

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lukáš Ondič

Newtonovská limita Schwarzschildova-de Sitterova řešení

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.

Studijní program: Obecná fyzika

2007

Touto cestou by som rád poďakoval vedúcemu práce Mgr. Martinovi Žofkovi, Ph.D., ktorý mi v mnohom pomohol, správne nasmeroval a priviedol k úspešnému cieľu. Ďakujem za korektúry textu a dlhé konzultácie prostredníctvom emailu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30. května 2007

Lukáš Ondič

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod | 6 |
| 2 | Einsteinove rovnice s kozmologickým členom | 8 |
| 3 | Newtonovská limita VTR | 11 |
| 4 | Schwarzschild-de Sitter | 15 |
| 4.1 | Tvar metriky | 15 |
| 4.2 | Oblasť platnosti newtonovskej limity | 17 |
| 5 | Geodetiky metódou efektívneho potenciálu | 21 |
| 5.1 | Newtonovské dráhy | 21 |
| 5.2 | Geodetický pohyb testovacej častice | 27 |
| 6 | Záver | 35 |
| | Literatura | 36 |

Název práce: Newtonovská limita Schwarzschildova-de Sitterova řešení

Autor: Lukáš Ondič

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.

e-mail vedoucího: zofka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V tejto práci sme identifikovali oblasť Schwarzschild-de Sitterovho priestoročasu (SdS), kde je možné použiť newtonovskú limitu. SdS je riešením Einsteinových rovníc s kozmologickou konštantou, ktorá nie je v newtonovskej teórii gravitácie prítomná, môžeme ju však interpretovať ako konštantnú hustotu energie vákua vyplňujúceho celý priestoročas. Aby sme mohli SdS porovnať s klasickým riešením, museli sme teda zobecniť Laplaceovu vákuovú rovnicu na rovnicu Poissonovu, kde ako zdroj poľa vystupuje práve kozmologická konštanta. Tu sme vyriešili pre špeciálny prípad statického, sféricky symetrického poľa. Toto modifikované klasické riešenie nám umožnilo určiť chovanie testovacích častíc pohybujúcich sa po kruhových dráhach okolo počiatku a chovanie momentálne statických častíc vypustených z pokoja v danej vzdialenosti od počiatku. Ich dráhy a zrýchlenie sme porovnávali s odpovedajúcimi geodetikami v plne relativistickom riešení, čo nám umožnilo určiť význam konštánt vystupujúcich v riešení.

Klíčová slova: newtonovská limita, kozmologická konštanta, geodetiky, efektívny potenciál

Title: Newtonian limit of the Schwarzschild-de Sitter solution

Author: Lukáš Ondič

Department: Department of theoretical physics

Supervisor: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: zofka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work, we study the Schwarzschild-de Sitter solution (SdS) in which we identify the spacetime region where the Newtonian limit is valid. SdS is a solution of Einstein's field equations with a cosmological constant which is not present in the Newtonian theory of gravity. In order to be able to compare SdS with a classical solution, we had to modify the classical Laplace equation and replace it with the Poisson equation with the cosmological constant acting as the source of the field. We solved this

equation for a static, spherically symmetric field obtaining a modified classical solution. This allowed us to determine the behaviour of momentarily static test particles and test particles on circular paths around the origin. We compared their trajectories and acceleration with geodesics we obtained from the full relativistic solution. Finally, we confirmed the physical meaning of the constants present in the solution.

Keywords: Newtonian limit, cosmological constant, geodesics, effective potential

Kapitola 1

Úvod

Vo všeobecnej teórii relativity platí princíp ekvivalencie (zákony fyziky platia rovnako vo všetkých súradnicových systémoch), a je teda dovolené používať ľubovoľné súradnice, ktorých fyzikálny význam sa však neraz stráca. Súradnice môžu a nemusia mať fyzikálny základ. Preto po vyriešení Einsteinových rovníc (ER), keď získame zložky metrického tenzora v nejakých súradniciach, nasleduje ich fyzikálna interpretácia. Rovnako to platí aj o parametroch, ktoré vzniknú napríklad ako integračné konštanty. Postup, akým identifikujeme jednotlivé konštanty v riešení je taký, že ho porovnávame s už známymi vzťahmi iných teórií, ktoré popisujú gravitačné pôsobenie. Popis, ktorý správne vystihuje prírodné zákony za istých predpokladov je Newtonova teória gravitácie. Je vhodná na popis gravitačného pôsobenia v rámci galaxií a je overená pozorovaniami v slnečnej sústave.

V tejto práci budeme teda vychádzať z klasickej Newtonovej teórie gravitácie, pre ktorú máme Poissonovu rovnicu a vzťah pre potenciál v okolí zdroja, v ktorom vystupuje hmota telesa. Ďalej odvodíme zobecnenie newtonovskej Poissonovej rovnice, ktorá zohľadní prítomnosť kozmologickej konštanty v Einsteinových rovniciach. Máme teda akoby tri spolu súvisiace teórie, a to klasickú Newtonovu, modifikovanú Newtonovu s kozmologickým členom a Einsteinovu teóriu gravitácie. Einsteinova teória s kozmologickou konštantou platí v celom priestoročase. Jej limitou bude v určitej oblasti a za určitých podmienok špecifikovaných neskôr modifikovaná Newtonova teória. A nakoniec, ak zanedbáme prítomnosť kozmologického členu, dostaneme sa do oblasti, kde platí aj klasická teória. Ich vzájomný vzťah nám poskytuje návod ako postupovať pri interpretácii neznámych parametrov v metrike.

My sa zameriame na špeciálny prípad sféricky symetrického, vákuového,

statického riešenia, pre ktorý vyriešime modifikovanú Poissonovu rovnicu a získame tak modifikovaný potenciál. Práve prejdením do klasickej teórie určíme fyzikálny význam jednej z konštánt. Naopak význam kozmologickej konštanty musíme hľadať vo VTR, kde táto konštanta vznikla. Ďalej budeme vyšetrovať vlastnosti pohybu testovacích častíc v zobecnenom efektívnom potenciály. Špeciálne kruhové dráhy a zrýchlenie častíc vypustených z pokoja. Pre tieto dva špeciálne prípady odvodíme aj presné riešenie rovníc geodetiky v Schwarzschild-de Sitterovej geometrii a výsledky porovnáme. Z toho získame interpretáciu konštanty M v metrike SdS a zároveň vymedzíme tú časť časopriestoru, kde platí Newtonova modifikovaná teória a VTR súčasne.

Kapitola 2

Einsteinove rovnice s kozmologickým členom

Dôležitou vlastnosťou Einsteinových rovníc popisujúcich gravitačné pole je to, že v klasickej limite prechádzajú na rovnice známe z Newtonovej teórie gravitácie. Nesmieme totižto zabúdať na to, že Newtonova teória gravitácie je takmer v dokonalom súlade s pozorovanými javmi v prírode, ktoré boli overené klasickými pozorovaniami. Každá iná teória preto musí dávať rovnaké predpovede pre slabé polia. Informácie použité v tejto kapitole som čerpal z [1] a [2]. Newtonovskú limitu použil Einstein práve pri určení hodnoty konštanty κ v jeho rovniciach

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

kde $R_{\mu\nu}$ je Riemannov tenzor, $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor a $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie-hybnosti obsahujúci informácie o zdroji. R je Ricciho skalár, ktorý vznikne zúžením Ricciho tenzoru

$$R = R^{\iota}_{\iota} . \quad (2.2)$$

Prvé exaktné riešenie Einsteinových rovníc vo vákuu v roku 1916 predstavil Schwarzschild. Štúdium tohoto riešenia ukazuje, že reprezentuje pole v okolí sféricky symetrického telesa v inak prázdnom priestoročase. Neskôr bolo zistené, že popisuje priestoročas vonku a vo vnútri čiernej diery. Bližšie sa ním budeme zaoberať v tretej kapitole.

Keď opustíme požiadavok na Einsteinove poľné rovnice, že ich riešením bez prítomnosti zdroja musí byť Minkowského plochý priestoročas, môžeme ľavú stranu rovníc (2.1), ktorá reprezentuje metriku, doplniť novým členom

$\Lambda g_{\mu\nu}$. Einsteinove rovnice nadobudnú tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Nová konštanta úmernosti Λ sa nazýva kozmologická konštanta, a to z toho dôvodu, že zohráva podstatnú úlohu na kozmologických vzdialenostiach. Môže nadobúdať kladné i záporné hodnoty. V súčasnosti je z pozorovania jej hodnota určená nerovnosťou $|\Lambda| \leq 10^{-55} \text{cm}^{-2}$ [3]. Táto nenulová konštanta bola pridaná do rovníc v roku 1917 samotným Einsteinom preto, aby riešením rovníc bol statický vesmír. Bez kozmologickej konštanty totiž ER predikovali dynamický vesmír, čo bolo v rozpore s dovtedy vykonanými pozorovaniami. Zároveň bol aj ovplyvnený západnou filozofiou, kde bola zakorenená myšlienka o nemennosti vesmíru (str. 409, [1]).

