



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Anna Asipenka

Agregace závislých rizik

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucí mé diplomové práce RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D za odborné vedení, trpělivost a cenné rady při zpracování této práce.

Název práce: Agregace závislých rizik

Autor: Bc. Anna Asipenka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme výpočtem ekonomického kapitálu pro celkovou ztrátu vzniklou součtem dílčích závislých ztrát, jejichž závislost je popsána archimédovskými a hierarchickými archimédovskými kopulami. Nejdříve se zavádí pojem ekonomického kapitálu a způsoby jeho agregace. Poté se uvádějí základní definice a vlastnosti kopul, také definujeme míry závislosti. Potom se zabýváme archimédovskými kopulami a jejich simulací, uvádíme také nejrozšířenější rodiny archimédovských kopul. Dále jsou definovány hierarchické archimédovské kopuly spolu s algoritmem na jejich simulaci. Na závěr uvádíme metody odhadu parametrů kopul a rekurzivní algoritmus odhadu struktury hierarchické archimédovské kopuly. V poslední kapitole provádíme simulační studie vybraných modelů s použitím hierarchických archimédovských kopul.

Klíčová slova: ekonomický kapitál, archimédovské kopuly, hierarchické archimédovské kopuly

Title: Aggregation of dependent risks

Author: Bc. Anna Asipenka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we are interested in the calculation of economic capital for the total loss which is the sum of partial dependent losses, whose dependence structure is described by Archimedean and hierarchical Archimedean copulas. Firstly, the concept of economic capital and the ways of its aggregation are introduced. Then the basic definitions and properties of copulas are listed, as well as the dependence measures. After that we work with definition and properties of Archimedean copulas and their simulation. We also mention the most popular families of Archimedes copulas. Next, hierarchical Archimedean copulas are defined, as well as the algorithm for their sampling. Finally, we present methods for estimating the parameters of copulas and the recursive algorithm for estimating the hierarchical Archimedean copula structure. In the last chapter we perform simulation studies of selected models using hierarchical Archimedes copulas.

Keywords: economic capital, Archimedean copulas, hierarchical Archimedean copulas

Obsah

Úvod	3
1 Ekonomický kapitál	4
1.1 Výpočet ekonomického kapitálu	4
1.2 Agregace součtem	5
1.3 Agregace korelační maticí	5
1.4 Použití kopul pro výpočet ekonomického kapitálu	6
2 Úvod do kopul	7
2.1 Základní definice a vlastnosti	7
2.1.1 Invariantní vlastnosti kopuly	8
2.1.2 Hustota kopul	8
2.2 Fréchetovy–Hoeffdingovy meze	9
2.3 Míry závislosti	9
2.3.1 Pořadová korelace	9
2.3.2 Koeficienty chvostové závislosti	11
3 Archimédovské kopuly	12
3.1 Dvojozměrné archimédovské kopuly	12
3.2 Vícerozměrné archimédovské kopuly	13
3.3 Simulování archimédovských kopul	14
3.4 Příklady vícerozměrných archimédovských kopul	14
4 Hierarchické archimédovské kopuly	17
4.1 Plně vnořené archimédovské kopuly	17
4.2 Částečně vnořené archimédovské kopuly	18
4.3 Simulování hierarchických archimédovských kopul	19
5 Odhad parametrů a struktury kopul	21
5.1 Metoda maximální věrohodnosti (ML)	21
5.2 Dvojkroková metoda (IFM)	22
5.3 Kanonická maximální věrohodnost (CML)	22
5.4 Odhad struktury HAC	23
6 Modelování mnohorozměrných distribučních funkcí	25
6.1 Částečně vnořené archimédovské kopuly	26
6.2 Plně vnořené archimédovské kopuly	33
Závěr	37
Seznam použité literatury	38
Seznam obrázků	40
Seznam tabulek	41

A Přílohy	42
A.1 Pravděpodobnostní rozdělení	42
A.1.1 Gama rozdělení	42
A.1.2 Logaritmicko-normální rozdělení	42
A.1.3 Paretovo rozdělení	42
A.1.4 Weibullovo rozdělení	43

Úvod

Ekonomický kapitál je důležitým nástrojem řízení rizik v pojišťovnách. V Solventnosti II je výpočet solventnostního kapitálového požadavku a minimálního kapitálového požadavku postaven na základě teorie ekonomického kapitálu. Tímto je inspirován vývoj interních modelů pro výpočet ekonomického kapitálu. V této práci se budeme zabývat modelováním mnohorozměrných rozdělání, jejichž závislostní struktura je daná archimédovskými a hierarchickými archimédovskými kopulami, a aplikujeme je na výpočet ekonomického kapitálu pro celkovou ztrátu vzniklou součtem dílčích závislých ztrát.

První kapitola této práce bude věnována pojmu ekonomického kapitálu a problematice agregace kapitálu. Budou uvažovány některé standardní metody agregace kapitálu: agregace součtem a agregace korelační maticí. Následně prodiskutujeme jejich nedostatky. Při výkladu o definici a vlastnostech ekonomického kapitálu budeme vycházet z McNeil a kol. (2005).

V druhé kapitole bude definován pojem kopuly, uvedeme také vlastnosti kopul, které budeme potřebovat pro další práci. V této kapitole se budeme držet textů McNeil a kol. (2005); Nelsen (2006), odkud budeme čerpat potřebné informace. Definujeme také pořadové koeficienty závislosti, např. Kendallovo tau, Spearmanovo rho a chovstovou závislost. V další práci se k popisu závislostí budou uvažovat zejména archimédovské kopuly a hierarchické archimédovské kopuly.

Třetí kapitola bude věnována archimédovským kopulám. Nejdřív definujeme dvojrozměrné archimédovské kopuly a uvedeme jejich vlastnosti, pak tuto strukturu zobecníme pro vícerozměrný případ. Uvedeme nutnou a postačující podmínku, která zaručuje, aby daná struktura byla kopulou. Na konci kapitoly uvedeme Marshalův-Olkinův simulační algoritmus, který budeme potřebovat pro další práci. V poslední části kapitoly se seznámíme s nejrozšířenějšími rodinami kopul a jejich explicitním zápisem pro vícerozměrný případ, který čerpáme z Cherubini a kol. (2004).

Ve čtvrté kapitole se seznámíme s pojmem hierarchických archimédovských kopul a dvěma jejich typy. Stejně jako v předchozí kapitole, na konci uvedeme algoritmy, které dovolují simulovat tyto kopuly.

Samostatnou kapitolu zaslouží odhad parametrů a struktury kopul podle Cherubini a kol. (2004). V této kapitole uvedeme nejpoužívanější algoritmy odhadu parametrů marginálních rozdělání a parametrů kopul, diskutujeme jejich výhody a nevýhody. Druhá část kapitoly je věnována algoritmu odhadu struktury HAC, který čerpáme z Okhrin a kol. (2013a) a Okhrin a kol. (2013b).

V poslední kapitole provedeme simulační studie vybraných modelů s použitím hierarchických archimédovských kopul. Simulační studie uskutečníme v softwaru R.

1. Ekonomický kapitál

V této kapitole připomeneme pojem ekonomického kapitálu a způsoby jeho výpočtu na základě dílčích členů. Budeme vycházet z McNeil a kol. (2005); Nguyen a Molinari (2011); Tang a Valdez (2009). Nejdříve bude uvedena základní metoda, která nevyžaduje žádné informace o závislostní struktuře dat. Dále přejdeme na druhou metodu, která používá odhad korelací mezi dílčími členy na základě historických dat.

1.1 Výpočet ekonomického kapitálu

Ekonomický kapitál (*Economic Capital, EC*) je jádrem finančního řízení bank a pojišťoven a je nástrojem pro řízení rizik. Účelem ekonomického kapitálu je poskytnout finanční podklad pro nepříznivé situace, pokud ztráty překročí očekávanou hodnotu. Tento finanční polštář nadále udržuje schopnost pojistitele pokračovat ve splácení svých závazků a ve většině případů také pokračovat v sjednávání nových obchodů. Pojišťovny měří a řídí kapitál na široké škále různých rizik. Existuje tedy potřeba agregace ztrát, kde se rozdělení rizik liší. Všeobecně je důležité znát strukturu závislosti mezi různými riziky a pojistnými produkty nad rámec lineární závislosti.

V dalších částech této kapitoly se budeme zabývat otázkou stanovení agregovaného ekonomického kapitálu pojišťovny s několika riziky, pokud ztráty jsou závislé v určitém smyslu.

Nechť X je reálná náhodná veličina popisující celkovou ztrátu za určité období a $X = \sum_{i=1}^d X_i$, kde X_1, \dots, X_d jsou dílčí ztráty na jednotlivých rizicích. Pak ekonomický kapitál představuje rozdíl mezi mírou souhrnného rizika $\rho(X)$ a očekávanou celkovou ztrátou $E(X)$, tj.

$$EC(X) = \rho(X) - E(X). \quad (1.1)$$

V praxi nejvíc používanou mírou rizika je hodnota v riziku (*Value at Risk, VaR*). Solventnost II (2009) používá VaR jako měřítko rizika k určení úrovně kapitálového požadavku. Obecně VaR je jednostranný kvantil pravděpodobnostního rozdělení celkové ztráty X . t.j.

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{l : F_X(l) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha), \quad (1.2)$$

kde $\alpha \in (0, 1)$ je požadovaná hladina spolehlivosti a F_X je distribuční funkce náhodné veličiny X .

Požadovanou hladinu spolehlivosti můžeme stanovit rovnou z textu směrnice evropského parlamentu Solventnost II (2009):

„*Solventnostní kapitálový požadavek odpovídá hodnotě v riziku primárního kapitálu pojišťovny nebo zajišťovny na hladině spolehlivosti 99,5% v časovém horizontu jednoho roku.*“

Můžeme si všimnout, že Solventnost II (2009) nepracuje přímo se ztrátou. Náhodné veličiny ve smyslu Solventnosti II představují pokles kapitálu v ročním horizontu, což může být způsobeno nárůstem závazků nebo poklesem hodnoty aktiv. Avšak nadále v naší práci budeme pracovat s náhodnými veličinami X, X_1, \dots, X_d představujícími ztráty, které jsme zavedli výše.

Existuje několik metod, které umožňují vyjádřit celkový ekonomický kapitál $EC(X)$ na základě jeho dílčích členů $EC(X_1), \dots, EC(X_d)$. Nejjednodušší metodou je metoda agregace součtem.

1.2 Agregace součtem

První a nejjednodušší způsob výpočtu celkového ekonomického kapitálu je založen na součtu dílčích členů, ekonomických kapitálů pro jednotlivá rizika. Matematicky se odhad $EC(X)$ dá zapsat jako:

$$\widehat{EC}(X) = \sum_{i=1}^d EC(X_i). \quad (1.3)$$

Použijeme-li vztah ze vzorce (1.1) a zvolíme-li za míru rizika Var , dostaneme:

$$\widehat{EC}(X) = \sum_{i=1}^d (Var_{\alpha}(X_i) - E X_i) = \sum_{i=1}^d Var_{\alpha}(X_i) - \sum_{i=1}^d E X_i \quad (1.4)$$

Dá se očekávat $EC(X) < \sum_{i=1}^d EC(X_i)$. Rovnost nastává v případě komonotónních veličin (viz. McNeil a kol. (2005), Tvzení 6.15, str. 250).

Definice 1. Řekneme, že náhodné veličiny X_1, \dots, X_d jsou komonotónní, pokud existuje náhodná veličina Z a neklesající funkce t_1, \dots, t_d tak, že

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{D}{=} (t_1(Z), \dots, t_d(Z)).$$

Tato metoda agregace kapitálu nebere v úvahu závislostní strukturu rizik, odhad (1.4) vyjadřuje situaci, kdy všechny nejhorší scénáře nastanou najednou. V ekonomickém světě se nemůže předpokládat, že jsou všechna rizika komonotónní, proto tato metoda není dostačující k popsání aktuální rizikové situace společnosti.

1.3 Agregace korelační maticí

Další způsob agregace kapitálu je agregace korelační maticí, kdy se při výpočtu celkového ekonomického kapitálu bere v úvahu lineární korelace mezi jednotlivými riziky.

Nechť X_1, \dots, X_d jsou náhodné veličiny, označme

$$\rho_{i,j} = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{var X_i \cdot var X_j}}. \quad (1.5)$$

Koeficient (1.5) se nazývá Pearsonův korelační koeficient a měří lineární závislost mezi náhodnými veličinami. Pokud je $|\rho_{i,j}| = 1$, můžeme říkat, že náhodné veličiny X_i a X_j jsou dokonale lineárně závislé, t.j. $X_j = \alpha + \beta X_i$ skoro jistě, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \neq 0$.

S použitím korelačních koeficientů se celkový ekonomický kapitál dá odhadnout jako:

$$\widehat{EC}(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{i,j} \cdot EC(X_i) \cdot EC(X_j)}. \quad (1.6)$$

Odhad (1.6) je roven $EC(X)$, kde jako míru rizika zvolíme VaR , pokud vektor $(X_1, \dots, X_d)^\top$ má d -rozměrné eliptické rozdělení.

Solventnost II (2009) používá pouze lineární korelace pro popis struktury závislosti. Lineární korelace jsou přirozenou mírou závislosti za předpokladu eliptického rozdělení, jako je například mnohorozměrné normální rozdělení. Zatímco jsou výpočetně nenáročné, v reálném pojistném světě sdružené rozdělení ztrát obvykle není mnohorozměrné normální, často je rozdělení pojistných ztrát zešikmené a má těžké chvosty. Navíc je Pearsonův koeficient korelace definován jen pokud směrodatné odchylky náhodných veličin X_i a X_j z definice (1.5) jsou konečné a nenulové, toto omezení může způsobit problémy při uvažování veličin s těžkými chvosty. Lineární korelace též nedokážou zachytit celou strukturu závislosti, která existuje mezi ztrátami.

1.4 Použití kopul pro výpočet ekonomického kapitálu

Existuje flexibilnější způsob modelování závislosti než pomocí kovarianční matice - kopuly. Používá se velké množství kopul, které se liší svými matematickými vlastnostmi, jako je například symetrie, chvostová závislost apod. Kopuly také umožňují vytvářet modely, které víc odpovídají realitě, umožňují modelovat nejen lineární závislost, ale i uvažovat složitější závislostní struktury. Tato matematická struktura nám umožní prozkoumat dopad závislosti rizik na celkový požadovaný ekonomický kapitál.

V této práci se zaměříme na modelování vícerozměrných distribučních funkcí zejména pomocí archimédovských a hierarchických archimédovských kopul. Ale před tím, než se budeme podrobněji zabývat modelováním závislosti, je třeba uvést základní matematické vlastnosti kopul, které budeme potřebovat v další práci.

