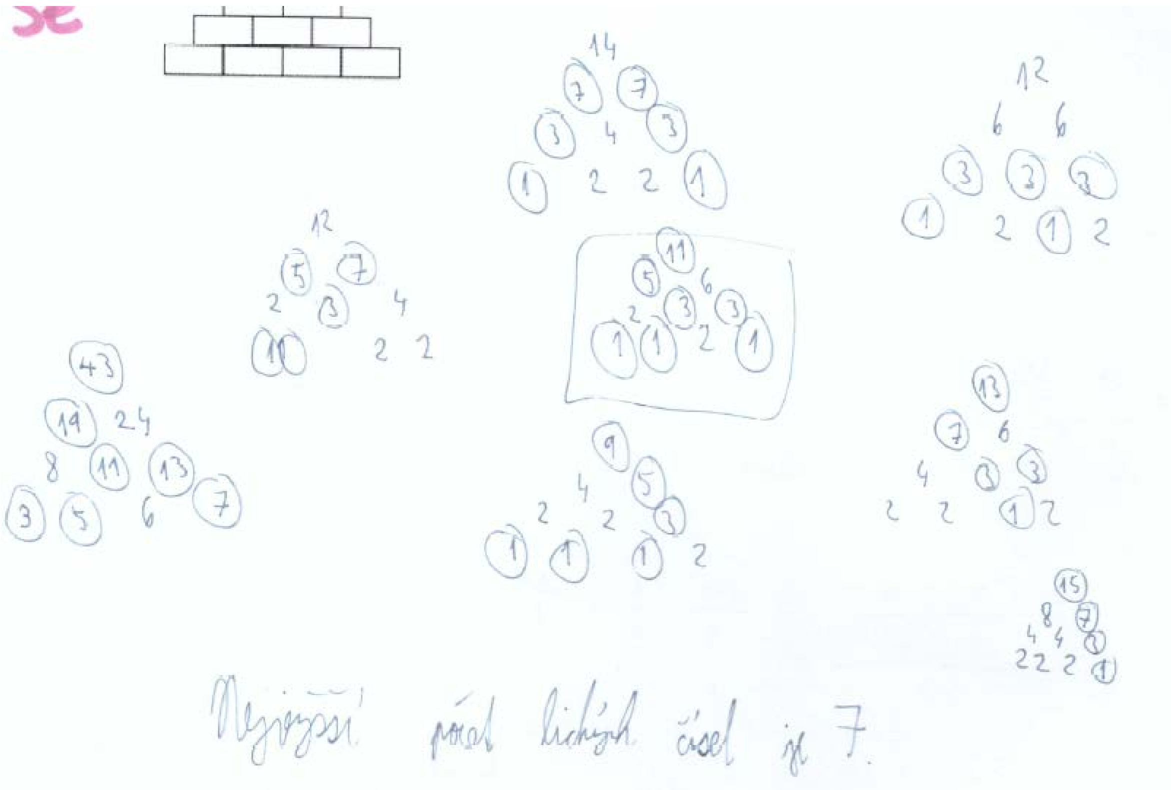
4G – VŠICHNI	Průměrná úspěšnost	Počet řešitelů (absolutní)	Počet řešitelů (relativní)	3 body	2 body	Podíl správných odpovědí
POKUS	2,2	5	19 %	1	4	20 %
PŘÍMÁ	2,43	7	26 %	3	4	43 %
HS	3	4	15 %	4	0	100 %
SE	3	1	4 %	1	0	100 %
OOO	3	3	11 %	3	0	100 %
4G - INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	2,5	2	33 %	1	1	50 %
HS	3	2	33 %	2	0	100 %
SE	3	1	17 %	1	0	100 %
OOO	3	1	17 %	1	0	100 %
4G - SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**Podíl správných odpovědí**
POKUS	2,25	4	21 %	1	3	25 %
PŘÍMÁ	2,5	4	21 %	2	2	50 %
HS	3	2	11 %	2	0	100 %
OOO	3	2	11 %	2	0	100 %

Při porovnávání řešení intuitivních a smyslových žáků vyzdvihuji rozdíl v rozložení řešení jednotlivými typy žáků. Intuitivní žáci se v oblasti řešitelských strategií rozdělili na třetiny – třetina řešila úlohu přímou cestou, třetina heuristikou a třetina neřešila úlohu vůbec. U smyslových žáků je zastoupeno více skupin řešení – pětina žáků řešila úlohu pokusem, pětina přímou cestou, desetina heuristikou, pětina měla problémy s uchopením úlohy a více než čtvrtina úlohu neřešila vůbec. Na rozdíl od intuitivních žáků měli smysloví žáci problémy s uchopením úlohy, zadání pro ně bylo zřejmě příliš obecné a nevěděli jasně, co mají řešit. V porovnání s intuitivními žáky se smysloví žáci snažili úlohu řešit i pokusem. Jakmile našli alespoň jedno řešení, dále přestali úlohu řešit.