Tento svoj počín neskôr označil za chybu. Dôvodom boli pozorovania Edwina Hubblea zverejnené v roku 1929 [4], ktoré potvrdili expanziu vesmíru. Kozmologická konštanta nebola viac v poľných rovniciach potrebná. Na druhej strane sa však ukazuje, že kozmologická konštanta patrí k ER podobne ako integračná konštanta k neurčitému integrálu.

Pre bližšie pochopenie kozmologického členu je vhodné si spočítať Ricchiho invariant R^t_t zúžením rovnice (2.3).

$$R = 4\Lambda - \kappa T, \quad (2.4)$$

pričom táto identita dovoľuje na ľavú stranu ER osamostatniť derivácie metrického tenzoru tak, že sa “nemiešajú” s metrikou a dostaneme alternatívne vyjadrenie

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.5)$$

Ľavá strana reprezentuje zakrivenie priestoročasu a tá je rovná pravej strane, kde zostane tenzor energie-hybnosti a kozmologická konštanta. Keďže o tenzore energie-hybnosti vieme, že je zdrojom gravitačného poľa, aj Λ môžeme pripisovať podobný fyzikálny význam.

Ak by sme predpokladali prázdny priestoročas, to znamená bez zdrojov $T_{\mu\nu} = 0$, potom sa ER redukujú na tvar

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

z ktorého je už jasne vidieť, že nenulová konštanta Λ spôsobí zakrivenie priestoročasu. Priestoročasy splňujúce predchádzajúci vzťah sa nazývajú

Einsteinove priestoročasy. Priestor bez prítomnosti zdroja by mal vykazovať maximálnu symetriu a byť izotropný. Einsteinove priestoročasy majú konštantnú krivosť $K = \pm\frac{1}{3}\Lambda$. Priestoročas s kladnou krivosťou K a kozmologickou konštantou Λ sa nazýva de Sitterov priestoročas ako riešenie ER bez zdrojov a vln.

Zaujímavý pohľad na kozmologickú konštantu dáva Zeldovič [5], ktorý člen $\Lambda g_{\mu\nu}$ stotožňuje s tenzorom energie vákua T^{vac}

$$T_{\mu\nu}^{vac} \equiv -(\Lambda/8\pi)g_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

ktorý má len gravitačné účinky, pričom používame geometrizované jednotky $G = 1$, $c = 1$. Je zaujímavé si s takto zadaným tenzorom vákua spočítať hustotu hmoty-energie vákua, ktorá pre voľne padajúceho pozorovateľa vychádza

$$\rho^{vac} = T_{00}^{vac} = +\Lambda/8\pi . \quad (2.8)$$

Porovnaním s newtonovskou teóriou, ktorá dobre popisuje slabé gravitačné polia, a v ktorej kozmologická konštantka nevystupuje, je nutne hodnota tejto konštanty natoľko malá, že gravitačné efekty vákua sú tam zanedbateľné. Medzi systémy s dostatočne malou hustotou a rozmermi, na ktoré je ešte aplikovateľná Newtonova teória, patria napríklad časti galaxií, ktorých hustota je rádovo 10^{-29} g/cm³ a teda

$$|\widetilde{\rho^{(vac)}}| = \frac{G}{c^2}|\rho^{(vac)}| \leq 10^{-29}\text{g/cm}^3 . \quad (2.9)$$

Je preto možné odhadnúť hornú hranicu kozmologickej konštanty číslom

$$|\rho^{vac}| = |\Lambda|/8\pi \leq 10^{-57}\text{cm}^{-2} . \quad (2.10)$$

Vidíme, že VTR prináša do gravitačnej teórie novú konštantu, ktorá sa v klasickej Newtonovej teórii nevyskytovala. A z toho dôvodu je vhodné nájsť spôsob ako kozmologickú konštantu začleniť do Newtonových rovníc, a potom skúmať, akým spôsobom sa zmenia predpovede klasickej teórie. Týmto sa budeme zaoberať v štvrtej kapitole.

Kapitola 3

Newtonovská limita VTR

Pre správne použitie predpokladu, že v prítomnosti slabých polí a pri pomalých rýchlostiach telies, sa uplatňujú zákony newtonovskej teórie gravitácie, je vhodné si ujasniť vzťah Newtonovho a Einsteinovho popisu gravitácie. Pripomínam, že v texte používame geometrizované fyzikálne jednotky, kde rýchlosť svetla vo vákuu je $c = 1$ a Newtonova gravitačná konštanta $G = 1$. Newtonovská limita je podľa [6] definovaná vlastnými rýchlosťami telies pohybujúcich sa v okolí zdroja menšími oproti rýchlosti svetla a gravitačným potenciálom, ktorý je oveľa menší ako jednička a pomaly sa mení s časom. Uvedieme si teda podmienky, ktoré musí systém splniť, aby bolo použitie Newtonovej teórie opodstatnené (str.414, [1]).

Aby sa neprejavovali efekty špeciálnej teórie relativity musí byť rýchlosť testovacej častice voči zdroji i zároveň relatívne rýchlosti vo vnútri zdroja malé v porovnaní s rýchlosťou svetla

$$v \ll 1 . \quad (3.1)$$

Uvažujme voľnú testovaciu časticu vypustenú s nulovou rýchlosťou, na ktorú pôsobí gravitačné pole budené zdrojom s hmotnosťou M dané Newtonovým potenciálom

$$\Phi = -\frac{M}{r} , \quad (3.2)$$

ktorý spĺňa normalizačnú podmienku $\Phi(\infty) = 0$. Zo zákona zachovania energie vyplýva, že zmena kvadrátu rýchlosti tejto častice závisí na zmene potenciálu

$$\delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \delta(\Phi) . \quad (3.3)$$

Uvážením poslednej rovnosti a podmienky na rýchlosť (3.1) okamžite vyplýva obmedzenie na newtonovský gravitačný potenciál

$$|\Phi| \ll 1 . \quad (3.4)$$

Vnútorne tlaky v zdroji spôsobujú napríklad zvukové vlny, ktorých rýchlosti sú úmerné pomeru $|T^{ij}/T^{00}|^{1/2}$, a preto aby platila podmienka (3.1), musia byť takisto tlaky v systéme malé v porovnaní s hustotou zdroja

$$|T^{ij}|/T^{00} = |T^{ij}|/\rho \ll 1; . \quad (3.5)$$

Skúmame pohyb testovacej častice v slabom gravitačnom poli popísaným metrikou

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (3.6)$$

pričom $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Súradnicový časový interval dt je skoro rovný intervalu vlastného času $d\tau$ testovacej častice

$$\frac{dt}{d\tau} \approx 1 . \quad (3.7)$$

Použitím rovnice geodetiky platnej vo všeobecnej teórii relativity a uvážením predpokladov pre slabé gravitačné pole, dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} h_{00,i} \quad (3.8)$$

Porovnaním tejto rovnice s rovnicou pre voľne padajúce teleso z Newtonovej teórie

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} , \quad (3.9)$$

kde Φ je Newtonov potenciál, vidíme, že

$$-\frac{1}{2} h_{00,i} = \Phi_{,i} . \quad (3.10)$$

Vyintegrovaním rovnice (3.10) a použitím okrajových podmienok $\Phi(r = \infty) = 0$ a $h_{\mu\nu}(r = \infty) = 0$, resp. stačí splniť podmienku, že na nejakej ploche S platí, že $2\Phi(\vec{r})|_S = -h(\vec{r})|_S$ a dostaneme vzťah

$$g_{00} = -1 - 2\Phi . \quad (3.11)$$

Uvážením predpokladu (3.1), (3.6) a rovnice (3.11) je možné odvodiť vzťah pre nenulové zložky Riemannovho tenzora v limite slabých polí

$$R_{0j0}^i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (3.12)$$

ktorý vznikne použitím vyjadrenia pre Christoffelove symboly $\Gamma_{00}^i = \partial\Phi/\partial x^i$ z rovnice geodetiky.

Za krátku zmienku stojí aj jeden špeciálny pohľad na gravitáciu, ktorý sa nazýva linearizovaná teória gravitácie (str.433, [1]). Táto teória popisuje slabé gravitačné polia s využitím vyjadrenia metrického tenzora pomocou vzťahu (3.6) avšak nepožaduje platnosť vzťahu (3.1) na rýchlosti testovacích častíc. A pri vyjadrení Christoffelových symbolov, zložiek Riemannovho tenzora a riešení Einsteinových rovníc sa ponechajú len členy, v ktorých tenzor $h_{\mu\nu}$ vystupuje lineárne.

