



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Milan Harcek

Scénářové struktury ve vícestupňových stochastických úlohách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická
statistika a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Bc. Milan Harcek

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce, pánovi doc. RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D. a pánovi Václavovi Kozmíkovi, Ph.D. za ich trpezlivosť, odborné pripomienky a nápady na zlepšenie diplomovej práce.

Název práce: Scénářové struktury ve vícestupňových stochastických úlohách

Autor: Bc. Milan Harcek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se věnuje úlohám vícestupňového stochastického programování v kontextu různých způsobů reprezentace náhodného procesu. Základní formou reprezentace náhodného procesu je scénářový strom. V práci jsou popsány vlastnosti obecného a po stupních nezávislého scénářového stromu. Dále je rozebrán případ scénářového stromu závislého na stavech markovského řetězce. Stav markovského řetězce reprezentují období krize a období bez krize. Nakonec je, pomocí informace o historickém počtu krizových období, použita scénářová mřížka. Scénáře pro scénářové stromy jsou generovány metodou momentů. Scénářové struktury jsou použity jako vstup do optimalizačního problému privátního investora.

Klíčová slova: vícestupňové stochastické programování, scénářový strom, markovský řetězec, scénářová mřížka, problém privátního investora

Title: Scenario structures in multistage stochastic programs

Author: Bc. Milan Harcek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with multi-stage stochastic programming in the context of random process representation. Basic structure for random process is a scenario tree. The thesis introduces general and stage-independent scenario tree and their properties. Scenario trees combined with Markov chains are also introduced. Markov chains states determine if there is a crisis period or not. Information about historical number of crises helps us to construct a scenario lattice. Scenario generation is performed using moment method. Scenario trees are used as an input to the investment problem.

Keywords: multistage stochastic programming, scenario tree, Markov chain, scenario lattice, investment problem

Názov práce: Scenárové štruktúry vo viacstupňových stochastických úlohách

Autor: Bc. Milan Harcek

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Abstrakt: Práca sa venuje úlohám viacstupňového stochastického programovania v kontexte rôznych spôsobov reprezentácie náhodného procesu. Základnou formou reprezentácie náhodného procesu je scenárový strom. V práci sú popísané vlastnosti všeobecného a po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Ďalej je rozobraný prípad scenárového stromu závislého na stavoch markovského reťazca. Stav markovského reťazca reprezentujú obdobie krízy a obdobie bez krízy. Nakoniec je, pomocou informácie o historickom počte krízových období, použitá scenárová mriežka. Scenáre pre scenárové stromy sú generované metódou momentov. Scenárové štruktúry sú použité ako vstup do optimalizačného problému privátneho investora.

Kľúčové slová: viacstupňové stochastické programovanie, scenárový strom, markovský reťazec, scenárová mriežka, problém privátneho investora

Obsah

Úvod	2
1 Viacstupňové stochastické programovanie	4
1.1 Úvod	4
1.1.1 Úloha nelineárneho programovania	4
1.1.2 Úloha lineárneho programovania	5
1.2 Úloha viacstupňového stochastického programovania	5
1.2.1 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie	7
2 Scenárové štruktúry	10
2.1 Scenárový strom	10
2.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom	15
2.3 Scenárový strom závislý na stavoch makovského reťazca	16
2.4 Scenárová mriežka	18
3 Investičný problém	23
3.1 Problém privátneho investora	23
3.2 Mean CVaR model	24
4 Generovanie scenárov	28
5 Praktická časť	36
5.1 Dáta	36
5.1.1 Rekurentná metóda najmenších štvorcov	37
5.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom	41
5.3 Scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca	45
5.4 Použitie scenárovej mriežky	48
Záver	51
Zoznam použitej literatúry	52
Zoznam obrázkov	54
Zoznam tabuliek	55
Zoznam použitých skratiek	56

Úvod

Základy teórie výberu portfólia položil Harry Max Markowitz vo svojom článku Markowitz (1952). Markowitzov model je statický a vyberá portfólio jednorázovo, na základe našich očakávaní o vývoji náhodných výnosov v budúcnosti. Naproti tomu viacstupňové stochastické modely umožňujú, na základe realizácií náhodných výnosov, preusporiadať portfólio vo viacerých obdobiach.

Jednou z možností, ako reprezentovať náhodný vývoj výnosov akcií, je použitie scenárov, ktorým priradíme pravdepodobnosť realizácie. So scenármi následne pracujeme ako s realizáciami diskrétného rozdelenia náhodných vektorov. Základnou formou reprezentácie scenárov je reprezentácia pomocou scenárového stromu.

Cielom práce je zhrnutie rôznych zápisov optimalizačných úloh, popis konštrukcie a vlastností rôznych scenárových štruktúr a ich použitie v optimalizačnom probléme privátneho investora. Okrem po stupňoch nezávislého stromu skonštruujeme scenárový strom, ktorý závisí od stavov markovského reťazca. Takto použitý scenárový strom je aplikovaný napríklad v článku Philpott a De Matos (2012) pre úlohu hydrotermálneho plánovania, avšak použitie v úlohách optimálneho výberu investičného portfólia sa v nami známej literatúre doposiaľ nevyskytuje. Navrhujeme vlastnú konštrukciu markovského reťazca s dvoma stavmi, ktoré reprezentujú obdobie stabilných výnosov, ktoré budeme nazývať ako bezkrízové obdobie a obdobie nízkych výnosov, typicky nasledovaných ich vysokou volatilitou, ktoré budeme nazývať ako krízové obdobie. Na identifikáciu bodov nestability v časovom rade výnosov a hľadanie krízových a bezkrízových období použijeme metódu rekurzívnych rezíduí, popísanú v knihe Cipra (2008). Nakoniec skonštruujeme markovský reťazec vo forme scenárovej mriežky, kde kľúčom ku spájaniu stavov bude počet krízových období v doterajšej histórii.

Pri popise konštrukcie scenárového stromu vychádzame z kníh Kall a Mayer (2005) a Shapiro a kol. (2009) a z odkazov na literatúru v nich. Grafické znázornenie scenárového stromu závislého na markovskom reťazci preberáme z článku Philpott a De Matos (2012).

Scenárový strom generujeme po jednotlivých stupňoch pomocou známeho heuristického algoritmu z článku Høyland a kol. (2003). Vstupom do algoritmu sú prvé štyri momenty a korelačná matica pôvodného rozdelenia.

Ako optimalizačný problém definujeme viacstupňovú úlohu výberu investičného portfólia, známu aj ako problém privátneho investora. Pri definovaní obmedzení úlohy vychádzame z úlohy finančného plánovania uvedenej v knihe Birge a Louveaux (2011), z článku Gülpinar a kol. (2003) a prác Laurent (2006) a Malá (2014). Práve práca Malá (2014) nám poslúžila ako inšpirácia pri hľadaní vhodného zdroju dát a pri definovaní finálnej podoby optimalizačného modelu. Čím sa ale naša práca odlišuje, je podrobnejšie zhrnutie rôznych typov zápisov optimalizačných úloh, podrobnejší popis vlastností scenárových štruktúr, ale hlavne aplikácia scenárových stromov s vyšším počtom stupňov, vyšším počtom scenárov, kombinovaných s markovským reťazcom stavov a so scenárovou mriežkou, založenou na historickom počte krízových období.

Predpokladáme, že sme investor, ktorý sa rozhodne investovať čiastku B , pričom na konci investičného obdobia chce zhodnotiť investovaný majetok aspoň na čiastku G . Vytvoríme si portfólio n akcií, ktoré môžeme v priebehu času na

základe postupného spoznávania výnosov niekoľkokrát preskúpiť, aby sme pri dosahovaní potrebnej čiastky G podstúpili čo najmenšie riziko. Za účelovú funkciu volíme vážený súčet podmienených hodnôt v riziku CVaR, pričom vychádzame z článku Shapiro (2009) a práce Malá (2014).

V prvej kapitole predstavíme úlohu matematického programovania. Od všeobecného zápisu jednostupňovej deterministickej úlohy prejdeme k viacstupňovému stochastickému programovaniu. Ako špeciálny prípad uvedieme zápis úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania, ktorý budeme ďalej používať. V druhej kapitole sa budeme zaoberať konštrukciou a vlastnosťami scenárových stromov. Ako špeciálny prípad uvedieme po stupňoch nezávislý scenárový strom a strom, ktorý závisí od stavov markovského reťazca. Ďalej uvedieme konštrukciu scenárovej mriežky, ako ďalšej možnej scenárovej štruktúry. V tretej kapitole definujeme optimalizačnú úlohu výberu investičného portfólia. V štvrtej kapitole popíšeme algoritmus generovania scenárov, vychádzajúc z článku Høyland a kol. (2003). Cieľom algoritmu je vygenerovať scenáre s danými prvými štyrmi momentmi a korelačnou maticou. Algoritmus využíva dve transformácie, kubickú transformáciu, na získanie požadovaných momentov a maticovú transformáciu, na získanie požadovanej korelačnej matice. Piata kapitola je venovaná praktickej časti. Pomocou poznatkov z teoretickej časti skonštruujeme rôzne scenárové stromy a dosadíme ich do optimalizačnej úlohy a porovnáme výsledky optimalizačného modelu. V závere zhrnieme hlavné výstupy práce. Generovanie scenárových stromov realizujeme v programe Mathematica 11.0 a výpočet optimalizačnej úlohy v programe GAMS.

1. Viacstupňové stochastické programovanie

1.1 Úvod

Všeobecne myslíme pod úlohou matematického programovania hľadanie extrémov funkcie na danej množine. Pozornosť upriamime na hľadanie minima reálnej funkcie. Základy úlohy matematického programovania je možné nájsť napríklad v knihe Dupačová a Lachout (2011). Nech $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Úlohu matematického programovania môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in M. \end{aligned} \tag{1.1}$$

V kontexte matematického programovania sa funkcia f nazýva *účelová funkcia* a množina M *množina prípustných riešení*. Uvedieme Weierstrassovu vetu, ktorá hovorí, za akých podmienok nadobúda funkcia svoje (globálne) minimum.

Veta 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna obmedzená a uzavretá množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom f nadobúda na M svoje minimum.*

Dôkaz. Bazaraa a kol. (2006)

□

1.1.1 Úloha nelineárneho programovania

V praktických úlohách býva množina M zadaná ako množina bodov spĺňajúcich obmedzenia vyjadrené systémom funkčných nerovností a rovností. Nech $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $g_{j_1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j_1 = 1, \dots, m_1$ a $h_{j_2} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j_2 = 1, \dots, m_2$. Príkladom množiny prípustných riešení je

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}; g_{j_1}(\mathbf{x}) \geq 0, j_1 = 1, \dots, m_1, h_{j_2}(\mathbf{x}) = 0, j_2 = 1, \dots, m_2\}.$$

Ak je účelová funkcia, alebo aspoň jedna funkcia z obmedzení nelineárna, dostávame *úlohu nelineárneho programovania*

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} \quad & g_{j_1}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j_1 = 1, \dots, m_1, \\ & h_{j_2}(\mathbf{x}) = 0, \quad j_2 = 1, \dots, m_2, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Poznámka. Stačí uvažovať nerovnosti v jednom smere. Ak je v sústave funkčných nerovností nerovnosť v tvare $g(\mathbf{x}) \leq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, kde $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, pre násobením -1 dostaneme $-g(\mathbf{x}) \geq 0$, kde $-g$ je opäť funkcia spĺňajúca $-g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1.2 Úloha lineárneho programovania

Pokiaľ sú funkcie $f, g_{j_1}, j_1 = 1, \dots, m_1$ a $h_{j_2}, j_2 = 1, \dots, m_2$ lineárne, nazývame úlohu (1.2) *úlohou lineárneho programovania*. Špeciálnym tvarom úlohy lineárneho programovania je *štandardný tvar* úlohy lineárneho programovania. Nech $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom úlohou lineárneho programovania v štandardnom tvare budeme nazývať úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Poznámka. (Dupačová a Lachout (2011))

Každú úlohu lineárneho programovania môžeme prepísať do štandardného tvaru (1.3).

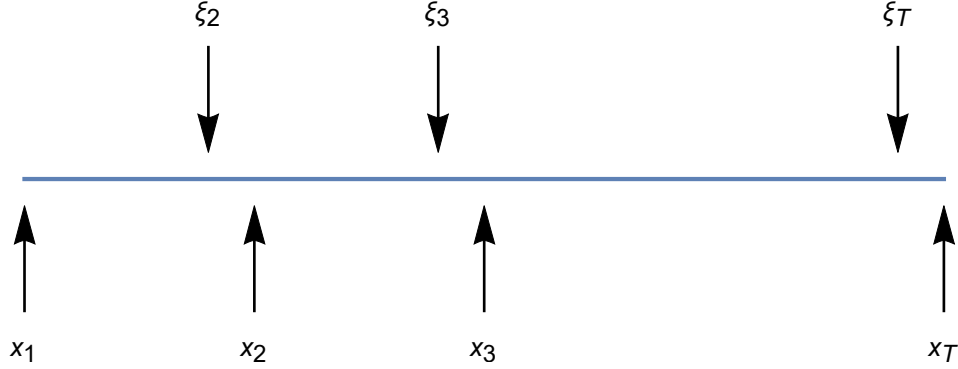
1.2 Úloha viacstupňového stochastického programovania

V probléme privátneho investora často vstupuje pri hľadaní správneho portfólia do nášho rozhodnutia neistota a na základe postupného odkrývania výnosov požadujeme možnosť preusporiadania portfólia viackrát v čase za sebou. Takéto typy úloh je vhodné riešiť pomocou *viacstupňového stochastického programovania*. V literatúre je možné nájsť viacero formulácií viacstupňového stochastického programovania. My niektoré z nich popíšeme, pričom budeme vychádzať prevažne z kníh Shapiro a kol. (2009) a Kall a Mayer (2005).

V celej práci predpokladáme, že Ω je neprázdna množina, \mathcal{A} je σ -algebra podmnožín množiny Ω a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Pre $T \in \mathbb{N}$ definujeme náhodné vektory $\boldsymbol{\xi}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_t}$, $t = 1, \dots, T$ a predpokladajme, že tvoria *náhodný (stochastický) proces* $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_T\}$. V úlohe viacstupňového stochastického programovania predpokladáme, že naše rozhodnutie v čase $t \in \{1, \dots, T\}$ závisí len na *histórii* náhodného procesu do času t , pričom históriou náhodného procesu do času t myslíme vektor $\boldsymbol{\xi}_{[t]} := (\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_t)$. Daný predpoklad sa v knihách Shapiro a kol. (2009), Kall a Mayer (2005), ale aj v ostatnej literatúre označuje ako *princíp neanticipativity*.

Na obrázku 1.1 je graficky znázornený rozhodovací proces v úlohe viacstupňového stochastického programovania. *Stupňami* nazývame časy $t = 1, \dots, T$, v ktorých robíme jednotlivé rozhodnutia. Proces rozhodovania v úlohe viacstupňového programovania popíšeme v nasledujúcich bodoch:

- Hodnotu vektoru $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ považujeme za konštantnú a známu ešte pred rozhodnutím v prvom stupni, preto ju z grafického znázornenia vynechávame.
- Vektor $\mathbf{x}_1 \in M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ reprezentuje rozhodnutie v prvom stupni, kde M_1 je množina všetkých prípustných rozhodnutí v prvom stupni.
- Vektor $\mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2) \in M_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2) \subset \mathbb{R}^{n_2}$ reprezentuje rozhodnutie v druhom stupni, ktoré závisí na rozhodnutí v prvom stupni \mathbf{x}_1 a na náhodnom vek-



Obr. 1.1: Grafické znázornenie rozhodovacieho procesu v úlohe viacstupňového stochastického programovania.

toe ξ_2 . $M_2(\mathbf{x}_1; \xi_2)$ je množina všetkých prípustných rozhodnutí v druhom stupni, v závislosti na \mathbf{x}_1 a ξ_2 . Podobne postupujeme až do stupňa T .

- Vektor $\mathbf{x}_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \xi_2, \dots, \xi_T) \in M_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \xi_2, \dots, \xi_T) \subset \mathbb{R}^{n_T}$ reprezentuje posledné rozhodnutie v stupni T , ktoré závisí na rozhodnutiach zo všetkých predchádzajúcich stupňov a na celej histórii náhodného procesu $\xi_{[T]}$. $M_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \xi_2, \dots, \xi_T)$ je množina všetkých prípustných rozhodnutí v stupni T , v závislosti na $\mathbf{x}_{[T-1]}$ a $\xi_{[T]}$.

Poznámka. Skrátene budeme rozhodnutie v stupni $t = 2, \dots, T$ zapisovať v tvare

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \xi_{[t]}) \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \xi_{[t]}) \subset \mathbb{R}^{n_t}. \quad (1.4)$$

Zo zápisu (1.4) je vidieť, že optimálne riešenie \mathbf{x}_t v stupni $t \in \{1, \dots, T\}$ závisí len na histórii náhodného procesu do času t , a teda je zachovaný princíp neanticipativity.

V nasledujúcej časti uvedieme rôzne tvary úlohy viacstupňového stochastického programovania. V prvom prípade definujeme pojem *filtrácie* a formulujeme optimalizačný problém ako jednu veľkú optimalizačnú úlohu. Druhý zápis bude dynamický pomocou systému rekurzívnych rovníc. Nakoniec uvedieme úlohu viacstupňového programovania v tzv. *vnorenom* tvare.

Nech $T \in \mathbb{N}$ je počet stupňov v úlohe viacstupňového stochastického programovania, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = d_1 + \dots + d_T$ je náhodný proces a $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_{[t]}) \subset \mathcal{A}$, $t = 1, \dots, T$ je σ -algebra v Ω indukovaná históriou $\xi_{[t]}$.

Poznámka. Pre $t = 1$ platí, že \mathcal{F}_1 je σ -algebra indukovaná konštantným vektorom ξ_1 , preto $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ďalej platí, že $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$.

Množina σ -algebier $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T\}$ sa v literatúre nazýva *filtrácia*. Pre $n_t \in \mathbb{N}$, $t = 1, \dots, T$ definujeme rozhodovacie vektory ako \mathcal{F}_t -merateľné zobrazenia $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \xi_{[t]}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_t}$. Ďalej predpokladáme, že $f_t : \mathbb{R}^{n_t} \times \mathbb{R}^{d_t} \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojitú

funkcie. Všeobecne môžeme úlohu viacstupňového stochastického programovania zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E} \sum_{t=2}^T f_t(\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}), \boldsymbol{\xi}_t) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_1 \in M_1 \\ & \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \text{ s.i., } t = 2, \dots, T \end{aligned} \quad (1.5)$$

Poznámka. Kvôli zjednodušeniu značenia budeme ďalej pre $t = 2, \dots, T$ používať namiesto $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$ zápis \mathbf{x}_t . Pokiaľ budeme chcieť zdôrazniť závislosť na histórii $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$, použijeme zápis $\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$.