2. Úvod do kopul

Následující definice a vlastnosti čerpáme z McNeil a kol. (2005); Nelsen (2006).

2.1 Základní definice a vlastnosti

Definice 2. d -rozměrná kopula je sdružená distribuční funkce, jejíž marginální distribuční funkce jsou distribuční funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0,1]$.

Dále budeme označovat kopulu jako $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d)$. Alternativně se kopula dá definovat následujícím způsobem:

Definice 3. Nechť C je zobrazení ve tvaru $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$. C je kopula právě tehdy, když platí:

- (i) $C(u_1, \dots, u_d)$ je rostoucí pro každé u_i ;
- (ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ pro $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ a $u_i \in [0,1]$;
- (iii) pro všechna $(u_{1,1}, \dots, u_{d,1}), (u_{1,2}, \dots, u_{d,2}) \in [0,1]^d$, kde $u_{i,1} \leq u_{i,2}$ máme

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0. \quad (2.1)$$

Nyní uvedeme Sklarovou větu, která byla poprvé publikovaná v Sklar (1959). Tato věta říká, že každá mnohorozměrná distribuční funkce obsahuje kopulu, a pomocí kopuly a jednorozměrných distribučních funkcí lze zkonstruovat mnohorozměrnou sdruženou distribuční funkci.

Věta 1. (Sklar, 1959)

Nechť F je sdruženou distribuční funkcí vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$, F_i je distribuční funkce X_i pro všechna $i \in \{1, \dots, d\}$. Pak existuje kopula $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ taková, že pro všechna x_1, \dots, x_d z $\hat{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.2)$$

Pokud funkce F_1, \dots, F_d jsou spojité, funkce C je určena jednoznačně, jinak je C jednoznačně definovaná na $F_1(\hat{\mathbb{R}}) \times \dots \times F_d(\hat{\mathbb{R}})$. Naopak, pokud C je kopula a F_1, \dots, F_d jsou jednorozměrné distribuční funkce, pak funkce F definovaná ve vztahu (2.2) je sdružená distribuční funkce mnohorozměrného rozdělení s marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d .

Důkaz věty 1 lze najít v práci Nelsen (2006) str. 18.

Sklarova věta umožňuje vyjádřit kopulu rovnou jako:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\right), u_1, \dots, u_d \in [0,1], \quad (2.3)$$

kde $F_1^{-1}(\cdot), \dots, F_d^{-1}(\cdot)$ jsou kvantilové funkce odpovídající marginálním distribučním funkcím $F_1(\cdot), \dots, F_d(\cdot)$.

Pokud distribuční funkce F je distribuční funkcí eliptického rozdělení (např. normálního rozdělení nebo t -rozdělení), pak je výsledkem *eliptická kopula*. Její nevýhodou je, že kopula (2.3) nemůže být vyjádřena explicitně, protože distribuční funkce F a jednorozměrné marginální funkce F_i mají jen integrální reprezentaci. Jako důsledek vznikla třída *archimédovských kopul*, jejichž konstrukce nevychází ze Sklarovy věty. Podrobněji tato třída bude rozebrána v další kapitole.

Dále definujeme kopulu náhodného vektoru.

Definice 4. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$ je náhodný vektor se sdruženou distribuční funkcí F a F_i je distribuční funkce náhodné veličiny X_i pro všechna $i \in \{1, \dots, d\}$, pak kopulou F (nebo \mathbf{X}) je distribuční funkce C vektoru $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))^\top$.*

2.1.1 Invariantní vlastnosti kopuly

Jednou velmi užitečnou vlastností kopul pro aplikace ve finančním světě je invariance kopuly vůči ryze rostoucí transformaci uvedená v McNeil a kol. (2005) i s důkazem.

Tvrzení 2. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$ je náhodný vektor se spojitými marginálními distribučními funkcemi a kopulou C . Necht T_1, \dots, T_d jsou ryze rostoucí funkce. Potom vektor $T(\mathbf{X}) = (T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))^\top$ má také kopulu C .*

2.1.2 Hustota kopul

Zatím jsme se setkali s teorií kopul ve smyslu distribučních funkcí, ale občas budeme potřebovat hustotu kopul, například, když budeme chtít proložit kopulou data pomocí metody maximální věrohodnosti. Hustota kopuly je dána vztahem:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}. \quad (2.4)$$

Hustotu kopuly c absolutně spojitě sdružené distribuční funkce F s ryze rostoucími spojitými marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d můžeme zapsat jako

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}, \quad (2.5)$$

kde f je sdružená hustota distribuční funkce F , f_1, \dots, f_d jsou marginální hustoty a $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$ jsou odpovídající kvantilové funkce.

Taktéž pro spojitě náhodné veličiny sdruženou hustotu f můžeme zapsat pomocí *kanonické reprezentace*:

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot \prod_{j=1}^d f_j(x_j), \quad (2.6)$$

kde $c(\cdot)$ je hustota daná vztahem (2.4) a f_j jsou marginální hustoty

$$f_j(x_j) = \frac{dF_j(x_j)}{dx_j}.$$

2.2 Fréchetovy–Hoeffdingovy meze

Nyní uvedeme důležité *Fréchetovy–Hoeffdingovy meze* pro kopuly.

Věta 3. *Pro každou kopulu $C(u_1, \dots, u_d)$ máme meze:*

$$\max \left(\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq \min(u_1, \dots, u_d). \quad (2.7)$$

Podrobný důkaz této věty se dá nahlédnout v McNeil a kol. (2005), tvrzení 5.16.

Horní hranice

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d) \quad (2.8)$$

se nazývá *kopula komonotonie*, která je sdruženou distribuční funkcí vektoru $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)^\top$, kde $U_i = F_i(X_i)$ pro komonotónní náhodné veličiny z definice 1.

Dolní hranice

$$W(u_1, \dots, u_d) = \max \left(\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right) \quad (2.9)$$

se nazývá kopula *kontramonotonie* jen pro dvojrozměrný případ, tj. pro $d = 2$. Tato kopula je sdruženou distribuční funkcí vektoru $\mathbf{U} = (U, 1 - U)^\top$, kde U má rovnoměrné rozdělení na $[0, 1]$.

Ještě jedním speciálním případem kopul je *kopula nezávislosti*. Jedná se o kopulu navzájem nezávislých náhodných veličin, která je daná následující funkcí na $[0, 1]^d$:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^d u_j. \quad (2.10)$$

2.3 Míry závislosti

Míry závislosti se ve financích a pojištnictví používají ke kvantitativnímu vyhodnocení struktury závislosti mezi dílčími ztrátami. Rozeznáváme tři nejužívanější typy měř závislosti. V kapitole 1 jsme se již setkali s Pearsonovým korelačním koeficientem, který měří lineární závislost. Druhým typem je pořadová korelace, následuje jí chvostová závislost. V této podkapitole uvedeme definice dvou zbývajících měř závislosti a také uvedeme jejich vyjádření pomocí kopul.

2.3.1 Pořadová korelace

Pořadový korelační koeficient měří úroveň, do které se má tendenci zvyšovat jedna veličina, pokud roste druhá, na rozdíl od Pearsonova koeficientu tato závislost nemusí být lineární. Nejpoužívanější koeficienty pořadové korelace jsou Spearmanův korelační koeficient a Kendallův korelační koeficient.

Spearmanův koeficient pořadové korelace

Mějme náhodné veličiny X_1 a X_2 s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 . Spearmanův koeficient pořadové korelace je roven

$$\rho_s(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)), \quad (2.11)$$

kde ρ značí Pearsonův korelační koeficient daný vztahem (1.5).

Kendallův koeficient pořadové korelace

Nejdřív uvedeme definice *konkordantních* a *diskordantních* dvojic pozorování.

Definice 5. Řekneme, že (x_1, x_2) a (\hat{x}_1, \hat{x}_2) body v \mathbb{R}^2 jsou:

1. konkordantní, pokud $(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) > 0$,
2. diskordantní, pokud $(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) < 0$.

Uvažujme náhodný vektor (X_1, X_2) a jeho nezávislou kopii (\hat{X}_1, \hat{X}_2) . Pokud náhodná veličina X_2 má tendenci růst s rostoucí X_1 , předpokládáme, že pravděpodobnost konkordance je vyšší vzhledem k pravděpodobnosti diskordance. Klesá-li X_2 s rostoucí X_1 , předpokládáme opačnou situaci. Toto je motivací pro *Kendallův korelační koeficient* (nebo *Kendalovo tau*).

Definice 6. Pro náhodné veličiny X_1 a X_2 Kendalovo tau je definováno jako

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E[\text{sign}((X_1 - \hat{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2))], \quad (2.12)$$

kde (\hat{X}_1, \hat{X}_2) je nezávislá kopie náhodného vektoru (X_1, X_2) .

Neparametrický odhad Kendalova tau založený na náhodném výběru $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$, $t \in 1, \dots, n$ se dá napsat pomocí následujícího vztahu:

$$\hat{\rho}_{\tau,n} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{sign}((X_{1,i_1} - X_{1,i_2})(X_{2,i_1} - X_{2,i_2})). \quad (2.13)$$

V McNeil a kol. (2005); Hofert a kol. (2012) bylo ukázáno, že pro dvojrozměrnou kopulu se dají odvodit následující vztahy.

Věta 4. Necht X_1 a X_2 mají spojitě marginální rozdělení a kopulu C , která je daná jednoznačně, pak koeficienty pořadové korelace jsou dané vztahem:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1, \quad (2.14)$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2. \quad (2.15)$$

Rozšíření Kendalova tau a Spearmanova rho na měření vícerozměrné závislosti není přímočaré ani jednoznačné. Vícerozměrná verze těchto měř závislosti se dá najít v pracích Okhrin a kol. (2013a); Joe (1997); Nelsen (2006).

2.3.2 Koeficienty chvostové závislosti

Pro srovnání použitelnosti různých rodin kopul při modelování výskytů extrémních událostí, musíte znát charakteristiky závislosti chvostů, tedy měření síly závislosti v chvostech dvojrozměrného rozdělení.

Definice 7. *Nechť (X_1, X_2) je dvojrozměrný náhodný vektor s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 .*

1. Koeficient závislosti dolních chvostů λ_L je limitou (pokud existuje) podmíněné pravděpodobnosti, že náhodná veličina X_2 je menší nebo rovná než $(100 \cdot q)$ %-ní kvantil distribuční funkce F_2 za podmínky, že X_1 je menší nebo rovná než $(100 \cdot q)$ %-ní kvantil distribuční funkce F_1 pro q jdoucí k 0 zprava, tj.:

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{-1}(q) | X_1 \leq F_1^{-1}(q)). \quad (2.16)$$

V případě, když $\lambda_L \in (0,1]$, pak je přítomna závislost dolních chvostů.

2. Koeficient závislosti horních chvostů λ_U je limitou (pokud existuje) podmíněné pravděpodobnosti, že náhodná veličina X_2 je větší než $(100 \cdot q)$ %-ní kvantil distribuční funkce F_2 za podmínky, že X_1 je větší než $(100 \cdot q)$ %-ní kvantil distribuční funkce F_1 pro q jdoucí k 1 zleva, tj.:

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{-1}(q) | X_1 > F_1^{-1}(q)). \quad (2.17)$$

V případě, když $\lambda_U \in (0,1]$, pak je přítomna závislost horních chvostů.

Stejně jako pořádkové korelační koeficienty koeficient chvostové závislosti měří párové závislosti, které závisí pouze na kopule dvojice náhodných veličin X_1 a X_2 se spojitými marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 . Pro případ, když jsou funkce F_1 a F_2 spojitě, platí:

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q,q)}{q}, \quad (2.18)$$

$$\lambda_U = 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(q,q)}{1 - q}, \quad (2.19)$$

kde C je kopula náhodného vektoru (X_1, X_2) .

3. Archimédovské kopuly

Jednou z nejvíce rozšířených tříd kopul jsou *archimédovské kopuly*. Na rozdíl od eliptických kopul (např. gaussovských kopul nebo t-kopul) archimédovské kopuly se nekonstruují ze známého sdruženého rozdělení na základě Sklarovy věty. Při konstrukci archimédovských kopul spíše začínáme s funkcí, tak zvaným *generátorem*, který musí splňovat určité podmínky. Důsledkem takové konstrukce je, že archimédovské kopuly mají explicitní tvar, což je jednou z mnoha výhod tyto třídy kopul. Archimédovské kopuly naleznou širokou škálu aplikací, hlavním důvodem je snadnost, s jakou je lze postavit, velké množství rodin kopul, které patří do této třídy, a také mnoho užitečných vlastností, které mají členové této třídy.

V této kapitole bude představen úvod do archimédovských kopul, který čerpáme z práce McNeil a kol. (2005); Nelsen (2006); Hofert (2010). Nejdříve se budeme krátce zabývat dvojrozměrným případem a pak se zaměříme na vícerozměrné archimédovské kopuly.

3.1 Dvojrozměrné archimédovské kopuly

Nejdříve definujeme *generátor* archimédovské kopuly.

Definice 8. Nerostoucí a spojitá funkce $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ splňující $\psi(0) = 1$, $\psi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ a ryze klesající na intervalu $[0, \inf\{t : \psi(t) = 0\}]$ se nazývá archimédovský generátor. Množinu všech generátorů označíme Ψ .

Pak dvojrozměrná archimédovská kopula C je daná vztahem

$$C(u_1, u_2; \psi) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2)\right), \quad (3.1)$$

kde $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, funkce ψ je generátor z definice 8, $\psi^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ je inverze generátoru ψ , $\psi^{-1}(0) = \inf\{t : \psi(t) = 0\}$.

Někteří autoři využívají i jiné definice archimédovské kopuly, tuto definici upřednostňujeme kvůli jednoduššímu zápisu výrazů a rozšíření do vícerozměrných případů, které budou následovat v další práci.

Aby funkce C daná vztahem (3.1) byla kopulou, potřebujeme určitá omezení kladená na generátor ψ . V McNeil a Nešlehová (2009) byla stanovena nutná a postačující podmínka pro dvojrozměrný a vícerozměrný případ. Ve větě 5 uvedeme podmínku pro dvojrozměrný případ:

Věta 5. Nechť ψ je archimédovský generátor ve smyslu definice 8. Pak funkce daná vztahem (3.1) je kopulou právě tehdy, když ψ je konverzní.

