

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Samuel Puček

Riziková averze v eficienci portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11. července 2019

Podpis autora

Na tomto mieste by som rád podakoval vedúcemu práce doc. RNDr. Martinovi Brandovi, Ph.D., za jeho ochotu a čas, ktorý mi venoval. Jeho cenné rady a pripomienky mi veľkou mierou pomohli pri tvorbe samotnej práce.

Ďalej chcem podakovať mojej rodine a priateľom, ktorí ma počas celého štúdia podporovali. Špeciálne chcem podakovať mojim rodičom za ich nesmiernu podporu a Tomášovi Šlamiakovi za množstvo rád a tipov, ktoré mi pri písaní práce dal.

Název práce: Riziková averze v efinci portfolia

Autor: Samuel Puček

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá výběrem optimálního portfolia pro rizikově averzního investora. Nejprve jsou uvedeny míry rizika, speciálně spektrální míry rizika, které zachycují individuální rizikovou averzi investora. Dále je představen model analýzy obalu dat s diverzifikací. Ten hledá eficientní portfolio v souladu se stochastickou dominancí druhého řádu. Těžištěm práce je model založený na teorii vícekritériální optimalizace a spektrálních mírách rizika. Představený model hledá optimální portfolio vhodné pro investora s danou rizikovou averzí. Navíc získané optimální portfolio je taktéž eficientní vzhledem ke stochastické dominanci druhého řádu. Předmětem praktické části je numerická studie, v níž jsou oba modely implementovány v programovacím prostředí `MATLAB`. Modely jsou dále aplikovány na reálném datovém souboru z finančních trhů. Vlastní přínos spočívá v porovnání modelu analýzy obalu dat s diverzifikací a modelu založeném na vícekritériální optimalizaci v rámci eficiency vzhledem ke stochastické dominanci druhého řádu.

Klíčová slova: míry rizika, analýza obalu dat, diverzifikace, stochastická dominance druhého řádu, vícekritériální optimalizace

Title: Risk aversion in portfolio efficiency

Author: Samuel Puček

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with selecting the optimal portfolio for a risk averse investor. Firstly, we present the risk measures, specifically spectral risk measures which consider an individual risk aversion of the investor. Then we propose a diversification-consistent data envelopment analysis model. The model is searching for an efficient portfolio with respect to second-order stochastic dominance. The crux of the thesis is a model based on the theory of multi-criteria optimization and spectral risk measures. The presented model is searching for an optimal portfolio suitable for the investor with a given risk aversion. In addition, the optimal portfolio is also consistent with second-order stochastic dominance efficiency. The topic of the practical part is a numerical study in which both models are implemented in **MATLAB**. Models are applied to a dataset from real financial markets. Personal contribution lies in comparing the diversification-consistent data envelopment analysis model and model based on multi-criteria optimization, both with respect to second order stochastic dominance efficiency.

Keywords: risk measures, data envelopment analysis, diversification, second-order stochastic dominance, multi-objective optimization

Názov práce: Riziková averzia v eficiencii portfólia

Autor: Samuel Puček

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá výberom optimálneho portfólia pre rizikovo averzného investora. Najprv sú uvedené miery rizika, špeciálne spektrálne miery rizika, ktoré zachytávajú individuálnu rizikovú averziu investora. Ďalej je predstavený model analýzy obalu dát s diverzifikáciou. Ten hľadá efficientné portfólio v súlade so stochastickou dominanciou druhého rádu. Ťažiskom práce je model založený na teórii viackriteriálnej optimalizácie a spektrálnych mierach rizika. Predstavený model hľadá optimálne portfólio vhodné pre investora s danou rizikovou averziou. Navyše získané optimálne portfólio je taktiež efficientné vzhľadom ku stochastickej dominancii druhého rádu. Predmetom praktickej časti je numerická štúdia, v ktorej sú oba modely implementované v programovacom prostredí **MATLAB**. Modely sú ďalej aplikované na reálnom dátovom súbore z finančných trhov. Vlastný prínos spočíva v porovnaní modelu analýzy obalu dát s diverzifikáciou a modelu založenom na viackriteriálnej optimalizácii v rámci eficiencie vzhľadom ku stochastickej domiancii druhého rádu.

Kľúčové slová: miery rizika, analýza obalu dát, diverzifikácia, stochastická dominancia druhého rádu, viackriteriálna optimalizácia

Obsah

Úvod	2
1 Miery rizika	3
1.1 Koherentné miery rizika	4
1.2 Spektrálne miery rizika	5
1.2.1 Príklady spektrálnych mier	9
1.2.2 Empirický odhad spektrálnych mier	12
1.2.3 Minimalizácia spektrálnych mier	13
2 Analýza obalu dát	16
2.1 DEA model s diverzifikáciou	18
2.2 Stochastická dominancia druhého rádu	24
2.3 Viackriteriálna optimalizácia	30
3 Numerická štúdia	35
3.1 Dátový súbor	35
3.2 Implementácia DEA modelu	35
3.3 Implementácia spektrálnych mier rizika s rizikovou averziou	36
3.4 Zhrnutie výsledkov	39
Záver	43
Zoznam použitej literatúry	44
A Prílohy	46
A.1 Prílohy k praktickej časti práce	46

Úvod

Tradičná práca zaoberajúca sa výberom vhodného portfólia je Markowitz (1952). Autor Harry Markowitz, nositeľ Nobelovej ceny, v nej definoval základy výberu vhodného portfólia. Od publikovania tejto práce ale uplynulo viac ako 60 rokov. Počas tej doby sa danej téme venovali stovky publikácií a odborných článkov. A tu sa vynára prirodzená otázka. Ponúka predkladaná diplomová práca niečo nové? Odpoveď je jasná, určite áno. V diplomovej práci kombinujeme viaceré zaujímavé oblasti matematiky, medzi inými spektrálne miery rizika, analýzu obalu dát, či viackriteriálnu optimalizáciu. Každá z uvedených oblastí bola po dlhé roky predmetom silného záujmu. Okrem vlastných teoretických výsledkov sa snažíme o ucelené zhrnutie týchto oblastí matematiky.

Nemalú časť práce venujeme mieram rizika, špeciálne spektrálnym mieram rizika. Vychádzame z axiomatického prístupu, ktorý predstavili autori v klasickej práci Artzner, Delbaen, Eber a Heath (1999). Miery rizika predstavené v práci Artzner a kol. (1999) sa ďalej označujú ako koherentné. Zaujímavou podmnožinou koherentných mier rizika sú spektrálne miery rizika. Tie boli po prvýkrát predstavené v práci Acerbi (2002). Spektrálnym mieram rizika sa venujeme do značnej hĺbky. Ich unikátnosť spočíva v tom, že dokážu zachytiť individuálny postoj investora k riziku.

Samotné miery rizika nám k hľadaniu optimálneho portfólia určite nestačia. Známy koncept analýzy obalu dát sa javí ako vhodná voľba. V práci Branda (2015) autor použil model založený na analýze obalu dát k hľadaniu efektívnych portfólií na množine dostupných portfólií. Model má niekoľko zaujímavých vlastností. V jednom momente dokáže zahrnúť viacero mier rizika a tým presnejšie kvantifikovať riziko portfólia. Hlavnou výhodou modelu je, že získané efektívne portfólio je v súlade s efinciou v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu. Model je vhodný aj z praktického hľadiska, je možné ho formulovať ako úlohu lineárneho programovania.

Inou možnosťou, ako hľadať efektívne portfólio, je viackriteriálna optimalizácia. Tu vychádzame z poprednej publikácie Dupačová, Hurt a Štěpán (2002). Najväčšou pridanou hodnotou modelu založenom na viackriteriálnej optimalizácii je, že v plnom rozsahu využíva spektrálne miery rizika. Každý investor je jedinečný. Voľbou vhodnej spektrálnej miery rizika nájdeme efektívne portfólio, ktoré je pre daného investora „ušité na mieru“. Navyac získané portfólio je taktiež v súlade s efinciou v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu. Jedná sa o unikátne prepojenie spektrálnych mier rizika a teórie viackriteriálnej optimalizácie.