Ďalší spôsob zápisu úlohy viacstupňového stochastického programovania je spätne pomocou systému rekurzívnych rovníc.

V stupni T formulujeme úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned} Q_T(\mathbf{x}_{[T-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[T]}) = \min \quad & f_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\xi}_T) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_T \in M_T(\mathbf{x}_{[T-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[T]}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

kde optimálna hodnota úlohy (1.6) závisí na daných vektoroch $\mathbf{x}_{[T-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[T]}$.

V stupňoch $t = 2, \dots, T-1$ formulujeme úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned} Q_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \min \quad & f_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}_t) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}_{t+1}}[Q_{t+1}(\mathbf{x}_{[t]}; \boldsymbol{\xi}_{[t+1]}) | \boldsymbol{\xi}_{[t]}] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_t \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde optimálna hodnota úlohy (1.7) závisí na daných vektoroch $\mathbf{x}_{[t-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$. Hlavným princípom tohto zápisu je rekurzívny výpočet hodnôt $Q_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$ pre dané vektory $\mathbf{x}_{[t-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$, a to spätne od posledného stupňa T .

V prvom stupni nakoniec riešime úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}_2}[Q_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2)] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_1 \in M_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pre zjednodušenie zápisu označme $M_t = M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$, $t = 2, \dots, T$. Potom úlohu viacstupňového stochastického programovania môžeme formulovať v tzv. *vnorenom* tvare

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in M_1} f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_2 \in M_2} f_2(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) + \mathbb{E} \left[\dots + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_T \in M_T} f_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\xi}_T) \right] \right] \right]$$

1.2.1 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie

V tejto časti uvedieme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania ako špeciálny prípad úlohy viacstupňového stochastického programovania, pričom budeme vychádzať z úlohy (1.5). Analogicky by sme mohli preformulovať aj zápis pomocou rekurzívnych rovníc (1.6) až (1.8), čo už v tejto časti robiť nebudeme. Miesto toho sa zameriame na transformáciu medzi dvoma typmi úloh viacstupňového stochastického lineárneho programovania, ktoré sa často používajú v literatúre: úloha s obmedzeniami v *dolnom trojuholníkovom* tvare a úloha s obmedzeniami v *schodiskovom* tvare. Príklad takejto transformácie preberieme z knihy Kall a Mayer (2005).

Nech sú splnené predpoklady úlohy (1.5) a pre $n_t, m_t \in \mathbb{N}$ predpokladajme, že $\mathbf{x}_t(\cdot), \mathbf{b}_t(\cdot), \mathbf{c}_t(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_t}, \mathbf{A}_{t,\tau}(\cdot) \in \mathbb{R}^{m_t \times n_t}, \tau = 1, \dots, t$ sú \mathcal{F}_t -merateľné, pre každé $t = 1, \dots, T$. Vychádzajúc z tvaru (1.5) môžeme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania zapísať ako

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbf{E} \sum_{t=2}^T \mathbf{c}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})^\top \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{1,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{t,1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{x}_1 + \sum_{\tau=2}^t \mathbf{A}_{t,\tau}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{x}_\tau(\boldsymbol{\xi}_{[\tau]}) = \mathbf{b}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T \\ & \mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \geq 0 \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Obmedzenia v úlohe (1.9) sú vyjadrené v tvare nazývanom *dolný trojuholníkový tvar*. Iný často používaný zápis úlohy je v tvare nazývanom *schodiskový*, v ktorom sa v obmedzeniach v stupňoch $t = 2, \dots, T$ vyskytuje len rozhodnutie v danom stupni t a rozhodnutie v predchádzajúcom stupni $t - 1$. Úloha (1.9) by bola v schodiskovom tvare, pokiaľ by pre $t = 3, \dots, T$ platilo, že $\mathbf{A}_{t\tau} = \mathbf{0}, \tau = 1, \dots, t - 2$. V takomto tvare je aj nami definovaný problém privátneho investora v ďalšej časti práce. Pokiaľ sú matice $\mathbf{A}_{t\tau}$ nenulové, je možné prejsť na schodiskový tvar pomocou nasledujúcej transformácie:

- Pre stupeň $t = 1$ definujme maticu $\mathbf{W}_1 := \mathbf{A}_{11}$. Matica \mathbf{W}_1 je typu $m_1 \times n_1$.
- Pre stupne $t = 2, \dots, T - 1$ definujme dve matice. Prvá bude v tvare

$$\mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{t,1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) & \mathbf{A}_{t,2}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) & \cdots & \mathbf{A}_{t,t-1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{1,t-1} \\ \mathbf{0}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{t-2,t-1} \\ \mathbf{0}_{t-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{t-1,t-2} & \mathbf{I}_{t-1} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I}_τ je jednotková matica typu $n_\tau \times n_\tau$ pre $\tau = 1, \dots, t - 1$ a $\mathbf{0}_{\tau_1, \tau_2}$ je nulová matica typu $n_{\tau_1} \times n_{\tau_2}$, pre $\tau_1, \tau_2 = 1, \dots, t - 1, \tau_1 \neq \tau_2$. Matica $\mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$ je typu $(m_t + n_1 + \cdots + n_{t-1}) \times (n_1 + \cdots + n_{t-1})$. Druhá matica bude v tvare

$$\mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{t,1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{t,t-1} & \mathbf{A}_{t,t}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ -\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{1,t} \\ \mathbf{0}_{2,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{t-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{t-1,t-2} & -\mathbf{I}_{t-1} & \mathbf{0}_{t-1,t} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I}_τ je opäť jednotková matica typu $n_\tau \times n_\tau$ pre $\tau = 1, \dots, t - 1$, $\mathbf{0}_{\tau_1, \tau_2}$ je nulová matica typu $n_{\tau_1} \times n_{\tau_2}$, pre $\tau_1 = 1, \dots, t - 1, \tau_2 = 1, \dots, t, \tau_1 \neq \tau_2$, $\mathbf{0}_{t,\tau}$ je matica typu $m_t \times n_\tau$, pre $\tau = 1, \dots, t - 1$. Matica $\mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$ je typu $(m_t + n_1 + \cdots + n_{t-1}) \times (n_1 + \cdots + n_t)$.

- Nakoniec pre stupeň $t = T$ definujme

$$\mathbf{T}_T(\boldsymbol{\xi}_{[T]}) := (\mathbf{A}_{T,1}(\boldsymbol{\xi}_{[T]}), \dots, \mathbf{A}_{T,T-1}(\boldsymbol{\xi}_{[T]}))$$

maticu typu $m_T \times (n_1 + \dots + n_{T-1})$ a

$$\mathbf{W}_T(\boldsymbol{\xi}_{[T]}) := \mathbf{A}_{T,T}(\boldsymbol{\xi}_{[T]})$$

maticu typu $m_T \times n_T$.

Na základe vyššie definovaných transformácií môžeme úlohu (1.9) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{z}_1 + \mathbb{E} \sum_{t=2}^T \mathbf{c}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})^\top \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{z}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{z}_{t-1}(\boldsymbol{\xi}_{[t-1]}) + \mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \mathbf{b}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T \\ & \mathbf{z}_1 \geq 0, \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \geq 0 \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde $\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = (z_{t1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}), \dots, z_{tt}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}))$ je vektor dimenzie $n_1 + \dots + n_t$. Všimnime si, že v obmedzeniach v stupni $t = 2, \dots, T$ závisí rozhodnutie \mathbf{z}_t len na rozhodnutí \mathbf{z}_{t-1} , nie na celej histórii $\mathbf{z}_{[t]}$. Vzhľadom na zložitosť všeobecného zápisu danej transformácie uvedieme príklad pre počet stupňov $T = 4$, ktorý prevezmeme z knihy Kall a Mayer (2005). Pre väčšiu prehľadnosť vynecháme zo značenia závislosť na náhodnom vektore $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$.

Príklad. Úloha štvorstupňového stochastického lineárneho programovania v tvare (1.9) má množinu obmedzení

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32} \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33} \mathbf{x}_3 &= \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{A}_{41} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{42} \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{43} \mathbf{x}_3 + \mathbf{A}_{44} \mathbf{x}_4 &= \mathbf{b}_4 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Po transformácii na úlohu (1.10) budú obmedzenia v tvare

$\mathbf{A}_{11} z_{11}$				$= \mathbf{b}_1$
$\mathbf{A}_{21} z_{11}$	$+ \mathbf{A}_{22} z_{2,2}$			$= \mathbf{b}_2$
z_{11}	$- z_{21}$			$= \mathbf{0}$
	$\mathbf{A}_{31} z_{21} + \mathbf{A}_{32} z_{22}$	$+ \mathbf{A}_{33} z_{33}$		$= \mathbf{b}_3$
	z_{21}	$- z_{31}$		$= \mathbf{0}$
	z_{22}	$- z_{32}$		$= \mathbf{0}$
		$\mathbf{A}_{41} z_{31} + \mathbf{A}_{42} z_{32} + \mathbf{A}_{43} z_{33} + \mathbf{A}_{44} z_{44}$		$= \mathbf{b}_4$

Po rozpísaní je vidieť, ktoré časti vektoru $\mathbf{z}_{[t]} = (z_{11}, \dots, z_{tt})$ slúžia na prenesenie riešenia do ďalšieho stupňa a ktoré korešpondujú s pôvodným rozhodovacím vektorom \mathbf{x}_t .

Poznámka. V tejto časti sme zhrnuli niekoľko zápisov úloh viacstupňového stochastického programovania a dva tvary viacstupňového stochastického lineárneho programovania, vyskytujúce sa často v literatúre. V praktickej časti si vyberieme jeden zápis, ktorý nám príde najlepší z pohľadu konštrukcie, aj samotného výpočtu.

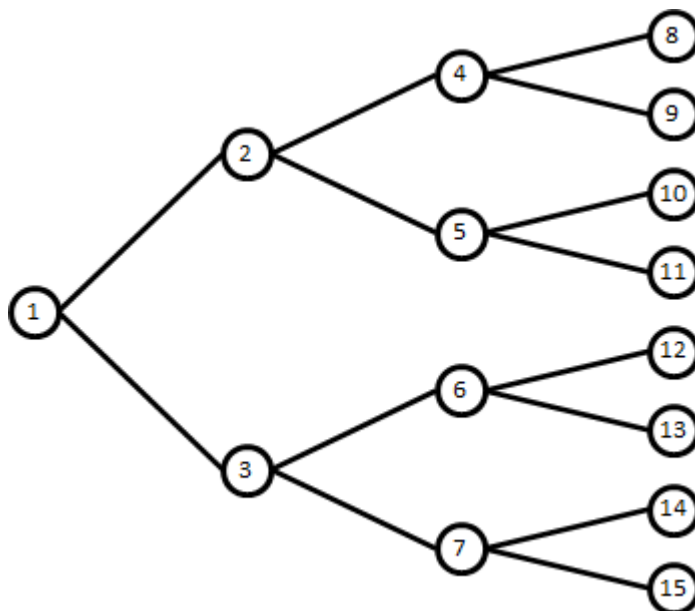
2. Scenárové štruktúry

V tejto kapitole sa budeme venovať špeciálnemu prípadu úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania, v ktorom má náhodný proces $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ konečné diskkrétne rozdelenie. Na reprezentáciu náhodného procesu použijeme scenárový strom, ktorý môže byť všeobecný, po stupňoch nezávislý, prípadne závislý od stavu markovského reťazca. Ďalej môžeme použiť scenárovú mriežku. V nasledujúcej časti popíšeme základné vlastnosti jednotlivých scenárových štruktúr a sformulujeme optimalizačnú úlohu.

V celej kapitole predpokladáme, že pre $K \in \mathbb{N}$ je $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ náhodný proces s konečným diskrétnym rozdelením s realizáciami ξ^1, \dots, ξ^K a pravdepodobnosťami realizácie q_1, \dots, q_K . Pre $k \in \{1, \dots, K\}$ budeme nazývať realizáciu náhodného procesu $\xi^k = \{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ *scenár* náhodného procesu a pravdepodobnosť q_k pravdepodobnosť scenára. Predpokladáme, že pre pravdepodobnosť scenára platí $q_k = P(\xi = \xi^k) > 0$, pre $k = 1, \dots, K$.

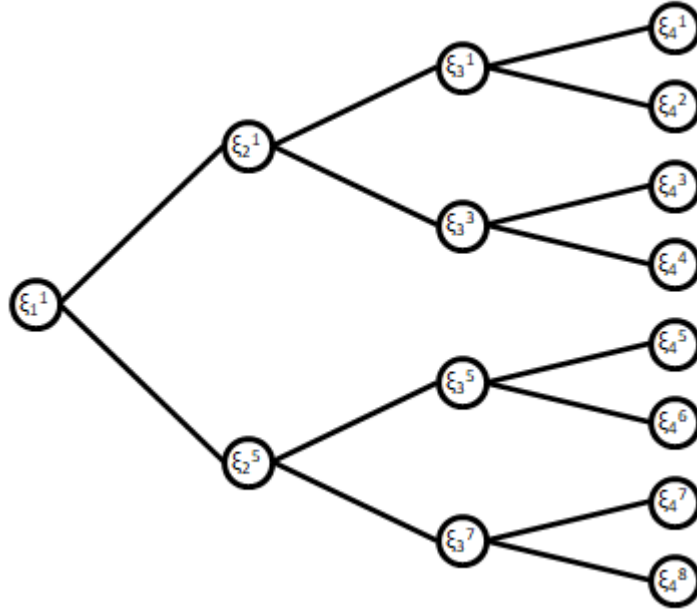
2.1 Scenárový strom

Základnou formou reprezentácie náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ s konečným diskrétnym rozdelením je reprezentácia pomocou *scenárového stromu*. V tejto časti popíšeme konštrukciu scenárového stromu, pričom budeme vychádzať z konštrukcie uvedenej v knihe Kall a Mayer (2005). Po definovaní a popise scenárového stromu formulujeme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania pre konečné diskkrétne rozdelenie, pričom budeme vychádzať z formulácií z predchádzajúcej kapitoly.



Obr. 2.1: Uzly v scenárovom strome.

Scenárový strom má uzly zoskupené do stupňov $t = 1, \dots, T$. Uzly budeme číslovať pomocou prirodzených čísel, ako je uvedené na obrázku 2.1. Množinu



Obr. 2.2: Realizácie v scenárovom strome.

všetkých uzlov označíme $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}$. Pre uzol $u \in \mathcal{U}$ označíme $t_u \in \{1, \dots, T\}$ stupeň, v ktorom sa uzol u nachádza. Štruktúru všeobecného scenárového stromu v jednotlivých stupňoch popíšeme v nasledujúcich bodoch:

- V prvom stupni má scenárový strom jediný uzol $u = 1$ (obrázok 2.1), nazývaný *koreň*, ktorý reprezentuje vopred známu realizáciu náhodného vektoru ξ_1 , rovnakú pre každý scenár $k = 1, \dots, K$. (obrázok 2.2).
- V druhom stupni má scenárový strom $\kappa_2 \geq 1$ uzlov $u = 2, \dots, 1 + \kappa_2 =: K_2$, reprezentujúcich κ_2 rôznych realizácií náhodného vektoru ξ_2 v rámci náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$.

Príklad. Na obrázku 2.1 je $\kappa_2 = 2$ a $K_2 = 3$.

Ku každému uzlu v druhom stupni existuje aspoň jeden scenár, ktorý ním prechádza a zároveň každý scenár prechádza v druhom stupni práve jedným uzlom. Pripomíname, že pod scenárom myslíme realizáciu náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ a značíme ho $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$, pre $k = 1, \dots, K$. Hovoríme, že scenár $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ prechádza uzlom u v druhom stupni, ak uzol u reprezentuje hodnotu vektora ξ_2^k .

Príklad. Na obrázku 2.2 je znázornený scenárový strom reprezentujúci osem rôznych scenárov náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_4\}$. V druhom stupni má náhodný vektor ξ_2 dve rôzne realizácie reprezentované uzlami 2 a 3. Prvé štyri scenáre majú v druhom stupni rovnakú hodnotu $\xi_2^1 = \dots = \xi_2^4$. Aj druhé štyri scenáre majú v druhom stupni rovnakú hodnotu $\xi_2^5 = \dots = \xi_2^8$.

Za k_u vezmeme najmenšie $k \in \{1, \dots, K\}$, pre ktoré je vektor ξ_2^k reprezentovaný uzlom u .

Príklad. Uzlom $u = 2$ zo stromu z obrázkov 2.1 a 2.2 prechádzajú štyri scenáre, kde najmenší index z týchto scenárov je jedna, preto $k_2 = 1$. Uzlom $u = 3$ tiež prechádzajú štyri scenáre, najmenší index z týchto scenárov je päť, preto $k_3 = 5$.

Cestu scenárovým stromom z koreňa do uzla u v druhom stupni budeme v scenárovom strome znázorňovať spojením koreňa a uzlu u hranou. Cesta reprezentuje vektor $\xi_{[2]}^{k_u}$.

Príklad. V strome z obrázkov 2.1 a 2.2 reprezentuje cesta z koreňa do uzlu $u = 2$ históriu $\xi_{[2]}^1$ a cesta do uzlu $u = 3$ reprezentuje históriu $\xi_{[2]}^5$.

Hovoríme, že koreň je *rodič*, alebo *predchodca* uzlov v druhom stupni a uzly v druhom stupni sú *potomkovia*, alebo *nasledovníci* koreňa.

