Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vjačeslav Sochora

Gravitační mikročočky s malým Einsteinovým poloměrem

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.,

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2007

Chtěl bych velmi poděkovat svému vedoucímu za dostatečnou motivaci k vytvoření této práce, za pomoc při řešení problémů s mým programem k výpočtu dat potřebných do této práce a za dodání hodnot okrajového ztemnění, které jsem využil k výpočtům zjasnění.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 21. 5. 2007 Vjačeslav Sochora

Obsah

1 Úvod **5**

2 Zjasnění způsobené gravitační mikročočkou **7**
2.1 Zjasnění bodového světelného zdroje 7
2.2 Přesné zjasnění plošného světelného zdroje 8
2.3 Aproximované zjasnění plošného světelného zdroje 10

3 Výpočet a výsledky **11**
3.1 Výpočet 11
3.2 Výsledky 12

4 Ověření správnosti použití aproximace **25**

5 Závěr **27**

Literatura **29**

Název práce: Gravitační mikročočky s malým Einsteinovým poloměrem
Autor: Vjačeslav Sochora
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
e-mail vedoucího: heyrovsky@utf.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme ... Uvede se abstrakt v rozsahu 80 až 200 slov. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut sit amet sem. Mauris nec turpis ac sem mollis pretium. Suspendisse neque massa, suscipit id, dictum in, porta at, quam. Nunc suscipit, pede vel elementum pretium, nisl urna sodales velit, sit amet auctor elit quam id tellus. Nullam sollicitudin. Donec hendrerit. Aliquam ac nibh. Vivamus mi. Sed felis. Proin pretium elit in neque. Pellentesque at turpis. Maecenas convallis. Vestibulum id lectus. Fusce dictum augue ut nibh. Etiam non urna nec mi mattis volutpat. Curabitur in tortor at magna nonummy gravida. Mauris turpis quam, volutpat quis, porttitor ut, condimentum sit amet, felis.

Klíčová slova: klíčová slova (3 až 5)

Title: Gravitational microlenses with small Einstein radii
Author: Vjačeslav Sochora
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: heyrovsky@utf.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study ...adipiscing elit. Ut sit amet sem. Mauris nec turpis ac sem mollis pretium. Suspendisse neque massa, suscipit id, dictum in, porta at, quam. Nunc suscipit, pede vel elementum pretium, nisl urna sodales velit, sit amet auctor elit quam id tellus. Nullam sollicitudin. Donec hendrerit. Aliquam ac nibh. Vivamus mi. Sed felis. Proin pretium elit in neque. Pellentesque at turpis. Maecenas convallis. Vestibulum id lectus. Fusce dictum augue ut nibh. Etiam non urna nec mi mattis volutpat. Curabitur in tortor at magna nonummy gravida. Mauris turpis quam, volutpat quis, porttitor ut, condimentum sit amet, felis.

Keywords: klíčová slova (3 až 5) v angličtině

Kapitola 1

Úvod

Podle autorů knihy [11] můžeme začátek historie gravitačních čoček datovat do 80. let 18. stol. V té době samozřejmě ještě tento pojem neexistoval, poprvé ho zavedl až Lodge v první polovině 20. stol., kdy prohlásil, že sluneční gravitační pole se chová jako čočka bez optické osy. Vraťme se však zpět do konce 18. stol. John Michell píše Henrymu Cavendishovi dopis, ve kterém poznamenává, že kdyby poloměr tělesa o stejném složení a hmotě jako naše Slunce se zmenšil 500 krát, tak hmotný bod padající volným pádem z nekonečna na toto těleso by měl na povrchu rychlost větší než světlo. Tudíž jakékoliv světlo vyzářené z tohoto tělesa se vždy vrátí na povrch. Na popud této myšlenky se pokusil Cavendish spočíst odchylku světla způsobenou tímto tělesem, v úvahu bral Newtonovou korpuskulární teorii světla. Své výsledky však nikdy nepublikoval.

První, kdo spočetl úhlovou odchylku obrazu hvězdy od slunečního okraje, byl Soldner (roku 1801, [13]). Vyšla mu hodnota 0.85". O stejný výpočet se pokusil Einstein o sto let později (1911) na zálkadě principu ekvivalence a kupodivu dospěl k obdobnému výsledku 0.87" [3]. Po čtyřech letech si však uvědomil chyby, které se dopustil ve výpočtu a došel ke správné odchylce 1.75" [4], to už za použití obecné teorie relativity. Ověření této hodnoty bylo výzvou pro všechny astronomy. Jako prvnímu se to podařilo A. S. Eddingtonovi na Princově ostrově při zatmění slunce v roce 1919 [2] (hodnota 1.61"$\pm$0.30").

V roce 1937 Zwicky [15] poznamenává, že by vzdálené galaxie mohly sloužit jako gravitační čočky ke zobrazení ještě vzdálenějších objektů. Jednoduše řečeno gravitační čočka je velmi hmotný objekt (např. galaxie, popřípadě kupa galaxií), který zakřivuje prostoročas natolik, že obraz

vzdálenějšího objektu (např. kvasaru) nalézajícího se za čočkou je dostatečně zjasněn, abychom ho mohli detekovat. Tím pádem můžeme studovat objekty jinak špatně pozorovatelné. Po této hypotéze přibyly ještě další o využití čoček, ale stále se čekalo na důkaz, že tento jev je skutečně pozorovatelný. Přišel ke konci sedmdesátých let, kdy byl poprvé pozorován dvojitý obraz kvasaru 0957+561, a tak potvrdil Zwickyho teorii. Tento jev nejen potvrzuje správnost obecné teorie relativity, ale též slouží ke studiu vesmírných objektů. Díky němu např. zkoumáme stavbu center kvasarů.

Gravitační mikročočka je narozdíl od gravitačních čoček méně hmotný objekt (hvězdné či planetární hmotnosti) a ačkoli také vytváří násobné obrazy zdroje světla (většinou hvězdy), jsou tyto obrazy natolik blízko sebe, že je nedokážeme rozlišit a ve výsledku vidíme hvězdu jasnější. Pozorováním změn jasnosti hvězd, např. ve Velkém Magellanovem mračnu, jak to navrhl Paczyński v roce 1986 [8], bychom mohli rozlišit, které byly způsobené gravitačními mikročočkami a které ne. V následujících letech se uskutečnily projekty hledání jevů způsobené mikročočkami: OGLE, EROS, MACHO (Massive Astrophysical Compact Halo Objects). Hlavní význam mikročočky mají při detekci a studování binárních a planetárních systému.

Ve své práci zprvu seznámím čtenáře se základními pojmy vyskytujícími se v teorii mikročoček a základními vztahy k určení zjasnění způsobené gravitační mikročočkou. Chtěl bych poukázat na odlišné výsledky, které nám vyjdou nesprávným použitím aproximací navrženými Gouldem v [5] pro malé či bodové zdroje, a tím vymezit použitelnost těchto aproximací. Nakonec porovnám své výsledky s několika pracemi jiných autorů, kteří právě užili aproximace ve svým modelech průběhu zjasnění pozorované hvězdy.