Dál uvedeme některé důležité vlastnosti archimédovských kopul. Pro jednoduchost označme kopulu $C(\cdot; \psi)$ jako $C(\cdot)$. Archimédovské kopuly jsou *symetrické*, tj. pro $u, v \in [0, 1]$ platí:

$$C(u, v) = C(v, u), \quad (3.2)$$

a *asociativní*, tj. pro $z \in [0, 1]$

$$C(u, C(v, z)) = C(C(u, v), z). \quad (3.3)$$

Pro archimédovskou kopulu C s generátorem ψ ze vztahu (3.1) můžeme vyjádřit koeficient chvostové závislosti, který byl uveden v kapitole 2.3.2, pomocí generátoru ψ a jeho inverze ψ^{-1} následujícím způsobem:

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(2\psi^{-1}(t))}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(2x)}{\psi(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi'(2x)}{\psi'(x)} \quad (3.4)$$

a

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \psi(2\psi^{-1}(t))}{1 - t} \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \psi(2x)}{1 - \psi(x)} = 2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\psi'(2x)}{\psi'(x)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

V (3.4) a (3.5) uvažujeme substituci $x = \psi^{-1}(t)$ jako v Mai a Scherer (2012), str. 65.

3.2 Vícerozměrné archimédovské kopuly

Pro práci s vícerozměrnými archimédovskými kopulami budeme používat stejnou definici generátoru archimédovské kopuly ψ jako v případě dvojrozměrných archimédovských kopul (definice 8).

d -rozměrná *archimédovská kopula* s generátorem ψ je daná vztahem

$$C(\mathbf{u}; \psi) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)), \quad (3.6)$$

pro $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$, $\psi \in \Psi$ s inverzní funkcí $\psi^{-1} : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, kde $\psi^{-1}(0) = \inf\{t : \psi(t) = 0\}$.

Konstrukce (3.6) však nemusí úspěšně definovat správnou distribuční funkci pro libovolnou dimenzi d . Proto podobně jako pro dvojrozměrný případ budeme potřebovat nezbytnou a postačující podmínku, aby konstrukce (3.6) byla kopulou pro $d > 2$. Nutná a postačující podmínka pro $\psi \in \Psi$ pro všechny dimenze d byla uvedena v McNeil a Nešlehová (2009).

Věta 6. *Nechť $\psi \in \Psi$ a $d \geq 2$. Pak funkce (3.6) je kopulou právě tehdy, když ψ je d -monotónní na intervalu $[0, \infty)$, t.j. má derivaci až do řádu $d - 2$ a pokud platí $(-1)^i \psi^{(i)}(t) \geq 0$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, d - 2\}$, $x \in (0, \infty)$ a pokud $(-1)^{d-2} \psi^{(d-2)}(t)$ je nerostoucí a konvexní na $(0, \infty)$.*

Ve většině případů uvažujeme silnější předpoklad a to, že ψ je *kompletně monotónní*.

Věta 7. *(Kimberling, 1974)*

Nechť $\psi \in \Psi$. Funkce $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ definovaná vztahem (3.6) je kopulou, když ψ je kompletně monotónní na intervalu $[0, \infty)$, tj. ψ má derivace všech řádů splňující $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \psi(t) \geq 0$ pro libovolné $t \in (0, \infty)$.

Pak třída vhodných generátorů je v práci Kimberling (1974) definovaná jako:

$$\Psi_\infty = \{\psi \in \Psi : \psi \text{ je kompletně monotónní}\}. \quad (3.7)$$

Tedy je zřejmé, že generátor $\psi \in \Psi_\infty$ generuje archimédovskou kopulu libovolné dimenze d . Pomocí věty 8, která se také nazývá *Bernsteinova věta*, můžeme spojit třídu vhodných generátorů a Laplaceovou-Stieltjesovou transformaci z definice 9.

Definice 9. Laplaceova-Stieltjesova transformace distribuční funkce $F(t)$ je definovaná jako

$$\mathcal{LS}[F](t) = \int_0^{\infty} \exp(-tx) dF(x), \quad t \in [0, \infty). \quad (3.8)$$

Věta 8. (Bernstein, 1929)

Funkce $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ je Laplaceova-Stieltjesovou transformace distribuční funkce F na intervalu $[0, \infty)$ právě tehdy, když ψ je kompletně monotónní na $[0, \infty)$ a $\psi(0) = 1$.

Z věty 8 plyne, že každé $\psi \in \Psi_{\infty}$ je Laplaceova-Stieltjesova transformace nějaké distribuční funkce, tj. pro $\psi \in \Psi_{\infty}$ a nějakou distribuční funkci F máme vztah

$$\psi = \mathcal{LS}[F] \quad (3.9)$$

nebo ekvivalentně

$$F = \mathcal{LS}^{-1}[\psi]. \quad (3.10)$$

Reprezentace archimédovských kopul pomocí Laplaceovy-Stieltjesovy transformace je velmi užitečná pro simulační účely, kterými se budeme podrobněji zabývat v následující kapitole.

3.3 Simulování archimédovských kopul

Archimédovské kopuly můžeme simulovat metodou podmíněné distribuce, podrobnosti o této metodě se dají nalézt v práci Cherubini a kol. (2004) v kapitole 6.3. Tato metoda vyžaduje velmi efektivní výpočet derivací generátoru archimédovské kopuly, což je obvykle velmi výpočetně náročné, zvláště ve vyšších dimenzích. Tyto nedostatky vedly k vývoji *Marshallova-Olkinova algoritmu* pro simulace archimédovských kopul daných vztahem (3.6) s generátorem $\psi \in \Psi_{\infty}$, který byl uveden v práci Marshall a Olkin (1988). Tento algoritmus se dá rozšířit na simulaci vnořených archimédovských kopul.

Marshallův-Olkinův algoritmus

1. Simulujeme náhodnou veličinu V z rozdělení s distribuční funkcí F , jejíž Laplaceova-Stieltjesova transformace se rovná generátoru ψ , tj. $V \sim F$, kde $\mathcal{LS}[F] = \psi$,
2. Simulujeme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_j , které mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ pro $j = \{1, \dots, d\}$, nezávislé na V ,
3. Výsledkem algoritmu je vektor \mathbf{U} , kde pro každou složku U_j položíme $U_j = \psi\left(-\frac{\log(X_j)}{V}\right)$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

3.4 Příklady vícerozměrných archimédovských kopul

V literatuře se uvádí několik známých parametrických generátorů archimédovských kopul, které také nazýváme *rodiny archimédovských kopul*. V pracích

Nelsen (2006); Cherubini a kol. (2004); Hofert a kol. (2012) bylo uvedeno zobecnění nejrozšířenějších rodin archimédovských kopul s jejími generátory a omezení na jejich parametry pro vícerozměrný případ. V této části kapitoly shrneme zmíněné výsledky.

Claytonova kopula

Nechť $\psi(\cdot)$ je generátor daný vztahem:

$$\psi(t) = (1+t)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0, \quad (3.11)$$

pak

$$\psi^{-1}(t) = t^{-\theta} - 1 \quad (3.12)$$

je jeho inverze, ψ je kompletně monotónní na $[0, \infty)$. Potom d -rozměrnou Claytonovou kopulu můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$C(\mathbf{u}; \psi) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (3.13)$$

Frankova kopula

Máme generátor

$$\psi(t) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right), \theta > 0, \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

pak inverze je daná vztahem

$$\psi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + (e^{-\theta} - 1)e^{-t} \right). \quad (3.16)$$

Nelsen (2006) ukázal, že $\psi(t)$ je kompletně monotónní na $[0, \infty)$. Potom pro $\theta > 0$ d -rozměrné zobecnění Frankovy kopuly můžeme zapsat jako:

$$C(u_1, \dots, u_d; \psi) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \dots (e^{-\theta u_d} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right). \quad (3.17)$$

Gumbelova-Hougaardova kopula

Dalším příkladem, který uvádí Nelsen (2006) je kopula s generátorem $\psi(\cdot)$, který je dán následujícím vztahem:

$$\psi(t) = \exp \left(-t^{\frac{1}{\theta}} \right), \theta \geq 1. \quad (3.18)$$

Inverzi můžeme napsat jako

$$\psi^{-1}(t) = (-\ln(t))^{\theta}. \quad (3.19)$$

$\psi(\cdot)$ je kompletně monotónní funkce, pak d -rozměrnou ($d > 2$) Gumbelovou-Hougaardovou kopulu pro $\theta \geq 1$ vyjádříme následujícím způsobem

$$C(\mathbf{u}; \psi) = \exp \left(- \left[(-\ln(u_1))^{\theta} + (-\ln(u_2))^{\theta} + \dots + (-\ln(u_d))^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right). \quad (3.20)$$

V tabulce 3.1 uvedeme hodnoty párových Kendallových koeficientů závislosti tau pro tyto rodiny kopul, kde $D(\cdot)$ je Debyeova funkce $D(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{\exp(t)-1} dt$. Všimněme si, že vícerozměrné archimédovské kopuly jsou vždy pozitivně závislé, tedy Kendallovo tau vždy leží v intervalu $(0, 1)$ pro tyto kopuly.

Rodina	Rozsah dosažitelného ρ_τ	ρ_τ
Claytonova	$(0, 1)$	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbelova	$[0, 1)$	$\frac{\theta-1}{\theta}$
Frankova	$(0, 1)$	$1 + 4 \frac{D(\theta)-1}{\theta}$

Tabulka 3.1: Hodnoty Kendallova tau pro známé jednoparametrické archimédovské generátory.

Výše uvedené vícerozměrné zobecnění archimédovských kopul (3.6) je velmi omezující. Všimněme si, že archimédovské kopuly jsou symetrické vzhledem k permutaci proměnných, také ke své konstrukci používají pouze jeden generátor nezávislý na uvažované dimenzi a pouze jeden parametr tohoto generátoru. Pro zajištění větší flexibility byla navržena třída *hierarchických archimédovských kopul*, která bude diskutována v další kapitole.

4. Hierarchické archimédovské kopuly

Jak jsme zmínili v kapitole 2, eliptická kopula ve většině případů nemůže být vyjádřena explicitně a obvykle má integrální reprezentaci. Jedna z tříd, která překonává tuto nevýhodu, je třída archimédovských kopul z předchozí kapitoly, která je však velmi omezující pro použití ve vyšších dimenzích. K odstranění nedostatků archimédovských kopul, byla zavedena třída *vnořených archimédovských kopul*, kterou kvůli její hierarchické struktuře mnozí autoři nazývají *hierarchické archimédovské kopuly*. Tato kapitola vychází z publikací Okhrin a kol. (2013a); Hofert a Mächler (2011); Hofert (2010); Okhrin a Ristig (2014).

Hierarchické archimédovské kopuly (HAC) zobecňují koncept jednoduchých archimédovských kopul tím, že nahrazují marginální rozdělení další hierarchickou archimédovskou kopulou. Matematicky se dá tato struktura popsat vztahem

$$C(C(u_{1,1}, \dots, u_{1,d_1}; \psi_1), \dots, C(u_{J,1}, \dots, u_{J,d_J}; \psi_J); \psi_0). \quad (4.1)$$

Zápis kopuly (4.1) je založen na $J + 1$ generátorech: generátoru ψ_0 pro *vnější archimédovskou kopulu* s parametrem θ_0 a generátorech ψ_j pro vnitřní (do ní vnořené) kopuly s příslušnými parametry θ_j , $j = 1, \dots, J$.

V této práci budeme také používat termíny zavedené v Hofert a Mächler (2011) pro označení jednotlivých kopul v rámci jedné závislostní struktury. Archimédovskou kopulu nazveme *rodičovskou kopulou* (angl. *parent copula*), když aspoň jedna hierarchická archimédovská kopula je její komponentou. Tuto komponentu nazveme *dítětem* (angl. *child copula*).

Použití hierarchických kopul umožňuje zahrnout širokou škálu závislostních struktur při zachování flexibility modelu v modelování vícerozměrných distribucí. Rozlišujeme dva typy vnořených archimédovských kopul: *plně vnořené* a *částečně vnořené*.

4.1 Plně vnořené archimédovské kopuly

Plně vnořenými archimédovskými kopulami se nazývají hierarchické (vnořené) kopuly, kde na každé úrovni hierarchie agregujeme jeden nový element. Přičemž na každé úrovni hierarchie vzniká jen jediná nová kopula. Vnořené hierarchické archimédovské kopuly jsou modelovány pomocí dvojrozměrných archimédovských ($d = 2$) kopul.

Nechť $C(u_1, u_2; \psi)$ je dvojrozměrná archimédovská kopula s generátorem ψ daná vztahem (3.1), označíme $C(u_1, u_2, \dots, u_d; \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{d-2})$ hierarchickou archimédovskou kopulu s generátory $\psi_0, \dots, \psi_{d-2}$. Potom tvar čtyřrozměrné plně vnořené hierarchické kopuly se dá napsat následujícím způsobem:

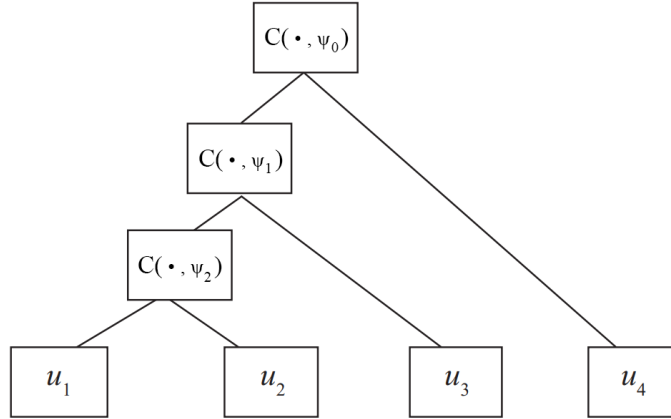
$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4; \psi_0, \dots, \psi_2) &= C_0(u_4, C_1(u_3, C_2(u_1, u_2; \psi_2); \psi_1); \psi_0) \\ &= \psi_0(\psi_0^{-1}(u_4) + \psi_0^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(u_3) + \psi_1^{-1}(\psi_2(\psi_2^{-1}(u_1) + \psi_2^{-1}(u_2)))))) \end{aligned} \quad (4.2)$$

t.j. u_1 a u_2 jsou spojeny pomocí kopuly $C(\cdot; \psi_2)$, u_3 je s $C(u_1, u_2; \psi_2)$ spojen pomocí funkce $C(\cdot; \psi_1)$ a u_4 je s $C(u_3, C(u_1, u_2; \psi_2); \psi_1)$ spojen pomocí kopuly $C(\cdot; \psi_0)$.

Tím pádem, čtyřrozměrný případ vyžaduje tři dvojrozměrné kopuly s generátory ψ_0, ψ_1, ψ_2 . Tuto strukturu kopuly můžeme představit pomocí stromu z obrázku 4.1.