- Všeobecne platí, že v stupňoch $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom $\kappa_t \geq 1$ uzlov $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_{t-1} + \kappa_t$, $K_1 = 1$, reprezentujúcich vektory ξ_t^k v rámci rôznych realizácií histórie náhodného procesu $\xi_{[t]}^k$ do času t . To znamená, že zo všetkých scenárov $(\xi_1^k, \dots, \xi_T^k)$, $k = 1, \dots, K$ má κ_t scenárov rôznu históriu $\xi_{[t]}^k$ do stupňa t . Uzly v stupni t reprezentujú t -tu zložku ξ_t^k histórie $\xi_{[t]}^k$. Cestu scenárovým stromom od koreňa do uzla u v t -tom stupni reprezentujúcu históriu $\xi_{[t]}^{k_u}$, $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_t$ budeme v scenárovom strome znázorňovať spojením uzlov v jednotlivých stupňoch reprezentujúcich $\xi_{[t]}^{k_u}$ hranou. Za k_u opäť vezmeme najmenšie $k \in \{1, \dots, K\}$, pre ktoré je ξ_t^k reprezentované uzlom u . Všeobecne, každý uzol v t -tom stupni, $t = 2, \dots, T$, má práve jedného predchodcu a každý uzol v stupni $t = 1, \dots, T - 1$ má aspoň jedného nasledovníka.
- Uzly $u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T$ v poslednom stupni T sa nazývajú listy. Každý scenár $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$, $k = 1, \dots, K$ je v scenárovom strome reprezentovaný cestou z koreňa stromu k listu. Z konštrukcie scenárového stromu vyplýva, že počet scenárov je rovný počtu listov v scenárovom strome.

Pre každý uzol $u \in \mathcal{U}$ označme

$$\mathcal{K}_u = \{k \in K : \xi_{t_u}^k = \xi_{t_u}^{k_u}\}$$

množinu indexov všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u .

Príklad. Pre uzol $u = 2$ v strome z obrázkov 2.1 a 2.2 je $\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ a pre uzol $u = 3$ je $\mathcal{K}_3 = \{5, 6, 7, 8\}$.

Každým uzlom v scenárovom strome prechádza aspoň jeden scenár, tzn. $\forall u \in \mathcal{U}$ je $\mathcal{K}_u \neq \emptyset$. Z konštrukcie vyššie vyplýva, že $\mathcal{U} = \{1, \dots, K_T\}$. Nech $\mathcal{U}_t \subset \mathbb{N}$ je množina všetkých uzlov v stupni t . Potom $|\mathcal{U}_t| = \kappa_t$. Každý scenár prechádza v stupni $t \in \{1, \dots, T\}$ práve jedným uzlom u , tzn. $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ platí, že $\cup_{u \in \mathcal{U}_t} \mathcal{K}_u = K$ a zároveň $\forall u, v \in \mathcal{U}_t, u \neq v$ platí $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v = \emptyset$.

Pre uzol $u \in \{1, \dots, K_{T-1}\}$ označíme množinu všetkých potomkov, respektíve bezprostredných nasledovníkov uzlu u ako

$$\mathcal{N}_u = \{v \in \{K_{t_u} + 1, \dots, K_{t_u+1}\} : k_v \in \mathcal{K}_u\}.$$

Množina \mathcal{N}_u zahŕňa len bezprostredných nasledovníkov v stupni $t_u + 1$.

Príklad. Pre uzol $u = 2$ zo stromu z obrázkov 2.1 a 2.2 je $\mathcal{N}_2 = \{4, 5\}$ a pre uzol $u = 3$ je $\mathcal{N}_3 = \{6, 7\}$.

Pre uzol $u \in \{2, \dots, K_T\}$ označíme množinu všetkých predchodcov uzlu u ako

$$\mathcal{P}_u = \{v \in \{1, \dots, K_{t_u}\} : \xi_{[t_v]}^{k_v} = \xi_{[t_v]}^{k_u}\}.$$

Množina \mathcal{P}_u nezahŕňa len bezprostredných predchodcov v stupni $t_u - 1$, ale všetkých predchodcov v predchádzajúcich stupňoch. Ďalej si môžeme všimnúť, že v množine \mathcal{P}_u je aj samotný uzol u , a to kvôli jej neskoršiemu použitiu vo formulácii optimalizačnej úlohy.

Príklad. Pre uzol $u = 9$ zo stromu z obrázku 2.1 je $\mathcal{P}_9 = \{1, 2, 4, 9\}$.

K vyššie skonštruovanému scenárovému stromu doplníme informáciu o pravdepodobnostnom rozdelení. Opäť definíciu rozdelíme do niekoľkých bodov:

- V stupni T reprezentuje každý uzol $u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T$ T -tu zložku $\xi_T^{k_u}$ práve jedného scenára $\{\xi_1^{k_u}, \dots, \xi_T^{k_u}\}$. Keďže sa počet scenárov rovná počtu listov, platí, že $K = \kappa_T$. Pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u stotožníme s pravdepodobnosťou q_{k_u} realizácie scenára $\{\xi_1^{k_u}, \dots, \xi_T^{k_u}\}$. Z číslovania uzlov v scenárovom strome (obrázok 2.2) vyplýva, že $k_u = u - K_{T-1}$. Potom definujeme pravdepodobnosť dosiahnutia uzla $u \in \{K_{T-1} + 1, \dots, K_T\}$ ako

$$p_u = q_{u-K_{T-1}} > 0.$$

- Všeobecne pre stupeň $t = 1, \dots, T$ definujeme pre uzly $u = 1, \dots, K_T$ pravdepodobnosť p_u dosiahnutia uzla u nasledovne. Nech \mathcal{K}_u je množina indexov všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u . Potom definujeme pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u ako

$$p_u = \sum_{k \in \mathcal{K}_u} q_k > 0.$$

Poznámka. Pre každý stupeň $t = 1, \dots, T$ platí, že $\sum_{u \in \mathcal{U}_t} p_u = 1$.

Pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u je teda súčet pravdepodobností všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u . Množina $\{\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\} : k \in \mathcal{K}_u\}$ všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u sa v literatúre zvykne nazývať *scenárový zväzok* uzla u (Kall a Mayer (2005)).

- Pre stupne $t = 1, \dots, T - 1$ definujeme *pravdepodobnosť prechodu* z uzla $u \in \{1, \dots, K_{T-1}\}$ do uzla $v \in \mathcal{N}_u$ ako podmienenú pravdepodobnosť dosiahnutia uzla v pre daný uzol u , tzn.

$$p_{uv} = \frac{p_v}{p_u}.$$

Poznámka. Pomocou pravdepodobností prechodu môžeme vyjadriť pravdepodobnosť q_k scenára $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ reprezentovaného pomocou množiny uzlov $\{u_1, \dots, u_T\}$ ako

$$q_k = p_{u_1 u_2} p_{u_2 u_3} \dots p_{u_{T-1} u_T}.$$

Po definovaní a konštrukcii scenárového stromu môžeme prejsť k formulácii viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskretným rozdelením, pričom budeme vychádzať z predpokladov úlohy (1.9). Pre každý uzol $u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ označme $\mathbf{x}_u := \mathbf{x}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$. Potom úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskretným rozdelením môžeme formulovať v tvare

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}} p_u \mathbf{c}_{t_u}^\top(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{A}_{t_u 1}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_1 + \sum_{v \in \mathcal{P}_u \setminus \{1\}} \mathbf{A}_{t_u t_v}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_v = \mathbf{b}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \quad \forall u \in \mathcal{U} \setminus \{1\} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Tvar úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania (2.1) sa tiež nazýva *kompaktný* tvar, alebo *implicitný* tvar, pretože požiadavok neanticipativity je zaistený implicitne, priradením rozhodovacích premenných k uzlom scenárového stromu (Kall a Mayer (2005)).

Ďalší spôsob formulácie pozostáva v priradení rozhodovacích premenných k celým scenárom a explicitným požadovaním neanticipativity pomocou obmedzení. Takýto tvar sa nazýva *explicitný* tvar úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania. Označme $\mathbf{x}_t^k := \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}^k)$, $t = 1, \dots, T$, $\mathbf{c}_t^k := \mathbf{c}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}^k)$, $\mathbf{A}_{t\tau}^k := \mathbf{A}_{t\tau}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}^k)$ a $\mathbf{b}_t^k := \mathbf{b}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}^k)$, $t = 2, \dots, T$, $\tau = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, K$. Potom úlohu v explicitnom tvare môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^K q_k \left(\mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1^k + \sum_{t=2}^T (\mathbf{c}_t^k)^\top \mathbf{x}_t^k \right) \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1^k = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{A}_{t1}^k \mathbf{x}_1^k + \sum_{\tau=2}^t \mathbf{A}_{t\tau}^k \mathbf{x}_\tau^k = \mathbf{b}_t^k, \quad t = 2, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K \\
& \mathbf{x}_t^k \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K \\
& \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^k \quad t = 1, \dots, T, \quad k \in K_u, u \in U_t.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Iný častý spôsob formulácie optimalizačnej úlohy je schodiskový tvar vychádzajúci z tvaru (1.10). Pre zjednodušenie značenia zadefinujeme $\mathbf{T}_u := \mathbf{T}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{W}_u := \mathbf{W}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{x}_u := \mathbf{x}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{b}_u := \mathbf{b}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$ a $\mathbf{c}_u := \mathbf{c}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$. Potom úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným počtom scenárov môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u \in \mathcal{U} \setminus \{1\} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0, \quad u \in \mathcal{U},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

kde $h_u \in \mathcal{P}_u$ je rodič, respektíve bezprostredný predchodca uzla u , tzn. $t_{h_u} = t_u - 1$.

Často sa úloha (2.3) rozpisuje do jednotlivých stupňov:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u=2}^{K_2} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \sum_{u=K_2+1}^{K_3} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \cdots + \sum_{u=K_{T-1}+1}^{K_T} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_1 + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = 2, \dots, K_2 \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = K_2 + 1, \dots, K_3 \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T \\
& \mathbf{x}_u \geq 0, \quad u = 1, \dots, K_T
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ďalší prístup k zápisu úlohy viacstupňového stochastického programovania je rekurzívny zápis pomocou sústavy rovníc.

V stupni T definujeme pre uzly $u \in \{K_{T-1} + 1, \dots, K_T\}$ úlohu matematického programovania

$$\begin{aligned}
Q_u(\mathbf{x}_{h_u}) = \min \quad & \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u - \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Optimálna hodnota závisí na predchodcovi \mathbf{x}_{h_u} .

V stupňoch $t = 2, \dots, T-1$ definujeme pre uzly $u \in \{K_{t-1} + 1, \dots, K_t\}$ úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned}
Q_u(\mathbf{x}_{h_u}) = \min \quad & \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \sum_{v \in \mathcal{N}_u} p_{uv} Q_v(\mathbf{x}_u) \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u - \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nakoniec v prvom stupni definujeme pre koreň úlohu

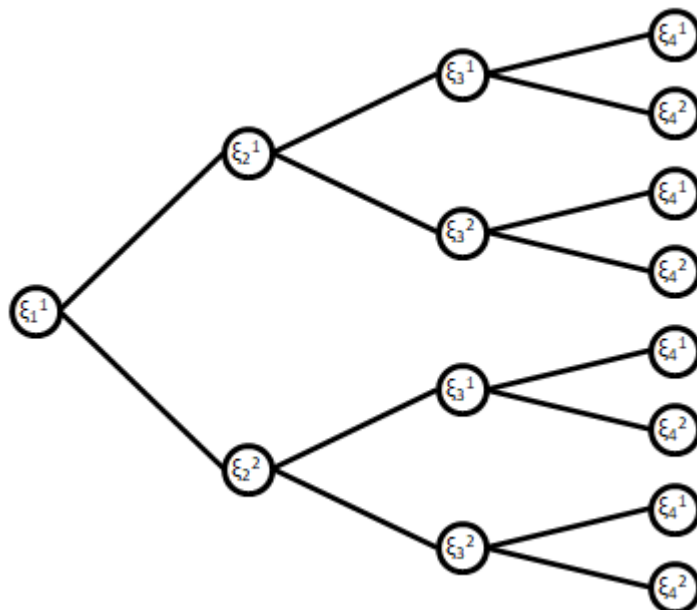
$$\begin{aligned}
Q_1 = \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u=2}^{K_2} p_u Q_u(\mathbf{x}_1) \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{x}_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom

Špeciálnym prípadom scenárového stromu je scenárový strom reprezentujúci *po stupňoch nezávislý* náhodný proces. Hovoríme, že $\{\boldsymbol{\xi}_t, t = 1, \dots, T\}$ je po stupňoch nezávislý náhodný proces, pokiaľ náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}_t$ je stochasticky nezávislý na $\boldsymbol{\xi}_{[t-1]}$ pre $t = 2, \dots, T$. Príklad po stupňoch nezávislého scenárového stromu je uvedený na obrázku 2.3. Horný index je tentokrát index realizácií náhodných vektorov $\boldsymbol{\xi}_t$ v jednotlivých stupňoch t , na rozdiel od obrázku 2.2, kde ide o index prvého scenára prechádzajúceho daným uzlom.

Štruktúra po stupňoch nezávislého scenárového stromu v jednotlivých stupňoch vyzerá nasledovne:

- V prvom stupni má scenárový strom jediný uzol $u = 1$, nazývaný *koreň*, ktorý reprezentuje vopred známu realizáciu náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}_1$.



Obr. 2.3: Po stupňoch nezávislý scenárový strom.

- V druhom stupni má scenárový strom κ_2 uzlov $u = 2, \dots, 1 + \kappa_2 =: K_2$, kde $\kappa_2 \geq 1$. Uzly v druhom stupni reprezentujú rôzne realizácie náhodného vektoru ξ_2 a ide o uzly z množiny \mathcal{N}_1 bezprostredných následníkov koreňa stromu.
- Všeobecne platí, že v stupňoch $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom uzly $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_{t-1} + \kappa_t =: K_t$, kde $\kappa_t \geq 1$. Každý uzol v t -tom stupni patrí do práve jednej množiny \mathcal{N}_u nasledovníkov uzlov $u = K_{t-2} + 1, \dots, K_{t-1}$ zo stupňa $t - 1$. Pre po stupňoch nezávislý strom platí, že každá množina nasledovníkov \mathcal{N}_u v stupni t uzlov u z predchádzajúceho stupňa $t - 1$ reprezentuje rovnakú množinu realizácií náhodného vektoru ξ_t v stupni t . Z toho vyplýva, že množiny nasledovníkov \mathcal{N}_u v stupni t obsahujú rovnaký počet uzlov k_t . Celkový počet uzlov κ_t v stupni t dostaneme ako súčin počtu uzlov v predchádzajúcom stupni $t - 1$ a počtu potomkov v stupni t , tzn. $\kappa_t = \kappa_{t-1}k_t$, $t = 2, \dots, T$.

2.3 Scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca

V tejto časti popíšeme špeciálny prípad scenárového stromu, reprezentujúceho náhodný proces, ktorý závisí od stavov markovského reťazca. Pri popise vlastností takéhoto stromu budeme vychádzať z článku Philpott a De Matos (2012).

Nech náhodný proces $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$ je *markovský reťazec* s diskretným časom a diskretnou množinou stavov.

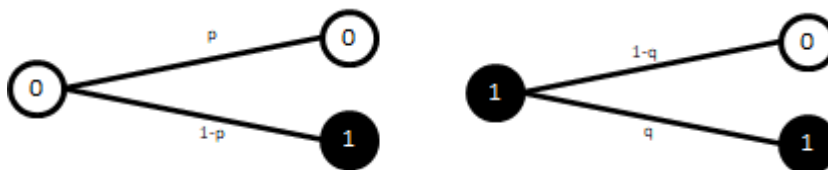
Definícia 1. (Shapiro a kol. (2009))

Hovoríme, že náhodný proces $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$ je *markovský reťazec*, ak pre každé $t = 2, \dots, T$ je pravdepodobnostné rozdelenie ζ_t , podmienené $\zeta_{[t-1]}$, rovné pravdepodobnostnému rozdeleniu ζ_t , podmienenému ζ_{t-1} .

Nech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ je náhodný proces s konečným diskretným rozdelením, ktorý závisí na markovskom reťazci $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$. Pre účely našej práce predpokladáme, že markovský reťazec môže v každom stupni $t = 1, \dots, T$ nadobúdať dva stavy, 0 a 1, s pravdepodobnosťami prechodu

$$\begin{aligned} P(\zeta_t = 0 | \zeta_{t-1} = 0) &= p & P(\zeta_t = 1 | \zeta_{t-1} = 1) &= q \\ P(\zeta_t = 1 | \zeta_{t-1} = 0) &= 1 - p & P(\zeta_t = 0 | \zeta_{t-1} = 1) &= 1 - q, \end{aligned}$$

ako je uvedené na obrázku 2.4.



Obr. 2.4: Stavy markovského reťazca.

Stav 0 je pre väčšiu prehľadnosť graficky znázornený bielou farbou, stav 1 čiernou farbou, p je pravdepodobnosť zotrvania v stave 0, q je pravdepodobnosť zotrvania v stave 1, $1 - p$ je pravdepodobnosť prechodu zo stavu 0 do stavu 1 a $1 - q$ je pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu 0.

Štruktúra takto kombinovaného scenárového stromu v jednotlivých stupňoch vyzerá nasledovne (obrázok 2.5):

- V prvom stupni má kombinovaný scenárový strom jediný uzol $u = 1$, ktorý reprezentuje známy stav markovského reťazca ζ_1 a známu hodnotu vektora ξ_1 v stave ζ_1 .
- V druhom stupni môže markovský reťazec nadobúdať dve rôzne realizácie, stav 0 a stav 1. V stave 0 má scenárový strom $\kappa_2^0 \geq 1$ uzlov. Počet uzlov κ_2^0 korešponduje s počtom navzájom rôznych realizácií náhodného vektora ξ_2 v druhom stupni v stave markovského reťazca 0. V stave 1 má scenárový strom $\kappa_2^1 \geq 1$ uzlov. Počet uzlov κ_2^1 korešponduje s počtom navzájom rôznych realizácií náhodného vektora ξ_2 v druhom stupni v stave markovského reťazca 1.
- Všeobecne, v stupni $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom v závislosti na stave markovského reťazca a histórii náhodného procesu $\xi_{[t-1]}$ $\kappa_t^0 \geq 1$ uzlov reprezentujúcich navzájom rôzne realizácie náhodného vektora ξ_t v stave markovského reťazca 0 a $\kappa_t^1 \geq 1$ uzlov reprezentujúcich navzájom rôzne realizácie náhodného vektora ξ_t v stave markovského reťazca 1.

Týmto spôsobom definujeme uzly v stupni $t = 2, \dots, T$ pre každú realizáciu markovského reťazca ζ_t a históriu náhodného procesu $\xi_{[t-1]}$. Pravdepodobnosti prechodu p_{uv} z uzla u v stupni $t - 1$ do uzla v v stupni t prenášobíme pravdepodobnosťami prechodu markovského reťazca, v závislosti na tom, aký stav markovského reťazca reprezentuje uzol u a aký stav markovského reťazca reprezentuje uzol v .