Kapitola 2

Zjasnění způsobené gravitační mikročočkou

2.1 Zjasnění bodového světelného zdroje

Nejprve si objasněme model zjasnění bodového zdroje, který využijeme v následující podkapitole při výkladu zjasnění plošného zdroje. Mějme bodový světelný zdroj ve vzdálenosti d_s od pozorovatele a hmotný objekt (mikročočku) o hmotnosti M nacházejícího se ve vzdálenosti d_d mezi pozorovatelem a zdrojem. Zakřivením prostoročasu čočkou vzniknou dva obrazy zdroje, které ale nemůžeme rozlišit kvůli jejich malé vzájemné úhlové vzdálenosti. Úhlové zvětšení obrazů však zároveň způsobuje celkové zjasnění hvězdy. Veličina, charakterizující mikročočku, se nazývá úhlový Einsteinův poloměr

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM(d_s - d_d)}{c^2 d_s d_d}}, \tag{2.1}$$

kde G je gravitační konstanta a c rychlost světla. V následujícím textu bude Einsteinův poloměr vyjádřen v jednotkách poloměru zdrojové hvězdy ($\epsilon = \theta_E/\theta_*$, θ_* značí úhlový poloměr hvězdy). Einsteinův poloměr nám udává, jak hmotná je čočka a jak moc ovlivňuje dráhu paprsku světla ze zdroje v závislosti na její poloze od tohoto zdroje a tím pádem i konečné zjasnění hvězdy. V případě, že by se zdroj nalézal přesně za čočkou na přímce pozorovatel - čočka, vzniklé dva obrazy by se zobrazily jako jeden právě o úhlovém poloměru rovnajícímu se Einsteinovu. Výsledné zjasnění

A_0 světelného toku bodového zdroje je

$$A_0(x) = \frac{x^2 + 2\epsilon^2}{x\sqrt{x^2 + 4\epsilon^2}}, \tag{2.2}$$

kde x nám určuje úhlovou vzdálenost mezi zdrojem a čočkou (a je též v jednotkách úhlového poloměru hvězdy). A_0 je monotónně klesající funkce, pro kterou platí

$$\lim_{x\to\infty} A_0(x) = 1, \tag{2.3}$$

$$A_0(x) \simeq \frac{1}{x}, x \ll \epsilon. \tag{2.4}$$

Podrobnější teorii mikročoček můžete naleznout v [9].

2.2 Přesné zjasnění plošného světelného zdroje

Celkové zjasnění plošného světelného zdroje (hvězdy) počítáme jako podíl světelného toku s výskytem mikročočky v okolí kotouče hvězdy a toku bez přítomnosti čočky, integrujeme přes celou plochu kotouče hvězdy

$$A(\vec{l}) = \frac{\int B(\vec{r})A_0(|\vec{l} + \vec{r}|)d^2\vec{r}}{\int B(\vec{r})d^2\vec{r}}. \tag{2.5}$$

Hodnota B nám vyjadřuje intenzitu okrajového ztemnění hvězdy v bodě $\vec{r}$ od středu kotouče, $\vec{l}$ polohu čočky od středu hvězdy v její rovině (viz. obrázek 1), $\vec{r}$ a $\vec{l}$ jsou v jednotkách poloměru hvězdy.

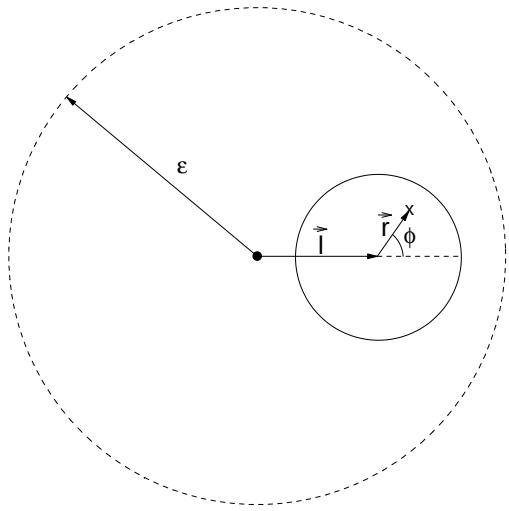
Vzdálenost l se v čase mění podle vztahu

$$l(t) = \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{t - t_{max}}{t_*}\right)^2}, \tag{2.6}$$

kde l_0 je nejmenší vzdálenost mezi zdrojem a čočkou (impaktní parametr), t_{max} je čas maximálního přiblížení bodového zdroje a t_* doba, za kterou mikročočka změnila svou polohu o úhlový poloměr zdroje.

V našem případě předpokládáme, že okrajové ztemnění B je radiálně symetrická funkce, proto přejdeme do polárních souřadnic, čímž získáme

$$A(l) = \frac{\int_0^1 B(r)\mathcal{A}(l, r)rdr}{2\pi \int_0^1 B(r)rdr}, \tag{2.7}$$



Obrázek 1: Schéma geometrie čočky (bod uprostřed) a hvězdy (kružnice plnou čárou), čárkovaná kružnice představuje kružnici s Einsteinovým poloměrem.

kde $\mathcal{A}(l,r)$ je úhlově zintegrované zjasnění

$$\mathcal{A}(l,r) \equiv \int_0^{2\pi} A_0 \left(\sqrt{l^2 + 2rl\cos\phi + r^2} \right) d\phi. \tag{2.8}$$

Úhel ϕ je sevřený polopřímkou ve směru vektoru $\vec{l}$ od středu zdroje s vektorem $\vec{r}$ polohy bodu na zdroji mířeným od jeho středu (viz. obrázek 1). Řešením integrálu (2.8) je funkce úplných eliptických integrálů prvního $K(k)$ a třetího druhu $\Pi(n,k)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(l,r) &= \frac{4}{(l+r)\sqrt{(l-r)^2+4\epsilon^2}} \left[2\epsilon^2 K\left(\frac{4\epsilon}{l+r}\sqrt{\frac{lr}{(l-r)^2+4\epsilon^2}} \right) + \right. \\ &+ \left. (l-r)^2 \Pi\left(\frac{4lr}{(l+r)^2}, \frac{4\epsilon}{l+r}\sqrt{\frac{lr}{(l-r)^2+4\epsilon^2}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Používám standardní definici úplných eliptických integrálů

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{2.10}$$

$$\Pi(n,k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1-n\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \tag{2.11}$$

V případě $l = r$ funkce (2.9) diverguje. V této situaci tuto funkci vyjádříme jako řadu, kdy $r = l + \delta$ ($|\delta| \ll 1$), převzato z [6],

$$\mathcal{A}(l, l+\delta) \simeq \frac{2\epsilon}{l}\left(1 - \frac{\delta}{2l}\right) \ln \frac{8\epsilon l}{|\delta|\sqrt{l^2+\epsilon^2}} + 4 \arctan \frac{l}{\epsilon} + \frac{\epsilon(2l^2+\epsilon^2)}{l^2(l^2+\epsilon^2)} + \mathcal{O}(\delta^2 \ln|\delta|). \tag{2.12}$$

2.3 Aproximované zjasnění plošného světelného zdroje

S aproximaci začneme počítat v případě, kdy máme velmi silnou čočku ($\epsilon \gg 1$) [5] a vzdálenost čočky l je výrazně menší než ϵ ($\epsilon \gg l$) [6]. Potom (2.9) lze aproximovat funkcí

$$\mathcal{A}(l, r) \simeq \frac{4\epsilon}{l+r} K\left(\frac{2\sqrt{lr}}{l+r}\right). \tag{2.13}$$

Povšimněme si, že tento výraz též diverguje pro $l = r$, proto také (2.13) rozvineme do řady s $r = l + \delta$

$$\mathcal{A}(l, l+\delta) \simeq \frac{2\epsilon}{l}\left(1 - \frac{\delta}{2l}\right) \ln \frac{8l}{\delta} + \frac{\epsilon\delta}{l^2} + \mathcal{O}(\delta^2 \ln|\delta|). \tag{2.14}$$

V případě, že chceme docílit přesnějších výsledků, použijeme vylepšenou aproximaci, o které je lehce zmíněno v [5]. Stačí výsledné zjasnění (2.7) získané dosazením (2.13) přenásobit faktorem $\frac{A_0 l}{\epsilon}$

$$A_2 = \frac{A_0 l}{\epsilon} A_1, \tag{2.15}$$

kde A_2 je hodnota vylepšené aproximace a A_1 hrubá aproximace. Tato vylepšená aproximace dává přesnější výsledky pro větší l.