Pro d -rozměrný případ platí následující rekurzivní vztah:

$$C(u_1, \dots, u_d; \psi_0, \dots, \psi_{d-2}) = \psi_0(\psi_0^{-1}(u_d) + \psi_0^{-1}(C(u_1, \dots, u_{d-1}; \psi_1, \dots, \psi_{d-2}))). \quad (4.3)$$

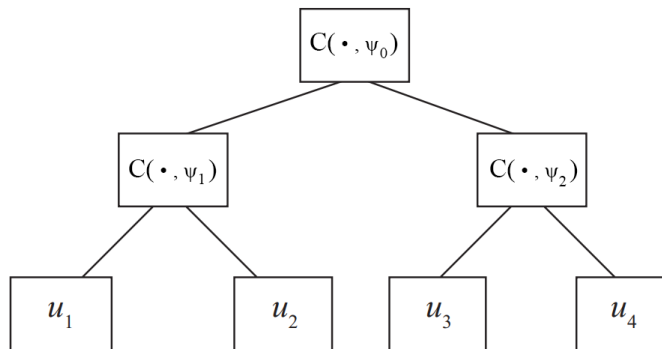


Obrázek 4.1: Struktura plně vnořené archimédovské kopuly pro čtyřrozměrný případ.

Chceme-li získat d -rozměrnou kopulu s použitím této vazebné metody, jsou vyžadována omezení kladená na generátory. V Joe (1997) a v McNeil (2008), věta 4.4 je uvedena *postačující podmínka vnoření* kladená na generátory vnořené archimédovské kopuly: je požadována kompletní monotonie $(\psi_j^{-1} \circ \psi_{j+1})'$ (pro rodiče j a dítě $j+1$) pro $j = 0, \dots, d-3$, což obvykle udává určitá omezení na parametry $\theta_0, \dots, \theta_{d-2}$. Věta 4.4 v McNeil (2008) říká, že pokud jsou $\psi_j \in \Psi_\infty$ pro $j = 0, \dots, d-2$ a $\psi_j^{-1} \circ \psi_{j+1}$ mají kompletně monotónní derivace pro $j = 0, \dots, d-3$, pak C daná vztahem (4.3) je kopulou pro $d \geq 2$. Generátory $\psi_j \forall j$ mohou pocházet buď ze stejné rodiny generátorů nebo z různých rodin archimédovských generátorů. Pokud $\psi_j, \forall j$ patří do stejné rodiny archimédovských generátorů, podmínky věty 4.4 jsou splněny, pokud $\theta_0 \leq \dots \leq \theta_{d-2}$ pro každou z rodin Claytonovu, Frankovu a Gumbelovu s generátory $\psi_0, \dots, \psi_{d-2}$ s parametry $\theta_0, \dots, \theta_{d-2}$, nebo ekvivalentně pro Kendallovo tau musí platit $\rho_{\tau_0} \leq \dots \leq \rho_{\tau_{d-2}}$. Pokud generátory pocházejí z různých rodin kopul uvnitř jedné hierarchické archimédovské kopuly, podmínka kompletní monotónie se má pro každý případ řešit zvlášť. Podrobněji jsou omezení pro případ, když generátory pocházejí z různých rodin, diskutována v Hofert (2010); McNeil (2008).

4.2 Částečně vnořené archimédovské kopuly

Částečně vnořené archimédovské kopuly agregují dva nebo více prvků na každé úrovni, a proto na každé úrovni hierarchie, s výjimkou vnější, mohou vzniknout více než dvě kopuly. Tato třída kopul byla poprvé navržena v Joe (1997).



Obrázek 4.2: Struktura částečně vnořené archimédovské kopuly pro $d = 4$.

Obecně se taková kopula dá zapsat následujícím způsobem:

$$C(\mathbf{u}; \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_S) = C(C(u_{1,1}, \dots, u_{1,d_1}; \psi_1), \dots, C(u_{S,1}, \dots, u_{S,d_S}; \psi_S); \psi_0), \quad (4.4)$$

kde $\mathbf{u} = (u_{1,1}, \dots, u_{1,d_1}, u_{2,1}, \dots, u_{2,d_2}, \dots, u_{S,1}, \dots, u_{S,d_S})^\top$. V (4.4) se vyskytuje S vektorů dimenze d_s pro $s \in \{1, \dots, S\}$, $\sum_{s=1}^S d_s = d$. Například pro čtyřrozměrnou částečně vnořenou archimédovskou kopulu danou strukturou na obrázku 4.2 platí:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4; \psi_0, \psi_1, \psi_2) &= C(C(u_1, u_2; \psi_1), C(u_3, u_4; \psi_2); \psi_0) \\ &= \psi_0(\psi_0^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(u_1) + \psi_1^{-1}(u_2))) + \psi_0^{-1}(\psi_2(\psi_2^{-1}(u_3) + \psi_2^{-1}(u_4)))) \end{aligned} \quad (4.5)$$

t.j. v prvním kroku spojíme dvojice bodů (u_1, u_2) a (u_3, u_4) pomocí kopul $C(\cdot; \psi_1)$ a $C(\cdot; \psi_2)$. Tyto dvě kopuly jsou spojeny pomocí třetí kopuly $C(\cdot; \psi_0)$.

Abychom dostali d -rozměrnou kopulu s použitím této metody, jsou vyžadována omezení podobná těm, která byla diskutována výše při konstrukci plně vnořených archimédovských kopul.

4.3 Simulování hierarchických archimédovských kopul

Ve zbývající části kapitoly se zaměříme na algoritmy simulování vektoru $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)^\top$ se sdruženým rozdělením C , kde C je hierarchickou archimédovskou kopulou danou vztahem (4.3) nebo (4.4). Algoritmus byl navržen v McNeil (2008) na základě Marshallova-Olkinova algoritmu, který jsme uvedli v kapitole 3.3.

Myšlenka spočívá v aplikaci Marshallova-Olkinova algoritmu rekurzivně tak, že v každém kroku rekurze simulujeme veličinu z rozdělení s distribuční funkcí, která je vzorem určitého generátoru $\psi_{0,i}$ v Laplaceově-Stieltjesově transformaci.

Zavedeme také jednotnou notaci. Nazveme $F_0 = \mathcal{L}\mathcal{S}^{-1}[\psi_0]$ *vnější distribuční funkci* odpovídající *vnějšímu generátoru* ψ_0 a $F_{0,i} = \mathcal{L}\mathcal{S}^{-1}[\psi_{0,i}]$ nazveme *vnitřní distribuční funkci* odpovídající *vnitřním generátorům*, $\mathcal{L}\mathcal{S}[\cdot]$ značí Laplaceovou-Stieltjesovou transformaci z definice 9. Tyto funkce hrají důležitou roli při konstrukci a simulaci vnořených archimédovských kopul.

Obecný algoritmus simulování hierarchických archimédovských kopul

Dál uvedeme rekurzivní algoritmus pro simulace vektoru $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)^\top$ z kopuly dané vztahem (4.3) nebo (4.4) s vnějším generátorem ψ_0 za předpokladu splnění postačující podmínky vnoření.

- (1) Simulujeme náhodnou veličinu V_0 z rozdělení s distribuční funkcí F_0 tak, že Laplaceova-Stieltjesova transformace F_0 se rovná generátoru ψ_0 , tj. $\mathcal{LS}[F_0] = \psi_0$.
- (2) Pro všechny komponenty u_j , které nejsou kopulami, pokračujeme druhým krokem Marshallova-Olkinova algoritmu, tj.
 - (i.) Simulujeme náhodnou veličinu X_j , která má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$,
 - (ii.) Pro j -tou složku vektoru \mathbf{U} položíme $U_j = \psi_0\left(-\frac{\log(X_j)}{V_0}\right)$.
- (3) Pro každou vnořenou kopulu s generátorem ψ_i provedeme následující kroky:
 - (i.) Simulujeme náhodnou veličinu $V_{0,i}$ z rozdělení s distribuční funkcí $F_{0,i}$, pro kterou platí $\mathcal{LS}[F_{0,i}] = \psi_{0,i}(\cdot; V_0)$, kde funkce $\psi_{0,i}(\cdot; V_0)$ je dána vztahem

$$\psi_{0,i}(t; V_0) = \exp\left(-V_0 \cdot \psi_0^{-1} \circ \psi_i(t)\right) = \exp\left(-V_0 \cdot \psi_0^{-1}(\psi_i(t))\right). \quad (4.6)$$
 - (ii.) Má-li uvažovaná kopula do ní vnořené kopuly, postupujeme rekurzí na další úroveň hierarchie, pro kterou ψ_i je nyní vnějším generátorem. Pokračujeme krokem (1) tohoto algoritmu, kde označíme $V_0 := V_{0,i}$ a $\psi_0 := \psi_i$.

Pro aplikaci tohoto algoritmu je třeba umět simulovat $V_0 \sim F_0 = \mathcal{LS}^{-1}[\psi_0]$ a $V_{0,i} \sim F_{0,i} = \mathcal{LS}^{-1}[\psi_{0,i}(\cdot; V_0)]$. Podrobně byly simulační strategie pro F_0 a $F_{0,i}$ diskutovány v Hofert (2010).

5. Odhad parametrů a struktury kopul

Chceme-li agregovat rizika pomocí kopul, měli bychom je umět odhadnout z dat. V případě archimédovských kopul, odhadujeme pouze jeden parametr θ pro generátor $\psi(\cdot)$. Ale v případě hierarchických archimédovských kopul chceme odhadnout strukturu HAC a parametry každé vnořené archimédovské kopuly.

Existují *parametrické*, *semiparametrické* a *neparametrické* metody odhadů. Neparametrické metody, například momentový odhad na základě pořadových korelací (Kendalova tau a Spearmanova rho), jsou výpočetně jednodušší, pro jejich použití není třeba volit marginální rozdělení ani odhadnout jejich parametry. Obzvláště snadná je aplikace těchto metod na odhad parametru dvojrozměrných archimédovských kopul, kde máme explicitně vyjádřený vztah parametru kopuly a Kendalova tau (viz. tabulka 3.1). Avšak kdybychom chtěli odhadovat parametry i hierarchických archimédovských kopul, které mají víc než jeden parametr, použití této metody by nebylo vhodné. Mezi v praxi nejpoužívanější metody, jejichž výsledkem je konzistentní a asymptoticky eficientní odhad, patří *metoda maximální věrohodnosti*. Pomocí této metody odhadneme všechny parametry marginálních rozdělení a kopuly najednou. Takový přístup je ale velmi výpočetně náročný hlavně ve vyšších dimenzích. Tento problém řeší dvojkroková metoda maximální věrohodnosti navržená v Joe a Xu (1996). Nakonec semiparametrická metoda, metoda kanonické maximální věrohodnosti, je jakýmsi kompromisem mezi parametrickými a neparametrickými metodami odhadu.

V této kapitole uvedeme různé metody odhadu parametrů, jejichž podrobnosti se dají nahlédnout v Cherubini a kol. (2004). Ve všech popsaných metodách předpokládáme, že struktura a rodina kopul je již známá. Odhadnout strukturu hierarchických archimédovských kopul nám umožní Okhrinův algoritmus, který uvedeme v druhé části kapitoly. Tento algoritmus čerpáme z Okhrin a kol. (2013b). Posoudit, zda námi vybraná kopula je vhodná, můžeme pomocí testu dobré shody pro kopuly, který je podrobně popsán v pracích Fermanian (2005); Panchenko (2005).

5.1 Metoda maximální věrohodnosti (ML)

V práci Cherubini a kol. (2004) je problém modelování kopul rozdělen na dva kroky: volba marginálních rozdělení a definice vhodné kopuly.

Vzpomeňme kanonickou reprezentaci mnohorozměrné sdružené hustoty (2.6)

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1; \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_d(x_d; \boldsymbol{\alpha}_d); \boldsymbol{\theta}) \cdot \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \boldsymbol{\alpha}_j), \quad (5.1)$$

kde $c(\cdot)$ je hustota kopuly s vektorem parametrů $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\theta}^\top, \boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$ daná vztahem (2.4) a f_j jsou marginální hustoty s parametry $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\alpha}_d^\top)^\top$.

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ je matice pozorování v časech $t = 1, \dots, T$, $X_j =$

$(x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,T})^\top$. Pak logaritmická věrohodnostní funkce je

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{t,1}; \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_d(x_{t,d}; \boldsymbol{\alpha}_d); \boldsymbol{\theta}) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d f_j(x_{t,j}; \boldsymbol{\alpha}_j), \quad (5.2)$$

kde $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\theta}^\top, \boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$ je vektor všech parametrů, kde též $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor parametrů marginálních rozdělání a $\boldsymbol{\theta}$ je vektor parametrů kopuly.

Pokud jsou dána marginální rozdělání a kopula C , odhad $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{MLE}$ dostaneme maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{MLE} = \underset{\boldsymbol{\eta}}{\operatorname{argmax}} l(\boldsymbol{\eta}). \quad (5.3)$$

V práci Cherubini a kol. (2004) je ukázáno, že tento odhad je konzistentní a asymptoticky normální. Tato metoda je dost výpočetně náročná pro vyšší řády, hlavně kvůli tomu, že odhadujeme současně parametry kopuly a parametry marginálních rozdělání.

5.2 Dvojkroková metoda (IFM)

Řešením problému výpočetní náročnosti metody maximální věrohodnosti je dvojkroková metoda, navržená v Joe a Xu (1996), která odhaduje množinu parametrů $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\theta}^\top, \boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$ zvlášť ve dvou krocích:

1. Pomocí metody maximální věrohodnosti odhadujeme množinu parametrů jednorozměrných marginálních rozdělání $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d f_j(x_{t,j}; \boldsymbol{\alpha}_j) \quad (5.4)$$

2. S použitím odhadu $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, který jsme získali v prvním kroku, odhadneme parametry kopuly $\boldsymbol{\theta}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{t,1}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1), \dots, F_d(x_{t,d}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_d); \boldsymbol{\theta}) \quad (5.5)$$

Potom odhad celé množiny parametrů můžeme zapsat jako $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

V Joe (1997) je ukázáno, že dvojkroková metoda je vysoce eficientní srovnatelně s metodou maximální věrohodnosti, zároveň je výpočet o mnoho rychlejší.

5.3 Kanonická maximální věrohodnost (CML)

V této podkapitole uvedeme semiparametrickou metodu odhadu parametrů kopul. Tato metoda se spočívá ve transformaci dat $\mathbf{X} = (x_{t,j})_{t=1, \dots, T, j=1, \dots, d}$ do rovnoměrně rozdělených pseudoveličín $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$, kde $U_j = (u_{j,1}, \dots, u_{j,T})^\top$, následně budeme odhadovat jenom parametry kopuly. Níže popíšeme celý postup odhadu parametrů:

1. Empiricky odhadneme marginální rozdělení (bez předpokladu jejich parametrického tvaru)

$$\widehat{F}_j(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(x_{t,j} \leq x). \quad (5.6)$$

Matici \mathbf{U} dostaneme transformací \mathbf{X} jako $u_{t,j} = \widehat{F}_j(x_{t,j})$ pro $j \in \{1, \dots, d\}$ a $t \in \{1, \dots, T\}$.