Limitou linearizovanej teórie je opäť newtonovská gravitácia, a to v prípade keď uvažujeme newtonovský zdroj (str.445, [1]): $T_{00} \gg |T_{0j}|$, $T_{00} \gg |T_{ij}|$, a podmienku na rýchlosti testovacích častíc (3.1). Metrika pre takýto zdroj potom vychádza v tvare

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.13)$$

kde

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv - \int \frac{T_{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.14)$$

je Newtonov potenciál. Táto metrika je približným vyjadrením Schwarzschildovej metriky uvedenej v tretej kapitole. Z vyjadrenia metriky vidíme, že rozdiel od newtonovskej limity, ktorá identifikovala len člen g_{00} , linearizovaná teória gravitácie nám dáva informáciu aj o ostatných metrických koeficientoch pre slabé gravitačné polia. Presnosť použitá pri odvodení vzťahu (3.13) je dostatočná pre použitie na výpočty týkajúce sa frekvenčného posunu a zakrivovania svetla v slnečnej sústave.

Vo veľkej vzdialenosti r od telesa budiaceho pole, keď sa javí ako bodový zdroj, môžeme výraz pre potenciál aproximovať potenciálom

$$\Phi = -\frac{\int T^{00} d^3x}{r} \equiv -\frac{M}{r} \quad (3.15)$$

a geometria gravitačného poľa je

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.16)$$

Konštanta M je teda podľa VTR daná pomocou $T^{00} = \rho$, čo je hustota hmoty nameraná statickým pozorovateľom, a M má teda význam celkovej hmotnosti zdroja. V tejto oblasti je gravitačné pole dobre popísané Newtonovými zákonmi a M je teda možné stotožniť s Newtonovou definíciou hmotnosti. V praxi je však pre výpočet integrálu vo vzťahu (3.15) potrebná detailná znalosť vnútornej štruktúry zdroja a zároveň presné hranice povrchu. Preto sa v praxi na určenie parametru M používajú merania planetárnych orbít, pričom sa využíva platnosť 3. Keplerovho zákona (voľná častica v slabom poli sa pohybuje po keplerovskej elipse)

$$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3, \quad (3.17)$$

kde T je perióda obehu a a je dĺžka hlavnej poloosi elipsy. Je dôležité si uvedomiť, že význam písmena M v metrike sme určili v limite slabého gravitačného poľa, kde môžeme použiť Newtonovu teóriu gravitácie a vyjadrenie potenciálu, kde vystupuje M ako hmotnosť telesa, ktoré budí gravitačné pole. Tam totiž platí vzťah (3.17), ktorý dáva konštante M fyzikálnu interpretáciu a tu prenesieme späť do všeobecne relativistického poľa. V tejto práci podobným postupom porovnáme klasické a relativistické dráhy testovacích častíc v špeciálnom prípade vákuového, sféricky symetrického, statického poľa, ktoré zahŕňa kozmologický člen, a určíme význam konstant v metrike.

Kapitola 4

Schwarzschild-de Sitter

4.1 Tvar metriky

Ako zdroj gravitačného poľa budeme uvažovať sféricky symetrické statické teleso. Platí, že ľubovoľnú metriku takého zdroja v sférických súradniciach vieme zjednodušiť do tvaru

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

kde Φ a Λ sú funkcie r a $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$. Tieto konkrétne súradnice sa nazývajú Schwarzschildove. Súradnica r je úmerná vlastnému obvodu a povrchu sféry, kde má r konštantnú hodnotu. A teda $r =$ vlastný obvod / 2π alebo $r = (\text{vlastný povrch sféry} / 4\pi)^{1/2}$.

Keď predpokladáme tvar metriky (4.1), je riešením vákuových (hustota a tlaky vymiznú) ER bez kozmologickej konštanty pre sféricky symetrický zdroj tzv. Schwarzschildova geometria (r.1916 - Karl Schwarzschild)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

V roku 1923 Birkhoff dokázal, že každé sféricky symetrické riešenie vákuových rovníc je dané Schwarzschildovou geometriou a je teda v oblasti nad horizontom priestoročasu statické a v asymptotickej oblasti ploché.

Vyšetríme význam parametru M v Schwarzschildovej metrike. Budeme sa pohybovať v takej vzdialenosti od zdroja r , kde je pole dostatočne slabé a kde platí Newtonova gravitačná teória. Zaujímá nás teda oblasť priestoročasu, $r \gg 2M$, kde je geometria takmer plochá a Newtonov potenciál je

tam daný vzťahom (3.2). Porovnaním výrazu (3.11) pre g_{00} v newtonovskej limite a vzťahu (4.2) okamžite vidíme, že M je hmotnosť telesa, ktoré ovláda pohyb planét vo veľkej vzdialenosti od neho, a teda celková hmota zdroja gravitačného poľa.

Riešením ER (2.3) s kozmologickou konštantou, pokiaľ uvažíme sféricky symetrickú, statickú metriku (4.1), je Schwarzschild-de Sitterova geometria s metrikou

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.3)$$

kde M je integračná konštantka a Λ je kladná kozmologická konštantka. Pre nízke hodnoty r aproximuje Schwarzschildov priestoročas a naopak pre dostatočne “veľké” r , keď je zanedbateľný člen s M , zase de Sitterovu geometriu.

Ak budú splnené podmienky (slabé gravitačné pole, pomalé rýchlosti) presne formulované v kapitole 2, ktoré dovoľujú aproximáciu (3.11), potom porovnaním tohoto výrazu s časovým členom g_{00} v metrike Schwarzschild-de Sittera (4.3), môžeme určiť relativistický potenciál Φ (resp. modifikovaný Newtonov potenciál) ako

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2. \quad (4.4)$$

Rovnosť vo vzťahu (4.4) platí mimo zdroja a len približne, pričom musí byť splnená podmienka na potenciál (3.4).

Touto aproximáciou môžeme konštantu M stotožniť s hmotou telesa, ktoré budí gravitačné pole. Je to zjavné, keď uvažíme Newtonov potenciál (3.2) a vo výraze (4.4) zanedbáme druhý člen s Λ . Toto zanedbanie je možné pre hodnoty r , pre ktoré už platí, že gravitačné pole je tam dostatočne slabé a dovoľuje použitie newtonovskej fyziky, ale na druhej strane, je člen s Λ dostatočne malý, aby sme ho mohli zanedbať. To zároveň implikuje, že hodnota kozmologickej konštanty musí byť malá, aby platila newtonovská fyzika. Z pozorovaní je približne známa hodnota kozmologickej konštanty a je ohraničená zhora nerovnosťou (2.10). Fyzikálny význam druhého člena je vidieť, ak si spočítame “gravitačnú” silu pôsobiacu na teleso z jednotkovou hmotnosťou z výrazu (4.4)

$$F = -\text{grad}\Phi = -\frac{M}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r. \quad (4.5)$$

Z tohoto vyjadrenia je zjavné, že člen s Λ má význam repulzívnej sily na teleso v gravitačnom poli. V tomto odstavci sme jednoduchou úvahou určili význam parametrov M a Λ v Schwarzschild-de Sitterovej metrike. Túto úvahu je však potrebné overiť fyzikálnymi pozorovaniami alebo využiť ešte iné postupy, ktoré sa ponúkajú. Jedným z nich je porovnanie pohybu voľných testovacích častíc v rámci klasickej teórie oproti geodetickému pohybu, ktorého rovnice plynú zo všeobecnej teórie relativity. Týmto sa budeme zaoberať vo štvrtej kapitole.

4.2 Oblasť platnosti newtonovskej limity

Na mieste je otázka, kde má newtonovská limita zmysel, resp. pre aké vzdialenosti r od počiatku súradníc je jej použitie správne. V Newtonovej teórii požadujeme, aby gravitačné pole v nekonečnej vzdialenosti od zdroja bolo nulové, čo je vyjadrené podmienkou $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0$. Tomu odpovedá vo VTR požiadavka, aby tu bol priestoročas plochý $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Z rovnice (4.4) pre potenciál Schwarzschild-de Sittera je však zrejmé, že takúto normalizačnú podmienku nespĺňa a teda táto geometria nie je newtonovská v nekonečne.

Ďalej budeme postupovať podľa článku [7] a ukážeme, že z podmienky $|\Phi| \ll 1$ vyplýva, že existuje ohraničenie na vzdialenosť od zdroja r

$$R_{min}(\Lambda) \ll r \ll R_{max}(\Lambda) , \quad (4.6)$$

kde má newtonovská limita zmysel. $R_{max}(\Lambda)$ resp. $R_{min}(\Lambda)$ je maximálna resp. minimálna hodnota vzdialenosti od zdroja r závislá na parametre Λ .

Ako priamy dôsledok požiadavky na potenciál, bude podmienka na hmotu zdroja M , ktorý môže vystupovať v newtonovskej limite

$$M \ll M_{max} , \quad (4.7)$$

kde M_{max} je horná hranica resp. maximálna hmotu zdroja.