Kapitola 3

Výpočet a výsledky

3.1 Výpočet

Cílem výpočtu bylo spočíst výsledný světelný tok (2.7) postupem přesného výpočtu a aproximací, porovnat jejich výsledky a určit relativní odchylku ζ, kterou si definujme

$$\zeta_{1,2} = \frac{A_{1,2} - A}{A}, \tag{3.1}$$

kde $A_{1,2}$ je celkové zjasnění spočtené aproximacemi a A zjasnění spočtené přesně. Kladná hodnota ζ znamená nadhodnocené a záporná podhodnocené zjasnění. Dále ζ_1 bude značit hrubou aproximaci a ζ_2 vylepšenou.

Průběh výpočtu (2.7) se lišil v závislosti na poloze mikročočky. Byly čtyři rozdílné situace: čočka se nacházela ve středu kotouče ($l = 0$), mezi středem a okrajem ($l \in (0, 1)$), na okraji ($l = 1$) a nakonec vně hvězdy ($l > 1$). K výpočtům integrálu v (2.7) jsem použil numerického vzorce

$$\int_{X_1}^{X_N} f(x)dx = h\left[\frac{5}{12}f_1 + \frac{13}{12}f_2 + f_3 + ... + f_{N-2} + \frac{13}{12}f_{N-1} + \frac{5}{12}f_N\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{3.2}$$

který je dostatečně přesný k určení zjasnění, aniž bych se dopustil výrazné chyby, h značí integrační krok a f_i funkční hodnotu v daném integračním kroku, a na výpočet eliptických integrálů prvního a třetího druhu numerických postupů v [10].

V prvním případě je hodnota l nulová. To usnadnilo velmi práci, protože rovnice (2.8) se redukovala na $\mathcal{A}(0, r) = 2\pi A_0(r)$ a nemusel jsem tedy počítat eliptické integrály. Tento vztah jsem dosadil do (2.7) a numericky spočetl

výsledné zjasnění, integrační krok byl $\delta = 2 \times 10^{-4}$ (tento krok byl použit i v následujících numerických výpočtech integrálů (2.7)). Při aproximaci nepoužíváme vztahu (2.9), ale (2.13). Sem dosadíme opět $l = 0$, čímž se nám tento vztah zjednoduší na $\mathcal{A}(0, r) = 2\pi\epsilon/r$, který se dosadil do (2.7).

Při polohách čočky mezi středem a okrajem hvězdy je problémový bod divergence $l = r$, argument eliptických integrálu nabývá totiž hodnoty 1 (argument musí být v absolutní hodnotě menší než jedna). V tomto případě se numericky integrovalo kromě nejbližšího okolí bodu divergence. Pro okolí divergence jsem dosadil (2.12) do (2.7) a analyticky spočetl

$$\int_{l-\Delta}^{l+\Delta} B(r)\mathcal{A}(l, r)rdr = \int_{-\Delta}^{\Delta} B(l+\delta)\mathcal{A}(l, l+\delta)(l+\delta)d\delta, \tag{3.3}$$

kde jsem použil substituce $r = l+\delta$ a $\Delta = 2\times10^{-4}$. Pro zachování přesnosti výpočtu rozvineme $B(l+\delta)$ do řady a stačí nám k tomu jen první řád $B(l+\delta) = B(l)+\delta B'(l)$, $B(l)$ značí číselnou hodnotu v l a $B'(l)$ číselnou hodnotu derivace v l. Tímto jsem nahradil chybějící integrační krok v numerickém výpočtu. Během výpočtu tohoto integrálu, který je triviální (nepotřebujeme numerických postupů), jsem zanedbal veškeré členy řádu $\delta^2 \ln|\delta|$ a vyššího. Neměly vliv s ohledem na mnou vybranou přesnost. V aproximaci se využije vztahu (2.14) místo (2.12).

Když se čočka nalézá na okraji disku hvězdy ($l = 1$), je výpočet obdobný jako výše, liší se jen v integračních mezích.

$$\int_{1-\Delta}^{1} B(r)\mathcal{A}(1, r)rdr = \int_{-\Delta}^{0} B(1+\delta)\mathcal{A}(1, 1+\delta)(1+\delta)d\delta. \tag{3.4}$$

Vně kotouče se nevyskytoval žádný problém, který by komplikoval výpočet. Stačilo dosadit (2.9) (v případě aproximace (2.13)) do (2.7) a numericky spočíst.

3.2 Výsledky

Jak jsem již poznamenal dříve, jednotky rozměrů jsou udávány v poloměru zdroje kvůli jednoduššímu přechodu na konkrétní případ. Ve výpočtech jsem bral v úvahu Einsteinův poloměr v rozmezí 1 až 100 násobků poloměru hvězdy, což je rozmezí, které zahrnuje většinu pozorovaných hodnot. Maximální vzdálenost mikročočky od hvězdy (v její rovině) jsem zvolil 4 násobky poloměru hvězdy. Pro větší vzdálenosti nemělo smysl celkové

zjasnění nadále počítat, protože se jeho hodnota blížila ke zjasnění bodového zdroje, jak je zřejmé na následujících grafech.

Výpočet jsem prováděl pro tři různá chování okrajového ztemnění. Bázové ztemnění můžeme modelovat jako $B(r) = a_1B_1(r) + a_2B_2(r) + a_3B_3(r)$, a_1, a_2, a_3 jsou konstanty a B_1, B_2, B_3 ortonormální báze sestavená analýzou hlavních komponent průběhu okrajového ztemnění modelů hvězdných atmosfér [6]. Základní tvar je daný B_1 a B_2, B_3 jsou korekce vyššího řádu. V mém případě jsem použil $B(r) = B_1(r) + uB_2(r)$ a zvolil tři hodnoty u: u = -0.1620 (nejstrmější průběh), $u = 0$, u = 0.0902 (nejplošší průběh), jak vidíme na (2). Hodnotu B jsem vynášel normalizovanou na jednotkový světelný tok.

Do grafu (3) jsem vynesl závislost celkového zjasnění hvězdy na poloze mikročočky s Einsteinovým poloměrem $\epsilon = 1$. Pokud by se čočka nacházela přesně ve středu, získáme maximální zjasnění. Poté dochází k strmému poklesu zjasnění, jak se vzdaluje od středu. Zjasnění v oblasti okraje hvězdy přechází z konkávního průběhu na konvexní a není už tak strmé, zjasnění klesá pozvolna a limitně se blíží k hodnotě jedna, neboli už nepozorujeme zjasnění. Obdobný průběh bychom pozorovali i pro čočky s větším Einsteinovým poloměrem. Povšimněme si bodu kolem $l = 0.75$. Zde zjasnění nabývá stejné hodnoty pro všechna ztemnění a také se jejich role převrácí, což je způsobeno modelem okrajového ztemnění, jak je zřejmé z předešlého grafu. Od této polohy je zjasnění větší pro nejplošší průběh než před $l = 0.75$, kde dominovalo zjasnění pro nejstrmější průběh.

Mým hlavním úkolem bylo určit chybu, které bychom se dopustili při použití aproximací. K aproximacem bychom měli přistoupit pro $\epsilon \gg 1$ a $\epsilon \gg l$. Podívejme se, že opravdu pro malá a málo odlišná ϵ od l dojdeme k odlišným výsledkům. Na grafu (4) jsou znázorněny hodnoty celkového zjasnění spočtené pro $\epsilon = 1$ a $u = 0$ přesně, hrubou aproximaci a vylepšenou aproximaci. Nelze si nepovšimnout, že zjasnění z hrubé aproximace je velmi odlišné. Aproximaci vychází velmi podhodnocené výsledky, odchylují se o 10% až 75%, a dokonce jsou menší než 1, to by naopak znamenalo, že hvězda není jasnější, ale má menší jasnost než původně. Vylepšenou aproximaci dostáváme mnohem více bližší hodnoty k správnému zjasnění (odchylují se o 3% až 10%). Tento příklad nemá reálné opodstatnění, takové malé mikročočky se zatím nepozorovaly, vybral jsem ho jen jako vzorový. Při větších ϵ se rozdíly mezi aproximacemi a přesným výpočtem zmenšují, viz. grafy (5) ($\zeta_1 \simeq 18\%$, $\zeta_2 \simeq 0.1\%$) a (6) ($\zeta_1 \simeq 5.5\%$, $\zeta_2 \simeq 0.04\%$). Tím se potvrzuje, že aproximace je správná pro $e \gg 1$ a $e \gg l$.