Vedle dělení řešitelských strategií na pokus, přímou cestou a heuristikou jsem se dále u této úlohy zaměřila na to, zda žáci při řešení užívali konkrétní hodnoty lichých a sudých čísel, nebo pracovali obecně s proměnou S a L. Z celkem 16 řešení, u kterých se vyskytl alespoň náznak řešitelského procesu, bylo 13 řešení s využitím konkrétních hodnot a 3 řešení s proměnnými. Proměnné S a L pro vyjádření sudých a lichých čísel použili pouze 2 smysloví žáci a 1 smíšený, žádný intuitivní žák proměnné nepoužil.

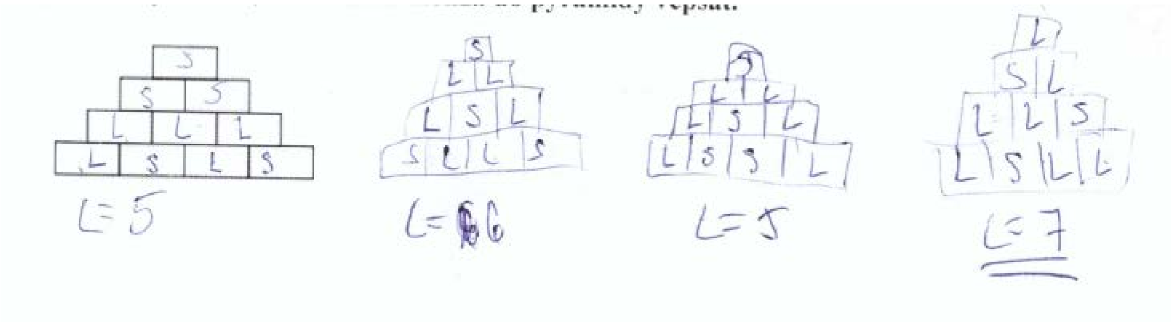
Ukázky žákovských řešení úlohy 4G

Na vybraných žákovských řešeních ukazuji rozdíl v použití strategie přímé cesty a heuristické strategie a rozdíl v použití konkrétních hodnot a proměnných. Domnívám se, že žák K22 řešil úlohu strategií SE, protože jeho řešení nekončí nalezením pyramidy se 7 lichými čísly, ale ve svých pokusech pokračuje dále, dokud nevyzkouší různá umístění sudých a lichých čísel v dolním řádku.



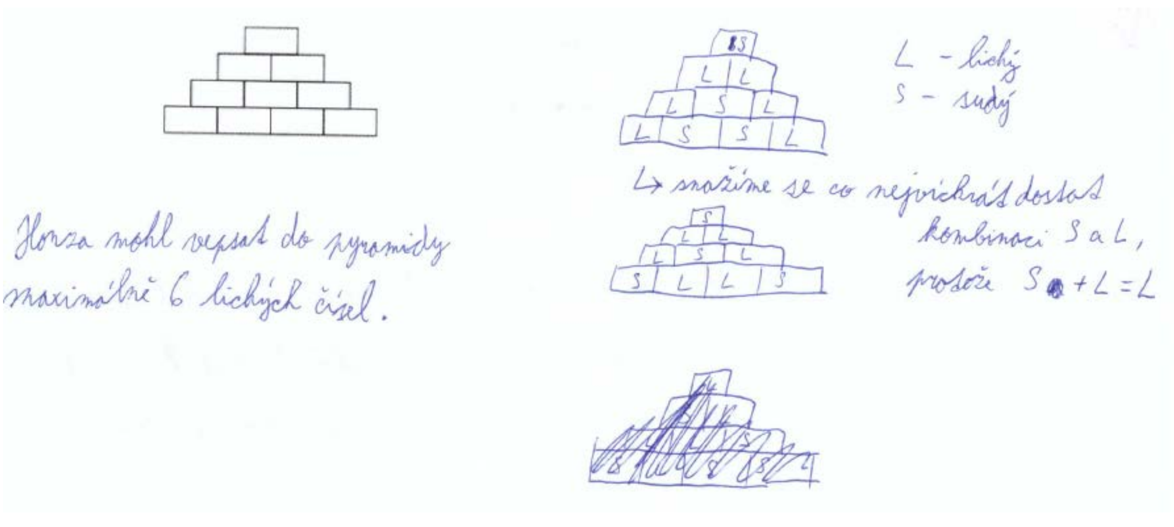
(Žák K22, N, strategie SE, konkretizace)