Práca je usporiadaná nasledovne. Miery rizika, špeciálne koherentné a spektrálne miery, sú predstavené v prvej kapitole. V druhej kapitole sú postupne predstavené oba modely, model založený na analýze obalu dát s diverzifikáciou, ako aj model vychádzajúci z viackriteriálnej optimalizácie. Na záver, v tretej kapitole, je aplikácia predstavených modelov na reálnom dátovom súbore z finančných trhov. Oba modely, v tvare úlohy lineárneho programovania, boli implementované v programovacom prostredí MATLAB. Výstupy z praktickej časti potvrdzujú teoretické výsledky.

1. Miery rizika

S pojmom riziko sa stretávame v bežnom živote dennodenne. Všeobecne riziko pre nás predstavuje negatívnu situáciu, ktorá môže nastať. Napríklad ráno cestou do práce musíme počítať s rizikom, že nás zrazí auto. Podobných príkladov je celá rada. V tejto práci sa však sústredíme na riziko aktív, investícií, portfólií a podobne. V tomto kontexte pre nás riziko predstavuje možný budúci negatívny vývoj zvolenej investície. Miery rizika nám zjednodušene slúžia k tomu, aby sme mohli riziko rozumne kvantifikovať.

V úvode tejto kapitoly zavedieme dôležité pojmy, na ktoré sa budeme ďalej odkazovať vo zvyšku práce. Navyiac uvedieme príklady mier rizika, ktoré sú často využívané v praxi. V prvej časti kapitoly sa budeme venovať koherentným mieram rizika. Predstavíme axiómy koherencie, ktoré musia spĺňať všetky rozumné miery rizika. V druhej časti kapitoly sa budeme podrobne zaoberať spektrálnymi mierami rizika. V závere kapitoly ukážeme, ako postupovať v praxi pri odhadovaní a minimalizácii spektrálnych mier rizika.

Uvažujme trh, na ktorom je k dispozícii n aktív. Portfóliom rozumieme buď jedno konkrétne aktívum, alebo kombináciu viacerých aktív. Každé aktívum je charakterizované svojim náhodným výnosom R_i , kde $i = 1, \dots, n$. R_i je teda náhodná veličina definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, kde Ω je množina elementárnych javov, \mathcal{A} je σ -algebra a \mathbb{P} je pravdepodobnostná miera. Množinu všetkých dostupných portfólií označme \mathcal{X} . Matematický zápis množiny dostupných portfólií je

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i R_i : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\},$$

kde R_i je náhodný výnos a x_i je váha i -teho aktíva. Prvá podmienka, súčet váh je rovný jednej, vyžaduje aktívne investovanie všetkých dostupných prostriedkov investora. Druhá podmienka, nezápornosť váh, zabraňuje predaju nakrátko. Investor môže pracovať len s prostriedkami, ktorými aktuálne disponuje.

Definícia 1 (Szegö (2005)). *Nech \mathcal{X} je množina náhodných veličín, ktoré reprezentujú výnosy portfólií. Lubovolné zobrazenie $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva miera rizika.*

Poznámka. Miera rizika sa môže podobne definovať ako zobrazenie z množiny, ktorá reprezentuje náhodné straty uvažovaných portfólií.

Miera rizika slúži v prvom rade na to, aby sme pomocou nej mohli dostupné portfólia porovnávať. V práci Artzner a kol. (1999) autori interpretujú mieru rizika nasledovne: miera rizika $\rho(X)$ je množstvo peňazí, ktoré musí byť k portfóliu X pridané, aby sa portfólio X stalo akceptovateľné pre investora.

Miera rizika nie je vôbec nový pojem. Naopak, patrí do druhej polovice dvadsiateho storočia. Prvým priekopníkom v kvantifikácii rizika je bezpochyby Harry Markowitz, ktorý vo svojom modeli, uvedenom v práci Markowitz (1952), použil ako mieru rizika rozptyl portfólia. Postupom času sa namiesto rozptylu začali používať iné miery rizika ako smerodajná odchýlka, semivariancia, absolútna odchýlka, absolútna semiodchýlka a iné. Všetky tieto miery boli založené na pomerne jednoduchšej myšlienke. S vývojom technológií neskôr prišli ďaleko sofisti-

kovanejšie a výpočetne náročnejšie miery rizika. Medzi tie najznámejšie a najdiskutovanejšie patria Value at Risk (značíme VaR) a Conditional Value at Risk (značíme CVaR).

Definícia 2 (Acerbi (2002)). *Miera Value at Risk (hodnota v riziku) je definovaná ako*

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\},$$

kde $X \in \mathcal{X}$ vyjadruje náhodné výnosy portfólia a $\alpha \in (0, 1)$ je zvolená hladina spoľahlivosti.

Hladina spoľahlivosti α sa volí blízka nule, typicky 1% alebo 5%. Value at Risk nám dáva informáciu o tom, aká je maximálna možná strata uvažovaného portfólia za dané obdobie pri zvolenej hladine spoľahlivosti. Náhodné straty väčšie ako hodnota $\text{VaR}_\alpha(X)$ nastanú len s veľmi malou pravdepodobnosťou α . Zatiaľ čo straty menšie ako $\text{VaR}_\alpha(X)$ nastanú s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ blízkej jednej.

Jedna z nevýhod Value at Risk je, že nenesie žiadnu informáciu o tom, aká veľká môže byť strata prekračujúca $\text{VaR}_\alpha(X)$. Tento nedostatok sa odstránil definovaním novej miery rizika, Conditional Value at Risk. Conditional Value at Risk (podmienená hodnota v riziku) náhodného výnosu portfólia $X \in \mathcal{X}$ na hladine spoľahlivosti α je zjednodušene definovaná ako stredná hodnota α -chvostu rozdelenia X . Autori v práci Rockafellar a Uryasev (2002) navyše ukázali, že $\text{CVaR}_\alpha(X)$ môže byť formulovaný ako konvexný optimalizačný problém, viď Definícia 3. Tento výsledok je mimoriadne dôležitý z výpočetného hľadiska.

Definícia 3 (Rockafellar a Uryasev (2002)). *Miera Conditional Value at Risk (podmienená hodnota v riziku) je definovaná ako*

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \min_{\psi \in \mathbb{R}} \left\{ -\psi + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[\max\{-X + \psi, 0\}] \right\}.$$

1.1 Koherentné miery rizika

Autori v práci Artzner a kol. (1999) uviedli štyri základné axiómy, ktoré by mala každá rozumná miera rizika spĺňať: translačná invariancia, subaditivita, pozitívna homogenita a monotónnosť. Tieto štyri axiómy spolu nazývame axiómy koherencie. Miery rizika, ktoré spĺňajú axiómy koherencie nazývame koherentné miery rizika.

V neskôr publikovaných článkoch, napríklad Acerbi (2002) alebo Szegö (2005), autori názov „koherentné miery rizika“ zjednodušene skracujú na „miery rizika“. Podľa nich sú axiómy koherencie natolko základné, že je zbytočné sa zaoberať nekoherentnými mierami rizika a z toho dôvodu nemôže dôjsť k pomýleniu. Táto práca sa však nezaobrá len mierami rizika a preto fakt, že máme na mysli práve koherentné miery rizika vždy zdôrazníme.

Definícia 4 (Artzner a kol. (1999)). *Axiómy (A1) až (A4) nazývame axiómy koherencie. Mieru rizika, ktorá spĺňa axiómy koherencie nazývame koherentná miera rizika.*

(A1) *translačná invariancia, t.j. $\forall X \in \mathcal{X}$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c,$$

(A2) *subaditivita*, t.j. $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ platí:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

(A3) *pozitívna homogenita*, t.j. $\forall X \in \mathcal{X}$ a $\forall a \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ platí:

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X),$$

(A4) *monotónnosť*, t.j. $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ také, že $X \geq Y$ skoro isto platí:

$$\rho(X) \leq \rho(Y).$$

Axiómy (A2) a (A3) spolu implikujú konvexitu, t.j. pre ľubovoľné dve náhodné veličiny $X, Y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Ako je to s koherenciou mier Value at Risk a Conditional Value at Risk? Miera VaR nespĺňa axióm subaditivity a teda nie je koherentnou mierou rizika. Jednoduchý protipríklad je uvedený v publikácii Cipra (2015, Příklad 9.3.2). Neplatnosť axiómu subaditivity znamená, že diverzifikácia portfólia môže vygenerovať navyše riziko. Ostrej kritike miery VaR sa venujú viacerí autori, medzi inými aj Szegö (2005). Autor považuje mieru VaR za natoľko nevhodnú mieru rizika, až jeho kritike venoval celú jednu sekciu.