Ako je znázornené na obrázku (2.5), scenárový strom kombinovaný s markovským reťazcom budeme generovať ako jeden rozšírený scenárový strom, preto nebude treba modifikovať optimalizačný problém definovaný pre všeobecný, alebo po stupňoch nezávislý scenárový strom.

2.4 Scenárová mriežka

Ďalšou scenárovou štruktúrou používanou na reprezentáciu diskkrétnej aproximácie náhodného procesu je scenárová mriežka. Konštrukciu si ukážeme na príklade binomickej scenárovej mriežky.

Binomické scenárové mriežky reprezentujú širokú triedu modelov s diskrétnym časom, ktoré sa v literatúre často využívajú na modelovanie ceny štátnych dlhopisov (opcií na štátne dlhopisy), ktorých hodnota v čase závisí od krátkodobých úrokových mier. Ako príklad môžeme uviesť dvojročný bezkupónový dlhopis, ktorého cenu po jednom roku získame diskontovaním očakávanej ceny po dvoch rokoch s využitím krátkodobej úrokovej miery známej po jednom roku. Súčasnú cenu dlhopisu získame diskontovaním ceny po jednom roku súčasnou úrokovou mierou. Konštrukcia binomickej scenárovej mriežky pre takýto typ úloh je popísaná napríklad v článku Black a kol. (1990), alebo v knihe Dupačová a kol. (2002), ktorej budeme vychádzať pri definovaní štruktúry binomickej scenárovej mriežky na reprezentáciu náhodných výnosov. Príklad binomickej scenárovej mriežky je uvedený na obrázku 2.7.

Nech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ je náhodný proces výnosov, pre ktorého vektory ξ_t v každom čase $t = 1, \dots, T$ platí vzťah

$$\xi_t^k = \xi_{t0} k_t^{i_t(k)}. \quad (2.8)$$

ξ_{t0} je realizácia náhodného vektoru ξ_t , pokiaľ od prvého stupňa až po stupeň t nastali iba prechody výnosu smerom nadol, k_t je multiplikatívny koeficient, určujúci nárast výnosu v stupni t oproti ξ_{t0} a

$$i_t(k) = \sum_{\tau=1}^t \zeta_\tau^k,$$

kde $\zeta_1^k = 0$ pre každé $k = 1, \dots, 2^{T-1}$ a pre $t = 2, \dots, T$ môže ζ_t^k nadobúdať buď hodnotu 0 alebo 1. Hodnota 1 v stupni $t = 2, \dots, T$ značí, že proces prešiel zo stupňa $t-1$ do stupňa t nahor a hodnota 0 značí, že náhodný proces prešiel zo stupňa $t-1$ do stupňa t nadol. Dokopy teda môže nastať 2^{T-1} scenárov náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$.

Dôležitou vlastnosťou, ktorá odlišuje scenárovú mriežku od klasického scenárového stromu, je *rekombinačná vlastnosť* scenárovej mriežky. Hovoríme, že binomická scenárová mriežka má rekombinačnú vlastnosť, ak rovnaký počet prechodov nahor, respektíve nadol vedie bez ohľadu na ich poradie k rovnakému stavu náhodného procesu.

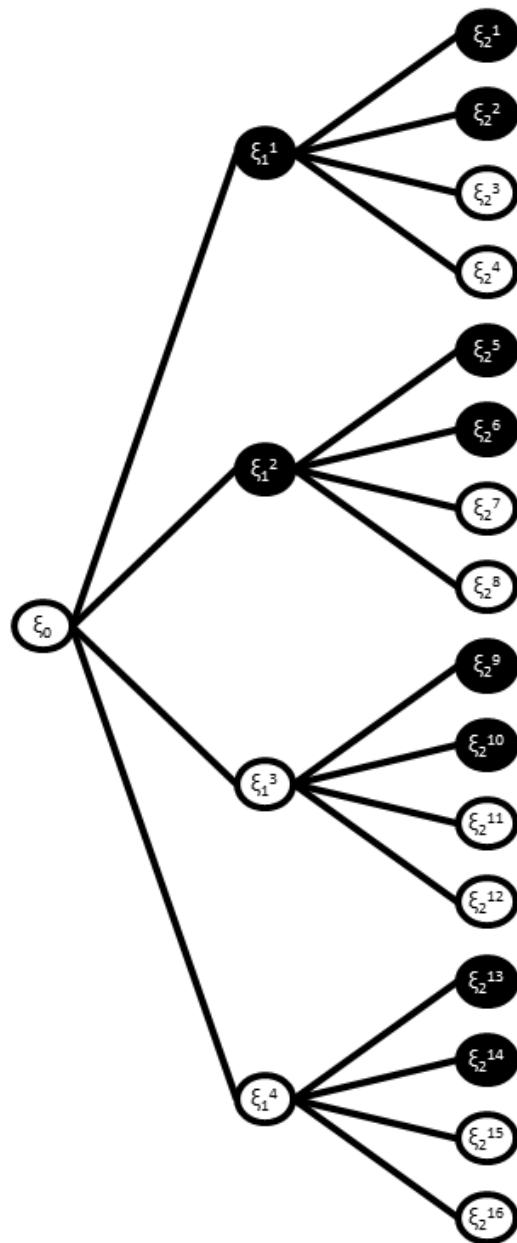
Príklad. Do uzla $u = 5$ z obrázku 2.8 sa dostaneme z koreňa prechodom nahor do uzla 2 a nadol do uzla 5, alebo prechodom nadol do uzla 3 a nahor do uzla 5.

Všimnime si, že scenárová mriežka zostrojená pomocou vzťahu (2.8) splňuje rekombinačnú vlastnosť, pretože v každom stupni $t = 2, \dots, T$ nás zaujíma iba

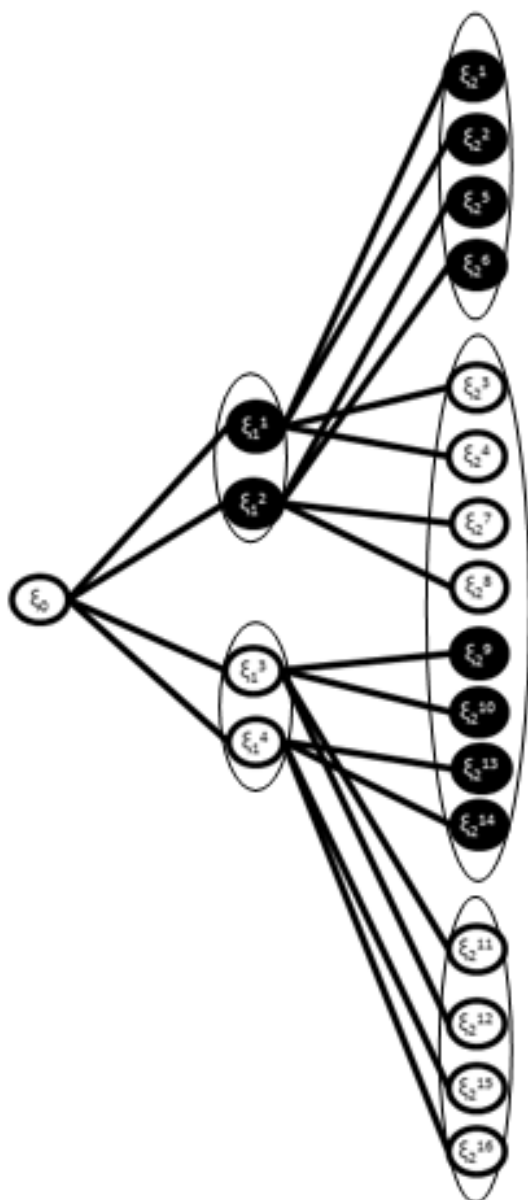
počet prechodov nahor (respektíve nadol) do času t a nezáleží nám na poradí daných prechodov. Vďaka rekombinačnej vlastnosti binomické scenárové mriežky oproti scenárovému stromu znižujú počet uzlov v každom stupni a tým aj veľkosť optimalizačného problému. Na druhej strane, narozdiel od scenárového stromu, scenárová mriežka nenesie informáciu o histórii náhodného procesu.

V našej práci použijeme scenárovú mriežku v súvislosti s rozhodnutiami v optimalizačnom modeli, založenom na scenárovom strome závislom od stavov markovského reťazca. Na obrázku 2.5 je vykreslený scenárový strom s realizáciami výnosov závislých od stavov markovského reťazca. V druhom stupni má daný strom 4 uzly, v treťom stupni má uzlov 16. Pre každý uzol u uvažujeme, okrem aktuálneho stavu markovského reťazca, počet čiernych predchodcov (stavov 1), od koreňa stromu až po uzol u (vrátane). Vidíme, že v prvom stupni je historický počet čiernych stavov 0, v druhom stupni je historický počet čiernych stavov buď 0, alebo 1 a v treťom stupni je historický počet čiernych stavov 0, 1, alebo 2. Podobne by sme mohli pokračovať pre vyššie stupne. Spájaním uzlov v rámci jedného stupňa, na základe historického počtu čiernych stavov, dostaneme požadovanú scenárovú mriežku, ako je uvedené na obrázku 2.6.

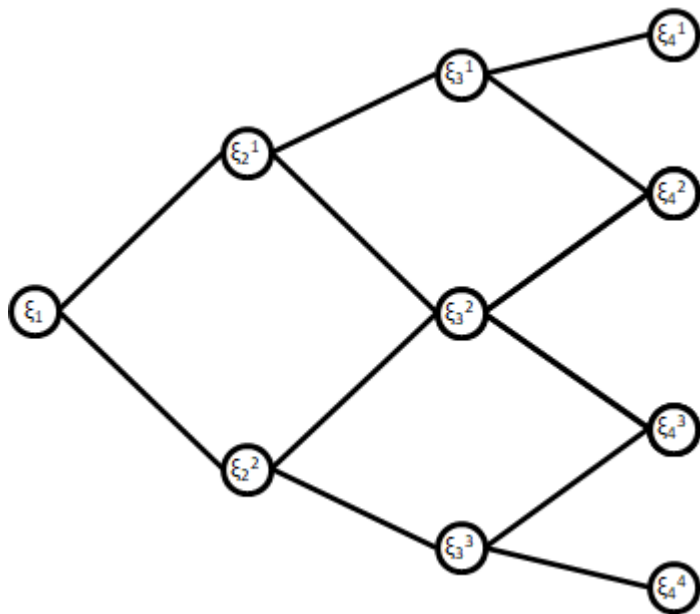
Výnosy v takto spojených uzloch sú rôzne, môžeme však definovať optimalizačnú úlohu tak, že rozhodnutia v takto spojených uzloch budú rovnaké. Takýmto spôsobom vieme zakomponovať štruktúru scenárovej mriežky do úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania. Konkrétnu definíciu takéhoto modelu uvedieme v ďalšej časti práce.



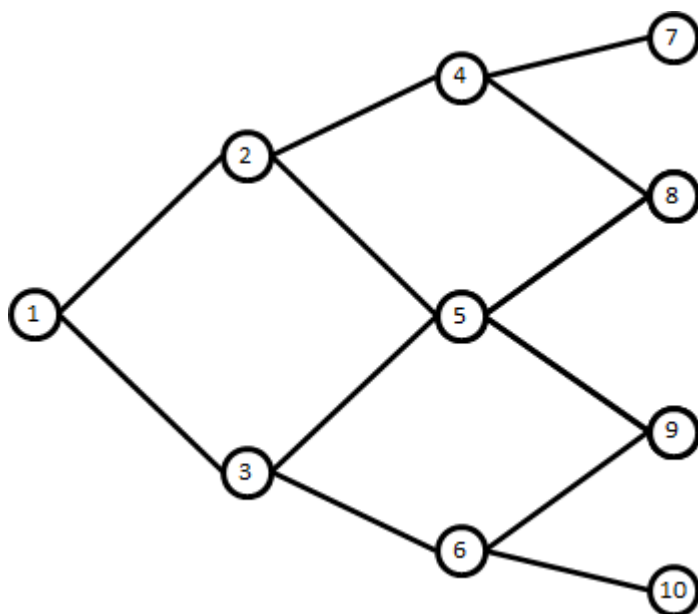
Obr. 2.5: Scenárový strom závislý na stave Markovského reťazca.



Obr. 2.6: Spájanie uzlov scenárového stromu.



Obr. 2.7: Realizácie binomickej scenárovej mriežky.



Obr. 2.8: Uzly binomickej scenárovej mriežky.

3. Investičný problém

V predchádzajúcej časti sme si predstavili rôzne matematické zápisy úlohy matematického programovania. V tejto sekcii definujeme problém privátneho investora, ktorý budeme riešiť a sformulujeme optimalizačnú úlohu. Pri formulácii optimalizačnej úlohy vychádzame z knihy Birge a Louveaux (2011), z článku Gülpinar a kol. (2003) a z prác Malá (2014) a Laurent (2006).

3.1 Problém privátneho investora

Predstavme si, že za časové obdobie dĺžky $T \in \mathbb{N}$ budeme potrebovať finančnú čiastku $G > 0$. Rozhodneme sa preto investovať čiastku $0 < B < G$ do $n \in \mathbb{N}$ akcií rôznych spoločností $i = 1, \dots, n$ a vybudovať si tak vlastné portfólio, ktoré v čase T predáme, s cieľom získať aspoň potrebnú čiastku G . Časové obdobie dĺžky T rozdelíme do stupňov $t = 1, \dots, T$.

V prvom stupni nakúpime n rôznych akcií v hodnote $x_{1,i}$, $i = 1, \dots, n$. V rámci diverzifikácie portfólia si môžeme ako investor určiť hornú hranicu $\overline{x_{1,i}}$ investovaného majetku do akcií spoločnosti i . Zároveň nepovoľujeme predaj nakrátko, čo vyjadríme obmedzením

$$0 \leq x_{1,i} \leq \overline{x_{1,i}}.$$

Za nákup aktíva i zaplatíme burzovému maklérovi transakčný poplatok vo výške $c_b \in (0, 1)$ z ceny $x_{1,i}$. Predpokladáme, že na nákup akcií a transakčné poplatky minieme celý počiatočný kapitál, čo vyjadríme vzťahom

$$\sum_{i=1}^n x_{1,i} = B(1 - c_b). \quad (3.1)$$

Rovnica (3.1) vyjadruje, že za čiastku B si vytvoríme portfólio akcií n spoločností v celkovej hodnote $B(1 - c_b)$.

V stupňoch $t = 2, \dots, T - 1$ môžeme naše portfólio preusporiadať, v závislosti na vývoji hodnoty akcií spoločností $i = 1, \dots, n$. Nech $\xi_{t,i}$, $t = 2$ je náhodný výnos z držania akcií spoločnosti i v stupni t . V definícii modelu uvažujeme hrubé výnosy, tj. ako multiplikatívne koeficienty. Pokiaľ máme k dispozícii percentuálne vyjadrené výnosy, prevedieme ich na požadovaný multiplikatívny tvar. V každom stupni sa rozhodneme, či dokúpime akcie spoločnosti i v hodnote $b_{t,i}$, alebo predáme časť akcií, alebo všetky akcie spoločnosti i v hodnote $s_{t,i}$ a získané prostriedky investujeme do nákupu akcií jednej, alebo viacerých iných spoločností.

Rovnako ako v prípade nákupu, aj pri predaji akcií platíme burzovému maklérovi čiastku $c_s \in (0, 1)$ z hodnoty predaných akcií. Po úprave portfólia bude hodnota akcií spoločnosti i v stupni t a pre scenár k v tvare

$$x_{t,i}^k = \xi_{t,i}^k x_{t-1,i}^k + (1 - c_b) b_{t,i}^k - (1 - c_s)^{-1} s_{t,i}^k. \quad (3.2)$$

Predpokladáme, že na úpravu portfólia nemáme k dispozícii žiadne externé zdroje a že všetky peniaze získané predajom akcií znovu investujeme do nákupu iných akcií, tzn.

$$\sum_{i=1}^n b_{t,i}^k = \sum_{i=1}^n s_{t,i}^k.$$

Ako investor si môžeme určiť horné hranice $\overline{b_{t,i}}$ a $\overline{s_{t,i}}$ na nákup a predaj akcií spoločnosti i v čase t . Opäť požadujeme nezápornosť, tzn.

$$0 \leq b_{t,i}^k \leq \overline{b_{t,i}^k}$$

$$0 \leq s_{t,i}^k \leq \overline{s_{t,i}^k}.$$

V čase T požadujeme, aby stredná hodnota portfólia bola aspoň G , čo vyjadríme vzťahom

$$(1 - c_s) \sum_{k=1}^K p_k \sum_{i=1}^n \xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k \geq G.$$

3.2 Mean CVaR model

V každom časovom okamžiku, v ktorom robíme rozhodnutie o podobe nášho portfólia, budeme dbať na to, aby sme minimalizovali riziko spojené s naším rozhodnutím. Často používaná voľba miery rizika je *hodnota v riziku*.

Definícia 2. (Rockafellar a Uryasev (2002))

Nech L je náhodná veličina vyjadrujúca stratu portfólia, $\alpha \in (0, 1)$. Potom definujeme hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α ako

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}.$$

Za α sa väčšinou berie hodnota blízko 1, typicky 0,95. $VaR_\alpha(L)$ je teda ľavý α -kvantil rozdelenia náhodnej veličiny L . Hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α môžeme interpretovať ako najvyššiu možnú stratu portfólia s pravdepodobnosťou vyššou alebo rovnou α . Nevýhodou hodnoty v riziku ako miery rizika je, že jej použitie ako účelovej funkcie nevedie k úlohe konvexného programovania. Je totiž známe, že aj keď je L konvexná funkcia rozhodovacieho vektoru \mathbf{x} , hodnota v riziku $VaR_\alpha(L)$ nemusí byť konvexná v \mathbf{x} (Rockafellar a Uryasev (2002)). Z pohľadu investora má hodnota v riziku nevýhodu, že nedáva žiadnu informáciu o strate nad hodnotou $VaR_\alpha(L)$. V našom modeli použijeme preto *podmienujú* hodnotu v riziku.

Definícia 3. (Rockafellar a Uryasev (2002))

Nech L je náhodná veličina s konečnou strednou hodnotou, vyjadrujúca stratu portfólia, $\alpha \in (0, 1)$. Potom definujeme podmienujú hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α ako

$$CVaR_\alpha(L) = \inf\left\{a + \frac{1}{1 - \alpha} E[\max(0, L - a)] : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Poznámka. V prípade spojitého rozdelenia môžeme CVaR ekvivalentne prepísať do tvaru

$$CVaR_\alpha(L) = E[L | L > VaR_\alpha(L)].$$

Potom môžeme podmienujú hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α interpretovať ako podmienujú strednú hodnotu straty portfólia, za podmienky, že je strata portfólia väčšia ako hodnota v riziku na hladine α .