Žák K9 řešil podle mého názoru úlohu strategií OOO, protože jeho řešení končí, když najde pyramidu se 7 lichými čísly, a nesnaží se už prověřit další možnosti rozložení dolního řádku.



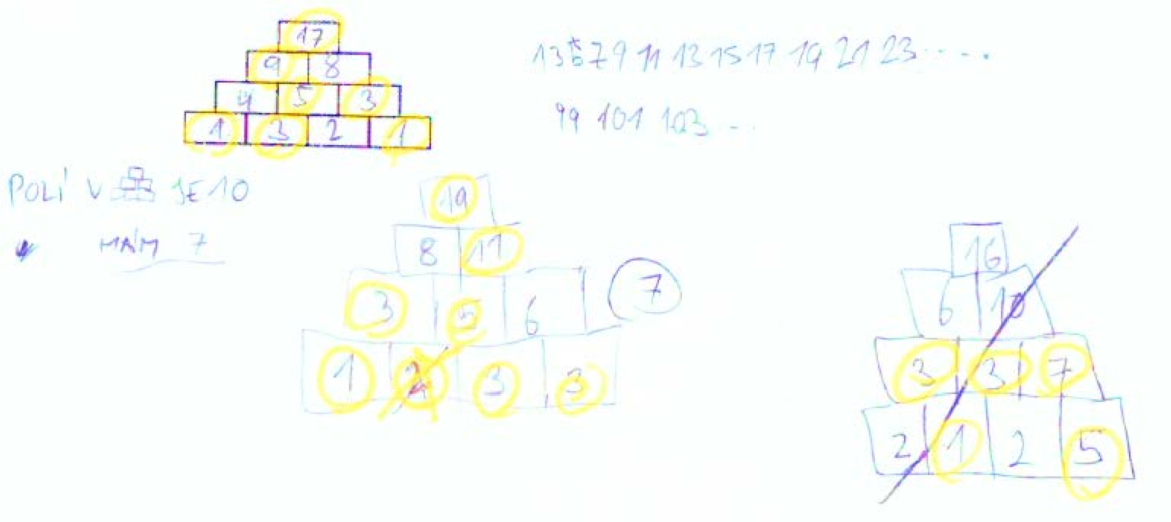
(Žák K9, S, strategie OOO, proměnné)

Díky žákově poznámce v řešení lze řešení žáka K19 označit jako řešení přímou cestou. Jeho cílem je totiž aplikace vztahu $S + L = L$ v co největší míře. Bohužel žák začíná sudým číslem v horním řádku a při třetím škrtnutém pokusu s lichým číslem nahoře nenalezne maximální počet lichých čísel.



(Žák K19, X, přímá cesta, proměnné)

Z vybraných řešení bylo nejobtížnější určit, jakou strategií řešil úlohu žák H5, který použil konkrétní hodnoty sudých a lichých čísel. Vzhledem k tomu, že jsou v dolním řádku všech pyramid různá lichá a sudá čísla, nedomnívám se, že se jedná o řešení SE. To podle mého názoru dokazují i rozklady čísla v horním řádku, které jsou až podezřele „hezké“. Domnívám se tedy, že žák postupoval tak, že do horního pole pyramidy vepsal nejdříve číslo 17, které pak rozdělil na lichou 9 a sudou 8. Přepisování u čísel 4 a 1 může být dokladem toho, že žák váhal, jak čísla 9 a 8 dále rozdělit. Ve druhé pyramidě s číslem 19 v horním poli si pak podle mého názoru žák ověřil, zda se celkový počet lichých čísel v pyramidě nezmění, pokud prohodí sudé a liché číslo ve 2. řádku, nyní je vlevo sudá 8 a vpravo lichá 11. Ve třetí pyramidě se žák pokusil ověřit situaci, kdy je v horním poli sudé číslo. Bohužel si však neuvědomil, že sudé číslo lze rozdělit na dvě lichá čísla, čímž by se mu podařilo do pyramidy dosadit více lichých čísel. Nicméně správně odpověděl, že lichých čísel v pyramidě může být maximálně 7.