Miera CVaR spĺňa všetky štyri axiómy koherencie a teda je koherentnou mierou rizika. Podrobné overenie axiémov je k nájdeniu v Pflug (2000).

Na záver tejto časti uvedieme tvrdenie, ktoré neskôr využijeme pri spektrálnych mierach rizika.

Tvrdenie 1 (Acerbi (2002)). *Nech ρ_i sú koherentné miery rizika pre $i = 1, \dots, n$. Potom ľubovoľná konvexná kombinácia $\rho = \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, je koherentnou mierou rizika.*

Nech ρ_α je parametrická rodina koherentných mier rizika pre $\alpha \in [a, b]$. Potom pre každú mieru $d\mu(\alpha)$ definovanú na intervale $[a, b]$, ktorá spĺňa normalizačnú podmienku $\int_a^b d\mu(\alpha) = 1$ platí, že miera $\rho = \int_a^b \rho_\alpha d\mu(\alpha)$ je koherentnou mierou rizika.

Dôkaz. Dôkaz je spracovaný v Bakalárskej práci Štefánik (2014), Veta 2. □

1.2 Spektrálne miery rizika

Spektrálnymi mierami rizika sa ako prvý zaoberal autor v práci Acerbi (2002). Spektrálne miery oproti doteraz uvažovaným mieram navyše zohľadňujú individuálny postoj investora k riziku. Ďalej rôzne finančné deriváty na trhu vyžadujú odlišný prístup k riziku. Základným stavebným kameňom v teórii spektrálnych mierach rizika je miera označovaná ako očakávaná strata (expected shortfall - ES).

Definícia 5 (Acerbi (2002)). *Nech $X \in \mathcal{X}$ je náhodná veličina vyjadrujúca výnosy portfólia a $\alpha \in (0, 1]$. Potom α -očakávanú stratu definujeme ako*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{-1}(p) dp,$$

kde F_X^{-1} je inverzná funkcia k distribučnej funkcii F_X , ktorá je definovaná štandardným spôsobom ako

$$F_X^{-1} = \inf\{x \mid F_X(x) \geq p\}.$$

Poznámka. Pre $\alpha = 0$ môžeme Definíciu 5 rozšíriť prirodzeným spôsobom a očakávanú stratu dodefinovať ako

$$ES_0(X) = -\text{ess inf}\{X\} = \inf\{x \mid F_X(x) > 0\}.$$

$ES_0(X)$ predstavuje najväčšiu možnú stratu, akú portfólio X môže dosiahnuť.

Pre $\alpha = 1$ je očakávaná strata rovná zápornej strednej hodnote, t.j.

$$ES_1(X) = -\mathbb{E}[X].$$

V článku Acerbi a Tasche (2002) autori ukázali, že očakávaná strata spĺňa axiómy koherencie (A1) až (A4) uvedené v Definícii 4 a je teda koherentnou mierou rizika.

Uvažujme mieru $d\mu(\alpha)$ definovanú na intervale $[0, 1]$ pre každé $\alpha \in [0, 1]$, ktorá spĺňa normalizačnú podmienku

$$\int_0^1 \alpha d\mu(\alpha) = 1.$$

Potom miera $M_\mu(X)$ definovaná ako

$$M_\mu(X) = \int_0^1 \alpha d\mu(\alpha) ES_\alpha(X) = - \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_0^\alpha F_X^{-1}(p) dp \quad (1.1)$$

je koherentnou mierou rizika podľa Tvrdenia 1. Aplikovaním Fubiniovej vety o zámene integrálov výraz 1.1 môžeme upraviť do tvaru

$$M_\mu(X) = \int_0^1 \int_p^1 d\mu(\alpha) F_X^{-1}(p) dp = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp = M_\phi(X).$$

Vidíme, že ľubovoľne zvolenú mieru $d\mu(\alpha)$ môžeme zameniť za mieru $\phi(p)$ definovanú ako

$$\phi(p) = \int_p^1 d\mu(\alpha).$$

Opäť aplikovaním Fubiniovej vety jednoducho overíme, že nová parametrizácia spĺňa normalizačnú podmienku

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(p) dp &= \int_0^1 \int_p^1 d\mu(\alpha) dp = \int_0^1 \int_0^\alpha d\mu(\alpha) dp \\ &= \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_0^\alpha dp = \int_0^1 \alpha d\mu(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

Ďalej uvažujme priestor $\mathcal{L}^1([0, 1])$ s danou normou

$$\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(p)| dp.$$

Dve funkcie ϕ_1 a $\phi_2 \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ také, že $\|\phi_1 - \phi_2\| = 0$ definujú jednu a tú istú mieru $M_\phi = M_{\phi_1} = M_{\phi_2}$.

Definícia 6 (Acerbi (2002)). *Funkciu $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ nazývame prípustné rizikové spektrum, ak:*

(1) ϕ je nezáporná, t.j. $\forall I \subset [0, 1]$ platí

$$\int_I \phi(p) dp \geq 0,$$

(2) ϕ je nerastúca, t.j. $\forall q \in (0, 1)$ a $\forall \epsilon > 0$ také, že $[q - \epsilon, q + \epsilon] \subset [0, 1]$ platí

$$\int_{q-\epsilon}^q \phi(p) dp \geq \int_q^{q+\epsilon} \phi(p) dp,$$

(3) $\|\phi\| = 1$.

Veta 2 (Postačujúca podmienka koherencie, Acerbi (2002)). *Nech miera $M_\phi(X)$ je definovaná ako*

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp,$$

kde $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. Ak ϕ je prípustné rizikové spektrum, potom $M_\phi(X)$ je koherentnou mierou rizika.

Dôkaz. Dôkaz je k nájdeniu v článku Acerbi (2002, Theorem 2.5). □

Ako sme naznačili v úvode tejto časti, hlavnou pridanou hodnotou spektrálnych mier rizika je zohľadnenie individuálneho postoja investora. Podľa postačujúcej podmienky koherencie (Veta 2), ak vezmeme ľubovoľné prípustné rizikové spektrum ϕ , potom je miera $M_\phi(X)$ koherentná. Funkcia ϕ je prípustné rizikové spektrum, ak je nezáporná, neklesajúca a jej norma je rovná jednej. Funkciu ϕ môžeme chápať ako istú váhovú funkciu, ktorá pripisuje väčšie váhy väčším stratám. V skutočnosti funkcia ϕ vyjadruje rizikovú averziu investora.

Definícia 7 (Acerbi (2002)). *Prípustné rizikové spektrum $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ sa nazýva rizikovo averzná funkcia miery $M_\phi(X)$ definovanej ako*

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp.$$

Mieru M_ϕ nazývame spektrálna riziková miera generovaná prípustným rizikovým spektrom ϕ .

Veta 3 (Nutná a postačujúca podmienka koherencie, Acerbi (2002)). *Nech M_ϕ je spektrálna miera rizika definovaná ako v Definícii 7 a $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ je jej rizikovo averzná funkcia. $M_\phi(X)$ je koherentná miera rizika práve vtedy, keď ϕ je prípustné rizikové spektrum.*

Dôkaz. Dôkaz je k nájdeniu v článku Acerbi (2002, Theorem 4.1). □

Na záver tejto časti sa budeme v krátkosti zaoberať charakterizáciou spektrálnych mier rizika ako podmnožinou koherentných mier rizika.