Podmienená hodnota v riziku je príkladom *koherentnej* miery rizika (Rockafellar a Uryasev (2002)). Podľa článku Artzner a kol. (1999) je funkcia $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koherentná miera rizika, ak pre každé dve náhodné veličiny L_1, L_2 platí

- konvexnosť: $\rho(\alpha L_1 + (1 - \alpha)L_2) \leq \alpha\rho(L_1) + (1 - \alpha)\rho(L_2)$, pre $\alpha \in [0, 1]$,
- monotónnosť: ak $L_1(\omega) \leq L_2(\omega) \forall \omega \in \Omega$, tak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$,
- pozitívna homogenita: ak $a \in \mathbb{R}$ a $a > 0$, tak $\rho(aL_1) = a\rho(L_1)$,
- translačná ekvivariancia: ak $a \in \mathbb{R}$, tak $\rho(a + L_1) = a + \rho(L_1)$.

Optimalizačnú úlohu s podmienenou hodnotou v riziku ako mierou rizika prepíšeme štandardným spôsobom na úlohu lineárneho programovania nahradením zložky

$$\max(0, L - a)$$

premennou z , o ktorej budeme predpokladať, že $z \geq 0$ s.i., $z \geq L - a$ s.i. Nájdením najmenšieho takého z dostaneme presne $\max(0, L - a)$.

V prvom stupni, kedy investujeme celý náš počiatočný majetok B do aktív $i = 1, \dots, n$, poznáme aktuálny výnos akcií spoločností $i = 1, \dots, n$, preto pri skladaní portfólia nepodstupujeme žiadne riziko spojené s nedostatkom informácií o ich výnose.

V stupňoch $t = 2, \dots, T - 1$ budeme požadovať minimalizovanie podmienenej hodnoty v riziku, kde za náhodnú stratu L_t budeme uvažovať

$$L_t = \sum_{i=1}^n (x_{t-1,i} - x_{t,i}).$$

Náhodná strata bude pre nás rozdiel v hodnote portfólia v stupni $t - 1$ a v hodnote portfólia v stupni t . V stupni T už nemáme definovanú premennú $x_{T,i}$, preto definujeme náhodnú stratu L_t analogicky ako

$$L_T = \sum_{i=1}^n (x_{T-1,i} - \xi_{T,i} x_{T-1,i} (1 - c_s)).$$

Poznámka. V čase T uvažujeme v definícii náhodnej straty aj poplatok za predaj portfólia.

Na základe vyššie uvedeného definujeme optimalizačný model v tvare

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=2}^T \lambda_t \left(a_t + \frac{1}{1-\alpha_t} \sum_{k_t=1}^{K_t} p_t^{k_t} z_t^{k_t} \right) \\
\text{z.p.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{1,i} = B(1 - c_b) \\
& x_{t,i}^{k_t} = \xi_{t,i}^{k_t} x_{t-1,i}^{h_{k_t}} + (1 - c_b) b_{t,i}^{k_t} - (1 - c_s)^{-1} s_{t,i}^{k_t}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^n b_{t,i}^{k_t} = \sum_{i=1}^n s_{t,i}^{k_t}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& \sum_{k_T=1}^{K_T} p_T^{k_T} \sum_{i=1}^n \xi_{T,i}^{k_T} x_{T-1,i}^{h_{k_T}} (1 - c_s) \geq G, \\
& z_t^{k_t} \geq \sum_{i=1}^n (x_{t-1,i}^{h_{k_t}} - x_{t,i}^{k_t}) - a_t, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& z_T^{k_T} \geq \sum_{i=1}^n (x_{T-1,i}^{h_{k_T}} - \xi_{T,i}^{k_T} x_{T-1,i}^{h_{k_T}} (1 - c_s)) - a_T, \quad k_T = 1, \dots, K_T, \\
& z_t^{k_t} \geq 0, \quad t = 2, \dots, T, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& x_{t,i}^{k_t} \geq 0, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \\
& 0 \leq b_{t,i}^{k_t} \leq \overline{b_{t,i}^{k_t}}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \\
& 0 \leq s_{t,i}^k \leq \overline{s_{t,i}^k}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\
& \qquad \qquad \qquad k_t = 1, \dots, K_t, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kde h_{k_t} je realizácia náhodného výnosu v stupni $t-1$, ktorá predchádza realizácii k_t v stupni t , v zmysle bezprostredného predchodcu definovaného pre scenárové stromy. Váhy $\lambda_t \geq 0$ určujú, nakoľko je pre nás ako investora dôležitá podmienená hodnota v riziku $CVaR_\alpha$ pre každé obdobie $t \in \{1, \dots, T\}$.

Optimalizačný model je rovnaký pre prípad po stupňoch nezávislého stromu aj scenárového stromu závislého na stavoch markovského reťazca. V prípade scenárovej mriežky, tj. pokiaľ budeme chcieť, aby boli v danom stupni rozhodnutia o nákupe a predaji aktíva rovnaké pre uzly s rovnakým historickým počtom krízových období, doplníme do modelu nasledujúce podmienky. Označme $pk_t^{k_t}$ počet kríz od koreňa stromu až po stupeň t pre realizáciu k_t . Potom dodatočné podmienky budú v tvare

$$\begin{aligned}
b_{t,i}^{k_t^1} = b_{t,i}^{k_t^2}, \quad pk_t^{k_t^1} = pk_t^{k_t^2}, \\
t = 2, \dots, T-1, \\
k_t^{1,2} = 1, \dots, K_t, \\
i = 1, \dots, n \\
s_{t,i}^{k_t^1} = s_{t,i}^{k_t^2}, \quad pk_t^{k_t^1} = pk_t^{k_t^2}, \\
t = 2, \dots, T-1, \\
k_t^{1,2} = 1, \dots, K_t, \\
i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

V rámci zachovania princípu neanticipativity požadujeme, aby optimálne riešenie \mathbf{x}_t v stupni $t \in 1, \dots, T$ záviselo len na histórii náhodného procesu do času t

a nie na budúcich pozorovaniach. Ak veríme nášmu modelu, na základe stavu v stupni t vieme, ktoré scenáre už nemôžu v budúcnosti z daného stavu nastať. Na základe článku Shapiro (2009) hovoríme, že úloha viacstupňového stochastického programovania je *časovo konzistentná*, ak v každom stupni optimálne riešenie nezávisí na scenároch, ktoré sa už nemôžu v budúcnosti uskutočniť. Na úlohu (3.3) môžeme pozeráť ako na úlohu viacstupňového stochastického programovania s premennými $\mathbf{x}_1, a_2, \dots, a_T$ v prvom stupni. To znamená, že ich optimálne hodnoty závisia na všetkých scenároch začínajúcich od koreňa a teda v neskorších stupňoch aj na scenároch, ktoré nemôžu z daného uzla scenárového stromu nastať. Problém (3.3) preto nespĺňa podmienku časovej konzistentnosti v zmysle formulácie z článku Shapiro (2009). Model napriek tomu použijeme vďaka jeho prevedeniu na úlohu lineárneho programovania a vďaka jeho ľahkej interpretácii ako váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku cez všetky stupne.

4. Generovanie scenárov

Dôležitou úlohou vo výpočte viacstupňového stochastického programovania je správna aproximácia združeného spojitého rozdelenia náhodného vektoru pomocou diskrétného rozdelenia a riešenie viacstupňového stochastického programovania s aproximovaným diskrétnym rozdelením. Ako aproximované diskrétné rozdelenie nám môžu poslúžiť zdrojové dáta, získané z historického pozorovania. Avšak v numerickej štúdii budeme potrebovať väčšie množstvo scenárov, ako nám môžu poskytnúť dáta, preto sa v nasledujúcej časti zameriame na generovanie scenárov s predpísaným pravdepodobnostným rozdelením.

Scenáre získame vytvorením scenárového stromu, ktorého uzly budeme generovať momentovou metódou, na základe heuristického algoritmu z článku Høyland a kol. (2003). Scenárový strom budeme konštruovať postupne po jednotlivých uzloch v stupni t . Konštrukcia stromu bude prebiehať v dvoch krokoch:

1. *Inicializuj*

Nastav $t = 1$ a prirad' koreňu pravdepodobnosť 1.

2. *Generuj uzly v ďalšom stupni*

Pre každý uzol v stupni t definuj jeho potomkov v stupni $t + 1$. Definuj vlastnosti podmieneného rozdelenia (momenty a korelácie) a generuj realizácie náhodného vektoru s konečným diskrétnym rozdelením, konzistentné s definovanými vlastnosťami. Prirad' potomkom vygenerované realizácie a pravdepodobnosti. Ak $t = T - 1$, tak skonči, inak nastav $t := t + 1$ a opakuj krok 2.

V nasledujúcej časti popíšeme algoritmus na generovanie realizácií z diskrétného rozdelenia z článku Høyland a kol. (2003). Pre jednoduchosť v tejto časti vynecháme index t a popíšeme generovanie potomkov jedného uzlu v scenárovom strome. Cieľom metódy je vygenerovať K realizácií n -rozmerného náhodného vektora $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ s konečným diskrétnym rozdelením, s pravdepodobnosťami realizácií p_1, \dots, p_K , aby mali zložky náhodného vektora $i = 1, \dots, n$ predpísané stredné hodnoty μ_i , smerodajné odchýlky σ_i , šikmosť s_i , špicatosť k_i a aby mal výsledný náhodný vektor korelačnú maticu \mathbf{R} . Požadujeme teda, aby platilo

$$\begin{aligned}\mu_i &= \mathbf{E} \xi_i \\ \sigma_i &= \sqrt{\mathbf{E} (\xi_i - \mu_i)^2} \\ s_i &= \frac{\mathbf{E} (\xi_i - \mu_i)^3}{\sigma_i^3} \\ k_i &= \frac{\mathbf{E} (\xi_i - \mu_i)^4}{\sigma_i^4} \\ R_{ij} &= \frac{\mathbf{E} (\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j},\end{aligned}\tag{4.1}$$

pre každé $i, j = 1, \dots, n$, kde R_{ij} sú prvky korelačnej matice \mathbf{R} .

Ako je uvedené v článku Høyland a kol. (2003), aby bola matica korelačnou maticou, musí byť symetrická, pozitívne semidefinitná matica s jednotkami na

hlavnej diagonále. Pozitívna semidefinitnosť nám zaručí, že korelačná matica \mathbf{R} má Choleského rozklad

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica. Budeme navyše predpokladať, že \mathbf{R} je pozitívne definitná, čo zaručí nenulovosť diagonálnych prvkov dolnej trojuholníkovej matice \mathbf{L} .

Všetky požadované vlastnosti na marginálne rozdelenie náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ a realizácie sú zhrnuté v tabuľke 4.1.

	p_1	p_2	\dots	p_K				
$\boldsymbol{\xi}_1$	ξ_1^1	ξ_1^2	\dots	ξ_1^K	μ_1	σ_1	s_1	k_1
$\boldsymbol{\xi}_2$	ξ_2^1	ξ_2^2	\dots	ξ_2^K	μ_2	σ_2	s_2	k_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\boldsymbol{\xi}_n$	ξ_n^1	ξ_n^2	\dots	ξ_n^K	μ_n	σ_n	s_n	k_n

Tabuľka 4.1: Vlastnosti rozdelenia náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$.

Cieľom metódy momentov je vygenerovať realizácie $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^K$ tak, aby malo výsledné diskrétné pravdepodobnostné rozdelenie vyššie predpísané vlastnosti.

Pokiaľ je pre nejaké $i \in \{1, \dots, n\}$ μ_i rôzne od 0, alebo σ_i rôzne od 1, prevedieme náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ na štandardizovaný tvar so zložkami

$$\xi_i^{st} = \frac{\xi_i - \mu_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Pomocou metódy momentov vygenerujeme realizácie náhodných veličín ξ_i^{st} a pomocou vzťahu

$$\xi_i = \sigma_i \xi_i^{st} + \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

dostaneme realizácie pôvodného náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$. Jednoduchým dosadením overíme, že pre $i \in \{1, \dots, n\}$ má náhodná veličina ξ_i^{st} nulovú strednú hodnotu

$$\mu_i^{st} = \mathbb{E} \xi_i^{st} = \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)}{\sigma_i} = 0.$$

Vďaka nulovej strednej hodnote sa rovná rozptyl ξ_i druhému momentu $\mathbb{E} \xi_i^2$ a platí

$$(\sigma_i^{st})^2 = \mathbb{E} (\xi_i^{st})^2 = \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} = 1.$$

Podobne dosadením overíme, že šikmosť a špicatosť sa štandardizovaním nezmenia. Šikmosť náhodnej veličiny ξ_i^{st} sa rovná tretiemu momentu $\mathbb{E} (\xi_i^{st})^3$ a platí

$$s_i^{st} = \mathbb{E} (\xi_i^{st})^3 = \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^3}{\sigma_i^3} = s_i.$$

Špicatosť sa rovná štvrtému momentu $\mathbb{E} (\xi_i^{st})^4$ a platí

$$k_i^{st} = \mathbb{E} (\xi_i^{st})^4 = \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^4}{\sigma_i^4} = k_i.$$

Štandardizovaním sa nezmení ani korelačná matica. Prvok korelačnej matice náhodného vektoru ξ^{st} v i -tom riadku a j -tom stĺpci sa rovná $E \xi_i^{st} \xi_j^{st}$ a platí

$$R_{i,j}^{st} = E \xi_i^{st} \xi_j^{st} = \frac{E (\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} = R_{i,j}.$$

V článku Høyland a kol. (2003) je popísaný teoretický algoritmus, ktorý funguje za predpokladu splnenia všetkých predpokladov uvedených nižšie a jeho heuristická modifikácia.

V prípade splnenia všetkých predpokladov uvedených nižšie vznikne náhodný vektor ξ^{st} z náhodného vektoru \mathbf{X} pomocou *maticovej transformácie*

$$\xi^{st} = \mathbf{L}\mathbf{X}, \quad (4.5)$$

kde \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica z *Choleského rozkladu* korelačnej matice \mathbf{R} , t.j. platí vzťah (4.2) a $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n -rozmerný náhodný vektor. O zložkách náhodného vektoru X_1, \dots, X_n predpokladáme, že sú to nezávislé náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom, tzn. náhodný vektor \mathbf{X} má jednotkovú korelačnú maticu \mathbf{I} .

Nech $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom i -ty riadok maticovej transformácie bude v tvare

$$\xi_i^{st} = (\mathbf{L}\mathbf{X})_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} X_j = \sum_{j=1}^i L_{ij} X_j, \quad (4.6)$$

kde posledná rovnosť platí vďaka tomu, že \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica, t.j. $L_{ij} = 0$, $i < j \leq n$. Ak by mal n -rozmerný náhodný vektor \mathbf{X} navyše normálne rozdelenie, potom z vlastností normálneho rozdelenia vyplýva, že by náhodný vektor ξ^{st} vzniknutý maticovou transformáciou (4.5) mal n -rozmerné normálne rozdelenie s korelačnou maticou \mathbf{R} (Høyland a kol. (2003)). K podobnému záveru pridáme aj bez predpokladu normálneho rozdelenia náhodného vektoru \mathbf{X} , a to vďaka nasledujúcej vete, ktorá navyše určí tvar tretích a štvrtých marginálnych momentov náhodného vektoru ξ^{st} . Formuláciu vety preberieme z článku Høyland a kol. (2003), dôkaz je uvedený v práci Malá (2014).

Veta 2. (Høyland a kol. (2003))

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n -rozmerný náhodný vektor s nasledujúcimi vlastnosťami:

- i. $E X_i^l$ existuje pre $l = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, n$,
- ii. $E X_i = 0$, $E X_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$,
- iii. *jednorozmerné náhodné veličiny* X_i, X_j sú *nezávislé* pre každé $i \neq j$.

Ďalej, nech \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica veľkosti n taká, že $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$, kde \mathbf{R} je korelačná matica, t.j. symetrická, pozitívne semidefinítaná matica s jednotkami na hlavnej diagonále. Ak definujeme náhodný vektor $\xi^{st} = (\xi_i^{st}, \dots, \xi_n^{st})$ ako $\xi^{st} = \mathbf{L}\mathbf{X}$, potom ξ^{st} má nasledujúce vlastnosti:

- a) $E (\xi_i^{st})^l$ existuje pre $l = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, n$,
- b) $E \xi_i^{st} = 0$, $E (\xi_i^{st})^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$,

c) ξ^{st} má korelačnú maticu $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

d) $E(\xi_i^{st})^3 = \sum_{j=1}^i L_{ij}^3 E X_j^3$, $i = 1, \dots, n$,

e) $E(\xi_i^{st})^4 = 3 + \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 (E X_j^4 - 3)$, $i = 1, \dots, n$.