(Žák H5, S, přímá cesta, konkretizace)

Shrnutí výsledků řešení úloh 4F a 4G

Intuitivní žáci byli podle očekávání úspěšnější v řešení úloh 4F a 4G než smysloví žáci, jak na základě průměrné úspěšnosti, tak podle podílu správných řešení. V úloze 4G však vykazují vyšší podíl absence řešení než smysloví žáci.

Dále se potvrdilo, že smysloví žáci aplikují častěji metodu pokusu, kdy jim stačí najít pouze jedno správné řešení. Co se však nepotvrdilo, to bylo očekávání, že intuitivní žáci budou častěji řešit především úlohu 4G obecně, ani jedno řešení s proměnnými nepatřilo intuitivnímu řešiteli.

U smyslových žáků se především v úloze 4F objevily protesty proti příliš obecnému zadání, což jsem očekávala. V úloze 4G měli také větší problém s uchopením úlohy než intuitivní žáci.

5.4.1 Celkové výsledky

Před realizací výzkumu jsem očekávala, že v prvních dvou úlohách předloženého didaktického testu (viz Příloha 6) budou úspěšnější smysloví žáci, protože se při jejich řešení mohou opřít o minulé zkušenosti, aplikovat algoritmus a úlohy vyřešit bez většího bádání a objevování. Třetí a čtvrtá úloha by měly být jednodušší pro intuitivní žáky, protože při jejich řešení mohou zcela uvolnit svoji kreativitu a hledat nejefektivnější a nejoriginálnější řešení. Zadání třetí a čtvrté úlohy je dostatečně obecné, aby řešitele neomezovalo ve výběru řešitelské strategie.

Žákovská řešení byla rozdělena do kategorií 0 až 3 (viz str. 66), aby bylo možné rozlišit zcela správná řešení od řešení s méně závažnou chybou a řešení s chybným předpokladem. Samostatnou skupinu tvořila absence řešení.

Kritéria úspěšnosti byla stanovena dvě – průměrná úspěšnost a podíl zcela správných řešení. Průměrná úspěšnost byla počítána jako průměrný bodový zisk všech řešitelů dané úlohy, kdy číslo kategorie odpovídalo přidělenému počtu bodů. Podíl zcela správných řešení byl určen jako podíl absolutního počtu řešitelů, jejichž řešení bylo zařazeno do kategorie 3, a celkového počtu řešitelů dané úlohy.

Výzkumný vzorek obsahoval 54 žáků 9. ročníku a odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Ve vzorku bylo 35 (65 %) žáků diagnostikováno jako smyslově orientovaní, 4 (7 %) žáci smíšeného typu a 15 (28 %) žáků intuitivně orientovaných. Rozložení typů žáků odpovídalo statisticky nejčastějšímu rozložení smyslových a intuitivních žáků ve třídách (viz např. Šteffl, 2015a). Celkem bylo analyzováno 270 řešení, 75 řešení intuitivních žáků, 20 řešení žáků smíšeného typu a 175 řešení smyslových žáků.

Úspěšnost řešení všech úloh didaktického testu je prezentována v tab. 29, 30 a 31. V tab. 29 jsou celkové výsledky všech řešitelů z výzkumného vzorku. V tab. 30 jsou uvedeny souhrnné výsledky pouze intuitivních žáků a v tab. 31 pouze smyslových žáků, aby bylo možné obě skupiny mezi sebou porovnávat. Výsledky pouze žáků smíšeného typu nejsou na tomto místě uvedeny, protože skupina byla tvořena pouze 4 žáky.

Z údajů v tab. 30 a 31 vyplývá, že intuitivní žáci měli vyšší průměrnou úspěšnost v 9 z 10 úloh a jejich celková průměrná úspěšnost byla o 0,41 bodu vyšší než smyslových žáků. Intuitivní žáci měli vyšší i celkový podíl správných řešení, a to o 16 p. b. Vyšší podíl správných řešení vykázali v 7 z 10 úloh. Co se týče chyb, tak intuitivní žáci měli vyšší podíl řešení s méně závažnými chybami a smysloví žáci měli vyšší podíl řešení se závažnými chybami a vyšší absenci řešení.