Na rovnicu (4.4) aplikujeme podmienku (3.4) a teda

$$\left| -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2 \right| \ll 1 , \quad (4.8)$$

ktorá po zedefinovaní novej funkcie

$$d(r) \equiv r - \frac{1}{6}\Lambda r^3 , \quad (4.9)$$

a jednoduchej úprave nadobudne tvar

$$M \ll d(r) . \quad (4.10)$$

Fyzikálny význam majú len kladné hodnoty r . Potom s využitím skutočnosti, že funkcia $d(r)$ má lokálne maximum

$$r_+ = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} , \quad (4.11)$$

obdržíme podmienku na hmotu zdroja

$$M_{max} \equiv \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \gg M . \quad (4.12)$$

Ďalej budeme vyšetřovať ohraňenie r vyplývajúce z požiadavku platnosti newtonovskej limity. To získame z nerovnosti (4.10), ktorú prepíšeme do tvaru

$$r^3 - \left(\frac{6}{\Lambda}\right)r + 6\frac{M}{\Lambda} \ll 0 . \quad (4.13)$$

Zámenou nerovnosti na rovnosť v predchádzajúcom výraze obdržíme kubickú rovnicu, ktorej korene nám poskytnú odhad na r . Na jej riešenie použijeme postup opísaný v [8]. Diskriminant kubickej rovnice

$$D = \frac{1}{\Lambda^2} \left(9M^2 - \frac{8}{\Lambda}\right) < 0 \quad (4.14)$$

vychádza záporný, keď uvažíme predpoklad (4.12), čo znamená, že rovnica má tri reálne korene. Zadefinujeme si uhol σ vzťahom

$$\sigma \equiv \cos^{-1}\left(-\frac{M}{M_{max}}\right) , \quad (4.15)$$

ktorého veľkosť vieme vďaka predpokladu (4.12) určiť približne použitím Taylorovho rozvoja

$$\sigma \approx \frac{\pi}{2} + \frac{M}{M_{max}} . \quad (4.16)$$

Obecné riešenie kubickej rovnice je

$$R_1 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma}{3}\right) \quad (4.17)$$

$$R_2 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma + 2\pi}{3}\right) \quad (4.18)$$

$$R_3 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma + 4\pi}{3}\right) \quad (4.19)$$

Keď si zavedieme označenie

$$\sigma_0 = \frac{M}{M_{max}}, \quad (4.20)$$

potom korene rovnice sú

$$R_1 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma_0}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \quad (4.21)$$

$$R_2 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma_0}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) \quad (4.22)$$

$$R_3 = 2r_+ \cos\left(\frac{\sigma_0}{3} + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (4.23)$$

Pretože $0 < \sigma_0 \ll 1$, potom R_1 a R_3 sú kladné a $R_1 > R_3$ (naopak R_2 je záporné, čo je fyzikálne nezaujímavé). Hľadanú maximálnu a minimálnu hodnotu r danú nerovnosťou (4.6) môžeme stotožniť s koreňmi kubickej rovnice tak, že $R_1 \equiv R_{max}$ a $R_3 \equiv R_{min}$. S uvážením rovnosti (4.20) a rozvinutím kosínusu (4.21) resp. (4.23), pričom ponecháme len vedúce členy, získame explicitné vyjadrenie:

$$\begin{aligned} R_{max} &= 2\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \left(\cos \frac{\sigma_0}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\sigma_0}{3} \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &\approx \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{M}{M_{max}} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} R_{min} &= 2\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \left(\cos \frac{\sigma_0}{3} \cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\sigma_0}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sin \frac{\sigma_0}{3} \\ &\approx M \left[1 - \frac{1}{54} \left(\frac{M}{M_{max}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

pričom sme využili podmienku (4.12). Explicitné obmedzenie na vzdialenosti použité v newtonovskej limite je

$$M \left[1 - \frac{1}{54} \left(\frac{M}{M_{max}} \right)^2 \right] \ll r \ll \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{M}{M_{max}} \right). \quad (4.26)$$

V závere teda môžeme konštatovať, že z požiadavku na potenciál $|\Phi| \ll 1$ sme odvodili obmedzenie (4.26) na oblasť priestoročasu, kde platí newtonovská limita. Einsteinove zákony však platia v celom priestoročase, a z toho dôvodu sa musia výsledky, ktoré táto teória dáva v oblasti (4.26), zhodovať v prvom priblížení s výsledkami odvodenými použitím Newtonovho formalizmu.

V nasledujúcej kapitole uvidíme, že k rovnakým záverom je možné dôjsť vyšetrovaním dráh voľných testovacích častíc v modifikovanom newtonovskom poli a v Schwarzschild-de Sitterovej geometrii, ak budeme hľadať oblasť, kde sa tieto výsledky zhodujú.

Kapitola 5

Geodetiky metódou efektívneho potenciálu

V tejto kapitole vyšetrujeme pohyb voľnej testovacej častice pomocou modifikovaného newtonovského potenciálu (4.4) na jednej strane a z pohľadu všeobecnej teórie relativity v gravitačnom poli s metrikou Schwarzschild-de Sittera (4.3) na strane druhej. Využijeme metódu efektívneho potenciálu a z neho určíme rýchlosť častice na kruhovej orbite a radiálne zrýchlenie momentálne statickej častice. V závere potom skúsime porovnať výsledky a určiť význam parametrov M a Λ .

5.1 Newtonovské dráhy

Budeme vyšetřovať pohyb voľnej testovacej častice v gravitačnom poli, ktoré je budené sféricky symetrickým potenciálom. Zaujímame sa o prípad s kladnou kozmologickou konštantou, ktorá v klasickej teórii nevystupuje. V prvom rade teda musíme istým spôsobom modifikovať klasickú Poissonovu rovnicu

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho, \quad (5.1)$$

aby obsahovala kozmologickú konštantu Λ . Získame ju aplikovaním newtonovskej limity na Einsteinove rovnice. Z limity rovnice geodetiky určíme hodnotu komponenty Ricciho tenzoru R_{00} , pre ktorú platí, že $R_{00} = R_{000}^0 + R_{0i0}^i \approx R_{0i0}^i$, ak predpokladáme statickú metriku.

Z kapitoly 2 vieme, že v rámci priestoročasu, kde platí newtonovská teória, platí vzťah pre zložky Riemannovho tenzora (3.12), ktorého zúžením

získame

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^i} = \Delta \Phi , \quad (5.2)$$

čo predstavuje ľavú stranu Poissonovej rovnice. Následne aplikujeme newtonovskou limitu na ER s Λ (2.5), pričom nás zaujíma len R_{00} . Dostaneme

$$R_{00} = \Lambda g_{00} + \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) = -\Lambda - 2\Phi \Lambda + \frac{\kappa}{2} \rho , \quad (5.3)$$

pretože v limite slabých polí platí rovnosť (3.11) a (3.5), z ktorej okamžite vidíme, že $T = T_\mu^\mu = T_0^0 + T_i^i \approx T_0^0$.

Rovnice (5.2) a (5.3), ktoré sme odvodili nezávisle, ale za rovnakých predpokladov, si musia byť rovné

$$\Delta \Phi + 2\Phi \Lambda = \frac{\kappa}{2} \rho - \Lambda . \quad (5.4)$$

Je zrejmé, že táto rovnica musí prechádzať na klasickú Poissonovu rovnicu (5.1), pokiaľ položíme $\Lambda = 0$. Toto môžeme splniť, ak definujeme konštantu $\kappa \equiv 8\pi$. Ďalej, pokiaľ sa obmedzíme na slabé pole a uvážime teda podmienku $\Phi \ll 1$, môžeme v prvom priblížení uvažovať za nami hľadanú rovnicu pre potenciál, ktorý bude ovplyvňovať pohyb telies, vzťah

$$\Delta \Phi = 4\pi \rho - \Lambda . \quad (5.5)$$

Získali sme teda rovnicu pre potenciál, ktorá je základom modifikovanej Newtonovej teórie zahrňujúcej kozmologický člen, a ktorá bola spomenutá v úvode. Ďalej sa obmedzíme na vákuový prípad $\rho = 0$ a rovnica (5.5) prejde na Poissonovu rovnicu

$$\Delta \Phi = -\Lambda , \quad (5.6)$$

ktorú vieme explicitne vyriešiť, ak uvážime sférickú symetriu problému. Získame potenciál

$$\Phi(r) = -\frac{C_1}{r} - \frac{\Lambda}{6} r^2 + C_2 , \quad (5.7)$$

kde r je radiálna vzdialenosť od zdroja a C_1, C_2 sú integračné konštanty. Tento potenciál je podobný ako klasický Newtonov potenciál, ale je modifikovaný členom úmerným Λr^2 , ktorý rastie s rastúcim r . Je teda zrejmé, že potenciál (5.7) nedokážeme normalizovať v nekonečne podmienkou $\Phi(\infty) = 0$, tak ako to bolo v klasickej teórii. Avšak konštantu C_2 môžeme bez ujmy

na všeobecnosti položiť rovní nule, pretože samá o sebe nemá v nerelativistickej teórii fyzikálny význam. Otázkou je, či môžeme stotožniť C_1 s hmotou telesa, čo prirodzene očakávame. Chceme sa odvolať na klasický Newtonov potenciál, kde je význam M jasný a potvrdený pozorovaniami. Na prechod do klasickej teórie použijeme limitu $\Lambda \rightarrow 0$, ktorú aplikujeme na rovnicu (5.7) a všimneme si, že dostaneme výraz zhodný s Newtonovým potenciálom $\Phi = -M/r$. A teda, v súlade s naším očakávaním platí, že

$$C_1 \equiv M, \quad (5.8)$$

pričom M je celková hmota zdroja.