Vynesme závislost relativní odchylky ζ_1 na l, grafy (7), (8), (9). Nejprve si povšimněme, že závislost pro odlišná ztemnění se výrazně neliší, zprvu můžeme pozorovat menší rozdíly, ty však zmizí, když čočka se dostane mimo kotouč hvězdy a dokonce pro větší ϵ jsou skoro nepozorovatelná, tzn. že ztemnění nemá velký vliv na průběh odchylky. Dále je velmi zajímavý sám průběh. Od středu hvězdy chyba narůstá se vzdálenosti pomaleji, ale vně kotouče je nárůst razantnějšího charakteru, což jsme mohli předpokládat z podmínky aproximace $\epsilon \gg l$.

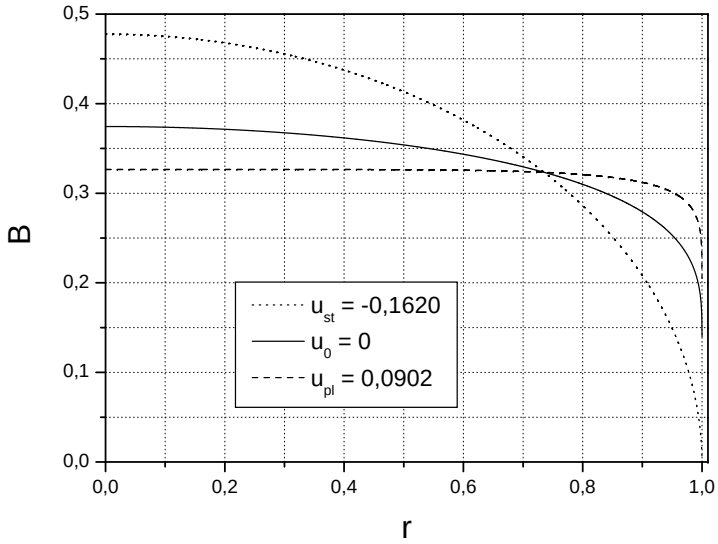
Závislost relativní odchylky od skutečné hodnoty zjasnění na vzdálenosti l čočky a Einsteinova poloměru ϵ jsem vynesl do grafů (10), (11) a (12). Vykreslil jsem je jako kontury v logaritmické škále pro větší přehlednost. Kdybych je vykresloval ve skutečném měřítku, křivky by byly nahuštěné ve spodní části grafu.

Pro malá ϵ je tato chyba stále enormní. Od $\epsilon = 4$ chyba má hodnotu méně jak 1%, ale jen v malém okolí středu. Samozřejmě se toto okolí zvětšuje s rostoucím e. Řekněme, že od $e = 25$ můžeme použit aproximaci aniž bychom se dopustili výrazného podhodnocení změny jasnosti hvězdy (ale jen od $l = 1.5$ ke středu disku).

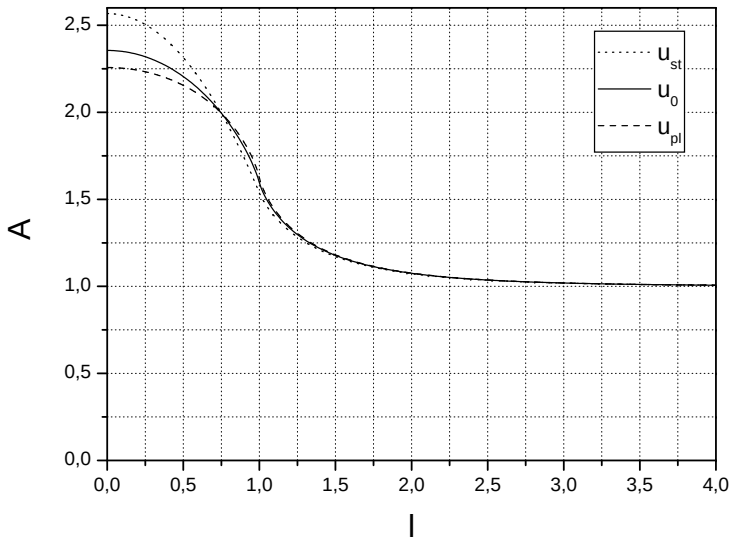
Pro zajímavost jsem ještě vynesl graf (13), kde jsou vidět rozdílné relativní odchylky v závislosti na okrajovém ztemnění. Jsou rozdílné přibližně do $l = 1$, pak jsou shodné.

Na grafech (14), (15), (16) jsou znázorněny průběhy relativní odchylky ζ_2 v závislosti na l pro tři různá ϵ. Průběh je zcela odlišný od grafů (7), (8), (9). Chyba v nule je shodná jako u hrubé aproximace, ale potom se začne přibližovat k nule, kterou překročí, a opět roste ke svému maximu jen v kladných číslech. Tato aproximace nám zprvu udává podhodnocené zjasnění, potom však nadhodnocené s maximem na okraji kotouče hvězdy. Tato aproximace má odchylku pro větší l spíše konstantního charakteru (ale předpokládám, že začne opět růst, protože přestane platit podmínka $\epsilon \gg l$) narozdíl od té předešlé, u které se chyba zvětšovala s rostoucím l.

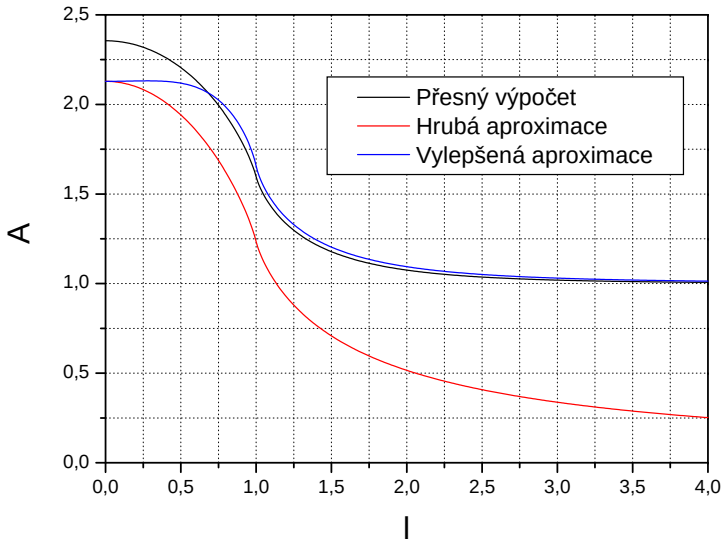
Do grafů (17), (18) a (19) jsem vynesl celkovou závislost ζ_2 na l a ϵ.



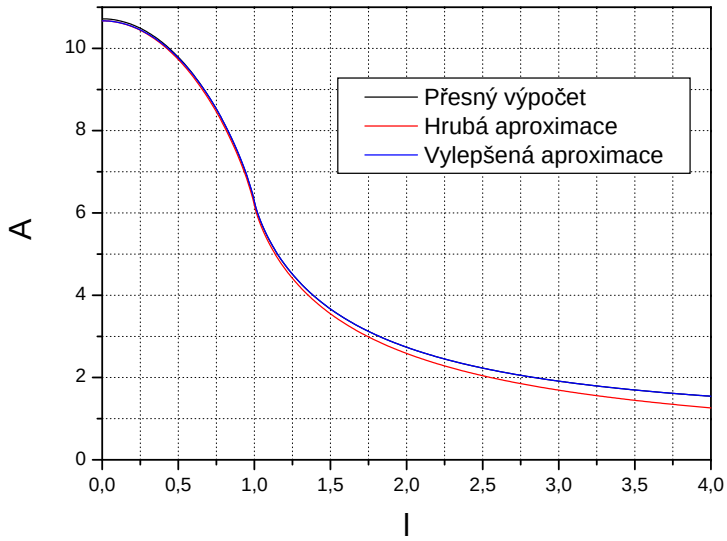
Obrázek 2: Závislost okrajového ztemnění B na vzdálenosti r od středu hvězdy.