Tab. 29: Úspěšnost řešení všech úloh – všichni žáci

			ABSOLUTNÍ				RELATIVNÍ v (%)			
VŠICHNI	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
1F1	1,78	27	10	5	8	4	37	19	30	15
1F2	1,15	27	4	4	11	8	15	15	41	30
1G1	2,26	27	16	3	7	1	59	11	26	4
1G2	1,56	27	8	4	10	5	30	15	37	19
2F	2,41	27	19	0	8	0	70	0	30	0
2G	1,85	27	12	2	10	3	44	7	37	11
3F	1,85	27	13	0	11	3	48	0	41	11
3G	1,11	27	6	2	8	11	22	7	30	41
4F	1,74	27	8	8	7	4	30	30	26	15
4G	1,63	27	8	8	4	7	30	30	15	26
CELKEM	**1,73**	**270**	**104**	**36**	**84**	**46**	**39**	**13**	**31**	**17**

Tab. 30: Úspěšnost řešení všech úloh – intuitivní žáci

N	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
1F1	1,89	9	3	3	2	1	33	33	22	11
1F2	1,22	9	1	2	4	2	11	22	44	22
1G1	3,00	6	6	0	0	0	100	0	0	0
1G2	1,83	6	2	1	3	0	33	17	50	0
2F	2,56	9	7	0	2	0	78	0	22	0
2G	1,50	6	2	0	3	1	33	0	50	17
3F	2,89	9	8	1	0	0	89	11	0	0
3G	1,17	6	2	0	1	3	33	0	17	50
4F	1,89	9	3	3	2	1	33	33	22	11
4G	1,83	6	3	1	0	2	50	17	0	33
CELKEM	**2,00**	**75**	**37**	**11**	**17**	**10**	**49**	**15**	**23**	**13**

Tab. 31: Úspěšnost řešení všech úloh – smysloví žáci

S	**Průměrná úspěšnost**	**Řešitelů celkem**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**
1F1	1,69	16	6	2	5	3	38	13	31	19
1F2	1,00	16	2	2	6	6	13	13	38	38
1G1	1,95	19	8	3	7	1	42	16	37	5
1G2	1,47	19	6	2	6	5	32	11	32	26
2F	2,38	16	11	0	5	0	69	0	31	0
2G	1,95	19	9	2	6	2	47	11	32	11
3F	1,31	16	4	0	9	3	25	0	56	19
3G	1,05	19	3	2	7	7	16	11	37	37
4F	1,63	16	4	5	4	3	25	31	25	19
4G	1,53	19	5	5	4	5	26	26	21	26
CELKEM	**1,59**	**175**	**58**	**23**	**59**	**35**	**33**	**13**	**34**	**20**

Z údajů v tab. 30 a 31 také vyplývá, že intuitivní žáci byli podle očekávání úspěšnější v řešení všech netradičních úloh (úlohy 3F, 3G, 4F, 4G), měřeno průměrnou úspěšností i podílem správných řešení. Smysloví žáci naopak nebyli podle očekávání jednoznačně úspěšnější v řešení rovnic, úpravě algebraických výrazů a v tzv. klasických slovních úlohách školské matematiky (úlohy 1F1, 1F2, 1G1, 1G2, 2F, 2G). Intuitivní žáci totiž získali v průměru více bodů v řešení všech těchto úloh až na jedinou úlohu 2G. Vyšší podíl správných řešení měli ale intuitivní žáci jen ve 3 úlohách (1G1, 1G2 a 2F) ze 6. Na základě hodnot tohoto podílu lze konstatovat, že intuitivní žáci byli úspěšnější v řešení rovnic (úlohy 1G1, 1G2) a smysloví žáci byli úspěšnější v úpravě algebraických výrazů (1F1, 1F2).

Všechna řešení byla kromě rozdělení do kategorií ještě kódována podle strategie, kterou řešitel k řešení zvolil. Bylo sledováno, zda žák řešil úlohu přímou cestou (aplikací algoritmu algebraického nebo aritmetického), pokusem nebo heuristickou strategií (HS). U jednotlivých řešení bylo též kódováno, o jakou konkrétní heuristickou strategii se jedná. Souhrnné výsledky této analýzy jsou obsaženy v tab. 32.