Definícia 8 (Szegö (2004)). *Náhodné veličiny X a Y sa nazývajú komonotónne, ak môžu byť zapísané ako neklesajúce funkcie tej istej náhodnej veličiny Z , t.j.*

$$\begin{aligned} X &= f(Z), \\ Y &= g(Z), \end{aligned}$$

kde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú neklesajúce funkcie.

Tvrdenie 4 (Szegö (2004)). *Nech $X, Y \in \mathcal{X}$. Spektrálne miery rizika sú všetky koherentné miery rizika ρ , ktoré navyše spĺňajú dve podmienky:*

- *invariancia voči distribúcii*

$$\rho(X) = \rho(Y), \text{ ak } F_X(\cdot) = F_Y(\cdot),$$

- *komonotónna aditivita*

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y), \text{ kde } X, Y \text{ sú komonotónne.}$$

Invariancia voči distribúcii pôsobí ako predpoklad, ktorý by sme automaticky považovali za splnený. Nie je tomu vždy tak a existujú príklady koherentných mier rizika, ktoré tento predpoklad nespĺňajú, viď napríklad Szegö (2004, Example 3.20). V prípade, ak invariancia voči distribúcii neplatí, to znamená

$$\rho(X) \neq \rho(Y), \text{ ak } F_X(\cdot) = F_Y(\cdot),$$

potom mieru rizika ρ nie je možné empiricky odhadnúť.

Komonotónna aditivita úzko súvisí s predpokladom subaditivity a diverzifikáciou portfólia. Volne povedané, ak je miera rizika komonotónne aditívna, potom zahrnutím dvoch aktív reprezentovaných komonotónnymi náhodnými veličinami X a Y do uvažovaného portfólia nedocielime diverzifikáciu. Opäť v Szegö (2004, Example 3.21) je uvedený príklad koherentnej miery rizika, ktorá nie je komonotónne aditívna.

Iná charakterizácia spektrálnych mier rizika je založená na stochastickej dominancii prvého rádu (first-order stochastic dominance - FSD) a monotónnosti vzhľadom k stochastickej dominancii prvého rádu.

Definícia 9 (Szegö (2004)). *Nech X a Y sú náhodné veličiny reprezentujúce portfólia. Povieme, že X (slabo) dominuje Y v zmysle stochastickej dominancie prvého rádu (značíme $X \succeq_{FSD} Y$), ak platí*

$$F_X(x) \leq F_Y(x), \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tvrdenie 5 (Szegö (2004)). *Nech $X, Y \in \mathcal{X}$. Spektrálne miery rizika sú všetky koherentné miery rizika ρ , ktoré navyše spĺňajú dve podmienky:*

- *monotónnosť vzhľadom k stochastickej dominancii prvého rádu*

$$\rho(Y) \geq \rho(X), \text{ ak } X \succeq_{FSD} Y,$$

- *komonotónna aditivita*

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y), \text{ kde } X, Y \text{ sú komonotónne.}$$

Tvrdenia 4 a 5 nám poskytujú charakterizáciu spektrálnych mier rizika v množine koherentných mier. Navyše nám dávajú informáciu o tom, aké vlastnosti chýbajú koherentným mieram, ktoré nie sú spektrálnymi mierami.

1.2.1 Príklady spektrálnych mier

Teraz uvedieme niekoľko konkrétnych príkladov spektrálnych mier rizika. Exponenciálne a mocninové spektrálne miery sú ďalej podrobne spracované v práci Dowd a kol. (2008), odkiaľ sme zároveň čerpali.

Očakávaná strata

Očakávaná strata nám slúžila ako základný stavebný kameň pri budovaní teórie spektrálnych mier rizika, viď Definícia 5. Rizikové spektrum očakávanej straty je definované ako

$$\phi(p) = \begin{cases} \alpha^{-1}, & \text{pre } 0 < p \leq \alpha, \\ 0, & \text{pre } \alpha < p \leq 1. \end{cases}$$

Tvar rizikového spektra pre dve hodnoty parametru α je zachytený na Obrázku 1.1. Očakávanú stratu ako spektrálnu mieru rizika môžeme zapísať v tvare

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp = - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{-1}(p) dp.$$

Tento tvar očakávanej straty je zhodný s tvarom miery CVaR.

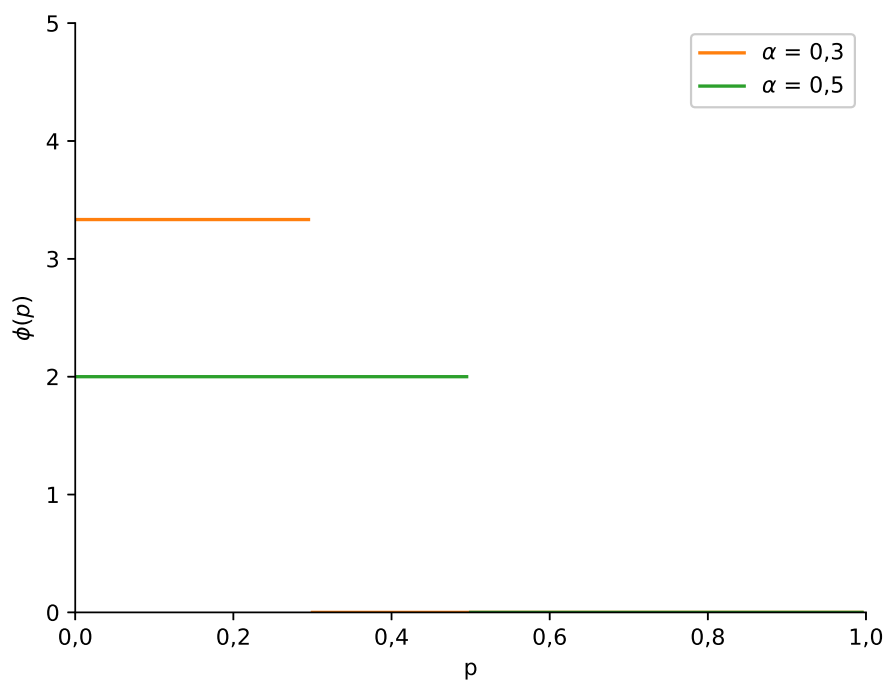
Exponenciálna spektrálna miera rizika

Exponenciálna spektrálna miera rizika je alternatívou k populárnej očakávanej strate. Jej rizikové spektrum pre parameter $k > 0$ je definované ako

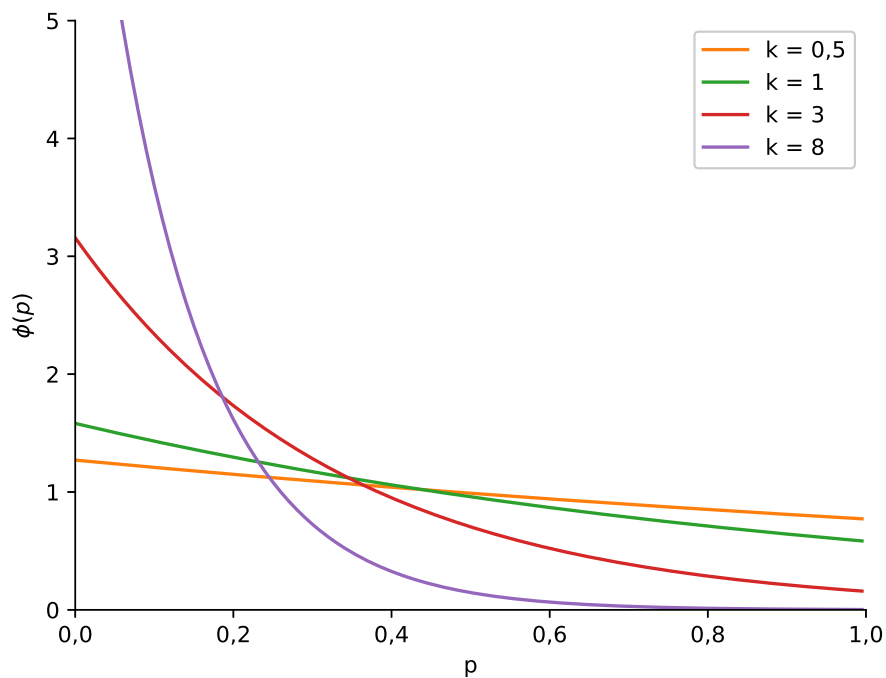
$$\phi(p) = \frac{k \cdot e^{-k \cdot p}}{1 - e^{-k}}.$$