Člen s konštantou $\Lambda > 0$, ktorý vznikol s umelo dodaného kozmologického členu a teda nemá v rámci klasickej teórie ekvivalent, je možné chápať ako vnútornú vlastnosť priestoročasu, ktorá sa však uplatňuje iba pre veľké hodnoty r , a teda jej vplyv nenameriame experimentmi napríklad v slnečnej sústave.

Ďalej budeme uvažovať testovaciu časticu s hmotnosťou m . Tu vložíme do centrálneho poľa popísaného potenciálom (5.7) a budeme skúmať jej pohyb v sférických súradniciach (r, ϑ, φ) . Tento potenciál závisí len na vzdialenosti od zdroja r , a preto stačí, ak sa obmedzíme na ľubovoľnú centrálnu rovinu. Bez ujmy na všeobecnosti si zvolíme rovinu $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Pre takto formulovanú úlohu máme efektívne dva stupne voľnosti r a φ . Pre testovaciu časticu máme Lagrangian známy z klasickej mechaniky

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - m\Phi(r), \quad (5.9)$$

pričom bodka nad písmenom značí deriváciu podľa času. Táto Lagrangeova funkcia má dva integrály pohybu, ktoré charakterizujú veličiny, ktoré sa počas pohybu nemenia. Počas pohybu testovacej častice sa zachováva moment hybnosti L

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst}, \quad (5.10)$$

a takisto celková energia častice E

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + m\Phi(r) = \text{konst}. \quad (5.11)$$

Dosadením $\dot{\varphi}$ z rovnice (5.10) do rovnice (5.11) a osamostatnením \dot{r} , získame rovnosť

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(m\Phi(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Po zavedení energie a momentu hybnosti častice na jednotku hmotnosti

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{m} \quad (5.13)$$

$$\tilde{L} \equiv \frac{L}{m}, \quad (5.14)$$

prepíšeme rovnicu (5.12)

$$\dot{r}^2 = 2 \left[\tilde{E} - \left(\Phi(r) + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} \right) \right] = 2(\tilde{E} - V_{eff}^N). \quad (5.15)$$

kde sme definovali efektívny potenciál na jednotku hmotnosti vzťahom

$$V_{eff}^N \equiv \Phi(r) + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}, \quad (5.16)$$

ktorý má pre potenciál (5.7) explicitný tvar

$$V_{eff}^N(r) = -\frac{M}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2 + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}. \quad (5.17)$$

Pre grafické znázornenie priebehu efektívneho potenciálu je vhodné si zaviesť novú premennú

$$x \equiv \frac{r}{M}, \quad (5.18)$$

a zdefinovať konštanty

$$\lambda \equiv \frac{1}{3}\Lambda M^2 \quad (5.19)$$

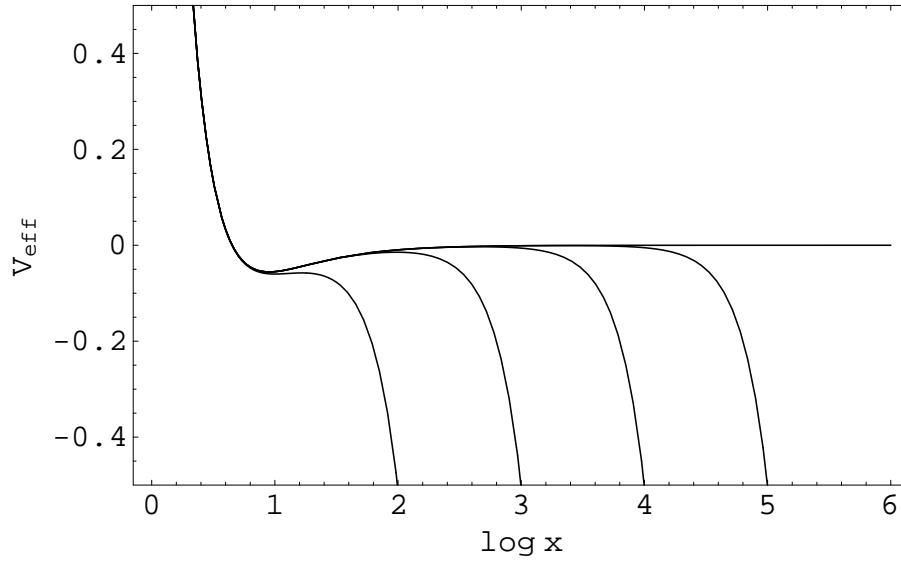
$$\alpha \equiv \frac{\tilde{L}^2}{M}. \quad (5.20)$$

Potom môžeme vzťah (5.17) prepísať do podoby

$$V_{eff}^N(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\alpha^2}{2x^2}, \quad (5.21)$$

ktorý je vykreslený na obrázku (5.1) pre $\alpha = 3$ a rôzne hodnoty konštanty $\lambda = 10^{-4}; 10^{-6}; 10^{-8}; 10^{-10}$ a pre limitný prípad $\lambda = 0$, keď modifikovaný efektívny potenciál prechádza na klasický efektívny potenciál.

Tvar efektívneho potenciálu môžeme vysvetliť následovne. Žiadna častica s nenulovým momentom hybnosti L nezasiahne centrum, ktoré je v



Obrázek 5.1: Modifikovaný Newtonov efektívny potenciál (5.21) pre $\alpha = \frac{\tilde{L}}{M} = 3$ a zľava pre $\lambda = \frac{1}{3}\Lambda M^2 = 10^{-4} ; 10^{-6} ; 10^{-8} ; 10^{-10} ; 0$ v závislosti na $\log x = \log r/M$.

tomto prípade aproximované hmotným bodom. Priebeh potenciálu musí byť v blízkosti zdroja podobný priebehu efektívneho potenciálu bez členu Λ (pretože požadujeme ekvivalenciu s Newtonovou gravitáciou v určitej oblasti), a z dôvodu, ako už bolo spomenuté vyššie, hodnota Λ musí byť malá. Efekt kladnej kozmologickej konštanty je vidieť v asymptotickej oblasti, kde pôsobenie poľa nevymizne ako v Newtonovej teórii. Práve naopak má odpudivý charakter, ktorý sa prejavuje tým bližšie pri zdroji, čím je kozmologická konštantá väčšia.

Ďalej sa zameriame na nájdenie rýchlosti testovacej častice pohybujúcej sa po kruhovej orbite. Polohu kruhovej orbity s daným momentom hybnosti vieme určiť z polohy extrému efektívneho potenciálu (5.17), pričom minimum odpovedá stabilnej a maximum nestabilnej kruhovej orbite. Extrém potenciálu určíme z podmienky

$$\frac{\partial V_{eff}^N}{\partial r} = 0, \quad (5.22)$$

ktorá ma všeobecne dve riešenia vzhľadom k r , obe však dávajú rovnaký redukovaný moment hybnosti \tilde{L} . Vyriešením tejto rovnice vzhľadom ku \tilde{L}

teda získame jednoznačné riešenie

$$\tilde{L}^2 = Mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4, \quad (5.23)$$

čo predstavuje moment hybnosti na jednotku hmotnosti, ktorý by častica v nejakej vzdialenosti r musela mať, aby sa pohybovala po kruhovej orbite. Keďže kvadrát redukovaného momentu hybnosti musí byť kladné číslo, z predchádzajúcej rovnosti obdržíme horné ohraničenie na vzdialenosť od zdroja, do ktorej ešte môžu existovať kruhové orbity, a je to

$$r_h = \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}. \quad (5.24)$$

Súvisí to s tým, že máme pole, u ktorého do istej vzdialenosti prevládajú príťažlivé efekty, no pre veľké vzdialenosti zase naopak odpudivé.

Pre $r > 0$ a reálne má rovnica (5.23) dva korene r_+ , ktoré odpovedá maximum potenciálu a r_- , ktoré prislúcha minimu, pokiaľ je splnená podmienka, že

$$\tilde{L}^2 < \Lambda \left(\frac{3M}{4\Lambda} \right)^{4/3}. \quad (5.25)$$

Pokiaľ v predchádzajúcom vzťahu platí rovnosť, existuje len jeden extrém efektívneho potenciálu, pričom z charakteru efektívneho potenciálu je zrejmé, že to bude marginálne stabilná dráha. Pre úvahy v tejto práci nie je nutné presne poznať polohy minima a maxima vzhľadom ku \tilde{L} , ale stačí len nájsť intervaly, v ktorých sa budú nachádzať. Maximum resp. minimum efektívneho potenciálu určíme z podmienky $\partial^2 V_{eff}^N / \partial r^2 < 0$ resp. $\partial^2 V_{eff}^N / \partial r^2 > 0$. Hľadanie vzdialenosti od zdroja, do ktorej môžu existovať stabilné kruhové orbity je ekvivalentné hľadaniu r_{hs} , pre ktoré platí $\partial^2 V_{eff}^N(r_{hs}) / \partial r^2 = 0$. Vyriešením tejto rovnice získame

$$r_{hs} = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\Lambda}}, \quad (5.26)$$

a pričom z charakteru rovnice vyplýva, že

$$r_- \leq \sqrt[3]{\frac{3M}{4\Lambda}} \leq r_+ \leq \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}. \quad (5.27)$$

Je teda vidieť, že pre zvolené r máme už jednoznačne určené, či sa jedná o minimum alebo maximum, a jednoznačne je daný aj k nej prislúchajúci redukovaný moment hybnosti podľa vzťahu (5.23).