2. Pomocí metody maximální věrohodnosti odhadneme parametry kopuly $\boldsymbol{\theta}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \ln c(\widehat{F}_1(x_{t,1}), \dots, \widehat{F}_d(x_{t,d}); \boldsymbol{\theta}). \quad (5.7)$$

Tato metoda se často považuje za alternativní metodu maximální věrohodnosti. Protože neodhadujeme parametry marginálních rozdělení, tato metoda je méně výpočetně náročná. Genest a kol. (1995) ukázal, že odhad je sice méně eficientní než v případě metody maximální věrohodnosti, ale je nestranný a konzistentní.

5.4 Odhad struktury HAC

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s pojmem hierarchických archimédovských kopul, jejich možnou strukturou a podmínkami, které zaručují, aby daná struktura byla správnou kopulou.

Je-li známá struktura hierarchické archimédovské kopuly, její parametry se dají odhadnout jednou z metod, které jsme uvedli v předchozích částech kapitoly. Avšak ve většině případů struktura není známá, a musí se také odhadnout. Existuje několik přístupů k odhadování struktury hierarchických archimédovských kopul. Jedním z nich je určit všechny možné struktury pro daný vektor \mathbf{X} , odhadnout parametry a kvalitu odhadu posoudit pomocí testu dobré shody pro kopuly uvedené v Fermanian (2005); Panchenko (2005), potom vybrat nejlepší. Ve vyšších dimenzích tento přístup není efektivní vzhledem k velkému množství možných struktur kopuly. V Okhrin a kol. (2013b) byl navržen rekurzivní algoritmus, který dovoluje efektivně stanovit strukturu a odhadnout parametry hierarchické archimédovské kopuly. Metoda je založená na tvrzení 1 z Okhrin a kol. (2013a), které říká, že pokud mnohorozměrné sdružené rozdělení F je založené na hierarchické archimédovské kopule, pak F může být jednoznačně zkonstruováno z marginálních distribučních funkcí a pouze dvojrozměrných kopul. To znamená, že namísto odhadování všech možných vícerozměrných struktur stačí odhadovat pouze všechny dvojrozměrné kopuly a použít je ke konstrukci sdružené distribuční funkce. Důkaz tohoto tvrzení se dá najít v Okhrin a kol. (2013a).

Rekurzivní algoritmus odhadu struktury a parametrů HAC

Rekurzivní algoritmus umožňuje odhadnout strukturu kopuly pro pseudověřičiny $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$, kde $U_j = (u_{j,1}, \dots, u_{j,T})^\top$, $t = 1, 2, \dots, T$. Máme-li data $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, kde $X_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,T})^\top$ pro $t = 1, \dots, T$, pseudověřičiny získáme aplikací parametrických marginálních distribučních funkcí nebo empirických marginálních distribučních funkcí na X_1, \dots, X_d .

Mějme pseudoveličiny U_1, \dots, U_d , položíme $I_1 = \{1, 2, \dots, d\}$, potom k -tý krok rekurzivního algoritmu vypadá následovně:

- (i) Odhadneme parametr θ dvojrozměrné archimédovské kopuly $C(\cdot; \psi)$ pro každou dvojici proměnných (U_i, U_j) pro $i, j \in I_k$, kde I_k je množina indexů v kroku k a ψ je archimédovský generátor s parametrem θ .
- (ii) Vybereme dvojici $(U_{i'}, U_{j'})$ s nejsilnější závislostí.
- (iii) Označíme odhad parametru kopuly pro vybranou dvojici $\hat{\theta}_k$ a množinu indexů vybrané dvojice $S_k = \{i', j'\}$.
- (iv) Definujeme novou pseudoveličinu $U_{d+k} = C(U_{i'}, U_{j'}; \hat{\psi})$, kde $\hat{\psi}$ je archimédovský generátor s odhadnutým parametrem $\hat{\theta}_k$.
- (v) Pro novou množinu indexů platí $I_{k+1} = I_k \setminus S_k \cup \{d+k\}$.
- (vi) Přejdeme k $(k+1)$. kroku rekurzivního algoritmu.

Všimněme si, že v kroku (i) můžeme uvažovat jen dvojice (U_i, U_j) pro $i < j$, jelikož je archimédovská kopula symetrická, snížíme tak počet odhadovaných kopul.

Tímto algoritmem dostaneme kopulu s $d-1$ parametry složenou pouze z dvojrozměrných archimédovských kopul. Pro obdržení struktury, která je složená z vícerozměrných archimédovských kopul, se má provést agregace hierarchické archimédovské kopuly. Agregaci uvažujeme, pokud absolutní hodnota rozdílu parametru rodičovské kopuly θ_i a parametru kopuly do ní vnořené θ_j je menší než pevně daná malá hranice ϵ , tj. platí $|\theta_i - \theta_j| < \epsilon$ pro $0 < i < j < d-2$. Můžeme si zvolit jeden z několika přístupů uvedených v Okhrin a kol. (2013b) k volbě parametru θ v agregované kopule.

Parametry kopul odhadneme metodou maximální věrohodnosti pro parametrická marginální rozdělení, anebo metodou kanonické maximální věrohodnosti pro neparametrická marginální rozdělení. Při odhadu parametrů musíme pamatovat na omezení, které klademe na parametry (viz. kapitola 4). V Okhrin a Ristig (2014); Okhrin a kol. (2013b) se též diskutuje rekurzivní metoda maximální věrohodnosti k získání přesnějších výsledků pro odhady parametrů.

6. Modelování mnohorozměrných distribučních funkcí

V této kapitole se budeme zabývat modelováním vícerozměrných rozdělení s aplikací na výpočet ekonomického kapitálu. Předpokládejme, že máme pět různých dílčích ztrát X_1, \dots, X_5 a chceme stanovit výši ekonomického kapitálu při volbě různých závislostních struktur a různých způsobů agregace. Budeme předpokládat, že v datech je přítomná hierarchická závislost mezi jednotlivými dílčími členy, tj. skutečná závislostní struktura je dána vnořenou (hierarchickou) archimédovskou kopulou. Dále zvolíme marginální rozdělení a pro ilustrační účely v další práci budeme předpokládat, že jsou známé.

Většina dat v pojistném světě je zešikmená doprava, tj. mají těžší pravý chvost. Proto většina rozdělení s touto vlastností vyhovuje k modelování výše pojistných ztrát. V této části budeme předpokládat, že naše ztráty pocházejí z následujících rozdělení: Lognormální, Gamma, Weibullovo a Paretovo rozdělení. Hodnoty parametrů jsou uvedeny v tabulce 6.1. Tvar a základní vlastnosti těchto rozdělení můžete nahlédnout v kapitole Přílohy.

	Rozdělení	Parametry	
X_1	Paretovo rozdělení	$\alpha = 2,6$	$\lambda = 3800,00$
X_2	Weibullovo rozdělení	$\alpha = 0,73$	$\beta = 2450,00$
X_3	Gama rozdělení	$\alpha = 1,3$	$\beta = 3050,00$
X_4	Logaritnicko-normální rozdělení	$\mu = 6,8$	$\sigma = 0,78$
X_5	Logaritnicko-normální rozdělení	$\mu = 6,7$	$\sigma = 0,90$

Tabulka 6.1: Volba marginálních rozdělení a jejich parametrů.

K analýze jsme zvolili tři různé struktury závislosti vektoru $(X_1, \dots, X_5)^\top$, které se dají popsat hierarchickou kopulou. Pro každý z případů simulujeme 40 000 vektorů $(U_1, \dots, U_5)^\top$, kde U_j pro $j = 1, \dots, 5$ jsou pseudoveičiny mající rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$, a pro které platí, že $(U_1, \dots, U_5)^\top \sim C$, kde C je uvažovaná hierarchická archimédovská kopula. Pro ilustraci algoritmu z kapitoly 5.4, zpětně odhadneme strukturu a parametry kopuly na simulovaných datech. Z pseudoveičin získáme ztráty X_j aplikací příslušné kvantilové funkce na U_j , tj. $X_j = F_j^{-1}(U_j)$ pro $j = 1, \dots, 5$, kde F_1, \dots, F_5 jsou marginální distribuční funkce rozdělení X_1, \dots, X_5 s parametry uvedenými v tabulce 6.1. Ekonomický kapitál dostaneme pomocí vzorce (1.1), kde jako míru souhrnného rizika volíme VaR na hladině spolehlivosti 99,5%. Tedy z obdržných dat spočteme 99,5% kvantil a střední hodnotu součtu náhodných veličin.

V dnešní době jsou velmi využívané interní modely na výpočet ekonomického kapitálu založené na gaussovské kopule, proto na simulovaných datech též odhadneme parametry gaussovské kopuly a simulujeme 40 000 vektorů pseudoveičin $(U_1, \dots, U_5)^\top$ z ní pocházejících. Stejně jako v předchozím případě spočteme ztráty pomocí vztahu $X_j = F_j^{-1}(U_j)$ pro $j = 1, \dots, 5$. Po získání 99,5% kvantilu a střední hodnoty součtu náhodných veličin, celkový ekonomický kapitál dostaneme pomocí vztahu (1.1).

Všechny výpočty a simulace budeme provádět pomocí statistického softwaru

R. Simulace dat vycházejících ze zvolené závislostní struktury dané hierarchickou archimédovskou kopulou budeme provádět pomocí algoritmu z kapitoly 4.3, který je implementován v balíčku `copula` a využíván v balíčku `HAC`. Odhad parametrů a struktury kopuly algoritmem z kapitoly 5.4 dostaneme také pomocí balíčku `HAC`. Pro odhad parametrů gaussovske kopuly pomocí metod popsaných v kapitole 5 použijeme balíček `copula`. Pro simulaci gaussovske kopuly s korelační maticí R budeme vycházet z algoritmu, který používá Choleského rozklad korelační matice pro získání dolní trojúhelníkové matice L tak, aby $R = LL^\top$. Algoritmus uvedeme níže.

Algoritmus simulace Gaussovske kopuly

1. Najdeme dolní trojúhelníkovou matici L tak, aby pro korelační matici platilo $R = LL^\top$ (Choleského rozklad),
2. Generujeme $Z_j \sim N(0,1)$ ze standardního normálního rozdělení s distribuční funkcí Φ , $j = 1, \dots, d$,
3. Spočítáme $S_j = \sum_{i=1}^j L_{j,i} Z_i$, $j = 1, \dots, d$,
4. Vracíme $U_j = \Phi(S_j)$, $j = 1, \dots, d$.

6.1 Částečně vnořené archimédovské kopuly

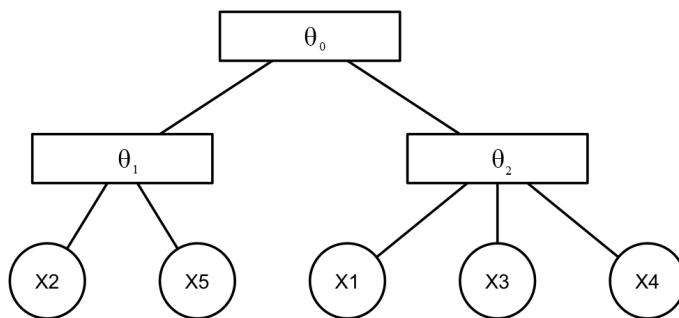
V této části kapitoly se zaměříme na částečně vnořené archimédovské kopuly se dvěma a třemi úrovněmi vnoření.

HAC se dvěma úrovněmi hierarchie

Předpokládejme, že máme ztráty X_1, \dots, X_5 , a závislost mezi nimi se dá popsat kopulou, jejíž struktura je zobrazená na obrázku 6.1. Necht jsou parametry $\theta_0 = 1,86$, $\theta_1 = 5,74$, $\theta_2 = 2,92$, a všechny vnořené archimédovské kopuly pocházejí z Frankovy rodiny. Pro většinu archimédovských kopul větší hodnota parametru znamená silnější závislost mezi veličinami. V dané struktuře nejsilnější závislost je mezi X_2 a X_5 , které jsou agregované pomocí kopuly s největším parametrem $\theta_1 = 5,74$. Mějme simulované pseudoveličiny U_1, \dots, U_5 pocházející z této kopuly.

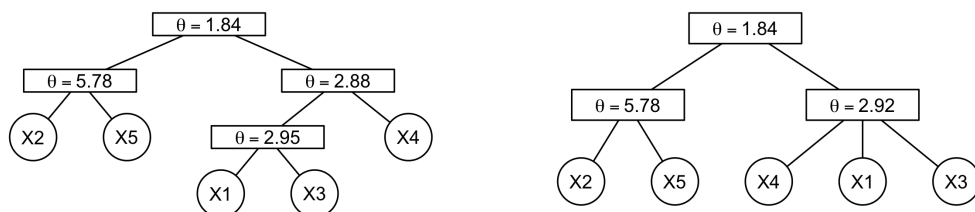
Začneme s interním modelem s použitím hierarchických archimédovských kopul, budeme pokračovat podle postupu, který jsme uvedli na začátku kapitoly. Nejdřív zpětně odhadneme strukturu a parametry kopuly z pseudoveličin pomocí algoritmu z kapitoly 5.4. Připomeňme si, že jeho výstupem je kopula s $d - 1$ parametry, která je vytvořená z dvojrozměrných archimédovských kopul. Pro obdržení struktury, která je složená z vícerozměrných archimédovských kopul, se má provést agregace hierarchické archimédovské kopuly. Parametry agregované kopuly se dají získat pomocí jednoho z několika přístupů, které byly uvedené v publikaci Okhrin a kol. (2013b). V této práci za parametr v agregované kopule zvolíme průměr parametrů, pokud absolutní hodnota jejich rozdílu je menší než $\epsilon = 0,1$.

Na obrázku 6.2 je zohledněná odhadnutá struktura hierarchické archimédovské kopuly na našich datech obdržená pomocí funkce `estimate.copula` z balíčku



Obrázek 6.1: Struktura částečně vnořené archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie.

HAC. Strukturu na obrázku 6.2a obdržíme, pokud neuvažujeme agregaci kopuly, a struktura 6.2b je výsledkem algoritmu, když uvažujeme agregaci pro $\epsilon = 0,1$, tj. když pro parametr θ_i nějaké rodičovské kopuly a parametr θ_j kopuly do ní vnořené platí $|\theta_i - \theta_j| < \epsilon$, kde $\epsilon = 0,1$.