Exponenciálne rizikové spektrum pre rôzne hodnoty parametru rizikovej averzie $k > 0$ je zachytené na Obrázku 1.2. Dosadením do Definície 7 má potom exponenciálna spektrálna miera rizika tvar

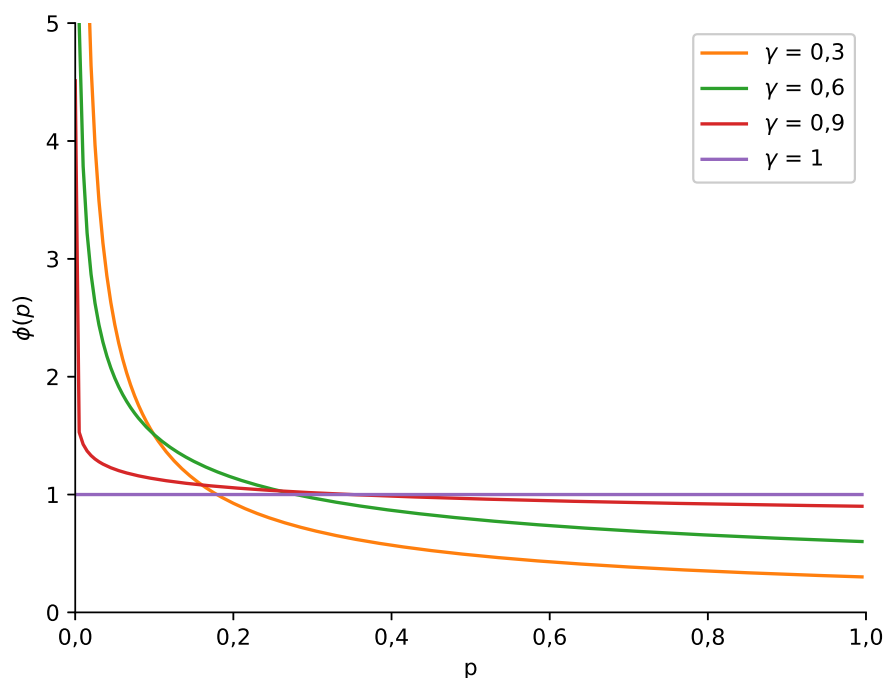
$$M_\phi(X) = - \frac{k}{1 - e^{-k}} \int_0^1 e^{-k \cdot p} F_X^{-1}(p) dp.$$



Obr. 1.1: Rizikové spektrum očakávanej straty pre dve rôzne hodnoty parametru α .



Obr. 1.2: Rizikové spektrum exponenciálnej spektrálnej miery rizika pre rôzne hodnoty parametru $k > 0$.



Obr. 1.3: Rizikové spektrum mocnínovej spektrálnej miery rizika pre rôzne hodnoty parametru $0 < \gamma \leq 1$.

Mocninová spektrálna miera rizika

Rizikové spektrum mocnínovej miery rizika pre parameter $0 < \gamma \leq 1$ je definované ako

$$\phi(p) = \gamma \cdot p^{\gamma-1}.$$

Mocninové rizikové spektrum s rôznymi hodnotami parametru rizikovej averzie $0 < \gamma \leq 1$ je zachytené na Obrázku 1.3. Mocninová spektrálna miera rizika má potom tvar

$$M_\phi(X) = -\gamma \int_0^1 p^{\gamma-1} F_X^{-1}(p) dp.$$

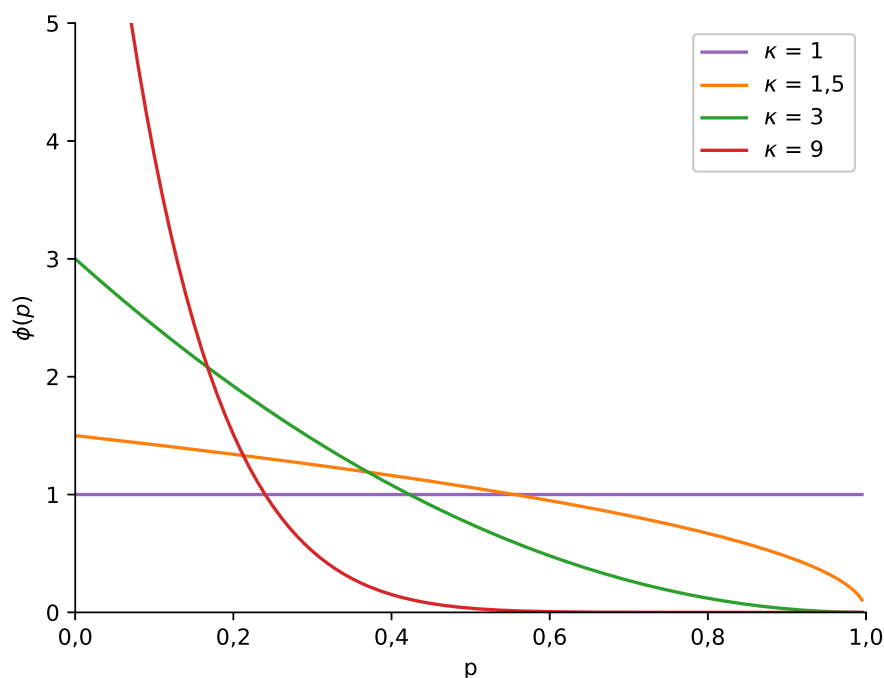
Rizikové spektrum mocnínovej miery rizika môžeme ďalej definovať pre parameter $\kappa \geq 1$ ako

$$\phi(p) = \kappa \cdot (1-p)^{\kappa-1}.$$

Mocninové rizikové spektrum pre rôzne hodnoty parametru rizikovej averzie $\kappa \geq 0$ je zachytené na Obrázku 1.4. Mocninová spektrálna miera rizika má potom tvar

$$M_\phi(X) = -\kappa \int_0^1 (1-p)^{\kappa-1} F_X^{-1}(p) dp.$$

Poznámka. V tejto práci sa nezaobráame výberom vhodného rizikového spektra pre daného investora. Naopak, vždy predpokladáme, že investor pozná svoje rizikové spektrum. Touto problematikou sa ďalej zaoberajú napríklad autori v práci Brandtner a Kürsten (2015).



Obr. 1.4: Rizikové spektrum mocninovej spektrálnej miery rizika pre rôzne hodnoty parametru $\kappa \geq 1$.

1.2.2 Empirický odhad spektrálnych mier

V tejto časti sa budeme zaoberať odhadom spektrálnej miery rizika na základe dostupných dát. Miera rizika M_ϕ portfólia X môže byť priamo spočítaná len v prípade, ak je známe explicitné vyjadrenie inverznej funkcie. V praxi to znamená, že predpokladáme parametrické rozdelenie náhodnej veličiny X .

Častejší prístup je, že máme k dispozícii S realizácií náhodného výnosu X . Uvažujme náhodný výber X_1, \dots, X_S , t.j. X_1, \dots, X_S sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny. Na základe S dostupných pozorovaní môžeme získať empirický odhad spektrálnej miery rizika.

Preusporiadaním náhodných veličín X_1, \dots, X_S od najmenej po najväčšiu dostaneme usporiadaný náhodný výber

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(S-1)} < X_{(S)}.$$

Definícia 10 (Acerbi (2002)). *Nech X_1, \dots, X_S je S realizácií náhodného výnosu X . Pre každú S -ticu váh $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, S$ definujeme štatistiku*

$$M_\phi^S(X) = - \sum_{i=1}^S \phi_i X_{(i)}.$$

Štatistiku M_ϕ^S nazveme empirická spektrálna riziková miera generovaná váhovými funkciami ϕ_i , $i = 1, \dots, S$.