Dôkaz.

a) Nech $l \in \{1, \dots, 4\}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Zo vzťahu (4.6) vyplýva že

$$E(\xi_i^{st})^l = E\left(\sum_{j=1}^n L_{ij} X_j\right)^l = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_l=1}^n L_{i,j_1} \cdots L_{i,j_l} E(X_{j_1} \cdots X_{j_l}) \quad (4.7)$$

Vďaka nezávislosti náhodných veličín X_1, \dots, X_n je posledný vzťah lineárna kombinácia momentov do rádu l , ktoré podľa predpokladu i . existujú, preto existuje aj $E(\xi_i^{st})^l$.

b) Dosadením $l = 1$ do vzťahu (4.7) dostávame

$$E \xi_i^{st} = \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1} E X_{j_1} = 0,$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii . o nulovej strednej hodnote náhodných veličín X_1, \dots, X_n . Dosadením $l = 2$ do vzťahu (4.7) dostávame

$$\begin{aligned} E(\xi_i^{st})^2 &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i,j_1} L_{i,j_2} E(X_{j_1} X_{j_2}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i,j_1} L_{i,j_2} \delta_{j_1,j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1}^2 = \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1} L_{j_1,i}^\top = R_{ii} = 1, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii . o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. δ_{j_1,j_2} je Kroneckerovo delta, t.j.

$$\delta_{j_1,j_2} = \begin{cases} 1, & \text{ak } j_1 = j_2, \\ 0, & \text{ak } j_1 \neq j_2. \end{cases}$$

c) Nech $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$. Priamym výpočtom dostaneme

$$\begin{aligned} \text{corr}(\xi_{i_1}^{st}, \xi_{i_2}^{st}) &= E(\xi_{i_1}^{st} \xi_{i_2}^{st}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i_1,j_1} L_{i_2,j_2} E(X_{j_1} X_{j_2}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i_1,j_1} L_{i_2,j_2} \delta_{j_1,j_2} = \sum_{j_1=1}^n L_{i_1,j_1} L_{i_2,j_1} = \sum_{j_1=1}^n L_{i_1,j_1} L_{j_1,i_2}^\top = \\ &= R_{i_1,i_2}, \end{aligned}$$

čo je prvok korelačnej matice \mathbf{R} . Prvá rovnosť vyplýva z tvrdenia b) o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle náhodných veličín $\xi_1^{st}, \dots, \xi_n^{st}$, zvyšné rovnosti sú analógiou výpočtov vyššie.

d) Dosadením $l = 3$ do vzťahu (4.7) dostávame

$$\mathbb{E}(\xi_i^{st})^3 = \sum_{j_1=1}^i \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i L_{i,j_1} L_{i,j_2} L_{i,j_3} \mathbb{E}(X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3}) = \sum_{j_1=1}^i L_{i,j_1}^3 \mathbb{E} X_{j_1}^3,$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu *ii.* o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. Všetky ostatné členy sa vďaka nulovej strednej hodnote X_1, \dots, X_n vynulujú.

e) Dosadením $l = 4$ do vzťahu (4.7) dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_i^{st})^4 &= \sum_{j_1=1}^i \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i \sum_{j_4=1}^i L_{i,j_1} L_{i,j_2} L_{i,j_3} L_{i,j_4} \mathbb{E}(X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3} X_{j_4}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i,j_1}^4 \mathbb{E} X_{j_1}^4 + 3 \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i L_{i,j_2}^2 L_{i,j_3}^2 \mathbb{E} X_{j_2}^2 \mathbb{E} X_{j_3}^2 - 3 \sum_{j_4=1}^i L_{i,j_4}^4 (\mathbb{E} X_{j_4}^2)^2 \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i,j_1}^4 \mathbb{E} X_{j_1}^4 + 3 \sum_{j_2=1}^i L_{i,j_2}^2 \sum_{j_3=1}^i L_{i,j_3}^2 - 3 \sum_{j_4=1}^i L_{i,j_4}^4 = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i,j_1}^4 (\mathbb{E} X_{j_1}^4 - 3) + 3 \sum_{j_2=1}^i L_{i,j_2} L_{j_2,i}^\top \sum_{j_3=1}^i L_{i,j_3} L_{j_3,i}^\top = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i,j_1}^4 (\mathbb{E} X_{j_1}^4 - 3) + 3R_{i,i}R_{i,i} = \sum_{j=1}^i L_{i,j}^4 (\mathbb{E} X_j^4 - 3) + 3, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu *ii.* o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. Všetky ostatné členy majú v súčine strednú hodnotu niektorej z náhodných veličín X_1, \dots, X_n a vďaka predpoklade o nulovej strednej hodnote X_1, \dots, X_n sa vynulujú. Tretia rovnosť opäť vyplýva z predpokladu o jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n . V poslednej rovnosti je využitý predpoklad o jednotkovej diagonále matice \mathbf{R} .

Tým je veta dokázaná. □

Dôsledok. Nech navyše je \mathbf{R} pozitívne definitná matica. Potom pre $i = 1, \dots, n$ môžeme tretí a štvrtý moment náhodnej veličiny X_i vyjadriť ako:

$$s_i^{tr} = \mathbb{E} X_i^3 = \frac{1}{L_{i,i}^3} (\mathbb{E}(\xi_i^{st})^3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}^3 \mathbb{E} X_j^3) \quad (4.8)$$

$$k_i^{tr} = \mathbb{E} X_i^4 = 3 + \frac{1}{L_{i,i}^4} (\mathbb{E}(\xi_i^{st})^4 - 3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}^4 (\mathbb{E} X_j^4 - 3)). \quad (4.9)$$

Dôkaz. Pozitívna definitnosť matice \mathbf{R} zaručí nenulovosť diagonálnych prvkov $L_{i,i}$ dolnej trojuholníkovej matice \mathbf{L} . Vzťahy vyššie potom dostaneme priamym výpočtom z vety 2. □

Náhodná veličina X_i vznikne v rámci teoretického algoritmu pomocou *kubickej transformácie*

$$X_i = a_i + b_i W_i + c_i W_i^2 + d_i W_i^3, \quad (4.10)$$

kde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ a W_i je náhodná veličina so známymi prvými dvanástimi momentmi. S využitím vzťahu (4.10) odvodíme sústavu nelineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} X_i &= a_i + b_i \mathbb{E} W_i + c_i \mathbb{E} W_i^2 + d_i W_i^3 \\
\mathbb{E} X_i^2 &= a_i^2 + 2a_i b_i \mathbb{E} W_i + (2a_i c_i + b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + (2a_i d_i + 2b_i c_i) \mathbb{E} W_i^3 + \\
&\quad + (2b_i d_i + c_i^2) \mathbb{E} W_i^4 + 2c_i d_i \mathbb{E} W_i^5 + d_i^2 \mathbb{E} W_i^6 \\
\mathbb{E} X_i^3 &= a_i^3 + 3a_i^2 b_i \mathbb{E} W_i + (3a_i^2 c_i + 3a_i b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + (6a_i b_i c_i + 3a_i^2 d_i + b_i^3) \mathbb{E} W_i^3 + \\
&\quad + (3a_i c_i^2 + 6a_i b_i d_i + 3b_i^2 c_i) \mathbb{E} W_i^4 + (6a_i c_i d_i + 3b_i^2 d_i + 3b_i c_i^2) \mathbb{E} W_i^5 + \\
&\quad + (3a_i d_i^2 + 6b_i c_i d_i + c_i^3) \mathbb{E} W_i^6 + (3b_i d_i^2 + 3c_i^2 d_i) \mathbb{E} W_i^7 + 3c_i d_i^2 \mathbb{E} W_i^8 + \\
&\quad + d_i^3 \mathbb{E} W_i^9 \\
\mathbb{E} X_i^4 &= a_i^4 + 4a_i^3 b_i \mathbb{E} W_i + (4a_i^3 c_i + 6a_i^2 b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + \\
&\quad + (4a_i b_i^3 + 12a_i^2 b_i c_i + 4a_i^3 d_i) \mathbb{E} W_i^3 + \\
&\quad + (b_i^4 + 12a_i b_i^2 c_i + c_i + 6a_i^2 c_i^2 + 12a_i^2 b_i d_i) \mathbb{E} W_i^4 + \\
&\quad + (4b_i^3 c_i + 12a_i b_i c_i^2 + 12a_i b_i^2 d_i + 12a_i^2 c_i d_i) \mathbb{E} W_i^5 + \\
&\quad + (6b_i^2 c_i^2 + 4a_i c_i^3 + 4b_i^3 d_i + 24a_i + b_i + c_i + d_i + 6a_i^2 d_i^2) \mathbb{E} W_i^6 + \\
&\quad + (4b_i c_i^3 + 12b_i^3 c_i d_i + 12a_i c_i^2 d_i + 12a_i b_i d_i^2) \mathbb{E} W_i^7 + \\
&\quad + (c_i^4 + 12b_i c_i^2 d_i + 6b_i^2 d_i^2 + 12a_i c_i d_i^2) \mathbb{E} W_i^8 + \\
&\quad + (4c_i^3 d_i + 12b_i c_i d_i^2 + 4a_i d_i^3) \mathbb{E} W_i^9 + (6c_i^2 d_i^2 + 4b_i d_i^3) \mathbb{E} W_i^{10} + \\
&\quad + 4c_i d_i^3 \mathbb{E} W_i^{11} + d_i^4 \mathbb{E} W_i^{12}.
\end{aligned}$$

Pokiaľ nemá systém rovníc reálne riešenie, vezmeme také koeficienty, ktoré minimalizujú súčet kvadratických odchýlok pravých strán rovníc od transformovaných momentov $\mathbb{E} X_i^l$, $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, 4$. Rovnako ako v Høyland a kol. (2003) za W_i vezmeme diskretnú náhodnú veličinu, ktorej realizácie vygenerujeme náhodným generátorom z normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$. Momenty takto vygenerovanej konečnej diskretnej náhodnej veličiny W_i sa budú líšiť od teoretických momentov rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$, avšak kvôli zjednodušeniu použijeme teoretické momenty a aproximujeme nimi momenty náhodnej veličiny W_i . Zo sústavy rovníc vyššie následne dopočítame koeficienty a_i, b_i, c_i, d_i .

Uvedieme jednotlivé kroky teoretického algoritmu:

1. *Inicializuj*

Definuj cieľové hodnoty marginálneho rozdelenia $\mu_i, \sigma_i, s_i, k_i$ a korelačnú maticu \mathbf{R} . Vypočítaj Choleského dekompozíciu $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$. Pomocou vzťahu (4.8) a (4.9) spočítaj s_i^{tr} a k_i^{tr} .

2. *Nájdí počiatkové rozdelenie*

Vygeneruj K realizácií z normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ n -rozmerného náhodného vektoru \mathbf{W} s diskretným rozdelením v štandardizovanom tvare a so stochasticky nezávislými zložkami, ktorého realizácie majú pravdepodobnosti $p_1 = \dots = p_K$.

3. *Uprav transformované cieľové momenty*

Pomocou kubickej transformácie (4.10) vypočítaj náhodný vektor \mathbf{X} so stochasticky nezávislými zložkami a momentmi 0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr} .

4. *Uprav korelácie*

Pomocou maticovej transformácie (4.5) vypočítaj náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$ v

štandardizovanom tvare s momentmi $0, 1, s_i^{st}, k_i^{st}$ a korelačnou maticou \mathbf{R} . Pomocou transformácie (4.4) získaj požadované realizácie.

Ako sa uvádza v článku Høyland a kol. (2003), pre konečný počet realizácií je problém vygenerovať náhodný vektor so stochasticky nezávislými zložkami. Autori preto navrhli heuristickú modifikáciu algoritmu, ktorá by mala viesť aspoň k odstráneniu korelovanosti medzi jednotlivými zložkami náhodného vektoru.

Nech $\boldsymbol{\xi}^{st}$ je náhodný vektor v štandardizovanom tvare s korelačnou maticou \mathbf{R} . Definujme spätnú transformáciu ako

$$\boldsymbol{\xi}^{sp} = \mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\xi}^{st}.$$

Potom platí, že

$$\mathbb{E} \boldsymbol{\xi}^{sp}(\boldsymbol{\xi}^{sp})^\top = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^\top(\mathbf{L}^{-1})^\top = \mathbf{I}, \quad (4.11)$$

kde využívame, že $\boldsymbol{\xi}^{st}$ je v štandardizovanom tvare. Vidíme, že po spätnej transformácii má náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{sp}$ jednotkovú korelačnú maticu \mathbf{I} .

Uvedieme jednotlivé kroky alternatívneho algoritmu. Prvý krok v alternatívnom algoritme zostáva oproti teoretickej verzii nezmenený. V druhom kroku požadujeme vygenerovanie K náhodných vektorov so stochasticky nezávislými zložkami. Namiesto teoretickej stochastickej nezávislosti budeme požadovať približne nulové korelácie a dostatočne dobrú aproximáciu momentov. Algoritmus preto pokračuje dvoma fázami. Cieľom prvej fázy je skonštruovať diskrétny náhodný vektor \mathbf{X} s nezávislými zložkami a prvými štyrmi momentmi $0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr}$.

1. *Inicializuj*

Definuj $\epsilon^X > 0$. Podobne, ako v prípade teoretického algoritmu pomocou kubickkej transformácie vypočítaj náhodný vektor \mathbf{X} s momentmi $0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr}$.

2. *Uprav korelácie*

Vypočítaj korelačnú maticu \mathbf{R}^X vektoru \mathbf{X} . Ak $\|\mathbf{R}^X - \mathbf{I}\| < \epsilon^X$ stop, inak určí Choleského dekompozíciu $\mathbf{R}^X = \mathbf{L}^X(\mathbf{L}^X)^\top$

3. *Odstráň korelácie*

Spočítaj spätnú transformáciu $\mathbf{X}^{sp} = (\mathbf{L}^X)^{-1}\mathbf{X}$. Na základe vzťahu (4.11) zaručí spätná transformácia nulové korelácie.

4. *Uprav na transformované cieľové momenty*

Aplikuj kubickú transformáciu (4.10) na transformovaný vektor \mathbf{X}^{sp} na dosiahnutie požadovaných momentov. Prejdi na krok 2.

V druhej fáze algoritmu použijeme spätnú transformáciu na hľadanie vektoru s cieľovou korelačnou maticou \mathbf{R} .

1. *Inicializuj*

Definuj $\epsilon^{st} > 0$. Pomocou maticovej transformácie (4.5) aplikovanej na vektor \mathbf{X}^{sp} vypočítaj náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$.

2. *Spočítaj korelačnú maticu*

Vypočítaj \mathbf{R}^{st} . Ak $\|\mathbf{R}^{st} - \mathbf{R}\| < \epsilon^{st}$ stop, inak spočítaj $\mathbf{R}^{st} = \mathbf{L}^{st}(\mathbf{L}^{st})^\top$

3. *Odstráň korelácie*

Spočítaj spätnú transformáciu $\xi^{sp} = \mathbf{L}^{-1}\xi^{st}$. Vďaka vzťahu (4.11) zaručí spätná transformácia nulové korelácie náhodného vektoru ξ^{sp} .

4. *Maticová transformácia*

Aplikuj maticovú transformáciu $\xi^{st} = \mathbf{L}\xi^{sp}$ na dosiahnutie požadovanej korelačnej matice \mathbf{R} .

5. *Vypočítaj cieľové momenty*

Aplikuj momentovú transformáciu (4.10) na náhodný vektor ξ^{st} a prejdí na krok 2.

Ako uvádzajú autori v práci Høyland a kol. (2003), takto definovaná metóda generovania scenárov nemusí všeobecne dokonvergovať k správnejmu výsledku. V takom prípade odporúčajú spustiť algoritmus niekoľkokrát znova pre rôzne počiatkové rozdelenia \mathbf{W} , prípadne zvýšiť počet požadovaných scenárov.

5. Praktická časť

V tejto kapitole využijeme poznatky z teoretickej časti a vygenerujeme rôzne scenárové stromy, ktoré použijeme na riešenie problému privátneho investora, definovaného optimalizačným modelom (3.3), v prípade scenárovej mriežky vrátane obmedzení (3.4). Postupne vygenerujeme rôzne scenárové stromy a porovnáme výstupy z modelu.

5.1 Dáta

Dáta pre praktickú časť berieme z knižnice profesora Kennetha R. Frencha¹. Dáta predstavujú mesačné výnosy šiestich portfólií od júla 1926 do decembra 2007. Každé z nich je tvorené prienikom dvoch portfólií vytvorených na základe trhovej veľkosti majetku firiem a troch portfólií vytvorených na základe pomeru účtovnej hodnoty a trhovej hodnoty majetku firiem. Viac informácií k tvorbe dátového súboru je možné nájsť na stránke uvedenej v poznámke pod čiarou. S hrubými výnosmi pracujeme ako s multiplikatívnymi koeficientmi, preto transformujeme výnosy v zdrojových dátach vyjadrené v percentách transformáciou schematicky uvedenou ako

$$\text{hrubý výnos} \mapsto \frac{\text{výnos}}{100} + 1.$$

V tabuľke 5.1 sú uvedené základné popisné štatistiky z primárneho dátového súboru.

Štatistika	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,676	0,700	0,662	0,711	0,719	0,649
Arit. priemer	1,010	1,013	1,015	1,009	1,010	1,013
Maximum	1,599	1,622	1,836	1,337	1,519	1,678
Smer. odchýlka	0,077	0,071	0,083	0,054	0,058	0,073
Šikmosť	0,755	1,314	2,263	-0,093	1,403	1,736
Špicatosť	10,921	17,713	25,466	8,643	21,372	21,911
Počet	978	978	978	978	978	978

Tabuľka 5.1: Základné popisné štatistiky šiestich aktív, ktoré použijeme na skladanie portfólia.

K dispozícii máme dátový súbor s 978 pozorovaniami. Najnižší výnos bol pozorovaný zo šiesteho aktíva v septembri roku 1931, za ním nasleduje výnos z tretieho aktíva. V tomto čase dosiahli svoje minimá všetky aktíva, okrem prvého. Najvyšší výnos bol pozorovaný z tretieho aktíva v auguste 1932, za ním nasleduje opäť výnos zo šiesteho aktíva. Tretie aktívum má zo všetkých aktív najvyššiu smerodajnú odchýlku, šieste aktívum tretiu najvyššiu, čo indikuje vysokú rizikovosť oboch aktív. Všetky portfólia zaznamenali svoj maximálny výnos v rokoch 1932 alebo 1933. Môžeme si všimnúť relatívne malý časový odstup medzi pozorovanými najnižšími a najvyššími výnosmi z nášho dátového súboru, čo

¹<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/>

naznačuje výskyt nestabilného obdobia s nízkymi výnosmi a následne vysokou volatilitou výnosov. Identifikovaním takýchto období sa budeme venovať neskôr v rámci definície stavov markovského reťazca.

Rozloženie výnosov okolo aritmetického priemeru popisuje koeficient šikmosti. Záporná šikmosť v prípade štvrtého portfólia vyjadruje, že vľavo od aritmetického priemeru sa vyskytujú vzdialenejšie hodnoty výnosov ako vpravo a väčšina hodnôt sa nachádza vpravo bližšie k priemeru. Výnosy ostatných portfólií sú kladne zošikmené, to znamená, že vpravo od priemeru sú vzdialenejšie hodnoty výnosov ako vľavo a väčšina hodnôt sa nachádza vľavo bližšie k priemeru. O tom, akým spôsobom sa koncentrujú výnosy portfólia okolo aritmetického priemeru, hovorí koeficient špicatosti. Všetky portfóliá majú koeficient špicatosti väčší ako 3, čo vyjadruje, že väčšina hodnôt sa koncentruje bližšie k aritmetickému priemeru, ako by to bolo v prípade normálne rozdelených výnosov.

V tabuľke 5.2 sú uvedené korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
1	1,000	0,950	0,894	0,852	0,810	0,811
2	0,950	1,000	0,962	0,844	0,880	0,897
3	0,894	0,962	1,000	0,784	0,869	0,916
4	0,852	0,844	0,784	1,000	0,889	0,832
5	0,810	0,880	0,869	0,889	1,000	0,936
6	0,811	0,897	0,916	0,832	0,936	1,000

Tabuľka 5.2: Korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.