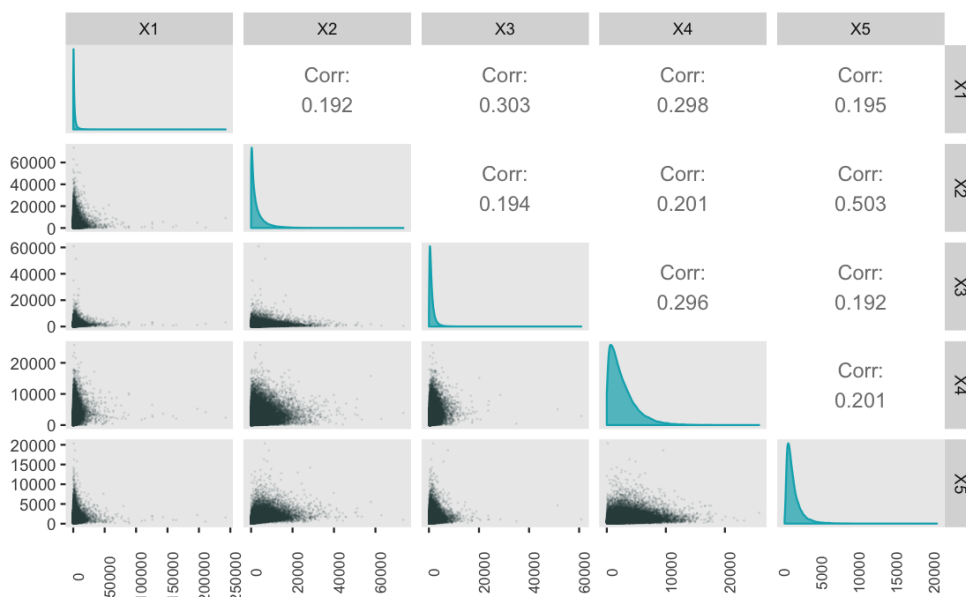
(a) bez agregace parametrů

(b) s agregací parametrů

Obrázek 6.2: Odhadnutá struktura a parametry HAC pomocí algoritmu 5.4.

Dalším krokem je získání ztrát z simulovaných pseudovelichin U_1, \dots, U_5 . Jak jsme již uváděli, složky vektoru \mathbf{X} se dostanou jako $X_j = F_j^{-1}(U_j)$, kde U_j jsou elementy kopuly a F_j^{-1} jsou příslušné kvantilové funkce k marginálním distribučním funkcím pro $j = 1, \dots, 5$. V levém rohu na obrázku 6.3 zobrazíme bodové grafy (X_i, X_j) pro $i < j, i, j = 1, \dots, 5$, na diagonále jsou marginální hustoty X_1, \dots, X_5 a nad diagonálou vidíme hodnoty koeficientů pořadové závislosti Kendallova tau pro dvojice (X_i, X_j) , kde $i < j, i, j = 1, \dots, 5$. V původní struktuře jsme volbou největšího parametru $\theta_1 = 5,76$ předpokládali nejsilnější závislost mezi proměnnými X_2 a X_5 , což odpovídá obdrženým hodnotám Kendallova tau na obrázku 6.3.

Abychom získali výše ekonomického kapitálu spočteme 99,5% kvantil a odečteme od něj střední hodnotu rozdělení součtu X_1, \dots, X_5 . Tyto a jiné základní popisné statistiky celkové ztráty budou uvedeny v tabulce 6.2 spolu s hodnotami



Obrázek 6.3: Bodové grafy pro složky vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím hierarchické archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie.

pro ostatní přístupy k výpočtu ekonomického kapitálu.

Další uvažovaný model je interní model popisující závislost mezi ztrátami pomocí gaussovské kopuly. Gaussovská kopula se často používá na výpočet solventnostního nebo ekonomického kapitálu ve mnoha pojišťovnách. Odhadneme na našich simulovaných datech gaussovskou kopulu pomocí semiparametrické metody kanonické maximální věrohodnosti (kapitola 5.3). Odhadnuté koeficienty gaussovské kopuly uvedeme v matici (6.1).

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.29 & 0.42 & 0.41 & 0.28 \\ 0.29 & 1.00 & 0.29 & 0.28 & 0.66 \\ 0.42 & 0.29 & 1.00 & 0.42 & 0.29 \\ 0.41 & 0.28 & 0.42 & 1.00 & 0.28 \\ 0.28 & 0.66 & 0.29 & 0.28 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

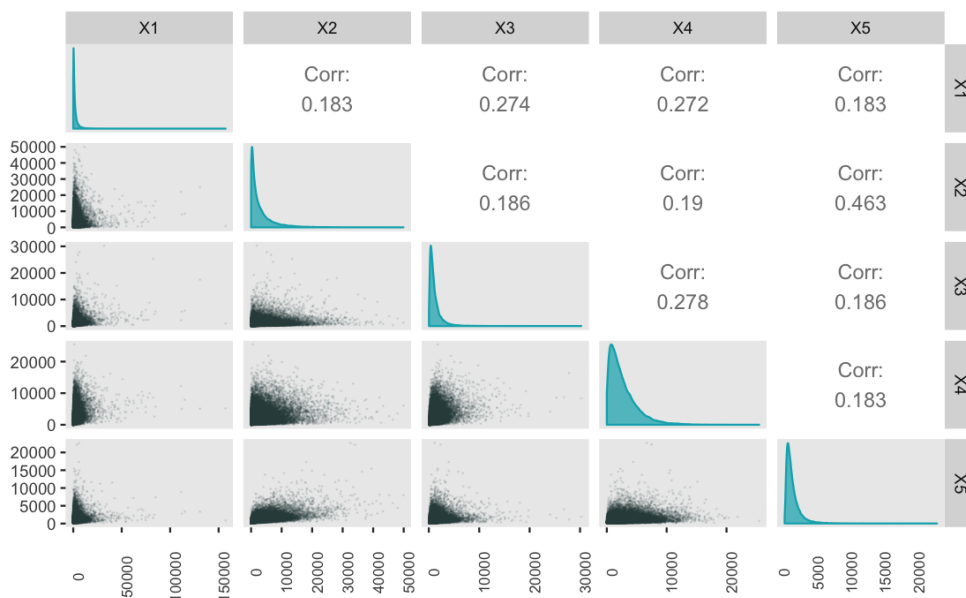
Simulujeme 40 000 krát pseudoveličiny U_1, \dots, U_5 z gaussovské kopuly s odhadnutou korelační maticí (6.1) pomocí algoritmu, který jsme uvedli na začátku kapitoly. Složky vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_5)^\top$ získáme jako $X_j = F_j^{-1}(U_j)$, kde U_j je j -tá složka kopuly a F_j^{-1} je příslušná kvantilová funkce k marginální distribuční funkci F_j rozdělení s parametry z tabulky 6.1. Obdržené bodové grafy ztrát jsou zobrazeny na obrázku 6.4, na diagonále jsou zobrazeny hustoty X_1, \dots, X_5 , nad diagonálou vidíme hodnoty Kendallova tau.

V tabulce 6.2 jsou uvedeny základní popisné statistiky celkové ztráty získané součtem dílčích ztrát. Empirické distribuční funkce celkové ztráty obdržené pomocí gaussovské kopuly a hierarchické archimédovské kopuly jsou zobrazené na obrázku 6.5.

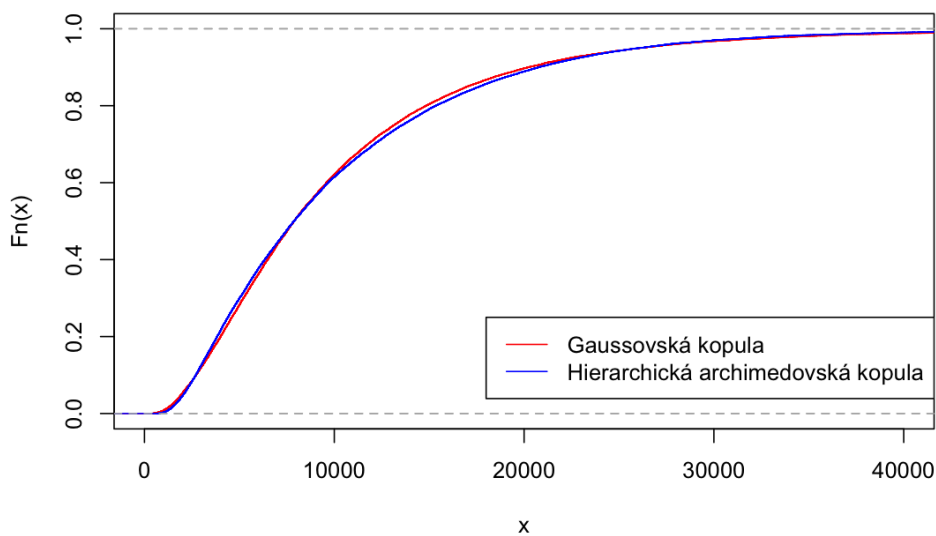
Spočítejme nyní ekonomický kapitál pomocí odhadnutých kopul, výše ekonomického kapitálu pro každý případ jsou také obsažené v tabulce 6.2. Vidíme, že výše ekonomického kapitálu a kvantilů získaného pomocí odhadu na základě

HAC jsou docela blízko skutečným hodnotám. Použití gaussovské kopuly dává podobné hodnoty pro střední hodnotu a 95% kvantil, v případě 99,5% kvantilu se hodnoty docela liší. Volbou gaussovské kopuly dostaneme větší hodnotu kvantilu, tím se zvětší i celkový ekonomický kapitál.

V další části uvažujme složitější závislostní strukturu.



Obrázek 6.4: Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.



Obrázek 6.5: Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženu pomocí hierarchické archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie a pomocí gaussovské kopuly.

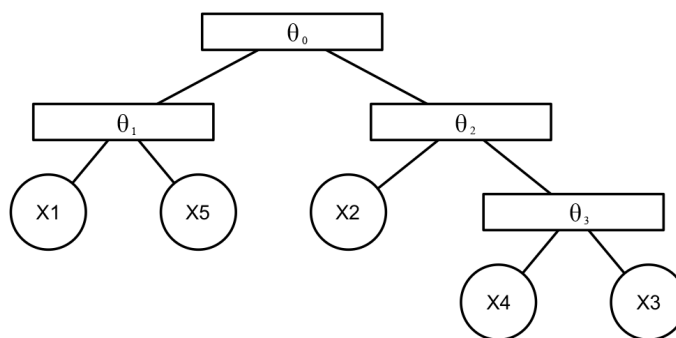
	Původní data	Odhad HAC bez agregace parametrů	Odhad HAC s agregací parametrů	Gaussovská kopula
Střední hodnota	10267.73	10241.39	10276.75	10225.13
Směr. odchylka	8686.51	8625.95	9303.62	8688.41
$Var_{95\%}$	26095.91	25875.22	25868.92	26164.05
$Var_{99,5\%}$	45737.58	46728.95	46096.01	49132.00
EC	35469.85	36487.56	35819.26	38906.87

Tabulka 6.2: Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhadnuté vnořené archimédovské kopuly a gaussovské kopuly.

HAC se třemi úrovněmi hierarchie

Nyní předpokládejme, že se závislost mezi X_1, \dots, X_5 dá popsat kopulou, jejíž struktura je zobrazená na obrázku 6.6. Budeme také předpokládat, že všechny archimédovské generátory pocházejí z Gumbelovy rodiny kopul, která se často používá k modelování finančních a pojistných dat, neboť umožňuje simulovat asymetrické závislosti. Zvolíme následující parametry kopuly: $\theta_0 = 1,11$, $\theta_1 = \theta_2 = 1,25$, $\theta_3 = 2$. Na nejnižší úrovni hierarchie parametr kopuly má být největší kvůli podmínce vnoření, větší hodnota parametru určuje silnější závislost mezi proměnnými. V naší vybrané struktuře na nejnižší úrovni hierarchie agregujeme proměnné X_3 a X_4 . V uvažovaném modelu se parametry θ_1 a θ_2 rovnají. Rovnost parametrů implikuje stejné hodnoty Kendallova tau, které můžeme odvodit pomocí vzorce z tabulky 3.1 pro Gumbelovou kopulu. Tedy předpokládáme stejnou pořadovou závislost mezi X_1 a X_5 a mezi X_2 a kopulou spojující dvě zbývající veličiny.

Stejně jako v předchozím případě mějme k dispozici simulované pseudoveřičiny U_1, \dots, U_5 pocházející z hierarchické archimédovské kopuly z obrázku 6.6. Cílem je spočítat ekonomický kapitál pomocí HAC a s využitím interního modelu založeného na gaussovské kopule.



Obrázek 6.6: Struktura vnořené archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie.

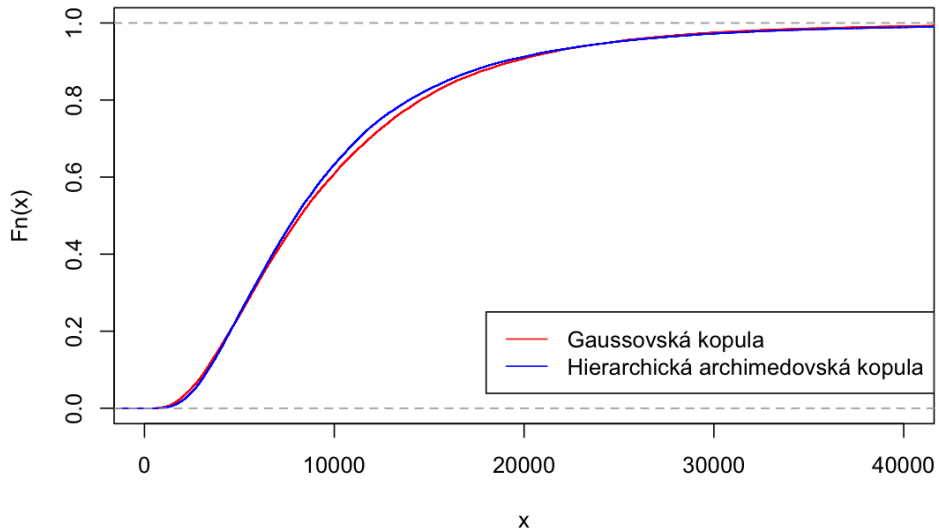
Nejdřív zpětně odhadneme strukturu a parametry hierarchické archimédovské kopuly. Po aplikaci algoritmu z kapitoly 5.4 na naše simulovaná data rovnou

dostaneme požadovanou strukturu bez potřeby agregace kopul, neboť skutečná závislostní struktura je tvořena pouze dvojrozměrnými archimédovskými kopulami. Odhady parametrů jsou $\hat{\theta}_0 = 1.112248$, $\hat{\theta}_1 = 1.254438$, $\hat{\theta}_2 = 1.247522$, $\hat{\theta}_3 = 1.996275$. Bodové grafy dat, hustoty a hodnoty Kendallova tau jsou vidět na obrázku 6.8. Na nejnižší úrovni hierarchie jsme agregovali veličiny X_3 a X_4 , čemu odpovídá i nejvyšší koeficient Kendallova tau na obrázku 6.8. Nejnižší závislost je obdržena mezi dvojicí (X_1, X_3) a dvojicí (X_1, X_4) . Tato struktura hierarchické archimédovské kopuly by odpovídala situaci, kdy ztráty X_3 a X_4 mají mezi sebou silnou závislost, ale jsou málo ovlivněné ztrátami X_1 a X_5 .