Definícia 11 (Acerbi (2002)). *S -tica váhových funkcií $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i \in 1, \dots, S$ sa nazýva prípustné empirické rizikové spektrum, ak platí:*

- (1) ϕ_i je nezáporná, t.j. $\phi_i \geq 0$,
- (2) ϕ_i je nerastúca, t.j. $\phi_i \geq \phi_j$ pre každé $i \leq j$,
- (3) $\sum_{i=1}^S \phi_i = 1$.

Na záver uvedieme diskretnú verziu nutnej a postačujúcej podmienky koherencie (Veta 3).

Veta 6 (Acerbi (2002)). *Empirická spektrálna riziková miera M_ϕ^S definovaná ako v Defínícii 10 je koherentnou mierou rizika pre ľubovoľné pevné $S \in \mathbb{N}$ práve vtedy, keď ϕ_i je prípustné empirické rizikové spektrum.*

Dôkaz. Dôkaz je k nájdeniu v článku Acerbi (2002, Theorem 5.3). □

Veta 6 má priamu aplikáciu v praxi, pretože platí pre ľubovoľné pevné prirodzené číslo S . V štyroch bodoch predstavíme možný postup výpočtu empirickej spektrálnej rizikovej miery M_ϕ^S :

1. Investor zvolí svoju vlastnú rizikovo averznú funkciu $\phi(p)$, $p \in [0, 1]$ vyjadrujúcu jeho individuálny postoj k riziku uvažovaného portfólia. Funkcia $\phi(p)$ musí byť zvolená nezávisle na počte pozorovaní S .
2. Investor má k dispozícii S nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín X_1, \dots, X_S , ktoré predstavujú realizácie náhodného výnosu portfólia X .
3. Postupnosť $\{\phi_i\}_{i=1}^S$ vypočíta investor podľa vzťahu uvedenom v Acerbi (2002)

$$\phi_i = \frac{\phi(i/S)}{\sum_{k=1}^S \phi(k/S)}, \quad i = 1, \dots, S,$$

alebo podľa vzťahu uvedenom v Szegö (2004, Proposition 3.11)

$$\phi_i = \int_{(i-1)/S}^{i/S} \phi(p) dp, \quad i = 1, \dots, S.$$

Postupnosť $\{\phi_i\}_{i=1}^S$ spĺňa všetky body v Defínícii 11.

4. Na záver investor spočíta empirickú spektrálnu rizikovou mieru M_ϕ^S podľa vzťahu z Defínície 10.

1.2.3 Minimalizácia spektrálnych mier

Poznatky získané o spektrálnych mierach rizika môžeme využiť pri optimalizácii portfólia. Konkrétne môžeme formulovať optimalizačnú úlohu, v ktorej budeme minimalizovať vybranú mieru rizika. Naším cieľom bude minimalizovať zvolenú mieru rizika vzhľadom k váham jednotlivých aktív obsiahnutých v portfóliu. Získané riešenie tak bude optimálne portfólio.

Najskôr uvedieme konkrétny príklad minimalizácie očakávanej straty. Po nej prejdeme do všeobecnejšej roviny a ukážeme, ako postupovať pri minimalizácii ľubovolnej spektrálnej miery.

Uvažujme portfólio $X \in \mathcal{X}$, ktoré je dané vektorom váh jednotlivých aktív $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Budeme hľadať optimálne riešenie vzhľadom k váhovému vektoru \vec{x} , preto budeme portfólio v tejto časti označovať $X(\vec{x})$. Pre váhy x_i rovnako ako doteraz predpokladáme $x_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Minimalizácia očakávanej straty

Empirický odhad očakávanej straty na základe pozorovaní X_1, \dots, X_S je

$$ES_\alpha^S(X(\vec{x})) = -\frac{1}{[\alpha S]} \sum_{s=1}^{[\alpha S]} X_{(s)}(\vec{x}), \quad (1.2)$$

kde $[\alpha S]$ značí celú časť čísla αS .

Vo výraze 1.2 vystupuje usporiadaný náhodný výber v závislosti na vektore váh \vec{x} . Malá zmena vo vektore váh vynucuje opätovné preusporiadanie náhodného výberu. Výraz 1.2 teda nie je použiteľný do účelovej funkcie.

Autori Pflug, Rockafellar a Uryasev ukázali, že problém minimalizácie očakávanej straty

$$ES_\alpha(X(\vec{x})) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{X(\vec{x})}^{-1}(p) dp$$

je ekvivalentný minimalizácii funkcie Γ s pomocnou premennou $\psi \in \mathbb{R}$

$$\Gamma_\alpha(X(\vec{x}), \psi) = -\psi + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[\max\{-X(\vec{x}) + \psi, 0\}].$$

Naviac dokázali toto nosné tvrdenie.

Tvrdenie 7 (Szegö (2004)). *Minimum $ES_\alpha(X(\vec{x}))$ v \vec{x} sa zhoduje s minimom funkcie $\Gamma_\alpha(X(\vec{x}), \psi)$ v parametroch \vec{x} a ψ , t.j.*

$$\min_{\vec{x}} ES_\alpha(X(\vec{x})) = \min_{\vec{x}, \psi} \Gamma_\alpha(X(\vec{x}), \psi).$$

Ak je naviac $X(\vec{x})$ lineárna v \vec{x} , potom funkcia $\Gamma_\alpha(X(\vec{x}), \psi)$ je konvexná v parametroch \vec{x} a ψ .

Tvrdenie 7 nám dáva priamy návod, ako obísť zložitú minimalizáciu empirického odhadu očakávanej straty $ES_\alpha^S(X(\vec{x}))$ vzhľadom k vektoru váh \vec{x} . Namiesto toho môžeme minimalizovať funkciu

$$\Gamma_\alpha^S(X(\vec{x}), \psi) = -\psi + \frac{1}{[\alpha S]} \sum_{s=1}^S \max\{-X_s(\vec{x}) + \psi, 0\}$$

v parametroch \vec{x} a ψ .

Aby sme sa vyhli problému s maximom vo vnútri funkcie $\Gamma_\alpha^S(X(\vec{x}), \psi)$, pridáme do optimalizačnej úlohy pomocné nezáporné premenné z_s . Výsledná optimalizačná úloha má potom tvar

$$\min_{\vec{x}, \psi, z_s} -\psi + \frac{1}{[\alpha S]} \sum_{s=1}^S z_s$$

za podmienok

$$\begin{aligned} z_s &\geq -X_s(\vec{x}) + \psi, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ \psi &\in \mathbb{R} \\ x_i, z_s &\geq 0. \end{aligned}$$

Minimalizácia ľubovolnej spektrálnej miery

Sústredíme sa výhradne na diskretný prípad. Možné spojité rozšírenie tejto problematiky je k nájdeniu v publikácii Szegö (2004, Kapitola 10.4).

Empirická spektrálna miera rizika má tvar

$$M_\phi^S(X(\vec{x})) = - \sum_{s=1}^S \phi_s X_{(s)}(\vec{x}), \quad (1.3)$$

kde ϕ_s je diskretné rizikové spektrum, ktoré spĺňa podmienky kladené v Defínícii 11. Rovnako, ako pri empirickom odhade očakávanej straty, aj tu vo výraze 1.3 vystupuje usporiadaný náhodný výber. Riešením je opäť funkcia $\Gamma_\alpha^S(X(\vec{x}), \vec{\psi})$, tentokrát však s vektorom pomocných premenných $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{S-1})$, $\vec{\psi} \in \mathbb{R}^{S-1}$.

$$\Gamma_\phi^S(X(\vec{x}), \vec{\psi}) = \sum_{j=1}^{S-1} \Delta\phi_j \left(j\psi_j - \sum_{s=1}^S \max\{-X_s(\vec{x}) + \psi_j, 0\} \right) - \phi_S \sum_{s=1}^S X_s(\vec{x}),$$

kde $\Delta\phi_j = \phi_{j+1} - \phi_j$.