Tab. 32: Analýza řešitelských strategií všech úloh

VŠICHNI	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	2,28	29	18 %	15	7	7	52 %
pokus	2,05	22	14 %	6	11	5	27 %
HS	2,67	55	34 %	45	2	8	82 %
neřešeno		56	35 %				
INTUITIVNÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	2,09	11	24 %	5	2	4	45 %
pokus	2,20	5	11 %	2	2	1	40 %
HS	2,90	20	44 %	19	0	1	95 %
neřešeno		9	20 %				
SMYSLOVÍ	**Průměrná úspěšnost**	**Počet řešitelů (absolutní)**	**Počet řešitelů (relativní)**	**3 body**	**2 body**	**1 bod**	**Podíl správných odpovědí**
PŘÍMÁ	2,47	15	14 %	9	4	2	60 %
pokus	2,00	14	13 %	3	8	3	21 %
HS	2,50	32	30 %	23	2	7	72 %
neřešeno		44	42 %				

V tab. 32 je uvedeno, kolik žáků použilo k řešení danou strategii (absolutní a relativní četnost), kolik z těchto řešení bylo zařazeno do kategorie 1 až 3 a jaký byl podíl správných řešení ze všech řešení danou strategií. Řádek s názvem neřešeno udává počet řešitelů, kteří buď úlohu vůbec neřešili, nebo se jim nepodařilo úlohu uchopit, tzn. vypsali si jen údaje ze zadání, provedli jeden až dva nahodilé výpočty a své řešení nedokončili. U těchto řešení nebylo možné rozhodnout, o jakou strategii řešení se jedná.

V tab. 32 jsou zohledněna pouze řešení úloh slovních 2F, 2G, 3F, 3G, 4F a 4G, při jejichž řešení bylo možné aplikovat heuristickou strategii. V tab. 32 jsou uvedeny souhrnné výsledky z tab. 16, 18, 20, 22, 26, 28. Výsledky žáků smíšeného typu jsou obsaženy v horní části tabulky. Pro tyto žáky není níže uvedena vlastní část, protože se nejedná o početnou skupinu (pouze 4 žáci).

Z údajů v tab. 32 vyplývá, že intuitivní žáci řešili úlohy z didaktického testu častěji heuristickou strategií a byli v řešení heuristickou strategií úspěšní v 95 % případů. Intuitivní žáci řešili úlohy také častěji přímou cestou než smysloví žáci, ale úspěšnější v řešení přímou cestou byli smysloví žáci. Naopak tomu bylo ve strategii pokus, kterou častěji využili smysloví žáci, ale úspěšnější v řešení pokusem byli intuitivní žáci. Smysloví žáci měli až dvakrát častěji problém již na začátku řešitelského procesu, kdy úlohu buď vůbec neřešili, nebo nevěděli, jak začít, i když si vypsali nějaké údaje ze zadání.

6 Závěr

Cílem diplomové práce je analýza souvislostí mezi osobnostním typem vybraných žáků v dimenzi příjmu informací a jejich způsoby řešení úloh školské matematiky s využitím heuristických strategií na 2. stupni základních škol a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií. K naplnění cíle byly stanoveny dvě výzkumné otázky:

1) Jak souvisí typ osobnosti žáků s jejich přístupem k řešení úloh školské matematiky?

2) Používají intuitivní žáci častěji heuristické strategie řešení úloh než žáci smysloví a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh?

V první kapitole teoretické části je popsáno, co to jsou heuristické strategie řešení úloh, a na konkrétních příkladech představeno, jak je lze aplikovat. Celkem bylo vybráno 12 heuristických strategií, které byly rozděleny do tří skupin – výchozí, další obecné a specifické matematické strategie.

Ve druhé kapitole je popsán teoretický základ pro zodpovězení výzkumné otázky, jak souvisí osobnostní typ žáků s jejich přístupem k řešení úloh školské matematiky. Nejdříve je uveden vývoj typologií osobnosti, a pak charakterizována vybraná typologie MBTI, na jejímž teoretickém základě byl určen osobnostní typ vybraných žáků v dimenzi příjmu informací. Vyvrcholením druhé kapitoly je charakterizování učebních stylů jednotlivých typů žáků a objasnění jejich potřeb a preferencí přímo v matematice. Tím byla částečně zodpovězena první výzkumná otázka, jak souvisí typ osobnosti žáka s jeho přístupem k řešení úloh školské matematiky.