Dosadením hodnoty redukovaného momentu hybnosti na kruhovej orbite (5.23) do vzťahu (5.10), ak uvážime (5.14), už jednoducho získame kruhovú rýchlosť častice

$$(v_{kruh}^\varphi)^2 \equiv (r\dot{\varphi})^2 = \frac{M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad (5.28)$$

pričom podľa hodnoty r vieme určiť, či sa jedná o stabilnú alebo nestabilnú orbitu. To, že viem rozlíšiť medzi stabilnou a nestabilnou orbitou bude potrebné, ak budem chcieť Newtonovu kruhovú rýchlosť porovnávať s Einsteinovou, pretože musím porovnávať rýchlosti v rovnakej vzdialenosti r , ale zároveň musím vedieť, že porovnávam rovnaký druh extrému.

V nasledujúcom odstavci si spočítame radiálne zrýchlenie častice a_N^r s nulovým momentom hybnosti, ktorá je na začiatku v pokoji. Použijeme na to vzťah (5.15), ktorý zderivujeme podľa času t a položíme $\tilde{L} = 0$. Dostaneme

$$a_N^r \equiv \ddot{r} = -\frac{dV_{eff}^N}{dr} = -\frac{M}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r. \quad (5.29)$$

Limitou vzťahov (5.28) a (5.29) pre $\Lambda \rightarrow 0$ je rýchlosť a radiálne zrýchlenie testovacej častice, ktorá je priťahovaná newtonovským bodovým zdrojom. Limitné vzťahy majú identický tvar so vzťahmi, ktoré dostaneme v klasickej Newtonovej teórii bez Λ . V klasických výsledkoch vystupujúca konštanta M je rovná práve hmotnosti zdroja, čo je overené experimentami i pozorovaniami. To nás vedie k tomu, že stotožnenie $C_1 = M$ v modifikovanom Newtonovom potenciály (5.7) bolo správne.

5.2 Geodetický pohyb testovacej častice

Cieľom je nájsť tvar efektívneho potenciálu pomocou formalizmu VTR a porovnať ho s Newtonovým efektívnym potenciálom. Geodetická štruktúra priestoročasu určuje pohyb testovacích častíc a fotónov v priestoročase. Tvar priestoročasu je zase daný metrikou, ktorá vystihuje jeho geometrické vlastnosti. A preto metrické koeficienty vystupujú v rovnici geodetiky

$$\frac{Dp^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (5.30)$$

kde $p^\mu = m dx^\mu/d\lambda$ je štvor-hybnosť, λ je afinný parameter a m je kľudová hmotnosť častice. Pokiaľ vyšetrujeme pohyb hmotných častíc, ktoré sa budú

pohybovať po časupodobných geodetikách, je vhodné si za afinný parameter zvoliť vlastný čas častice τ vydelený klúdovou hmotou a teda

$$\lambda = \frac{\tau}{m} . \quad (5.31)$$

Potom pohybová rovnica (5.30) prejde do tvaru

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = 0 , \quad (5.32)$$

kde u^μ je štvor-rýchlosť testovacej častice. Základnou invariantnou veličinou, z ktorej budeme vychádzať pri odvodení tvaru efektívneho potenciálu, je normalizačná podmienka

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2 . \quad (5.33)$$

Pretože metrické koeficienty $g^{\mu\nu}$ Schwarzschild-de Sitterovej geometrie nezávisia na súradniciach t a φ , budú existovať k nim pridružené počas pohybu sa zachovávajúce veličiny

$$p_t \equiv -E \quad (5.34)$$

$$p_\varphi \equiv L , \quad (5.35)$$

kde E a L sú konštanty, ktorých význam by sme v Schwarzschildovej geometrii vedeli interpretovať ako energiu a uhlový moment hybnosti telesa v nekonečne. Toto nedovoľuje práve prítomnosť nenulovej konštanty Λ v metrike. Preto je vhodné nájsť oblasť priestoročasu, ktorého charakter je blízky Schwarzschildovy. Vzťahy použité pri odvodení pohybovej rovnice vyplývajúce z vlastností metriky sú

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi}) \quad (5.36)$$

$$g^{\mu\mu} = (g_{\mu\mu})^{-1} \quad (5.37)$$

$$p^\mu = g^{\mu\mu} p_\mu \quad (5.38)$$

$$g_{rr} = -(g_{tt})^{-1} . \quad (5.39)$$

Keď si rozpíšeme rovnicu (5.33) a využijeme vzťahy uvedené vyššie, obdržíme vzťah pre radiálnu zložku momentu hybnosti testovacej častice

$$(p^r)^2 = (E)^2 + g_{tt} \left(m^2 + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) . \quad (5.40)$$

Naším cieľom je porovnať poslednú rovnicu s rovnicou (5.15), a preto je vhodné ju predeliť hmotou častice. Ak si zvolíme pohyb častice v ekvatoriálnej rovine $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a uvážime preznačenie definované rovnosťami (5.13) a (5.14), vieme rovnicu (5.40) prepísať

$$(u^r)^2 = (\tilde{E})^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) = \tilde{E}^2 - (V_{eff}^E)^2. \quad (5.41)$$

Vidíme, že pohyb testovacích častíc ($m \neq 0$) je daný efektívnym potenciálom

$$(V_{eff}^E)^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (5.42)$$

Rovnako ako sme v predchádzajúcom odstavci prepísali Newtonov efektívny potenciál s použitím vzťahov (5.18), (5.19) a (5.20), prepíšeme aj rovnosť (5.42) na

$$(V_{eff}^E)^2(x) \equiv \left(1 - \frac{2}{x} - \lambda x^2\right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right), \quad (5.43)$$

ktorú sme pre $\alpha \equiv \frac{\tilde{L}}{M} = 4$ a rôzne hodnoty konštanty $\lambda \equiv \frac{1}{3}\Lambda M^2 = 0 ; 10^{-4} ; 10^{-6} ; 10^{-8} ; 10^{-10}$ vykreslili na obrázku (5.2).

V tomto momente sa pokúsime upraviť Einsteinov efektívny potenciál (5.42) tak, aby sa zhodoval s Newtonovým (5.17). To má zmysel v oblasti, kde $u^r \ll 1$ a vzťah (5.42) prejde na

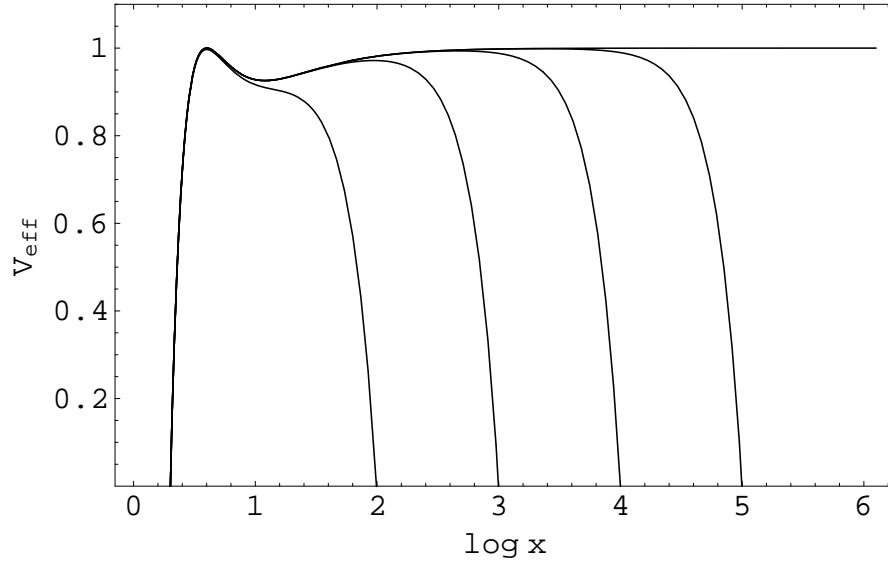
$$(u^r)^2 = (\tilde{E} + V_{eff}^E)(\tilde{E} - V_{eff}^E) \approx 2\tilde{E}(\tilde{E} - V_{eff}^E) \approx 2(\tilde{E} - V_{eff}^E)$$

a teda vzťah identický so vzťahom pre radiálnu rýchlosť častice v klasickej teórii (5.15). Vidíme, že ak sa obmedzíme na oblasť priestoročasu, kde platí, že

$$-h_{00} = -\frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \ll 1, \quad (5.44)$$

môžeme členy v prvej zátvorke vo výraze (5.42) uvažovať ako oveľa menšie ako jednička. Takisto, ak sme ďaleko od zdroja a uvažujeme rýchlosti testovacích telies malé v porovnaní s rýchlosťou svetla, tak aj pomer \tilde{L}^2/r^2 v druhej zátvorke je zanedbateľný oproti jedničke. Ak uvážime tieto predpoklady, môžeme efektívny potenciál aproximovať Taylorovým rozvojom odmocniny

$$\begin{aligned} V_{eff}^E(r) &\approx \left(1 - \frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right) \\ &\approx 1 - \frac{M}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2 + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} + o\left(\frac{M}{r}, \Lambda r^2, \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (5.45)$$