Tvrdenie 8 (Szegö (2004)). *Minimum $M_\phi^S(X(\vec{x}))$ v \vec{x} sa zhoduje s minimom funkcie $\Gamma_\phi^S(X(\vec{x}), \vec{\psi})$ vo vektorových parametroch \vec{x} a $\vec{\psi}$, t.j.*

$$\min_{\vec{x}} M_\phi^S(X(\vec{x})) = \min_{\vec{x}, \vec{\psi}} \Gamma_\phi^S(X(\vec{x}), \vec{\psi}).$$

Ak je navyše $X(\vec{x})$ lineárna v \vec{x} , potom funkcia $\Gamma_\phi^S(X(\vec{x}), \vec{\psi})$ je konvexná v parametroch \vec{x} a $\vec{\psi}$.

S využitím pomocných nezáporných premenných z_{ij} má výsledná optimalizačná úloha tvar

$$\min_{\vec{x}, \psi_j, z_{ij}} \sum_{j=1}^{S-1} \Delta\phi_j \left(j\psi_j - \sum_{s=1}^S z_{sj} \right) - \phi_S \sum_{s=1}^S X_s(\vec{x}),$$

za podmienok

$$\begin{aligned} z_{sj} &\geq -X_s(\vec{x}) + \psi_j, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ \psi_j &\in \mathbb{R} \\ x_i, z_{sj} &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Analýza obalu dát

Analýza obalu dát (Data Envelopment Analysis - DEA) je optimalizačná metóda, ktorá slúži na vyhodnocovanie eficientie homogénnych jednotiek (Decision Making Unist - DMU). Pod pojmom homogénna jednotka si môžeme pre jednoduchosť predstaviť napríklad nemocnicu, pobočku banky alebo školu. Kľúčovým predpokladom je jednotná štruktúra vstupov a výstupov každej homogénnej jednotky. Vstupom pre nemocnicu môže byť napríklad počet doktorov, počet sestričiek a nemzdové náklady. Výstupom môže byť počet ošetrovaných pacientov. Výsledkom DEA analýzy je eficientia jednotlivých homogénnych jednotiek. Jednou z hlavných výhod DEA analýzy je, že dokáže pracovať s viacerými vstupmi a výstupmi.

Počiatky DEA analýzy siahajú až do roku 1957. V práci Farrell (1957) sa autor snažil vysporiadať s problémom viacerých vstupov a výstupov. Dovtedy dostupné metódy zlyhávali práve v určovaní eficientie homogénnych jednotiek s viacerými vstupmi a výstupmi. Prvý DEA model v tvare, ako ho poznáme dnes, formulovali autori vo svojej práci Charnes, Cooper a Rhodes (1978). Tento model nesie po menách autorov označenie CCR. O šesť rokov neskôr, autori v práci Banker, Charnes a Cooper (1984) predstavili BCC model. Rozdiel medzi CCR a BCC modelom je najlepšie vidieť v ich duálnej formulácii. Oba tieto modely uvedieme v základoch tvare. Ďalej sa sústreďíme na modely a ich vlastnosti tak, aby sme mali úplný teoretický aparát k praktickej časti.

Od doby, kedy boli predstavené základné DEA modely, ubehlo viac ako 30 rokov. Z DEA analýzy sa stala diskutovaná téma, bola spomenutá vo viac než tisíc odborných článkoch. Tejto veľkej oblube sa teší predovšetkým pre empirickú orientáciu a priamu aplikáciu na reálne problémy. DEA analýza našla využitie v určovaní efektivity nemocníc, amerických vzdušných síl, univerzít, miest, korporácií, investičných fondov či v neziskovom sektore. DEA modely vyžadujú napríklad v porovnaní s regresnou analýzou minimálny počet predpokladov.

V našej práci DEA modely využijeme k určení eficientie dostupných portfólií. Homogénnou jednotkou pre nás bude sledované portfólio. Vhodnými vstupmi budú viaceré miery rizika, výstupmi budú naopak miery výnosu.

Uvažujme n homogénnych jednotiek, ktoré chceme ohodnotiť. Každá homogénna jednotka má m rôznych vstupov a s rôznych výstupov. Vstupy budeme označovať $X = \{x_{ij}\}$, kde $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. Pri vstupoch preferujeme nižšie hodnoty. Výstupy budeme označovať $Y = \{y_{rj}\}$, kde $r = 1, \dots, s$ a $j = 1, \dots, n$. Pri výstupoch naopak preferujeme vyššie hodnoty. Špeciálne, j -ta homogénna jednotka spotrebuje x_{ij} vstupu i a vyprodukuje y_{rj} výstupu r . Na úvod budeme predpokladať, že všetky vstupy aj výstupy sú nezáporné, t.j. $x_{ij} \geq 0$ a $y_{rj} \geq 0$. Predpoklad na nezápornosť vstupov a výstupov je nevyhnutný pri pôvodných CCR a BCC modeloch. Neskôr ukážeme, ako sa dá tento predpoklad elegantne obísť. Na záver ešte predpokladajme, že každá homogénna jednotka má aspoň jeden kladný vstup a aspoň jeden kladný výstup. Oba modely, CCR ako aj BCC, formulujeme v tvare orientovanom na vstupy.

Ako prvý predstavíme lomený CCR model, ktorý formulovali autori v práci Charnes a kol. (1978). CCR model priamo zovšeobecňuje úlohu s jedným vstupom a jedným výstupom. Relatívna eficientia danej homogénnej jednotky sa vypočíta

ako pomer vážených výstupov ku váženým vstupom. Takýto pomer musí byť pre každú jednu uvažovanú jednotku menší, nanajvýš rovný jednej.

$$\max_{u_r, v_i} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.1)$$

x_{ij} a y_{rj} sú pozorované hodnoty vstupov a výstupov j -tej homogénnej jednotky. Váhy u_r a v_i sú neznáme premenné, ktorých hodnota sa získa vyriešením optimalizačnej úlohy. Sledovaná homogénna jednotka so vstupmi x_{i0} a výstupmi y_{r0} je efficientná práve vtedy, keď optimálna hodnota modelu 2.1 je rovná jednej.

Pridaním predpokladu $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$ do modelu 2.1, t.j. užitím Charnes-Cooperovej transformácie, získame takzvanú multiplikátorovú formuláciu CCR modelu.

$$\max_{u_r, v_i} \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Využitím duality v úlohe lineárneho programovania 2.2 dostaneme model

$$\min_{\theta, \lambda_j} \theta$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Optimálne riešenie θ^* úlohy 2.3 je skóre účinnosti skúmanej homogénnej jednotky. Aby sme mohli určiť účinnosť každej z n dostupných homogénnych jednotiek, potrebujeme výpočet modelu zopakovať pre každú jednu homogénnu jednotku zvlášť. Je jednoduché ukázať, že $\theta^* \leq 1$. Ak $\theta^* = 1$, príslušná homogénna jednotka

je efficientná. V opačnom prípade je príslušná homogénna jednotka neeficientná. CCR model je podrobne spracovaný v práci Cooper a kol. (2011), kde navyše autori diskutujú jeho možné rozšírenia.

Na záver pre zrovnanie s modelom 2.3 uvedieme duálnu úlohu BCC modelu.

$$\min_{\theta, \lambda_j} \theta$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Model 2.4 sa od modelu 2.3 líši pridaním podmienky $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Porovnaním modelov CCR a BCC sa zaoberali autori v práci Seiford a Thrall (1990).

Označme (u^*, v^*) optimálne riešenie modelu 2.1. Potom zrejme $(\alpha u^*, \alpha v^*)$, kde $\alpha > 0$, je tiež optimálnym riešením úlohy 2.1. Hovoríme o takzvaných konštantných výnosoch z rozsahu (Constant Returns to Scale - CRS). Táto vlastnosť platí nie len pre optimálne riešenie úlohy, ale aj pre každé prípustné riešenie. Množina optimálnych riešení tvorí nezáporný obal. Naproti tomu, optimálne riešenie BCC modelu túto podmienku nespĺňa. Hovoríme preto o takzvaných variabilných výnosoch z rozsahu (Variable Returns to Scale - VRS). Množina optimálnych riešení tvorí konvexný obal.