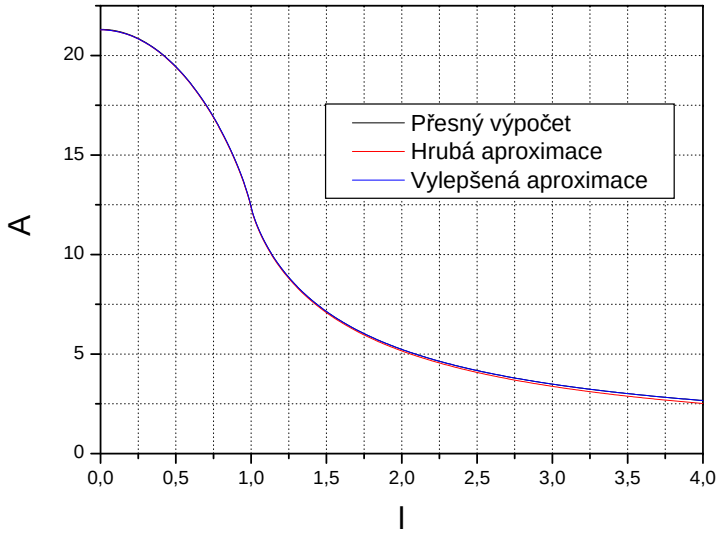
Obrázek 3: Průběh zjasnění hvězdy způsobené mikročočkou s $\epsilon = 10^0 = 1$ ve vzdálenosti l od středu disku hvězdy.



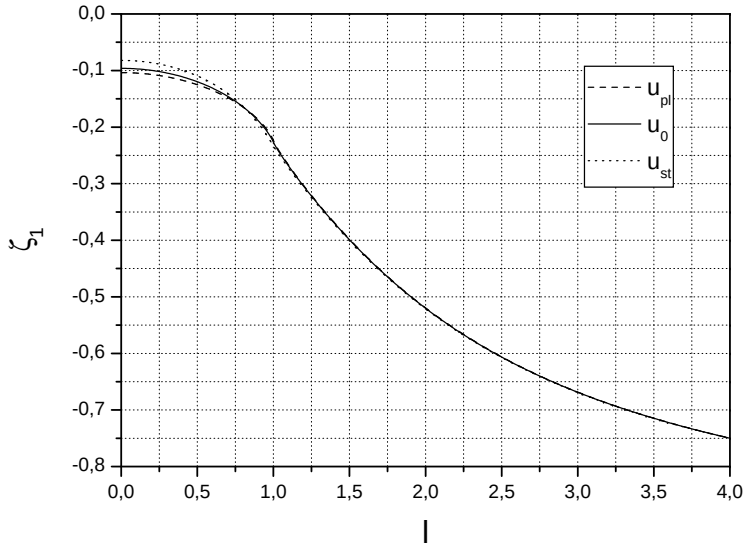
Obrázek 4: Různá zjasnění způsobena odlišnými postupy výpočtů pro okrajové ztemnění u_0 a $\epsilon = 10^0 = 1$.



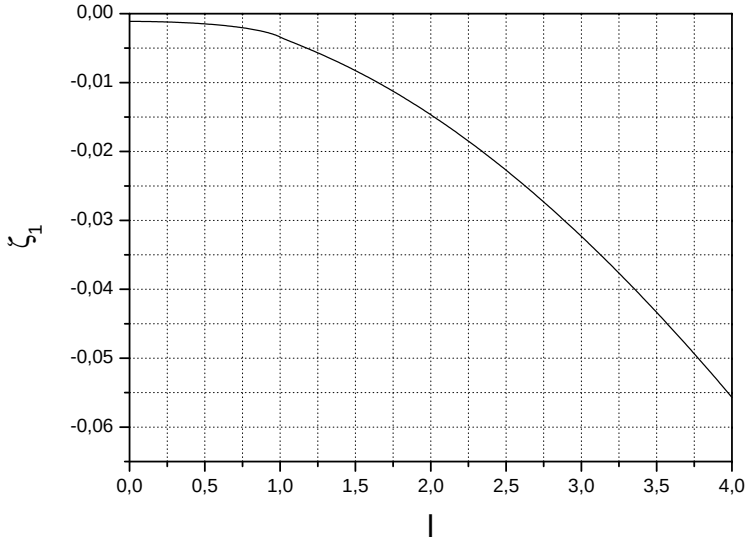
Obrázek 5: Různá zjasnění způsobena odlišnými postupy výpočtů pro okrajové ztemnění u_0 a $\epsilon = 10^{0.7} \doteq 5$.



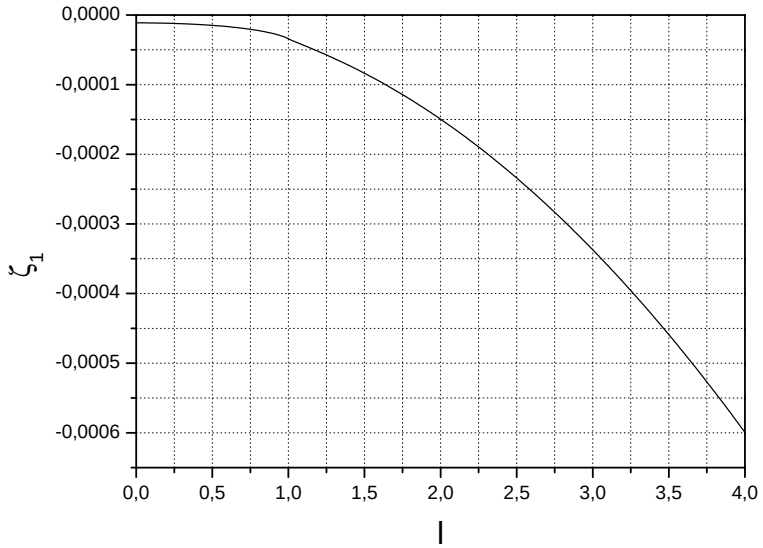
Obrázek 6: Různá zjasnění způsobena odlišnými postupy výpočtů pro okrajové ztemnění u_0 a $\epsilon = 10^1 = 10$.



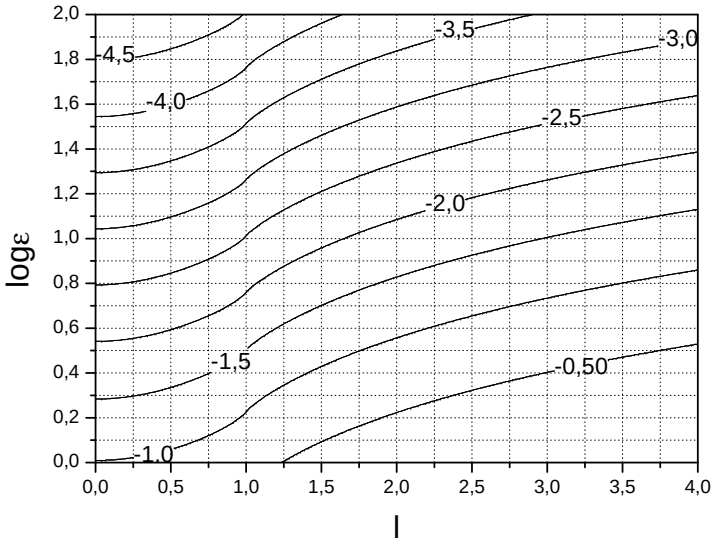
Obrázek 7: Závislost ζ_1 na l, $\epsilon = 10^0 = 1$.