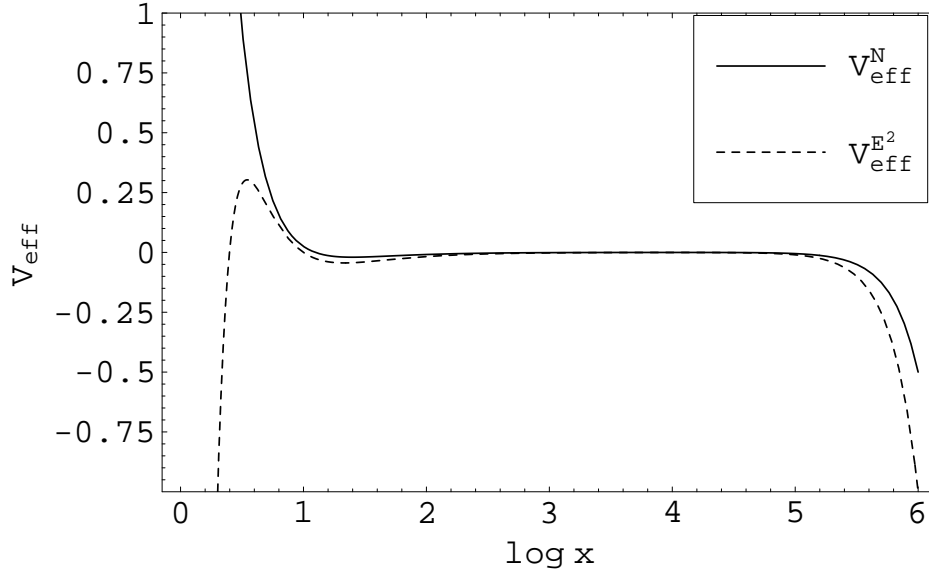
Obrázek 5.2: Einsteinov efektívny potenciál (5.43) pre $\alpha = \frac{\tilde{L}}{M} = 4$ a zľava pre $\lambda = \frac{1}{3}\Lambda M^2 = 10^{-4} ; 10^{-6} ; 10^{-8} ; 10^{-10} ; 0$ v závislosti na $\log x = \log r/M$.

Vidíme, že odhliadnuc od jednotky súvisiacej s vlastnou energiou častice, ktorú klasická teória neuvažuje, predchádzajúci výraz sa vo vedúcich členoch zhoduje s Newtonovým efektívnym potenciálom vtedy a len vtedy, pokiaľ konštanty M a Λ majú v oboch prípadoch rovnakú hodnotu a teda aj fyzikálnu interpretáciu. Dostali sme teda efektívny potenciál, o ktorom môžeme hovoriť ako o newtonovskej limite rovnice (5.42). Tento potenciál riadi pohyb testovacích častíc v oblasti priestoročasu, kde platia Newtonove zákony. Vidíme, že nájdené obmedzenia, ktoré musíme splniť, aby Einsteinov efektívny potenciál (5.42) prechádzal na Newtonov (5.17), korešponduje s podmienkou $\Phi \ll 1$. Je to zrejme, ak si uvedomíme, že platí

$$2\Phi = -h_{00} \ll 1 . \quad (5.46)$$

Tento záver korešponduje s výsledkami kapitoly 3.1, kde sme našli obmedzenia (4.6) na polohu testovacej častice a na jej rýchlosť potrebné pre platnosť newtonovskej limity.

Na obrázku (5.3) je znázornený priebeh newtonovského efektívneho potenciálu (5.21) v porovnaní s Einsteinovým (5.43), od ktorého sme však odpočítali 1, pre $\alpha = 5$ a pre $\lambda = 10^{-12}$. Vidíme, že sa v istej oblasti zhodujú.



Obrázek 5.3: Porovnanie Einsteinovho (5.43) a Newtonovho (5.21) efektívneho potenciálu pre $\alpha = \frac{\tilde{L}}{M} = 5$ a $\lambda = \frac{1}{3}\Lambda M^2 = 10^{-12}$ v závislosti na $\log x = \log r/M$.

Extrém efektívneho potenciálu odpovedá kruhovej orbite, a ten určíme z podmienky

$$\frac{\partial(V_{eff}^E)^2}{\partial r} = 0, \quad (5.47)$$

ktorá určuje vzťah medzi momentom hybnosti \tilde{L} a polomerom kruhovej orbity častice

$$\tilde{L}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2(3M - \Lambda r^3)}{r - 3M}. \quad (5.48)$$

Táto rovnica je pre zvolený moment hybnosti, rovnicou piateho stupňa pre r , pričom z priebehu efektívneho potenciálu na obrázku 5.2 vidíme, že bude mať pre reálne $r > 0$ obecné tri korene, z ktorých dva r_{in} a r_+ odpovedajú maximu a r_- odpovedá minimu. Aj v tomto prípade nás zaujímajú intervaly pre r , kde môžu existovať stabilné resp. nestabilné kruhové orbity. Zo vzťahu (5.48) vyplýva spodná r_d a horná r_h hranica na radiálnu vzdialenosť od zdroja, pre ktorú môže existovať kruhová orbita

$$r_d = 3M, \quad (5.49)$$

$$r_h = \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}. \quad (5.50)$$

V hraničnej vzdialenosti r_h je redukovaný uhlový moment (5.48) testovacej častice nulový a z faktu, že $\partial^2 V_{eff}^N(r_h)/\partial r^2 < 0$ plynie, že sa jedná o nestabilnú kruhovú orbitu. Ďalej predkladajme, že existuje oblasť priestoročasu, kde platia Newtonove zákony, a teda konštanty M a Λ nadobúdajú také hodnoty, že vieme splniť podmienku (5.44). V takom prípade existuje oblasť $r \ll \sqrt[3]{6M/\Lambda}$, kde je člen s Λ v efektívnom potenciály zanedbateľný, dostaneme efektívny potenciál rovnaký, aký vychádza pre Schwarzschildovu metriku. Vďaka tomu vieme určiť polohu $r_{ds} \approx 6M$, čo je hranica, pod ktorou môžu existovať len nestabilné kruhové orbity, ktoré odpovedajú polohe druhého maxima r_{in} . Máme vymedzenie pre jednotlivé extrémny

$$3M \leq r_{in} \leq 6M \leq r_- \leq r_{hs} \leq r_+ \leq \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}, \quad (5.51)$$

kde r_{hs} je hranica medzi minimom a horným maximom. Podľa článku [9] je $r_{hs} \approx \frac{0,2193}{\sqrt{\Lambda}}$, pričom musí byť zároveň splnená podmienka, že $M < M_{crit}(\Lambda)$, kde $M_{crit}(\Lambda)$ je hodnota $M_+(r; \Lambda) = \frac{1}{12}r(5\Lambda r^2 + 1 + 25\Lambda^2 r^4 - 22\Lambda r^2 + 1)$ v jej maxime. V spomínanom článku je na obrázku 28 vykreslená vzájomná závislosť r a M a šrafovaným je vyznačená oblasť, kde existujú len stabilné kruhové orbity. Keďže nás zaujíma oblasť platnosti newtonovskej limity, kde určite existujú aj stabilné kruhové orbity na relatívne širokom intervale, musíme mať zdroj, pre ktorý platí, že $M \ll M_{crit}$ (na obrázku 28 v [9] to odpovedá napríklad $M = 0,05$, pre ktoré vidíme, že $r_{ds} \approx 6M$). V nasledujúcom odstavci budeme porovnávať výsledky Einsteinovej a Newtonovej modifikovanej teórie pre rýchlosti testovacích častíc na kruhovej orbite, pričom musíme porovnávať stabilné orbity z Newtonovej teórie so stabilnými z VTR a nestabilné s nestabilnými. Vidíme, že v oboch teóriách je usporiadanie minim a maxim rovnaké, len vo VTR máme navyše maximum pre malé hodnoty r . Chovanie Einsteinovho efektívneho potenciálu je pre malé hodnoty r ($\lim_{r \rightarrow 0} (V_{eff}^E)^2 = -\infty$) odlišné od Newtonovho ($\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}^N = \infty$) a teda častica pohybujúca sa smerom k počiatku súradníc s energiou vyššiou než je hodnota Einsteinovho efektívneho potenciálu v maxime r_{in} zasiahne bodové centrum. My sa budeme pohybovať v takej oblasti priestoročasu, kde je podľa (4.26) $r \gg 6M$, a teda budeme dostatočne ďaleko od maxima r_{in} . Nie je preto možné, aby sme ho v oblasti platnosti newtonovskej limity porovnávali s klasickými výsledkami. Ak si teda zvolíme r v oblasti

newtonovskej limity, ktoré bude zároveň v oblasti, kde existujú extrémny efektívneho potenciálu, tak vieme jednoznačne určiť, či sa jedná o minimum alebo maximum, pričom charakter extrému bude v klasickej teórii aj VTR rovnaký.