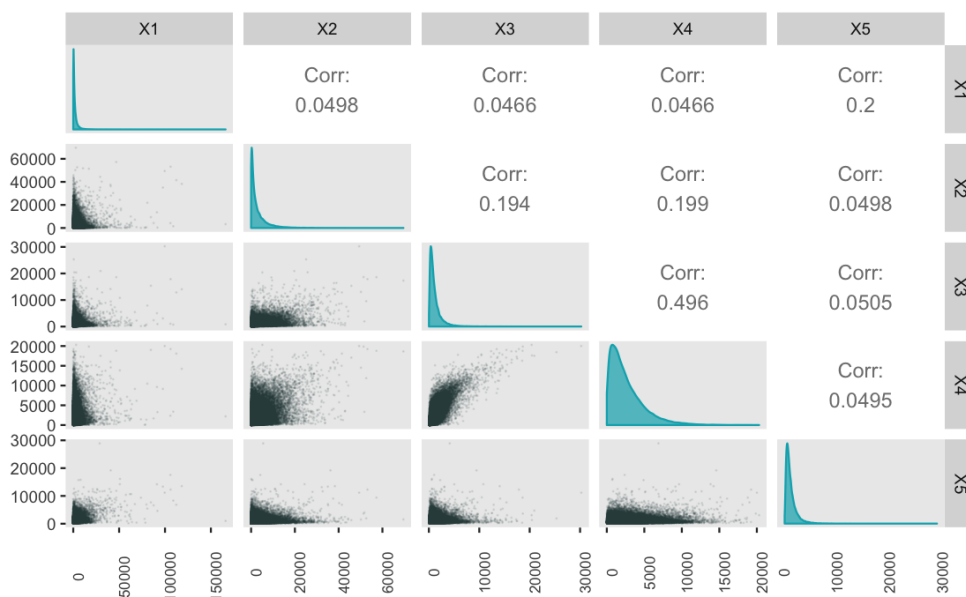
Dalším krokem je odhad parametrů gaussovské kopuly na simulovaných datech, po aplikaci semiparametrické metody odhadu obdržíme matici (6.2). Z gaussovské kopuly s odhadnutou korelační maticí simulujeme pseudoveličiny U_1, \dots, U_5 , složky vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_5)^\top$ opět dostaneme aplikací kvantilových funkcí na pseudoveličiny. Bodové grafy, hustoty a párové koeficienty Kendallova tau pro dílčí ztráty X_1, \dots, X_5 získané z gaussovské kopuly jsou vidět na obrázku 6.9. Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu z modelu s použitím hierarchické archimédovské kopuly a z modelu používajícího gaussovskou kopulu najdeme na obrázku 6.7.

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.09 & 0.08 & 0.08 & 0.32 \\ 0.09 & 1.00 & 0.31 & 0.32 & 0.08 \\ 0.08 & 0.31 & 1.00 & 0.70 & 0.09 \\ 0.08 & 0.32 & 0.70 & 1.00 & 0.08 \\ 0.32 & 0.08 & 0.09 & 0.08 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

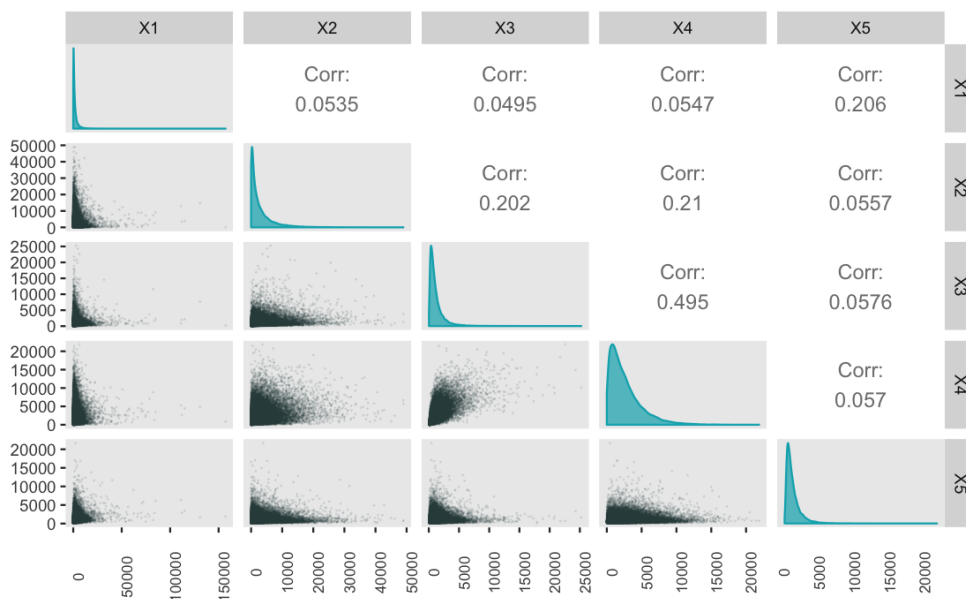
Tabulka 6.3: Odhadnuté parametry gaussovské kopuly.



Obrázek 6.7: Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženu pomocí hierarchické archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie a pomocí gaussovské kopuly.



Obrázek 6.8: Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí hierarchické archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie.



Obrázek 6.9: Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.

Nyní se zaměříme na výpočet ekonomického kapitálu za předpokladu, že data pocházejí ze závislostní struktury z obrázku 6.6. Základní popisné statistiky celkové ztráty a výše ekonomického kapitálu jsou znázorněné v tabulce 6.4 pro interní modely s použitím HAC a gaussovské kopuly. Z tabulky vidíme, že střední hodnota a 95% kvantil celkové ztráty, jejíž závislost je daná gaussovskou kopulou, jsou velmi blízko skutečným hodnotám, větší rozdíly se začínají tvořit v pravém chvostě. 99,5% kvantil, který má velký význam pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku a ekonomického kapitálu, se v modelu založeném

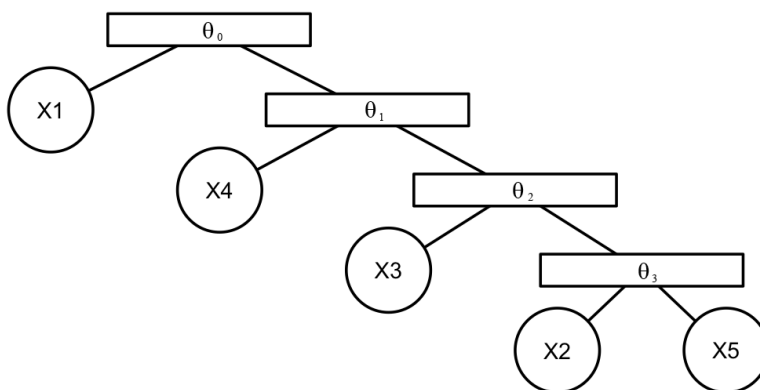
na gaussovské kopule liší o 8 075 tis. Kč od skutečné hodnoty (o 15,5%). Tento rozdíl způsobí 19,4% změnu v ekonomickém kapitálu, tj. zásadně ovlivní jeho výši (33 764.56 tis. Kč v případě gaussovské kopuly oproti 41 909.00 tis. Kč na základě skutečných hodnot).

	Původní data	Odhad HAC	Gaussovská kopula
Střední hodnota	10153.16	10181.82	10222.47
Směr. odchylka	8530.46	8798.59	7798.98
$Var_{95\%}$	24681.03	25096.09	24568.37
$Var_{99,5\%}$	52062.16	51961.37	43987.03
EC	41909.00	41779.55	33764.56

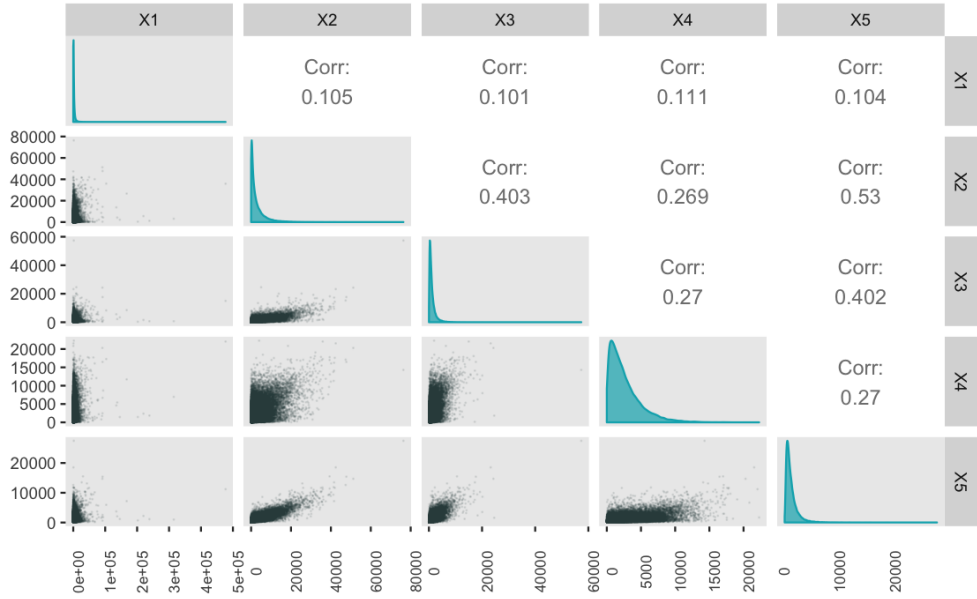
Tabulka 6.4: Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhaduté vnořené archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie a z gaussovské kopuly.

6.2 Plně vnořené archimédovské kopuly

Posledním ilustračním příkladem jsou data pocházející z plně vnořené archimédovské kopuly, která je definována vztahem (4.3). Opět mějme pět dílčích ztrát označených X_1, X_2, \dots, X_5 , potom plně vnořená archimédovská kopula bude mít 4 úrovně hierarchie. Na nejnižší úrovni hierarchie se agregují veličiny s nejsilnější závislosti, vyšší stupeň hierarchie implikuje slabší závislost. Předpokládejme, že všechny archimédovské generátory pocházejí z Gumbelovy rodiny, uvažovaná struktura hierarchické archimédovské kopuly je zobrazená na obrázku 6.10 s parametry $\theta_0 = 1.1236, \theta_1 = 1.3699, \theta_2 = 1.6667, \theta_3 = 2.1277$, které by odpovídaly hodnotám Kendallova tau $\rho_{\tau_0} = 0.11, \rho_{\tau_1} = 0.27, \rho_{\tau_2} = 0.40, \rho_{\tau_3} = 0.53$. Simulujme pseudovelichiny U_1, \dots, U_5 z této kopuly pomocí algoritmu v kapitole 4.3.



Obrázek 6.10: Struktura plně vnořené archimédovské kopuly.



Obrázek 6.11: Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím plně vnořené archimédovské kopuly.

Na těchto simulovaných datech zpětně odhadneme strukturu kopuly a její parametry. V tomto případě opět máme hierarchickou archimédovskou kopulu tvořenou dvojrozměrnými archimédovskými kopulami, tím pádem algoritmus z kapitoly 5.4 vrátí správnou strukturu bez potřeby uvažovat agregaci kopul. Odhadnuté parametry jsou $\hat{\theta}_0 = 1.1222$, $\hat{\theta}_1 = 1.3732$, $\hat{\theta}_2 = 1.6759$, $\hat{\theta}_3 = 2.1301$. Hodnoty X_1, \dots, X_5 dostaneme pomocí inverzí marginálních distribučních funkcí, jak bylo popsáno v postupu na začátku kapitoly. Výsledek můžeme vidět na obrázku 6.11. Na diagonále jsou zobrazené marginální hustoty X_i , nad diagonálou vidíme hodnoty párových Kendallových tau.

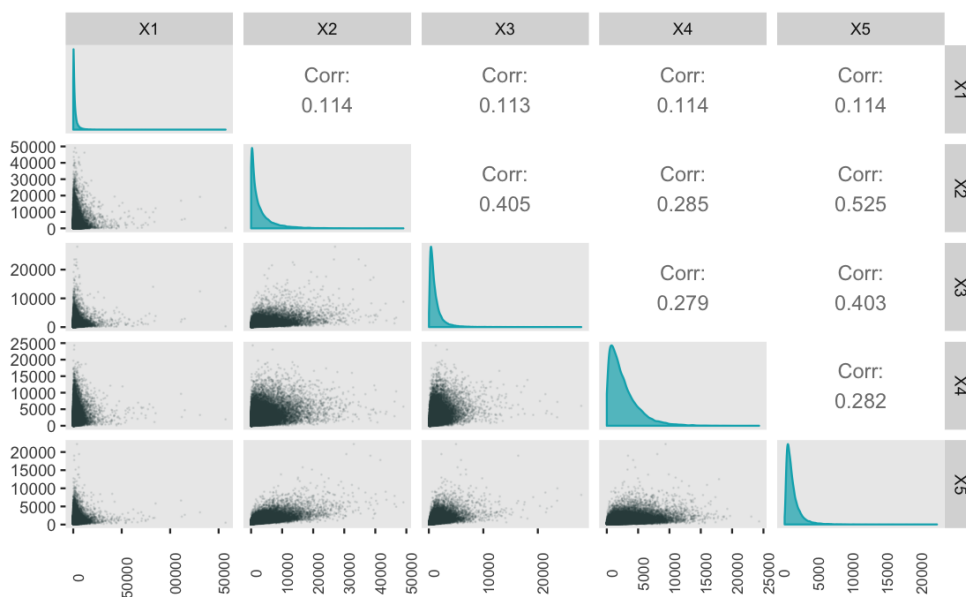
Pokud bychom se rozhodli stavět nejpoužívanější interní model, který je založen na závislostní struktuře popsané gaussovskou kopulou, máme nejdřív odhadnout její parametry. Odhad parametrů provedeme semiparametrickou metodou pomocí balíčku `copula`. Odhadnuté koeficienty jsou uvedeny v matici (6.3).