Vidíme, že medzi výnosmi jednotlivých aktív je vysoká kladná korelácia. Najnižší korelačný koeficient je medzi tretím a štvrtým portfóliom, ale aj ten má relatívne vysokú hodnotu nad 0,78.

Získané dáta neobsahujú žiadne pozorovanie ani definíciu krízového, respektíve bezkrízového obdobia, preto si zavedieme vlastnú definíciu a doplníme dáta o ďalšiu informáciu, či bol daný mesiac krízový z pohľadu výšky výnosu a volatility, alebo nie.

Na vytvorenie časového radu stavov markovského reťazca použijeme diagnostiku nestability modelu lineárnej regresie pomocou rekurentnej metódy najmenších štvorcov. Teoretický popis metódy preberáme z knihy Cipra (2008).

5.1.1 Rekurentná metóda najmenších štvorcov

Pre $T \in \mathbb{N}$ uvažujme model lineárnej regresie

$$y_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

kde y_t je vysvetľovaná premenná, \mathbf{x}_t je vektor vysvetľujúcich premenných, $\boldsymbol{\beta}$ je vektor neznámych parametrov a $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ je reziduálna zložka modelu, $\sigma^2 > 0$. Predpokladáme, že \mathbf{x} a $\boldsymbol{\beta}$ sú vektory typu $k \times 1$. V rámci rekurentnej metódy počítame pre každé $t = k + 1, \dots, T$ odhad modelu

$$y_\tau = \mathbf{x}_\tau^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_\tau, \quad \tau = 1, \dots, t - 1$$

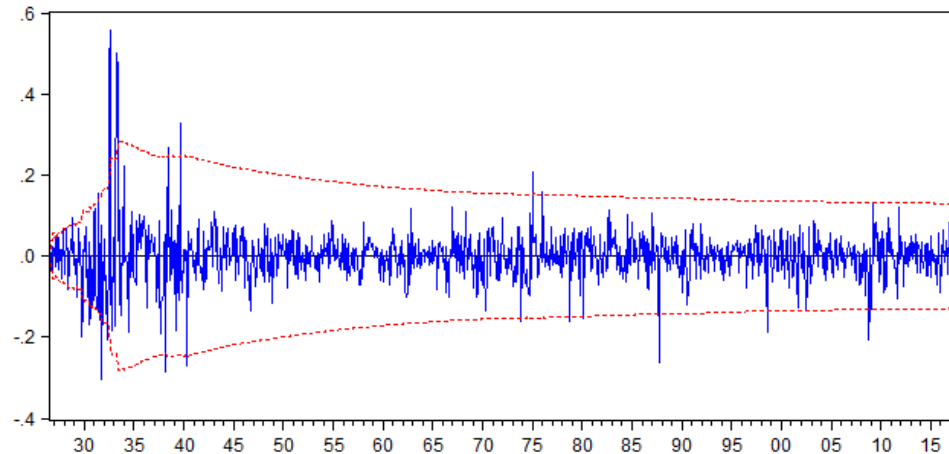
metódou najmenších štvorcov a odhadnutý parameter označíme \mathbf{b}_{t-1} . Po vy počítaní odhadu získame predpoveď $y_t = \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1}$ s chybou predpovede $e_t =$

$y_t - \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1}$. Rozptyl chyby predpovede je $\sigma^2(1 + \mathbf{x}_t^\top (\mathbf{X}_{t-1}^\top \mathbf{X}_{t-1})^{-1} \mathbf{x}_t)$, kde \mathbf{X}_{t-1} je matica vysvetľujúcich premenných \mathbf{x}_{t-1} (Cipra (2008)). Odhad metódou najmenších štvorcov opakujeme, až dokým nevyužijeme všetkých T pozorovaní, čím dostaneme $T - k + 1$ odhadov parametru β . Rekurentné rezíduá definujeme ako

$$w_t = \frac{(y_t - \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1})}{(1 + \mathbf{x}_t^\top (\mathbf{X}_{t-1}^\top \mathbf{X}_{t-1})^{-1} \mathbf{x}_t)^{\frac{1}{2}}}, \quad t = k + 1, \dots, T$$

Body nestability budeme hľadať pre časový rad vytvorený spriemerovaním výnosov zo šiestich aktív v každom čase. Toto zjednodušenie považujeme za adekvátne vzhľadom na relatívne vysoké korelácie medzi jednotlivými aktívami.

Za lineárny model zvolíme jednoduchý model, v ktorom modelujeme priemerný výnos všetkých aktív v čase pomocou konštantnej pravej strany. Odhad parametru metódou najmenších štvorcov je v tomto prípade aritmetický priemer všetkých pozorovaní do času $t - 1$. Na prvý odhad regresného modelu máme iba jedno pozorovanie. Postupne rozširujeme dátovú množinu a tvoríme odhady. Po odhadnutí modelu uskutočnime predpoveď na nasledujúci mesiac a vypočítame rekurzívne rezíduá. K rezíduám dopočítame 95% interval spoľahlivosti. Pokiaľ je rezíduum signifikantne záporné, znamená to, že výnos v danom mesiaci je signifikantne nižší ako doterajší priemer. Takýto mesiac označíme za bod nestability. Analogicky to platí pre signifikantne kladné rezíduum. Pomocou bodov nestability identifikujeme krízové obdobie ako obdobie nízkych výnosov, prípadne vysokej volatility výnosov v rámci jedného roka.



Obr. 5.1: Rekurzívne rezíduá.

Na obrázku 5.1 sú znázornené rekurzívne rezíduá okolo nulovej hodnoty. Pre každý bod je vykreslený dvojnásobok smerodajnej odchýlky s kladným aj záporným znamienkom, ktoré určujú 95% interval spoľahlivosti. Pokiaľ rekurzívne rezíduum prekročí v danom mesiaci interval spoľahlivosti, daný bod interpretujeme ako bod nestability modelu, pre ktorý nie je vhodný nami navrhnutý konštantný model. To znamená, že ide o signifikantný výkyv v časovom rade priemerných výnosov. Mesiac, v ktorom je rekurentné rezíduum signifikantne záporné, definujeme ako začiatok obdobia nízkych výnosov.

Týmto postupom odhadneme časový rad so stavmi 0 a 1, určujúcimi krízové a bezkrízové obdobie. O časovom rade predpokladáme, že ide o markovský reťazec. V tabuľke 5.3 sú uvedené pravdepodobnosti prechodu medzi jednotlivými stavmi markovského reťazca. Pravdepodobnosti prechodu určíme pomocou vzťahu

$$p_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{\sum_{k=0}^1 n_{i,k}},$$

kde $n_{i,k}$, $i, k \in \{0, 1\}$ je počet prechodov zo stavu i do stavu k .

Stav	0	1
0	0,9880	0,0120
1	0,1348	0,8652

Tabuľka 5.3: Pravdepodobnosti prechodu medzi stavmi markovského reťazca.

Pokiaľ sme v bezkrízovom období, pravdepodobnosť, že v ňom naďalej ostane je 98,8 %. Naopak pravdepodobnosť, že prejdeme do krízového obdobia je 1,2 %. Pokiaľ už v krízovom období sme, tak pravdepodobnosť, že sa vrátíme do bezkrízového obdobia, je približne 13,5 % a pravdepodobnosť zotrvania v krízovom období je približne 86,5 %.

Pomocou vytvoreného markovského reťazca rozdelíme dátový súbor na dva, kde prvý obsahuje dáta za bezkrízové obdobie a druhý za krízové. V tabuľke 5.4 sú vypočítané základné popisné štatistiky dátového súboru obmedzeného len na bezkrízové obdobie. Dátový súbor pre bezkrízové obdobie obsahuje 978 pozorovaní.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,792	0,785	0,755	0,863	0,864	0,768
Arit. priemer	1,011	1,014	1,016	1,011	1,011	1,013
Maximum	1,329	1,286	1,383	1,214	1,168	1,241
Smer. odchýlka	0,062	0,053	0,058	0,043	0,041	0,052
Šikmost	0,087	-0,140	0,031	-0,053	-0,037	-0,219
Špicatost	4,477	5,034	6,320	3,703	4,016	5,143
Počet	896	896	896	896	896	896

Tabuľka 5.4: Základné popisné štatistiky pre bezkrízové obdobie.

vaní. Minimálny výnos každého aktíva je vyšší ako v pôvodnom dátovom súbore, naopak maximálny výnos je nižší ako v pôvodnom dátovom súbore. Vzástol aj aritmetický priemer výnosov každého aktíva. Odstránenie krízových období znížilo smerodajnú odchýlku výnosov, v porovnaní s prvým dátovým súborom.

V tabuľke 5.5 sú vypočítané základné popisné štatistiky dátového súboru obmedzeného len na krízové obdobia.

Dátový súbor pre krízové obdobie obsahuje 82 pozorovaní. Minimálny výnos každého aktíva je nižší ako v bezkrízovom období, naopak maximálny výnos je vyšší. S tým súvisia aj vyššie smerodajné odchýlky pre každé aktívum. Aritmetický priemer výnosov každého aktíva je v krízovom období nižší ako v bezkrízovom.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,676	0,700	0,662	0,711	0,719	0,649
Arit. priemer	0,993	1,000	1,006	0,995	0,997	1,007
Maximum	1,599	1,622	1,836	1,337	1,519	1,678
Smer. odchýlka	0,167	0,174	0,215	0,120	0,148	0,184
Šikmost	1,103	1,341	1,707	0,241	1,270	1,416
Špicatosť	5,348	5,944	6,904	3,683	6,211	6,214
Počet	82	82	82	82	82	82

Tabuľka 5.5: Základné popisné štatistiky pre krízové obdobie.

5.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom

V tejto časti sa zameriame na prípad päťstupňového po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Realizácie k jednotlivým uzlom vygenerujeme pomocou metódy momentov z kapitoly 4. Vstupnými parametrami do algoritmu je požadovaná stredná hodnota výnosov, smerodajná odchýlka, šikmost, špicatosť a korelačná matica. Korelačná matica je uvedená v tabuľke 5.2. Ostatné parametre sú uvedené v tabuľke 5.1. V tabuľke 5.1 vidíme, že stredné hodnoty nie sú 0 a smerodajné odchýlky nie sú 1, preto prevedieme náhodné výnosy na štandardizovaný tvar podľa vzťahu (4.3). Takto upravené výnosy majú momenty uvedené v tabuľke 5.6. Vidíme, že vďaka úprave (4.3) sme dostali nulovú strednú hodnotu a

i	1	2	3	4	5	6
μ_i^{st}	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
σ_i^{st}	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
s_i^{st}	0,755	1,314	2,263	-0,093	1,403	1,736
k_i^{st}	10,921	17,713	25,466	8,643	21,372	21,911

Tabuľka 5.6: Prvé štyri momenty štandardizovaných výnosov.

jednotkový rozptyl náhodných výnosov. Ďalej vidíme, že úprava (4.3) nemá vplyv na šikmost a špicatosť. Štandardizácia pomocou vzťahu (4.3) nemá vplyv ani na korelačnú maticu.

Na základe vety 2 je v metóde momentov použitá ešte jedna transformácia šikmosti a špicatosti, uvedená v tabuľke 5.7.

i	1	2	3	4	5	6
μ_i^{tr}	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
σ_i^{tr}	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
s_i^{tr}	0,755	21,942	36,713	-4,437	5,097	-13,829
k_i^{tr}	10,921	873,639	544,640	23,057	117,639	-1516,210

Tabuľka 5.7: Prvé štyri momenty transformovaných výnosov na základe vety 2.

Šikmost a špicatosť prvého aktíva sa nemení, pretože vo vzťahoch (4.8) a (4.9) vypadne súčtová zložka a hodnota $L_{1,1} = 1$. Ostatné diagonálne zložky dolnej trojuholníkovej matice L sú menšie ako jedna, preto ako prvky v menovateli zvyšujú hodnotu transformovaných momentov oproti štandardizovaným.

Postupne vygenerujeme výnosy v jednotlivých uzloch a zostrojíme päťstupňový strom, ktorý použijeme ako vstup do úlohy privátneho investora. Podrobný popis algoritmu použitého na generovanie stromov je uvedený v kapitole 4. Pre po stupňoch nezávislý scenárový strom platí, že všetky uzly v stupni t majú rovnakých potomkov v stupni $t + 1$ a s rovnakými pravdepodobnosťami. Počet potomkov vychádzajúcich z každého uzla v stupňoch 1 až 4 stanovíme na 20, 10, 4, 4. Celkový počet uzlov v každom stupni je uvedený v tabuľke 5.8. Počet uzlov v poslednom stupni určuje zároveň celkový počet scenárov. Takto definovaný scenárový strom vygeneroval program Mathematica za približne 20 sekúnd.

Daný strom použijeme ako vstup do optimalizačnej úlohy (3.3). Za počiatočný kapitál berieme $B = 1$. Na konci stanoveného obdobia požadujeme čiastku aspoň

Stupeň	Počet uzlov
1	1
2	20
3	200
4	800
5	3 200

Tabuľka 5.8: Počet uzlov v jednotlivých stupňoch.

$G = 1,001$. Transakčné náklady spojené s nákupom a predajom aktív predpokladáme rovnaké v hodnote $c_b = c_s = 0,01$ %. Aby sme zabránili investovaniu všetkého majetku do jedného aktíva, stanovíme hornú hranicu pre nákup aktíva na 0,7. Za hladinu podmienenej hodnoty v riziku volíme $\alpha_2 = 0,80$ v druhom stupni a $\alpha_t = 0,95$ pre $t = 3, \dots, 5$. Parameter λ_t , ktorým určujeme váhu k podmienenej hodnote v riziku v danom stupni, nastavíme na $\lambda_t = \frac{t}{T}$, $t = 2, \dots, T$. To znamená, že v druhom stupni je $\lambda_2 = \frac{2}{5}$ a v piatom stupni je $\lambda_5 = 1$. Týmto spôsobom zvyšujeme averziu k riziku smerom ku koncu investičného obdobia. Takto definovaný model bol vyriešený pomocou softvéru GAMS za približne 32 minút. Hodnota účelovej funkcie vyšla 0,86.

V tabuľke 5.9 je zobrazená priemerná investičná stratégia cez všetky uzly v danom stupni. Ide o finančné čiastky, za ktoré radí model kúpiť, alebo predat jednotlivé aktíva v každom stupni. V prvom stupni radí optimalizačný model

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,700	0,300	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,007	0,000	0,043	0,000	0,008
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,058	0,000
3	nákup	0,017	0,026	0,019	0,000	0,022	0,058
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,142	0,000	0,000
4	nákup	0,020	0,019	0,035	0,000	0,046	0,018
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,138	0,000	0,000

Tabuľka 5.9: Priemerná investičná stratégia cez všetky uzly stupňa t .

investovať maximálnu povolenú čiastku do štvrtého aktíva a zbytok do piateho. V druhom stupni model navrhuje časť z piateho aktíva predat a dokúpiť druhé, štvrté a šieste aktívum. V treťom a štvrtom stupni model radí predat časť zo štvrtého aktíva a investovať do zvyšných aktív.

V ďalších tabuľkách uvedieme investičnú stratégiu v prípade najlepšieho a najhoršieho scenára. Prvý spôsob, akým určíme najlepší a najhorší scenár je výška finálneho kapitálu na konci sledovaného obdobia. Scenár, pri ktorom je finálny kapitál najnižší, definujeme ako najhorší scenár. Naopak scenár, pri ktorom je finálny kapitál najvyšší, definujeme ako najlepší scenár. V tabuľke 5.10 je uvedená investičná stratégia v prípade najlepšieho scenára.

V prípade najlepšieho scenára radí model investovať maximálnu možnú čiastku do štvrtého aktíva a zbytok do piateho aktíva. Všetky rozhodnutia na nákup a predaj sa robia medzi štvrtým a piatym aktívom. Takýmto spôsobom získame na konci sledovaného obdobia finálny kapitál vo výške 2,891.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,700	0,300	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,410	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,410	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,700	0,000	0,000

Tabuľka 5.10: Investičná stratégia s najvyšším finálnym kapitálom.

V tabuľke 5.11 je uvedená investičná stratégia v prípade najhoršieho scenára.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,700	0,300	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,300	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,300	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.11: Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.

V prípade najhoršieho scenára radí model investovať maximálnu možnú čiastku do štvrtého aktíva a zbytok do piateho aktíva. Takto zostavené portfólio radí držať až do tretieho stupňa, kedy odporúča predat časť štvrtého aktíva a investovať do tretieho. Pri takejto stratégii získame finálny majetok vo výške 0,305.

Druhý spôsob, akým definujeme najlepší a najhorší scenár, je pomocou váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku v rámci daného scenára v stupňoch 2 až 4. Scenár, pre ktorý je vážený súčet podmienených hodnôt v riziku najnižší, definujeme ako najlepší scenár. Scenár, pre ktorý je vážený súčet podmienených hodnôt v riziku najvyšší, definujeme ako najhorší scenár. Podmienené hodnoty v riziku počítame iba do štvrtého stupňa, preto najlepšie (a najhoršie) scenáre nie sú určené jednoznačne. To však nevadí, pretože aj rozhodnutia robíme iba do štvrtého stupňa, a teda budú rovnaké pre každý zväzok scenárov idúcich z daného uzla vo štvrtom stupni. V tabuľke 5.12 je uvedená investičná stratégia v prípade (ľubovlného) najlepšieho scenára.

Model v tomto prípade radí kúpiť štvrté a piate aktívum v prvom stupni, v druhom predat časť štvrtého aktíva a dokúpiť piate a druhé aktívum. V treťom stupni za peniaze z predaja druhého a štvrtého aktíva kúpiť šieste aktívum. V štvrtom stupni radí model peniaze získané z predaja šiesteho aktíva investovať do druhého a tretieho aktíva. Takýmto spôsobom bude mať vážený súčet podmienených hodnôt v riziku hodnotu 0,434.

V tabuľke 5.13 je uvedená investičná stratégia s najvyšším súčtom podmienených hodnôt v riziku. Môžeme si všimnúť, že investičná stratégia je rovnaká, ako investičná stratégia pre scenár s najvyšším dosiahnutým finálnym kapitálom

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,700	0,300	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,180	0,000	0,000	0,050	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,230	0,000	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,660
	predaj	0,000	0,190	0,000	0,470	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,090	0,700	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,790

Tabuľka 5.12: Investičná stratégia s najnižším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,700	0,300	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,410	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,410	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,700	0,000	0,000

Tabuľka 5.13: Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.

na konci sledovaného obdobia. Pri dodržaní danej stratégie vyjde vážený súčet podmienených hodnôt v riziku 0,453.