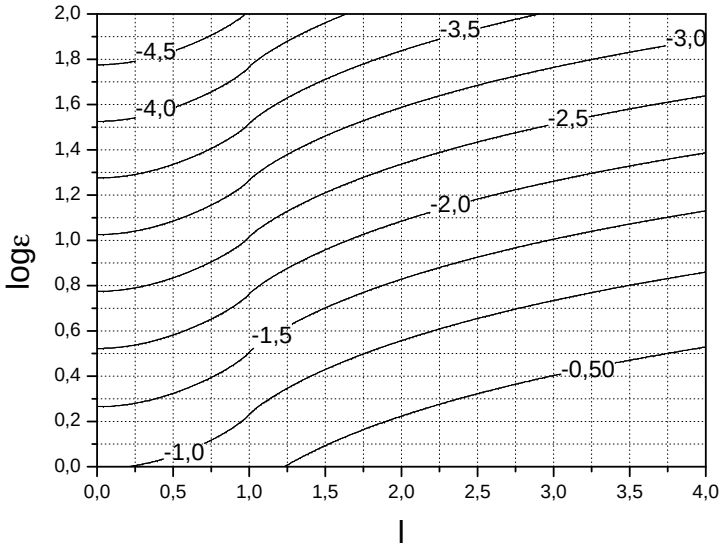
Obrázek 8: Závislost ζ_1 na l, $\epsilon = 10^1 = 10$ (u_0).



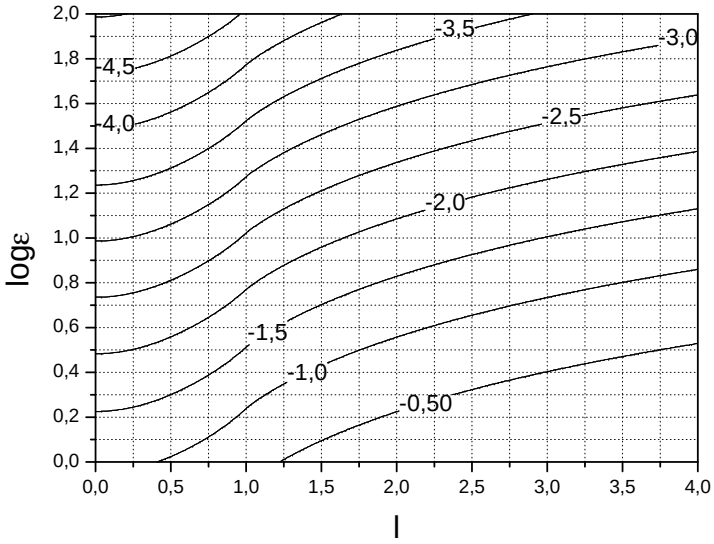
Obrázek 9: Závislost ζ_1 na l, $\epsilon = 10^2 = 100$ (u_0).



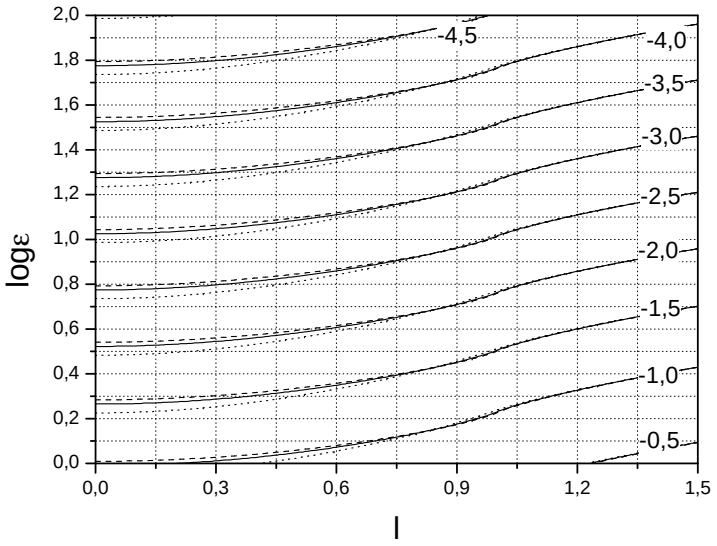
Obrázek 10: Závislost relativní odchylky ζ_1 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_{pl}.



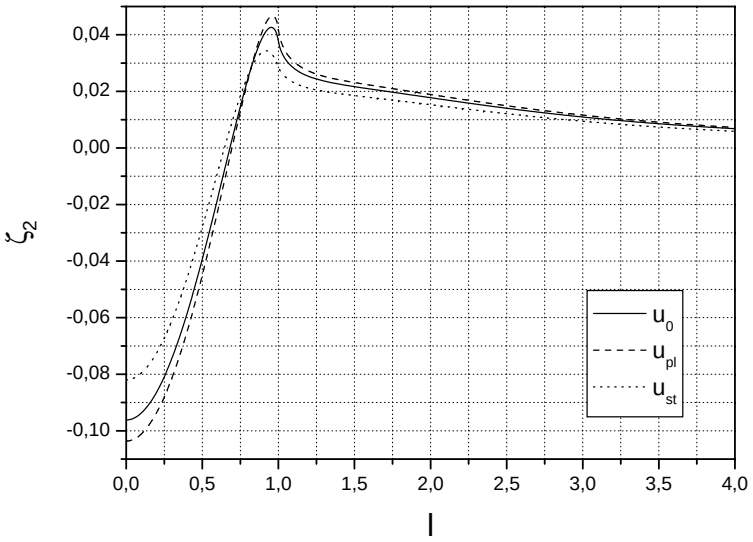
Obrázek 11: Závislost relativní odchylky ζ_1 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_0.



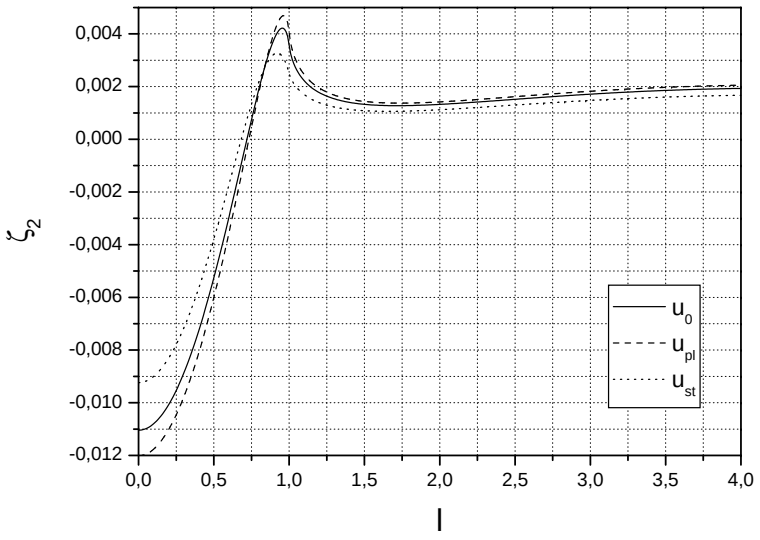
Obrázek 12: Závislost relativní odchylky s ζ_1 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_{st}.