Rýchlosť častice, ktorú by meral statický pozorovateľ, okolo ktorého by táto častica prelietala, je daná vzťahom [1]

$$u^{\hat{\varphi}} \equiv \frac{dx^{\hat{\varphi}}}{d\hat{\tau}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \frac{dx^{\varphi}}{d\hat{\tau}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \frac{dx^{\varphi}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{d\hat{\tau}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \frac{u^{\varphi}}{u^t}, \quad (5.52)$$

pričom u^t je časová zložka štvor-rýchlosti statického pozorovateľa, ktorá je ako jediná nenulová, a teda vyjde, že $u^t = 1/\sqrt{-g_{tt}}$. Ak využijeme ešte toho, že máme počas pohybu sa zachovávajúce veličiny \tilde{L} a \tilde{E} , môžeme vzťah (5.52) zjednodušiť na

$$u^{\hat{\varphi}} = \sqrt{\frac{-g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \cdot \frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}. \quad (5.53)$$

Dôvod, prečo si volíme práve rýchlosť meranú statickým pozorovateľom je, že očakávame, že sa bude najlepšie približovať rýchlosti, ktorú by sme určili Newtonovým formalizmom. Práve tá má fyzikálny význam v porovnaní napríklad s vlastnou rýchlosťou častice.

Na stabilnej kruhovej orbite platí, že

$$(\tilde{E})^2 = (V_{eff}^E)^2, \quad (5.54)$$

ak uvažujeme efektívny potenciál vo vzdialenosti r , ktorá vystupuje v rovnici (5.48). Dosadením rovníc (5.48), (5.54) a metrických koeficientov z (4.3) do vzťahu (5.53) obdržíme kruhovú rýchlosť testovacej častice vzhľadom k statickému pozorovateľovi

$$(u_{kruh}^{\hat{\varphi}})^2 = \frac{3M - \Lambda r^3}{3r - 6M - \Lambda r^3}. \quad (5.55)$$

Obmedzíme sa na oblasť, kde je splnená podmienka (5.44), a výraz v menovateli rozvineme do Taylorovej rady, pričom uvažujeme len jej prvé členy

$$\begin{aligned} (u_{kruh}^{\hat{\varphi}})^2 &= \frac{3M - \Lambda r^3}{3r \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)} \approx \\ &\approx \frac{3M - \Lambda r^3}{3r} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \approx \frac{M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Postupujeme podobne ako pri vyšetrowaní efektívneho potenciálu. Zase vidíme, že tento približný rozvoj platí v oblasti danej nerovnosťou (4.6), ktorá vymedzuje tú časť priestoročasu, kde by mal platiť Newtonov popis gravitácie a teda aj vzťah pre kruhovú rýchlosť (5.28) odvodený z Newtonovho modifikovaného potenciálu. Predpovede všeobecnej teórie relativity súhlasia s pozorovaniami aj tam, kde Newtonova teória nedáva správne výsledky. Pre nás je však podstatné to, že musí súhlasiť s Newtonovými predpoveďami v oblasti (4.6). Preto je na mieste porovnať výsledky pre kruhovú rýchlosť (5.28) a (5.56), pričom požadujeme aby sa zhodovali aspoň v prvej aproximácii. Je zrejmé, že si budú odpovedať, ak konštanty M a Λ , ktoré v nich vystupujú budú mať rovnaký fyzikálny význam. Môžeme teda tvrdiť, že konštantu M je celková hmota telesa budiaceho gravitačné pole a Λ súvisí s odpudivými účinkami priestoru alebo vákuu.

Očakávame, že aj radiálne zrýchlenie určené z modifikovaného Newtonovho potenciálu v odstavci 4.1 sa bude kvalitatívne zhodovať s tým, ktoré určíme pomocou všeobecne relativistického popisu. Musíme sa však rozhodnúť, vzhľadom k čomu budeme zrýchlenie určovať. Najskôr určíme vlastné radiálne zrýchlenie testovacej častice s $\tilde{L} = 0$, a to zderivovaním rovnice (5.41) podľa vlastného času testovacej častice

$$a_E^r \equiv \frac{du^r}{d\tau} = -\frac{M}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r, \quad (5.57)$$

čo je vzťah identický s (5.29). Radiálne zrýchlenie častice však vieme určiť aj vzhľadom k statickému pozorovateľovi ako

$$a_E^{\hat{r}} \equiv \frac{du^{\hat{r}}}{d\hat{\tau}} = \frac{d}{d\hat{\tau}} \left(\frac{u^r}{\tilde{E}} \right) = \frac{1}{\tilde{E}} \frac{du^r}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{d\hat{\tau}} = \frac{1}{\tilde{E}\sqrt{-g_{tt}}} \frac{a_E^r}{u^t} = \frac{\sqrt{-g_{tt}}}{(\tilde{E})^2} a_E^r \quad (5.58)$$

Vidíme, že v tomto vzťahu, ak sme v oblasti slabého poľa, vieme odmocninu z metrického koeficientu rozvinúť do Taylorovej rady

$$a_E^{\hat{r}} \approx \frac{1}{(\tilde{E})^2} \left(-\frac{M}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r \right) + \dots \quad (5.59)$$

Ak uvážime, že konštantu $\tilde{E} \sim m/m_0 = \gamma \sim 1$, pretože rýchlosť testovacej častice je v newtonovskej limite omnoho menšia ako je rýchlosť svetla, zistíme, že aj radiálne zrýchlenie častice vypustenej z pokoja voči statickému pozorovateľovi je v limite slabých polí zhodné so vzťahom (5.29). To potvrdzuje, že je správne stotožňovať M s hmotou zdroja gravitačného poľa, ktorá spôsobuje príťažlivý efekt. Naopak člen s Λ ma opačné znamienko a prejavuje sa odpudivými účinkami na časticu.

Kapitola 6

Záver

Cieľom tejto práce bolo dať fyzikálnu interpretáciu konštantám vystupujúcich v metrike Schwarzschild-de Sittera, a to aplikovaním newtonovskej limity. V prvej kapitole sme uviedli Einsteinove rovnice všeobecnej teórie relativity a dôvod, prečo ich Einstein modifikoval dodaním kozmologického členu. Ďalej sme spomenuli, ako VTR interpretuje kozmologickú konštantu. V nasledujúcej kapitole sme špecifikovali, čo znamená newtonovská limita z matematického hľadiska, a aké požiadavky kladie na zdroj a testovacie častice. V tretej kapitole sme vychádzali z práce Mareka Nowakowského [7] a newtonovskú limitu sme aplikovali na SdS metriku. Výsledkom bolo nájdenie oblasti platnosti Newtonovej teórie. V poslednej kapitole sme najprv modifikovali klasickú Poissonovu rovnicu tak, aby obsahovala kozmologickú konštantu, pričom sme vyšli z limity ER. Túto rovnicu sme vyriešili pre sféricky symetrický, vákuový, statický prípad a našli tvar zobecného efektívneho potenciálu. Z neho sme odvodili vlastnosti pohybu testovacích častíc, a to rýchlosť na kruhovej orbite a radiálne zrýchlenie častíc vypustených z pokoja. Ďalej sme odvodili presné riešenie rovníc geodetiky pre tieto dva špeciálne prípady pohybu v SdS. Porovnanie výsledkov nám dalo odpoveď na to, ako v metrike interpretovať M , ktorej význam sme prebrali z klasickej teórie. Naopak fyzikálny význam kozmologickej konštanty je potrebné hľadať vo VTR. Podobnú analýzu by malo byť možné uskutočniť aj v prípade iných riešení Einsteinových rovníc zahrnujúcich kozmologickú konštantu alebo na všeobecné riešenia, ktoré nie sú asymptoticky ploché.

Literatura

- [1] Misner W C, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (New York, W.H. Freeman & Co.)
- [2] Rindler W 2001 *Relativity* (New York, Oxford University Press)
- [3] Zeldovich Y B and Novikov I D 1975 *Structure and Evolution of the Universe* (MoIzN)
- [4] Hubble E 1929 *National Academy of Sciences* **15** pp 168–73
- [5] Zeldovich Y B 1967 *JETP Lett.* pp 316-7
- [6] Anninos P 2005 Computational Cosmology: From the Early Universe to the Large Scale Structure *Liv. Rev. Rel.*
- [7] Nowakowski M 2002 The Consistent Newtonian Limit of Einstein's Gravity with a Cosmological Constant *Preprint* astro-ph/0004037
- [8] *Mathworld* <http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>
- [9] Stuchlík Z and Hledík S 1983 *Bul. Astr. Inst. of Czechoslovakia* **34** pp 129-49