V tejto časti sme riešili optimalizačný problém s použitím po stupňoch nezávislého stromu. Výhodou po stupňoch nezávislého stromu je hlavne jeho ľahká konštrukcia, kedy nám v každom stupni t stačí vygenerovať potomkov iba jedného uzla zo stupňa $t - 1$ a následne ich použiť ako potomkov ostatných uzlov zo stupňa $t - 1$.

5.3 Scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca

V predchádzajúcej časti sme na reprezentáciu náhodného výnosu použili po stupňoch nezávislý scenárový strom. V tejto časti predpokladáme, že realizácie náhodného výnosu závisia od stavu markovského reťazca s diskretným časom v jednotlivých stupňoch. Budeme uvažovať markovský reťazec, ktorý môže nadobúdať dva stavy, 0 a 1. Obdobie nízkych výnosov, prípadne vysokej volatility výnosov v rámci jedného roka budeme nazývať krízové obdobie a priradíme mu stav 1. Obdobie, ktoré nie je krízové, označíme ako bezkrízové a jemu priradíme stav 0. Stav markovského reťazca v koreni stromu definujeme ako 0. Pomocou metódy momentov vygenerujeme v každom stupni rovnaký počet realizácií výnosov ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu, ale polovicu z nich za predpokladu krízového obdobia a druhú polovicu pre prípad bezkrízového obdobia. Dostaneme takto rovnaký počet scenárov ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu (tabuľka 5.8). Program Mathematica vygeneroval takto definovaný strom za približne 22 sekúnd.

Takto vygenerovaný strom použijeme na riešenie optimalizačného modelu (3.3). Všetky parametre optimalizačného modelu ponecháme rovnaké, ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu. Program GAMS spočítal takto definovaný optimalizačný model za približne 35 minút. Hodnota účelovej funkcie vyšla 0,63, teda menej, ako v modeli s po stupňoch nezávislým stromom. V tabuľke 5.14 je uvedená priemerná investičná stratégia cez všetky uzly v danom stupni. Model

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,160	0,140	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,351	0,036	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,387	0,000
3	nákup	0,000	0,001	0,000	0,509	0,000	0,022
	predaj	0,000	0,000	0,509	0,000	0,025	0,000
4	nákup	0,085	0,017	0,000	0,000	0,109	0,107
	predaj	0,000	0,000	0,013	0,304	0,000	0,000

Tabuľka 5.14: Priemerná investičná stratégia pre jednotlivé stupne.

odporúča investovať v prvom stupni maximálnu povolenú čiastku do piateho aktíva, zvyšok rozloží do tretieho a štvrtého aktíva. V priebehu jednotlivých stupňov model radí investovať aspoň nejakú čiastku do každého z daných aktív.

Podobne, ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu, uvedieme investičnú stratégiu pre najlepší a najhorší scenár, v zmysle výšky finálneho kapitálu a váženej súčtu podmienených hodnôt v riziku. V tabuľke 5.15 je uvedená investičná stratégia pre najlepší scenár z pohľadu výšky finálneho kapitálu. Model nám odporúča investovať v prvom stupni maximálnu možnú čiastku do piateho aktíva a zvyšok do tretieho a štvrtého aktíva. V treťom stupni radí model zahrnúť do portfólia aj šieste a druhé aktívum a štvrtom stupni prvé aktívum. Takýmto spôsobom dosiahneme finálny kapitál vo výške 6,874. V tabuľke 5.16 uvedieme investičnú stratégiu pre scenár s najnižším dosiahnutým finálnym kapitálom. Model v tomto prípade radí investovať do rovnakých troch aktív v prvom stupni, ako v prípade

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,160	0,140	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,351	0,036	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,387	0,000
3	nákup	0,000	0,001	0,000	0,509	0,000	0,022
	predaj	0,000	0,000	0,509	0,000	0,025	0,000
4	nákup	0,085	0,017	0,000	0,000	0,109	0,107
	predaj	0,000	0,000	0,013	0,304	0,000	0,000

Tabuľka 5.15: Investičná stratégia s najvyšším finálnym kapitálom.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,160	0,140	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,260	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,090	0,170	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.16: Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.

najlepšieho scenára. Rozdielom medzi danými dvoma stratégiami sú rozhodnutia v druhom až štvrtom stupni. V prípade držania sa investičnej stratégie pre najhorší scenár dosiahneme finálnu výšku kapitálu 0,137.

Ďalej uvedieme najlepšiu a najhoršiu stratégiu v zmysle váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku. V tabuľke 5.17 je uvedená investičná stratégia pre scenár s najnižším súčtom podmienených hodnôt v riziku. Optimalizačný model

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,160	0,140	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,260	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,090	0,170	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,440	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,440	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.17: Investičná stratégia s najnižším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.

radí na začiatku investovať maximálnu možnú čiastku do piateho aktíva a zbytok do tretieho a štvrtého. Až do konca odporúča preskupovať majetok len v rámci daných troch aktív. Výsledkom danej stratégie je vážený súčet podmienených hodnôt v riziku vo výške 0,370. V tabuľke 5.18 je uvedená investičná stratégia pre scenár s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku. Aj v tomto prípade radí model tvoriť portfólio len z tretieho, štvrtého a piateho aktíva. Ta-

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,160	0,140	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,590	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,170	0,420	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,310	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	1,010	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,370	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,370	0,000	0,000

Tabuľka 5.18: Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.

kouto investičnou stratégiou dosiahneme vážený súčet podmienených hodnôt v riziku v hodnote 0,380.

V tejto časti sme riešili optimalizačný problém pomocou scenárového stromu závislom na stavoch markovského reťazca. V porovnaní s po stupňoch nezávislým stromom je strom závislý na markovskom reťazci náročnejší na konštrukciu, pretože uzly generujeme v závislosti na krízovom a bezkrízovom období. Po vygenerovaní však vieme zostrojiť strom kombinovaný s markovským reťazcom ako jeden klasický scenárový strom, ktorý môžeme použiť v optimalizačnom modeli, bez nutnosti zmeny modelu. Výhodou takto definovaného stromu môže byť lepší popis rozdelenia výnosov, vďaka generovaniu uzlov pre krízové a bezkrízové obdobie zvlášť. Hodnota účelovej funkcie vyšla menej, ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu, generovanie stromu a samotný výpočet modelu trvali o niečo dlhšie.

5.4 Použitie scenárovej mriežky

V predchádzajúcej časti sme na reprezentáciu náhodného výnosu použili scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca s diskretným časom. O markovskom reťazci sme predpokladali, že nadobúda dva stavy, 0 a 1, interpretované ako bezkrízové a krízové obdobie. V tejto časti zahrnieme do modelu navyše štruktúru scenárovej mriežky, aplikovanú na rozhodnutia o nákupe a predaji aktíva v uzle u . V každom uzle v stupni t budeme brať do úvahy navyše informáciu o počte krízových období od prvého stupňa až do stupňa t . V prípade rovnakého počtu krízových období vo viacerých uzloch v stupni t budeme požadovať od modelu rovnaké rozhodnutie o kúpe a predaji i -tého aktíva, bez ohľadu na výnos v daných uzloch. Takto definovaný optimalizačný model riešime s rovnakými vstupnými parametrami, ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch. Program GAMS spočítal model za približne 32 minút. Hodnota účelovej funkcie vyšla 0,66, teda podobne, ako v predchádzajúcom modeli.

V tabuľke 5.19 je uvedená priemerná investičná stratégia cez uzly daného stupňa.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,300	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,681	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,215	0,466	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,527	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,527	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.19: Priemerná investičná stratégia pre jednotlivé stupne.

Model radí investovať v prvom stupni maximálnu povolenú čiastku do piateho aktíva, zbytok do štvrtého. Počas celého obdobia model investuje iba do troch aktív, tretieho, štvrtého a piateho.

Podobne, ako v predchádzajúcich prípadoch, vypíšeme investičnú stratégiu pre najlepší a najhorší scenár, v zmysle výšky finálneho kapitálu a váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku. V tabuľke 5.20 je uvedená investičná stratégia pre najlepší scenár v zmysle výšky finálneho kapitálu. Model nám radí investovať v

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,300	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.20: Investičná stratégia s najvyšším finálnym majetkom.

prvom stupni maximálnu možnú čiastku do piateho aktíva a zbytok do štvrtého aktíva. V rámci celého obdobia model navrhuje len jednu zmenu, a to predanie časti piateho aktíva a investovanie do štvrtého. Takáto stratégia nám dá finálny kapitál vo výške 7,124. V tabuľke 5.21 uvedieme investičnú stratégiu pre scenár s najnižším dosiahnutým finálnym kapitálom.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,300	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.21: Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.

Investičná stratégia pre najhorší scenár je rovnaká ako stratégia pre najlepší scenár. Takáto situácia môže nastať, pretože rozhodnutie na nákup a predaj prebehlo iba v druhom stupni a práve v druhom stupni sú uzly v oboch scenároch s rovnakým počtom krízových období, preto im priradíme rovnaké rozhodnutie. Finálna hodnota kapitálu je ale napriek rovnakej stratégii rôzna. V prípade najhoršieho scenáru ide o čiastku 0,146. Ďalej uvedieme najlepší a najhorší scenár z pohľadu váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku. V tabuľke 5.22 je uvedená investičná stratégia pre scenáre s najnižším súčtom podmienených hodnôt v riziku. Investičná stratégia je rovnaká, ako v prípade stratégie pre najvyšší fi-

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,300	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,170	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.22: Investičná stratégia s najnižším súčtom podmienených hodnôt v riziku.

nálny kapitál. V tomto prípade vážený súčet podmienených hodnôt v riziku 0,356. V tabuľke 5.23 je uvedená investičná stratégia pre scenáre s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku. Model radí tvoriť portfólio len v rámci tretieho až piateho aktíva. Vážený súčet podmienených hodnôt v riziku bude v tomto prípade 0,369.

V tejto časti sme použili scenárový strom závislý na markovskom reťazci, v kombinácii so štruktúrou scenárovej mriežky, aplikovanej na rozhodnutia v optimalizačnom modeli. Pri konštrukcii takto definovaného stromu vychádzame zo

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,000	0,000	0,000	0,300	0,700	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	nákup	0,000	0,000	0,690	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,220	0,470	0,000
3	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,540	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,540	0,000	0,000	0,000
4	nákup	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	predaj	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabuľka 5.23: Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.

scenárového stromu závislom na markovskom reťazci, pričom potrebujeme navyše informáciu a historickom počte krízových období až do daného uzla u . Výhodou oproti stromu bez zavedenia mriežky môže byť menší počet rôznych premenných vstupujúcich do optimalizačného modelu. Hodnota účelovej funkcie vyšla menej, ako v prípade po stupňoch nezávislého stromu a o niečo vyššia, ako v prípade stromu závislom na markovskom reťazci bez mriežkovej štruktúry. Použitím mriežkovej štruktúry sa o niečo skrátila doba výpočtu optimalizačného modelu. Nevýhodou definovania scenárovej mriežky na základe počtu krízových období môže byť nútienie modelu do rovnakého rozhodnutia v aktuálne krízovom aj bezkrízovom období.

Záver

V práci sme sa venovali úlohám viacstupňového stochastického programovania v kontexte rôznej reprezentácie náhodného procesu. V prvej kapitole sme popísali všeobecnú úlohu matematického programovania a od jednostupňovej deterministickej formulácie sme prešli k viacstupňovému stochastickému programovaniu. V druhej kapitole sme sa podrobnejšie zaoberali scenárovými štruktúrami a ich vlastnosťami. Popísali sme konštrukciu všeobecného scenárového stromu a uviedli sme tri špeciálne príklady, po stupňoch nezávislý scenárový strom, scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca a scenárovú mriežku. V tretej kapitole sme za optimalizačnú úlohu zvolili problém privátneho investora, kde model vyberá portfólio, ktoré minimalizuje vážený súčet podmienených hodnôt v riziku v jednotlivých stupňoch. Vo štvrtej kapitole sme uviedli heuristický algoritmus, ktorého cieľom je vygenerovať daný počet realizácií z požadovaného rozdelenia daného prvými štyrmi momentmi a korelačnou maticou.

V praktickej časti sme zostrojili tri scenárové štruktúry a dosadili ich do optimalizačného modelu. Pomocou metódy rekurzívnych rezíduí sme v dátach identifikovali krízové a bezkrízové obdobia a podľa toho dátový súbor rozdelili. Krízové a bezkrízové obdobia sme reprezentovali pomocou stavov markovského reťazca. Pre každú stromovú štruktúru sme uviedli priemernú investičnú stratégiu cez všetky uzly v danom stupni, investičnú stratégiu v prípade najhoršieho scenára a investičnú stratégiu v prípade najlepšieho scenára. Najhorší a najlepší scenár sme definovali v zmysle výšky finálneho kapitálu a v zmysle váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku.

Hlavným prínosom práce je aplikácia zložitejších scenárových štruktúr v optimalizačnom modeli investora, konkrétne scenárového stromu závislého na stavoch markovského reťazca a scenárovej mriežky. Cieľom pridania stavov markovského reťazca bolo lepšie zachytenie rozdelenia výnosov získaných z našich dát. Definovanie markovského reťazca pomocou mriežky redukovalo počet rôznych premenných v optimalizačnom modeli, čo mierne zlepšilo dobu výpočtu modelu. Počet stupňov optimalizačného modelu sme stanovili na päť.

Prácu je možné rozšíriť viacerými smermi. Prvým možným rozšírením je vygenerovanie väčšieho počtu scenárových stromov a pozorovanie stability modelu, prípadne generovanie stromov s väčším počtom scenárov. Ďalším rozšírením môže byť skúmanie investičnej stratégie vo viac ako päťstupňovom prípade.

Zoznam použitej literatúry

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, pages 203–228.
- BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. a SHETTY, C. M. (2006). *Nonlinear programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York.
- BIRGE, J. R. a LOUVEAUX, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Second edition. Springer, New York. ISBN 978-1-4614-0236-7.
- BLACK, F., DERMAN, E. a TOY, W. (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, **46**(1), 33.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- DUPAČOVÁ, J. a LACHOUT, P. (2011). *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-176-7.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0840-6.
- GÜLPINAR, N., RUSTEM, B. a SETTERGREN, R. (2003). Multistage Stochastic Mean-Variance Portfolio Analysis with Transaction Costs. *Innovations in Financial and Economic Networks*, **3**(7), 46–63.
- HØYLAND, K., KAUT, M. a WALLACE, S. W. (2003). A Heuristic for Moment-Matching Scenario Generation. *Computational Optimization and Applications*, **24**(2-3), 169–185.
- KALL, P. a MAYER, J. (2005). *Stochastic linear programming: Models, Theory and Computation*. Springer, New York. ISBN 0-387-23385-7.
- LAURENT, A. (2006). *A Scenario Generation Algorithm for Multistage Stochastic Programming: Application for Asset Allocation Models with Derivatives*. Ph.D. thesis. Faculty of Economics, Department of Finance, University of Lugano, Lugano, Switzerland.
- MALÁ, A. (2014). *Scenárové stromy v úlohách stochastického programování*. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- PHILPOTT, A. B. a DE MATOS, V. L. (2012). Dynamic sampling algorithms for multi-stage stochastic programs with risk aversion. *European Journal of Operational Research*, **218**, 470–483.
- ROCKAFELLAR, R. T. a URYASEV, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance*, **26**(7), 1443–1471.

- SHAPIRO (2009). On a time consistency concept in risk averse multistage stochastic programming. *Operations Research Letters*, **37**, 143–147.
- SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D. a RUSZCZYŃSKI, A. (2009). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Second edition. Siam and mps, Philadelphia. ISBN 978-1-611973-42-6.

Zoznam obrázkov

1.1	Grafické znázornenie rozhodovacieho procesu v úlohe viacstupňového stochastického programovania.	6
2.1	Uzly v scenárovom strome.	10
2.2	Realizácie v scenárovom strome.	11
2.3	Po stupňoch nezávislý scenárový strom.	16
2.4	Stavy markovského reťazca.	17
2.5	Scenárový strom závislý na stave Markovského reťazca.	20
2.6	Spájanie uzlov scenárového stromu.	21
2.7	Realizácie binomickej scenárovej mriežky.	22
2.8	Uzly binomickej scenárovej mriežky.	22
5.1	Rekurzívne rezíduá.	38

Zoznam tabuliek

4.1	Vlastnosti rozdelenia náhodného vektoru ξ	29
5.1	Základné popisné štatistiky šiestich aktív, ktoré použijeme na skladanie portfólia.	36
5.2	Korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.	37
5.3	Pravdepodobnosti prechodu medzi stavmi markovského reťazca.	39
5.4	Základné popisné štatistiky pre bezkrízové obdobie.	39
5.5	Základné popisné štatistiky pre krízové obdobie.	40
5.6	Prvé štyri momenty štandardizovaných výnosov.	41
5.7	Prvé štyri momenty transformovaných výnosov na základe vety 2.	41
5.8	Počet uzlov v jednotlivých stupňoch.	42
5.9	Priemerná investičná stratégia cez všetky uzly stupňa t	42
5.10	Investičná stratégia s najvyšším finálnym kapitálom.	43
5.11	Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.	43
5.12	Investičná stratégia s najnižším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.	44
5.13	Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.	44
5.14	Priemerná investičná stratégia pre jednotlivé stupne.	45
5.15	Investičná stratégia s najvyšším finálnym kapitálom.	46
5.16	Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.	46
5.17	Investičná stratégia s najnižším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.	46
5.18	Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.	47
5.19	Priemerná investičná stratégia pre jednotlivé stupne.	48
5.20	Investičná stratégia s najvyšším finálnym majetkom.	48
5.21	Investičná stratégia s najnižším finálnym kapitálom.	49
5.22	Investičná stratégia s najnižším súčtom podmienených hodnôt v riziku.	49
5.23	Investičná stratégia s najvyšším váženým súčtom podmienených hodnôt v riziku.	50

Zoznam použitých skratiek

- \mathbb{N} množina prirodzených čísel
- \mathbb{R} množina reálnych čísel
- M množina prípustných riešení
- f účelová funkcia
- \mathcal{X} definičný obor funkcií obmedzení
- z.p. za podmienky, za podmienok
- Ω neprázdna množina
- \mathcal{A} σ -algebra podmnožín množiny Ω
- (Ω, \mathcal{A}) merateľný priestor
- P pravdepodobnostná miera na \mathcal{A}
- (Ω, \mathcal{A}, P) pravdepodobnostný priestor
- s.i. skoro iste