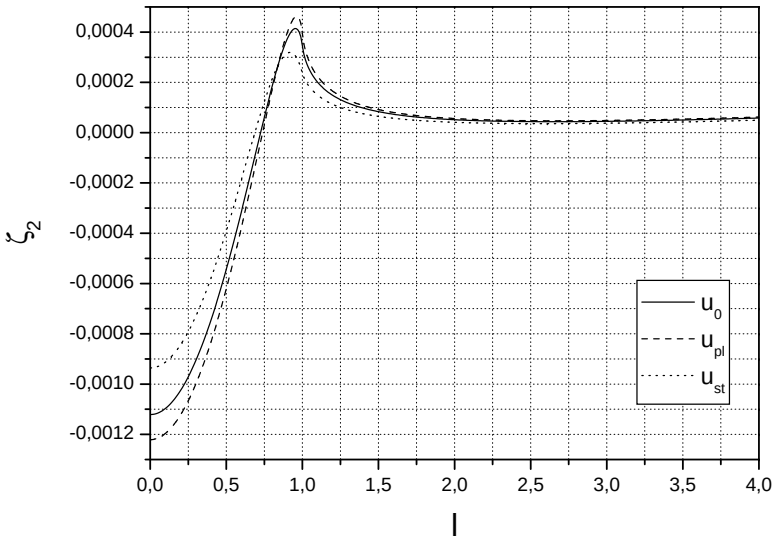
Obrázek 13: Závislost relativní odchylky ζ_1 na l a ϵ pro různá okrajová ztemnění, tečkovaná křivka značí u_{st}, křivka plnou čarou u a čárkovaná křivka u_{pl}.



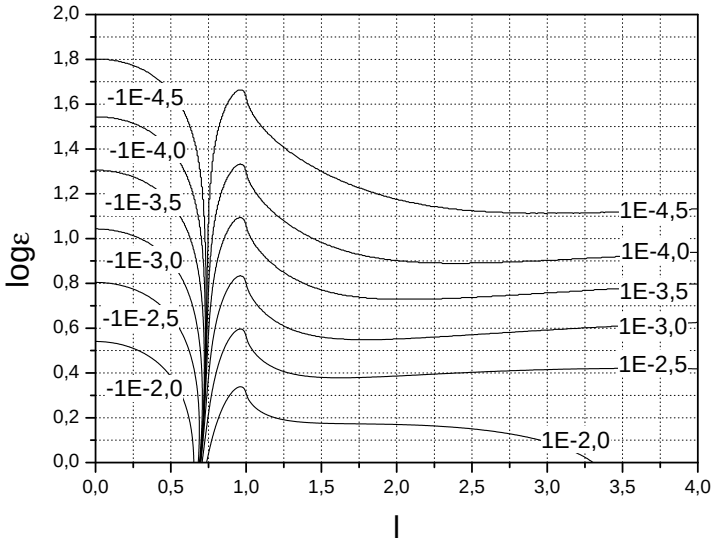
Obrázek 14: Závislost ζ_2 na l pro $\epsilon = 10^0 = 1$.



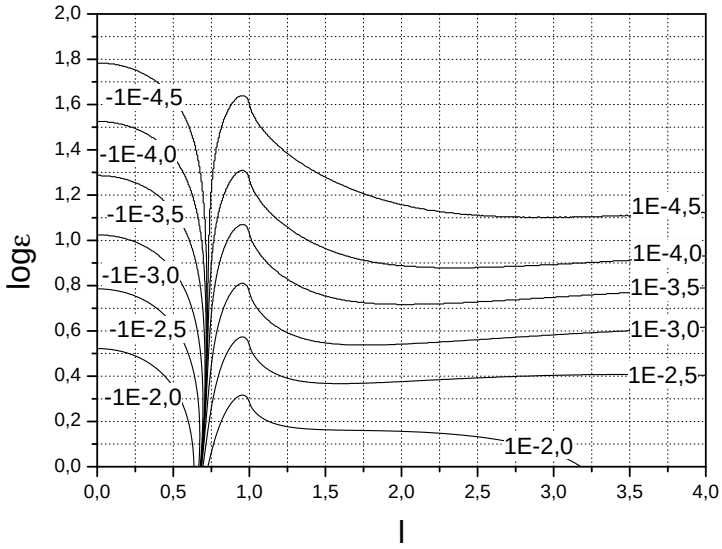
Obrázek 15: Závislost ζ_2 na l pro $\epsilon = 10^{0.5} \doteq 3.16$.



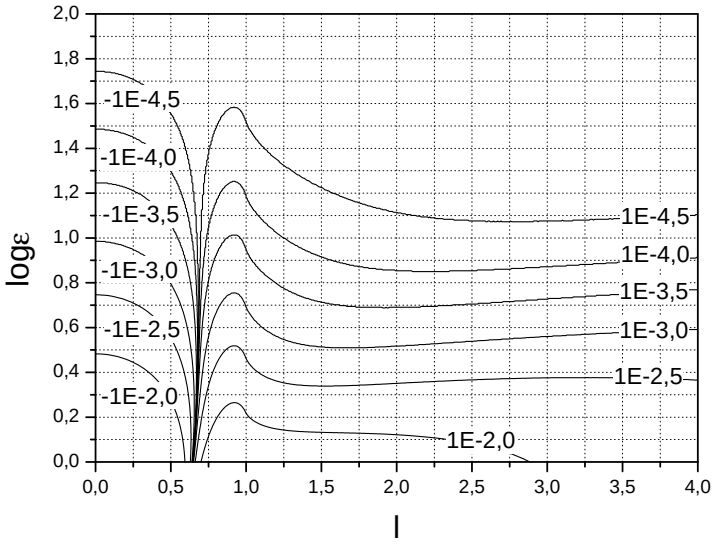
Obrázek 16: Závislost ζ_2 na l pro $\epsilon = 10^1 = 10$.



Obrázek 17: Závislost relativní odchylky ζ_2 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_{pl}.



Obrázek 18: Závislost relativní odchylky s ζ_2 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_0.



Obrázek 19: Závislost relativní odchylky s ζ_2 na l a ϵ pro okrajové ztemnění u_{st}.

Kapitola 4

Ověření správnosti použití aproximace

V této kapitole bych rád okomentoval některé výsledky prací, které použily k výpočtu zjasnění aproximace. Zda chyba, jíž se dopustili, není natolik velká, že by mohla ovlivnit další modely, počítající s těmito výsledky. V těchto článcích autoři neuvádějí, v jaké vzdálenosti od středu disku začali používat aproximaci a o kterou se jedná (zda hrubou nebo vylepšenou). Proto budu předpokládat, že s aproximaci začali ve vzdálenosti dvou poloměrů hvězdy od jejího středu. Chyby, které se dopustili, uvedu jak pro hrubou, tak i pro vylepšenou aproximaci.

V práci [7] se pojednává o události označované OGLE-2003-BLG-238. Píšou zde o zjasnění hvězdy přibližně z 15 magnitudy na 10.3. Celá událost trvala 38 dní a maximální zjasnění nastalo 26.88 srpna 2003, uvádějí $A = 170$. Úhlový Einsteinův poloměr θ_E byl (652±56) μas, a poloměr hvězdy θ_* = (8.35±0.72) μas. Což v našich jednotkách je přibližně $\epsilon = 78$. Ke středu hvězdy se mikročočka přiblížila na vzdálenost $l = 0.156$. Hrubou aproximací dostávají podhodnocené zjasnění ve vzdálenosti $l = 2$ o $\zeta_1 \simeq -0.025\%$, které postupně klesá na hodnotu $\zeta_1 \simeq -1.7 \times 10^{-3}\%$ pro $l = 0.156$ (chyba se může trochu lišit podle modelu okrajového ztemnění). Vylepšená aproximace dává hodnoty zjasnění ještě méně odlišné od skutečného zjasnění, průběh odchylky ζ_2 je však složitější. V $l = 2$ nabývá $\zeta_2 \simeq 6 \times 10^{-5}\%$, poté roste k hodnotě $\zeta_2 \simeq 6 \times 10^{-4}\%$ v $l = 1$. Mezi $l = 1$ a $l = 0.156$ chyba překročí nulu ($l = 0.73$) a dosáhne maxima v záporných číslech $\zeta_2 \simeq -1.7 \times 10^{-3}\%$ pro $l = 0.156$. Použití aproximace (ať už jakékoliv) bylo oprávněné, Einsteinův poloměr byl dostatečně větší než vzdálenost mikročočky od středu hvězdy.