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.18 & 0.18 & 0.17 & 0.18 \\ 0.18 & 1.00 & 0.59 & 0.42 & 0.73 \\ 0.18 & 0.59 & 1.00 & 0.42 & 0.59 \\ 0.17 & 0.42 & 0.42 & 1.00 & 0.42 \\ 0.18 & 0.73 & 0.59 & 0.42 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

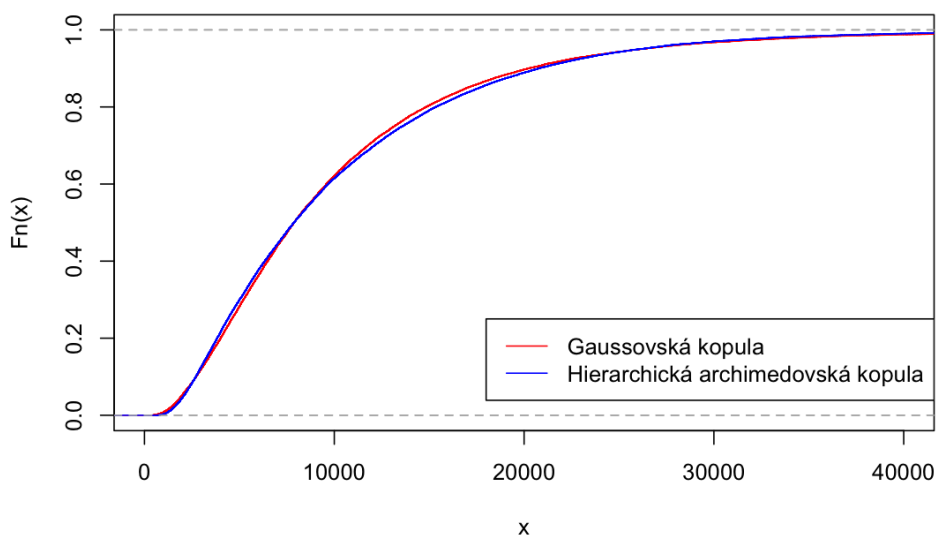
Tabulka 6.5: Odhadnuté koeficienty gaussovské kopuly

Simulujeme pseudoveličiny U_1, \dots, U_5 z gaussovské kopuly s odhadnutou korelační maticí (6.3), složky vektoru \mathbf{X} jako i v minulých příkladech získáme aplikací marginálních kvantilových funkcí na pseudoveličiny, tj. $X_j = F_j^{-1}(U_j)$, kde U_j je j -tá pseudoveličina simulovaná z gaussovské kopuly a F_j^{-1} je příslušná kvantilová funkce k marginální distribuční funkci F_j . Obdržená data jsou zobrazená na obrázku 6.12 spolu s hodnotami Kendallova tau. Rozdělení celkové ztráty dostaneme součtem složek vektoru \mathbf{X} . Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu

vzniklou pomocí gaussovské a hierarchické archimédovské kopuly jsou zobrazené na obrázku 6.13.



Obrázek 6.12: Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.



Obrázek 6.13: Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženu pomocí modelu s použitím plně vnořené archimédovské kopuly a gaussovské kopuly.

Jelikož naším primárním zájmem je výpočet ekonomického (resp. solventnostního) kapitálu, po získání celkové ztráty můžeme spočítat statistiky, které potřebujeme k jeho výpočtu. Hodnoty pro model používající gaussovskou kopulu a model používající hierarchickou archimédovskou kopulu jsou demonstrovány v tabulce 6.6. Výše středních hodnot jsou si docela blízké, opět jako v minulém

	Původní data	Odhad HAC	Gaussovská kopula
Střední hodnota	10196.64	10194.82	10228.91
Směr. odchylka	10040.63	10218.68	8651.93
$Var_{95\%}$	26473.73	26842.18	26388.55
$Var_{99,5\%}$	58068.08	57900.73	48570.24
EC	47871.44	47705.91	38341.33

Tabulka 6.6: Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhadnuté vnořené archimédovské kopuly a normální kopuly.

případě si můžeme všimnout, že gaussovská kopula nedostatečně zachycuje závislost v pravém chvostu: 99,5% kvantil pro původní data je 57 477,34 tis. Kč, v případě když uvažujeme gaussovskou kopulu kvantil je roven 47 744,84 tis. Kč. Tím pádem volba interního modelu na základě gaussovské kopuly zásadně ovlivní výši ekonomického kapitálu.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo modelování vícerozměrných rozdělení s aplikací na výpočet ekonomického kapitálu na základě dílčích ztrát. V rámci tohoto výpočtu jsme se setkali s nutností agregovat dílčí kapitálové požadavky. V první kapitole jsme uvedli některé z přístupů, které se používají k jejich agregaci.

Jelikož naším hlavním zájmem byla možnost agregovat dílčí ztráty pomocí zejména archimédovských a hierarchických (vnořených) archimédovských kopul, v kapitole 2 jsme uvedli základy teorie kopul. V kapitole 3 jsme se detailněji zabývali archimédovskými kopulami, jejich konstrukcí, omezeními a simulací. Na konci kapitoly jsme uvedli nejpoužívanější parametrické rodiny archimédovských kopul. Archimédovské kopuly jsou symetrické, tím pádem se nehodí k modelování asymetrických závislostí. V pojistném světě předpoklad symetrie není vždy nutně splněn.

Asymetrie, která umožňuje charakterizovat realističtější závislosti, je dosažena vnořením jedné archimédovské kopuly do druhé. Kopuly tvořené tímto způsobem se nazývají hierarchické (nebo vnořené) archimédovské kopuly. A právě této třídě kopul byla venována kapitola 4.

V páté kapitole jsme se zabývali možnostmi odhadu parametrů kopul. V případě hierarchických archimédovských kopul je nutné odhadnout nejen hodnoty parametrů, ale i samotnou strukturu kopuly. Pro tyto účely jsme v této kapitole uvedli efektivní rekurzivní algoritmus, ilustraci jeho použití jsme uvedli v poslední kapitole této práce.

V poslední kapitole je aplikace teorie na simulační data. V této kapitole jsme provedli studie jednotlivých přístupů k modelování ekonomického kapitálu za předpokladu přítomnosti hierarchické závislosti v datech. K analýze jsme vybrali tři odlišné struktury závislosti. Výpočet ekonomického kapitálu jsme prováděli na základě interních modelu s použitím hierarchických archimédovských kopul, které berou v úvahu hierarchickou a asymetrickou závislost dat. Též jsme se zabývali stanovením ekonomického kapitálu pomocí gaussovské kopuly, která je v dnešní době velmi využívaná mezi pojišťovnami.

Při použití interního modelu založeného na gaussovské kopule problém nastával při uvažování více úrovněvé hierarchie. Na nižších úrovních hierarchie jsou agregovány veličiny se silnější chvostovou závislostí, a tato závislost výrazně ovlivnila výši kapitálu. Tato změna nebyla zachycená gaussovskou kopulou.

Nesporným závěrem je, že hierarchické archimédovské kopuly jsou velmi užitečným nástrojem v pojištnictví. Zatím se tato struktura v pojistné praxi nevyužívá v plném rozsahu, avšak vidíme prostor k jejich použití.

Seznam použité literatury

- BERNSTEIN, S. (1929). Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Mathematica*, **52**, 1–66. doi: 10.1007/BF02592679.
- CHERUBINI, U., LUCIANO, E. a VECCHIATO, W. (2004). *Copula Method in Finance*. Hoboken, NJ, Wiley J. & Sons, Wiley. ISBN 0-470-86344-7.
- FERMANIAN, J.-D. (2005). Goodness-of-fit tests for copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, **95**(1), 119–152. doi: 10.1016/j.jmva.2004.07.004.
- GENEST, C., GHOUDI, K. a RIVEST, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, **82**(3), 543–552. ISSN 0006-3444.
- HOFERT, M. (2010). *Sampling nested Archimedean copulas with applications to CDO pricing*. Dissertation, Ulm University, Faculty of Mathematics and Economics, Ulm.
- HOFERT, M. a MÄCHLER, M. (2011). Nested Archimedean Copulas Meet R: The nacopula Package. *Journal of Statistical Software*, **39**(9). doi: 10.18637/jss.v039.i09.
- HOFERT, M., MÄCHLER, M. a MCNEIL, A. (2012). Estimators for archimedean copulas in high dimensions. URL <https://arxiv.org/pdf/1207.1708.pdf>.
- JOE, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman and Hall Ltd, London; New York. ISBN 0-412-07331-5.
- JOE, H. a XU, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical Report 166, University of British Columbia. URL <http://hdl.handle.net/2429/57078>.
- KIMBERLING, C. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae*, **10**(2), 152–164.
- MAI, J.-F. a SCHERER, M. (2012). *Simulating Copulas*, volume 4 of *Series in Quantitative Finance*. Imperial College Press, London. ISBN 1-84816-874-8.
- MARSHALL, W. A. a OLKIN, I. (1988). Families of Multivariate Distributions. *Journal of The American Statistical Association*, **83**(403), 834–841.
- MCNEIL, A. (2008). Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**(6), 567–581. doi: 10.1080/00949650701255834.
- MCNEIL, A. J. a NEŠLEHOVÁ, J. (2009). Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and L1-norm symmetric distributions. *The Annals of Statistics*, **37**(5B), 3059–3097. doi: 10.1214/07-AOS556.
- MCNEIL, A. J., FREY, R. a EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, pages 184–223. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton and Oxford. ISBN 0-691-12255-5.

- NELSEN, R. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer, Portland, second edition edition. ISBN 0-387-28659-4.
- NGUYEN, T. a MOLINARI, R. D. (2011). Risk Aggregation by Using Copulas in Internal Models. *Journal of Mathematical Finance*, **1**(3), 50–57. doi: 10.4236/jmf.2011.13007.
- OKHRIN, O. a RISTIG, A. (2014). Hierarchical Archimedean Copulae: The HAC Package. *Journal of Statistical Software*, **58**(4). doi: 10.18637/jss.v058.i04.
- OKHRIN, O., OKHRIN, Y. a SCHMID, W. (2013a). Properties of Hierarchical Archimedean Copulas. *Statistics & Risk Modeling with Applications in Finance and Insurance*, **30**(1), 21–54.
- OKHRIN, O., OKHRIN, Y. a SCHMID, W. (2013b). On the structure and estimation of hierarchical Archimedean copulas. *Journal of Econometrics*, **173**(2), 189–204.
- PANCHENKO, V. (2005). Goodness-of-Fit Tests for Copulas. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **355**(1), 176–182.
- SKLAR, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. **8**, 229–231.
- SOLVENTNOST II (2009). Směrnice Evropského Parlamentu a Rady 2009/138/ES, Komise Evropských Společenství. *Úřední věstník Evropské unie*. URL <https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2009/138/oj>.
- TANG, A. a VALDEZ, E. (2009). Economic capital and the aggregation of risks using copulas. doi: 10.2139/ssrn.1347675.

Seznam obrázků

4.1	Struktura plně vnořené archimédovské kopuly pro čtyřrozměrný případ.	18
4.2	Struktura částečně vnořené archimédovské kopuly pro $d = 4$	19
6.1	Struktura částečně vnořené archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie.	27
6.2	Odhadnutá struktura a parametry HAC pomocí algoritmu 5.4.	27
6.3	Bodové grafy pro složky vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím hierarchické archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie.	28
6.4	Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.	29
6.5	Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženou pomocí hierarchické archimédovské kopuly se dvěma úrovněmi hierarchie a pomocí gaussovské kopuly.	29
6.6	Struktura vnořené archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie.	30
6.7	Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženou pomocí hierarchické archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie a pomocí gaussovské kopuly.	31
6.8	Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí hierarchické archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie.	32
6.9	Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.	32
6.10	Struktura plně vnořené archimédovské kopuly.	33
6.11	Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím plně vnořené archimédovské kopuly.	34
6.12	Bodové grafy složek vektoru \mathbf{X} , jejich hustoty a hodnoty Kendallova tau obdržené pomocí modelu s použitím gaussovské kopuly.	35
6.13	Empirické distribuční funkce pro celkovou ztrátu obdrženou pomocí modelu s použitím plně vnořené archimédovské kopuly a gaussovské kopuly.	35

Seznam tabulek

3.1	Hodnoty Kendalova tau pro známé jednoparametrické archimédovské generátory.	16
6.1	Volba marginálních rozdělání a jejich parametrů.	25
6.2	Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhadnuté vnořené archimédovské kopuly a gaussovské kopuly.	30
6.3	Odhadnuté parametry gaussovské kopuly.	31
6.4	Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhadnuté vnořené archimédovské kopuly se třemi úrovněmi hierarchie a z gaussovské kopuly.	33
6.5	Odhadnuté koeficienty gaussovské kopuly	34
6.6	Popisné statistiky celkové škody a celkový ekonomický kapitál obdržené z odhadnuté vnořené archimédovské kopuly a normální kopuly.	36

A. Přílohy

A.1 Pravděpodobnostní rozdělení

A.1.1 Gama rozdělení

Nechť náhodná veličina X má gama rozdělení, pak její distribuční funkce je daná vztahem:

$$F(x, \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy, \quad (\text{A.1})$$

kde β se nazývá parametr měřítka, α se nazývá parametr polohy, $\alpha, \beta, x > 0$ a funkce $\Gamma(\cdot)$ je definována vztahem:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (\text{A.2})$$

Střední hodnota a rozptyl jsou následující:

$$E(X) = \alpha\beta, \quad (\text{A.3})$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2. \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Logaritmicko-normální rozdělení

Mějme náhodnou veličinu X s normálním rozdělením, pak $Y = \exp^X$ má logaritmicko-normální rozdělení. Distribuční funkce F lognormálního rozdělení je daná vztahem:

$$F(y, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \quad (\text{A.6})$$

kde μ je střední hodnota, σ je směrodatná odchylka veličiny X a Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení s $y, \sigma > 0$ a $\mu \in \mathbb{R}$.

Střední hodnota lognormálního rozdělení je:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad (\text{A.7})$$

rozptyl se dá napsat:

$$var(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \quad (\text{A.8})$$

A.1.3 Pareto rozdělení

Pareto rozdělení se dá definovat mnoha způsoby, uvedme ten, který budeme používat v této práci. Nechť X má pareto rozdělení, pak distribuční funkce F je daná vztahem:

$$F(x, \alpha, \lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha, \quad (\text{A.9})$$

kde $\alpha > 0$ je parametr polohy, $\lambda > 0$ je parametr měřítka a $x \geq 0$. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny X na základě této parametrizaci se dá napsat následujícím způsobem:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2. \quad (\text{A.11})$$

A.1.4 Weibullovo rozdělení

Nechť nezáporná náhodná veličina X má weibullovo rozdělení, pak distribuční funkce je:

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad (\text{A.12})$$

kde $\alpha > 0$ je parametr polohy, $\beta > 0$ je parametr měřítka a $x \geq 0$.

Střední hodnota je daná vztahem:

$$\mathbb{E}(X) = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad (\text{A.13})$$

a rozptyl se rovná:

$$\text{var}(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right)^2 \right], \quad (\text{A.14})$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gama funkce daná vztahem A.2.