Ve třetí kapitole jsou shrnuty poznatky získané studiem kurikulárních dokumentů jak na státní úrovni (RVP ZV), tak na školní úrovni (ŠVP škol zařazených do výzkumu). V této kapitole jsou uvedena očekávání MŠMT, co by měli žáci umět z oblasti nestandardních úloh, kam spadají heuristické strategie a obecně řešení problémů.

Na základě teoretických východisek byl vytvořen didaktický test, do kterého byly zařazeny čtyři druhy úloh. Žákovská řešení, a především analýza výsledků žákovských řešení byly základem pro nalezení odpovědí na výzkumné otázky. Nejnáročnější částí výzkumu byla diagnostika osobnostního typu jednotlivých žáků. Z časových a technických důvodů byl osobnostní typ jednotlivých žáků určen na základě jejich odpovědí v typologickém dotazníku. Jen část žáků absolvovala navíc ještě diagnostický rozhovor, který ve všech případech potvrdil výsledek diagnostiky z dotazníku.

Hlavní částí čtvrté kapitoly je podrobná analýza žákovských řešení, ve které jsou rozebrány všechny úlohy zařazené do didaktického testu. Každá úloha byla nejdříve podrobena rozboru možných strategií řešení. Následně byla všechna žákovská řešení kategorizována, aby bylo možné odhalit souvislosti mezi osobnostním typem žáků a jejich řešením úloh. U každé úlohy jsou rozebrány chyby, kterých se řešitelé nejčastěji dopustili, a nakonec vybraná žákovská řešení prezentována.

Provedený výzkum potvrdil, že intuitivní žáci používají častěji heuristické strategie řešení úloh školské matematiky než smysloví žáci a jsou úspěšnější v řešení netradičních úloh. Výzkum také potvrdil teoretická východiska týkající se chyb. Chyby intuitivních žáků byly častěji méně závažné, než tomu bylo u smyslových žáků. Smysloví žáci naopak častěji chybovali závažněji, tzn. řešení nedokončili, použili chybný předpoklad, špatnou strategii řešení apod. Smysloví žáci se také častěji než intuitivní žáci řešení úplně vyhnuli, protože měli problémy se zadáním některých úloh, zadání na ně bylo příliš obecné.

Hlavním sdělením této práce je upozornit učitele matematiky na přítomnost různých typů žáků ve třídě a vybídnout učitele matematiky k cílené individualizaci v hodinách. Nelze předpokládat, že všem žákům budou vyhovovat stejné metody výuky a formy práce, ale i tak bychom se jim je měli snažit přiblížit pro ně snesitelnou formou. Použití heuristických strategií při řešení úloh vybízí přímo ke spolupráci intuitivních a smyslových žáků, kdy intuitivní žáci budou moci prezentovat svoje originální řešení a smysloví žáci si budou jejich zkušenosti osvojovat a zpracovávat tak, aby je mohli v budoucnu použít.

V práci byly zodpovězeny obě stanovené výzkumné otázky a cíl práce byl splněn. Během zpracovávání výzkumu se objevilo mnoho dalších témat a otázek, které by mohly být dále zkoumány. Vzhledem k tomu, že výzkumný vzorek obsahoval pouze 54 žáků, bylo by přínosné ověřit výsledky výzkumu na větším vzorku žáků. Doporučením pro další zkoumání je také zaměřit se na tvorbu lepšího diagnostického nástroje osobnostního typu žáků (ve spojení s psychology) a do zkoumání přidat i vliv osobnostního typu učitele na přístup žáků k řešení úloh. V neposlední řadě doporučuji zaměřit se na to, jaký vliv má učitelův výběr výukové metody na úspěšnost jednotlivých typů žáků v řešení úloh, případně jak smyslovým žákům přizpůsobit intuitivní metodu výuky, a naopak jak intuitivním žákům nabídnout pro ně smysluplnou formu smyslově orientované metody výuky.

Seznam použité literatury

CRKALOVÁ, Anna a Norbert RIETHOF. *Průvodce světem koučování a osobnostní typologie: inspirace pro praxi.* Praha: Management Press, 2012. ISBN 978-80-7261-252-9.