Povšimněme si, že chyby pro malá l se shodují jak pro hrubou, tak i pro vylepšenou, což je typické pro tyto aproximace.

Zjasnění hvězdy ($\theta_* = (4.5\pm0.7)$ μas) v článku [1] bylo způsobeno mikročočkou OGLE 2004–BLG–254 ($\theta_E \simeq 112\mu$as) neboli $\epsilon = 25$. Mikročočka se přiblížila na vzdálenost $l = 0.115$ a způsobila maximální zjasnění $A \simeq 60$ dne 10. června 2004. Pro tyto hodnoty je relativní odchylka $\zeta_1 \simeq -0.015\%$ pro $l = 0.115$ a $\zeta_1 \simeq -0.24\%$ pro $l = 2$. Pokud opravdu v bodě $l = 2$ došlo k použití hrubé aproximace, dopustili se chyby, která je už přístroji měřitelná. Vylepšená aproximace nám opět dává hodnoty, které se výrazně neliší od těch správných, největší odchylka je pro $l = 0.115$ $\zeta_2 \simeq -0.015\%$, pro větší l se nachází v rozmezí $6.4 \times 10^{-4}\%$ až $6.5 \times 10^{-3}\%$.

V článku [14] měla mikročočka OGLE-2003-BLG-262 úhlový Einsteinův poloměr $\theta_E = (195\pm17)$ μas a zdroj světla přibližně poloměr $\theta_* = (11.7\pm1.0)$ μas. Pozorování probíhalo 12.5 dne, během této doby klesla magnituda hvězdy z asi 13.2 na 11.5 a potom se vrátila na 13.3. Maxima zjasnění dosáhla 19.34 července 2003. Pokud si Einsteinův poloměr vydělíme poloměrem hvězdy, dostaneme $\epsilon \simeq 16.7$. Mikročočka se středu přiblížila na vzdálenost $l = 0.6$ poloměru zdroje. Z těchto dat vychází $\zeta_1 \simeq -0.06\%$ pro $l = 0.6$ a $\zeta_1 \simeq -0.53\%$ pro $l = 2$. Zde použití hrubé aproximace je velmi ošemetné, protože chyby jsou už natolik velké, že by výsledky neměly být použity v následujících modelech. Vylepšená aproximace opět dává hodnoty zjasnění málo odlišné od těch správných, relativní chyba se nalézá v intervalu -0.01% až 0.01%, neboli je zanedbatelná.

Článek [12] hovoří o mikročočce označené sc26_2218 s úhlovým Einsteinovým poloměrem $\theta_E = (107.4\pm7.5)$ μas, která se přiblížila k hvězdě s poloměrem $\theta_* \simeq 7.07$ μas na vzdálenost $l = 0.97$. To dává chybu $\zeta_1 \simeq -0.13\%$ pro $l = 0.97$ a $\zeta_1 \simeq -0.64\%$ pro $l = 2$. Vidíme, že chyby jsou už velmi vysoké, pro tento případ by hrubá aproximace neměla být vůbec použitá. Vylepšená aproximace se odchyluje jen o 0.0019% až 0.018%.

Kapitola 5

Závěr

Počítat zjasnění hrubou aproximaci si vyžaduje dávat pozor pro jaké mikročočky a v jaké vzdálenosti ji použijeme. Pokud chceme modelovat zjasnění hvězdy pro větší l (např. do $l = 4$) a nedopustit se chyby větší jak 0.1%, můžeme ji použit jen pro velké Einsteinovy poloměry ($\epsilon = 77$ a větší). S klesajícím ϵ klesá i použitelnost aproximace pro menší l. Mezní hodnota je $\epsilon = 10$. Pro ní dostaneme zjasnění s chybou 0.1%, ale už jen pro $l = 0$. S menšími ϵ nemá cenu počítat.

U vylepšené aproximace bude závěr mírně opačný. Mezní hodnota je také $\epsilon = 10$, protože relativní chyba pro $l = 0$ je shodná. Její chování však s rostoucím l je odlišné, chyba totiž klesá, a proto ji můžeme bez problému použít pro $\epsilon > 10$ na celém intervalu $l \in (0, 4)$ narozdíl od hrubé aproximace. To však počítáme, že mikročočka projde středem disku. S takovou situaci jsem se ještě nesetkal, tím pádem vylepšenou aproximaci smíme použít i pro menší $\epsilon < 10$ za podmínky, že čočka nedosáhne středu disku. Řekněme, že největší přiblížení ke středu bude jedna desetina poloměru hvězdy, pak aproximace je použitelná i pro $\epsilon = 8$. Minimální hodnota Einsteinova poloměru pro použití aproximace je $\epsilon = 6$ za podmínky, že ji použijeme pro $1 < l < 4$. Pro nižší hodnoty ϵ bych použil už přesného výpočtu.

Výsledné zjasnění, ať už počítané přesně nebo aproximaci, je závislé na okrajovém ztemnění. To samé platí i pro relativní odchylku. Tato závislost se projevuje na odlišných výsledcích, obzvlášť pro případy, kdy se čočka nalézá na disku hvězdy. Což je zřejmé, protože v každém místě je jiné okrajového ztemnění. Vně hvězdy se ale vliv ztemnění zmenšuje se vzdálenosti l. Hvězdu můžeme považovat za bodový zdroj, u kterého už okrajové ztemnění nemá vliv na výsledné zjasnění (popřípadě relativní odchylku).

Nakonec bych rád posoudil, zda použití aproximace v článcích uvedených výše bylo oprávněné. Pokud všichni počítali pomoci vylepšené aproximace, tak se nedopustili žádné významné chyby, která by měla vliv na další modely využívající dané výsledky a jejich výpočty by měly být správné. Hrubá aproximace mohla být použitá jen v práci [7]. V práci [1] záleží, v jakém bodě by začali počítat pomoci hrubé aproximace (od $l = 1.3$ ke středu disku je relativní chyba menší jak 0.1%). Pro práce [14] a [12] je hrubá aproximace nevhodná a při její použití by se dopustili nezanedbatelných chyb.

Literatura

[1] Cassan A. et al.: *OGLE 2004-BLG-254: a K3 III Galactic Bulge Giant Spatially Resolved by a Single Microlens*, A&A **460** (2006) 277-288.

[2] Dyson F.W., Eddington A.S., Davidson C.R., Mem. R. Astron. Soc. **62** (1920) 291.

[3] Einstein A.: *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Ann. Phys. **340** (1911) 898-908.

[4] Einstein A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. **354** (1916) 769-822.

[5] Gould A.: *Proper Motions of MACHOs*, The Astrophysical Journal **421** (1994) L71-74.

[6] Heyrovský D.: *Measuring Stellar Limb Darkening by Gravitational Microlensing*, The Astrophysical Journal **594** (2003) 464–482.

[7] Jiang G. et al.: *OGLE-2003-BLG-238: Microlensing Mass Estimate of an Isolated Star*, The Astrophysical Journal **617** (2004) 1307-1315.

[8] Paczyński B.: *Gravitational Microlensing by The Galactic Halo*, The Astrophysical Journal **304** (1986) 1-5.

[9] Paczyński B.: *Gravitational Microlensing in The Local Group*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **Vol. 34** (1996).

[10] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[11] Schneider P., Ehlers J., Falco E. E.: *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[12] Smith M. C. et al.: *A Brown Dwarf Microlens Candidate from The Second Phase of The Optical Gravitational Lensing Experiment*, The Astrophysical Journal **585** (2003) L65-L68.

[13] Soldner J., Berl. Astron. Jahrb. (1804) 161.

[14] Yoo J. et al.: *OGLE-2003-BLG-262: Finite-Source Efects From a Point-Mass Lens*, The Astrophysical Journal **603** (2004) 139-151.

[15] Zwicky F.: *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, The Astrophysical Journal **86** (1937) 217-246.