ČAKRT, Michal. *Typologie osobnosti pro manažery: kdo jsem já, kdo jste vy?* Praha: Management Press, 1996. ISBN 80-859-4312-3.

ČAKRT, Michal. *Typologie osobnosti v medicíně: lékaři, sestry, pacienti*. Praha: Management Press, 2017. ISBN 978-80-7261-496-7.

HALAS, Zdeněk. *Archimédés: několik pohledů do jeho života a díla*. [online] Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2012 [cit. 2016-03-04]. ISBN 9788073782283. Dostupné také z: http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371

HECHT, Tomáš a Zita SKLENÁRIKOVÁ. *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1992. ISBN 80-08-00340-5.

HERMAN, Jiří, Jaromír ŠIMŠA a Radan KUČERA. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-210-0120-8.

JANDORA, Radek. Hydrostatika: Archimédův zákon. In: *Http://radek.jandora.sweb.cz/index.html* [online]. 2004 [cit. 2016-05-31]. Dostupné z: http://radek.jandora.sweb.cz/f05.htm#vztlak

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. 1. vyd. Praha: HAV, 2013. ISBN 9788090362550.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. 1. Brno: Paido, 2003. ISBN 8073150395.

MÁTLOVÁ, Markéta. *Heuristické strategie řešení úloh.* [online] Praha, 2016. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc. [cit. 2018-12-29]. Dostupné z:https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130188328/?lang=cs

MIKOVÁ, Šárka. *Jedni mají rádi fakta, druzí souvislosti.* Rodina a škola. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 2010, 57(6), 20-22. ISSN 0035-7766.

MIKOVÁ, Šárka. *Nejsou stejné: jak díky Teorii typů porozumět dětem i sami sobě*. Praha: Mea Gnosis, 2018. ISBN 978-80-270-3565-6.

MIKOVÁ, Šárka a Jiřina STANG. *Typologie osobnosti u dětí: využití ve výchově a vzdělávání*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0874-7.

NOVOTNÁ, Jarmila; EISENMANN, Petr; PŘIBYL, Jiří. Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. *Proceedings of efficiency and responsibility in education* [online]. 2014, 514-520 [cit. 2018-12-29]. Dostupné z: https://www.eriesjournal.com/index.php/eries/article/download/114/117

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In: VONDROVÁ, Naďa. *Dva dny s didaktikou matematiky*. [online] Praha: PedF UK, 2015, s. 9-22 [cit. 2016-03-13]. ISBN 978-80-7290-843-1. Dostupné z: http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2015.pdf

PLAMÍNEK, Jiří. *Sebepoznání, sebeřízení a stres: praktický atlas sebezvládání.* 3., dopl. vyd. Praha: Grada, 2013. Management (Grada). ISBN 978-80-247-4751-4.

PŘIBYL, Jiří. *Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií*. Praha, 2015. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce PhDr. Filip Roubíček, Ph.D.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV). [online]. Praha: MŠMT, 2017. 164 s. [cit. 2018-12-30]. Dostupné z:.http://www.msmt.cz/file/43792_1_1/

Strategie vzdělávací politiky do roku 2030+. *MŠMT* [online]. Praha: MŠMT, 2019 [cit. 2019-03-09]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030

Školní vzdělávací program školy H [online], 2019 [cit. 2019-03-09].

Školní vzdělávací program školy K [online], 2019 [cit. 2019-03-09].

ŠTEFFL, Ondřej. MBTI: Lidé jsou různí (1. díl). *Moderní vyučování: časopis pro nové programy v českém základním školství*. Praha: Portál, 2015a, **21**(5-6), 24-27. ISSN 1211-6858.

ŠTEFFL, Ondřej. MBTI: lidé jsou různí (2. díl). *Moderní vyučování: časopis pro nové programy v českém základním školství*. Praha: Portál, 2015b, **21**(9-10), 28-29. ISSN 1211-6858.

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice: Metod.materiál pro učit.matem.* Ostrava: Krajský pedagogický ústav, 1990. ISBN 8090015891.

Seznam příloh

Příloha I: Zadání úloh zařazených do předvýzkumu

Příloha II: Úlohy zařazené do předvýzkumu a bodový zisk žáků

Příloha III: Strategie řešení úloh z předvýzkumu

Příloha IV: Heuristické strategie řešení úloh z předvýzkumu

Příloha V: Typologický dotazník

Příloha VI: Zadání testů F a G z hlavního výzkumu