2.1 DEA model s diverzifikáciou

V úvode práce a v úvode druhej kapitoly sme naznačili, že pomocou vhodného DEA modelu určíme eficientiu dostupných portfólií. Do DEA modelov môžeme zahrnúť viacero vstupov a výstupov. Ako vstupy zvolíme rôzne miery rizika. Tento prístup sa v literatúre niekedy označuje ako risk shaping. Ďalej by sa ako vstupy mohli pridať napríklad transakčné náklady. Na výstupe môžeme uvažovať očakávaný výnos portfólia, prípadne počet dominovaných portfólií. V tejto časti budeme vychádzať predovšetkým z Branda (2015).

Uvažujme, že máme k dispozícii n aktív s náhodným výnosom R_i . Nech $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ sú váhy jednotlivých aktív a nech platí $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Potom $\sum_{i=1}^n x_i R_i$ predstavuje náhodný výnos zvoleného portfólia. Ďalej uvažujme ľubovoľnú konvexnú mieru rizika \mathcal{R} , napríklad mieru CVaR. Motivácia k DEA modelu s diverzifikáciou je jednoduchá. Diverzifikácia portfólia sa používa za účelom zníženia rizika. Tradičné DEA modely však výrazne preceňujú riziko uvažovaného diverzifikovaného portfólia. Platí

$$\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i\right) \leq \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{R}(R_i). \tag{2.5}$$

Ľavá strana odpovedá DEA modelu s diverzifikáciou, zatiaľ čo pravá strana odpovedá tradičnému DEA modelu, kde za vstupy volíme miery rizika jednotlivých aktív. Môžeme vidieť, že lineárna transformácia vstupov je len horný odhad pre reálne riziko portfólia. Navyše sa ukazuje, že nerovnosť 2.5 je zvyčajne ostrá.

Symbolom \mathcal{E} označme mieru výnosu, pre ktorú platí, že $\mathcal{E}(X) = -\mathcal{R}(X)$, kde \mathcal{R} je ľubovoľná konvexná miera rizika a $X \in \mathcal{X}$. Budeme uvažovať $K \geq 1$ vstupných mier rizika a $J \geq 1$ výstupných mier výnosu. Výsledkom DEA modelu je eficientia uvažovaných portfólií. Neeficientné portfólia je možné navyše usporiadať podľa „vzdialenosti“ od hranice eficientných portfólií. Množinu možných produktov označíme ako \mathcal{PPS} (production possibility set):

$$\mathcal{PPS} = \left\{ (-\mathcal{R}_1(X), \dots, -\mathcal{R}_K(X), \mathcal{E}_1(X), \dots, \mathcal{E}_J(X)) : X \in \mathcal{X} \right\}$$

Miery rizika sú prenasobené -1 kvôli konzistencii s ďalej uvedenými definíciami. Prvá definícia je technického charakteru, kde zavedieme slabú parciálnu dominanciu.

Definícia 12 (Branda (2015)). *Nech $v, z \in \mathbb{R}^n$. Povieme, že z parciálne slabo dominuje vzhľadom k indexovej množine $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, značíme $v \prec_{ps(S)} z$, ak $v_i \leq z_i$ pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a existuje aspoň jedno $j \in S$ také, že $v_j < z_j$.*

Ďalej definujeme, kedy je portfólio takzvané silno Pareto-Koopmans eficientné. DEA model, ktorý uvedieme, bude hľadať práve portfólia, ktoré sú silno Pareto-Koopmans eficientné.

Definícia 13 (Branda (2015)). *Portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$ je silno Pareto-Koopmans eficientné, ak neexistuje žiadne iné portfólio $\tilde{X} \in \mathcal{X}$ a k nemu príslušný vektor v z množiny možných produktov, pre ktorý platí*

$$(-\mathcal{R}_1(X_0), \dots, -\mathcal{R}_K(X_0), \mathcal{E}_1(X_0), \dots, \mathcal{E}_J(X_0)) \prec_{ps(\{1, \dots, K+J\})} v.$$

Pre úplnosť formálne definujeme, kedy je a kedy nie je portfólio eficientné.

Definícia 14 (Branda (2015)). *Povieme, že portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$ je DEA eficientné (vzhľadom k množine \mathcal{X}), ak optimálna hodnota DEA modelu je rovná jednej. V opačnom prípade je portfólio X_0 neeficientné a optimálna hodnota je miera jeho neeficiencie.*

Optimálnu hodnotu portfólia X_0 budeme značiť $\theta(X_0)$ a Ψ bude označovať množinu všetkých eficientných portfólií vzhľadom k množine \mathcal{X} , t.j.

$$\Psi = \{X \in \mathcal{X} : \theta(X) = 1\}.$$

Miery rizika ako aj miery výnosu portfólia sú reálne čísla. Tradičné DEA modely však záporné vstupné a výstupné hodnoty zakazujú, napríklad CCR model 2.1 formulovaný v úvode kapitoly. Tomuto problému sa venovali autori v článku Portela, Thanassoulis a Simpson (2004). Získané výsledky aplikujeme aj v našom modeli.

Predstavený DEA model s diverzifikáciou hľadá najbližšie eficientné portfólio X^* , ktoré prekonáva referenčné portfólio X_0 v smeroch danými vektormi $e_j(X_0)$ a $d_k(X_0)$. Model berie do úvahy relatívne zlepšenie pre každý jeden vstup a výstup

zvlášť. Výsledkom modelu je jednak miera efície referenčného portfólia X_0 , t.j. hodnota $\theta(X_0)$ a zároveň váhy x_i^* odpovedajúce optimálnemu portfóliu X^* .

DEA model s diverzifikáciou v základnom tvare je

$$\theta(X_0) = \min_{\theta_k, \varphi_j, x_i} \frac{1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \theta_k}{1 + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varphi_j}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j \left(\sum_{i=1}^n R_i x_i \right) &\geq \mathcal{E}_j(X_0) + \varphi_j \cdot e_j(X_0), \quad j = 1, \dots, J, \\ \mathcal{R}_k \left(\sum_{i=1}^n R_i x_i \right) &\leq \mathcal{R}_k(X_0) - \theta_k \cdot d_k(X_0), \quad k = 1, \dots, K, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ x_i, \varphi_j, \theta_k &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ak by všetky vstupné a výstupné hodnoty boli kladné, za smery zlepšenia by stačilo zvoliť

$$\begin{aligned} e_j(X_0) &= \mathcal{E}_j(X_0), \\ d_k(X_0) &= \mathcal{R}_k(X_0). \end{aligned}$$

V našom prípade, v súlade s Portela a kol. (2004), ako vhodné smery zlepšenia zvolíme

$$\begin{aligned} e_j(X_0) &= \max_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{E}_j(X) - \mathcal{E}_j(X_0), \\ d_k(X_0) &= \mathcal{R}_k(X_0) - \min_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{R}_k(X), \end{aligned} \tag{2.7}$$

ktoré sú vždy nezáporné. Ak $e_j(X_0) = 0$ pre nejaké j , výstup dosahuje v tomto smere svoju maximálnu hodnotu. Žiadne ďalšie zlepšenie v tomto smere nie je možné a preto položíme $\varphi_j^* = 0$. Analogicky, ak $d_k(X_0) = 0$ pre nejaké k , vstup dosahuje v tomto smere svoju minimálnu hodnotu a preto položíme $\theta_k^* = 0$.

Referenčné portfólio X_0 je efektívne, ak $\theta(X_0) = 1$. To nastane v prípade, ak $e_j(X_0) = 0$ pre každé $j = 1, \dots, J$ a $d_k(X_0) = 0$ pre každé $k = 1, \dots, K$, t.j. v žiadnom smere neexistuje možné zlepšenie. Výsledná efícia referenčného portfólia leží v intervale $[0, 1]$. Tento výsledok je dokázaný v Tvrdení 11.

Tvrdenie 9 (Branda (2015)). *Portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$ patrí do množiny efektívnych portfólií Ψ :*

- práve vtedy, keď X_0 je silno Pareto-Koopmans efektívne,

alebo ekvivalentne

- práve vtedy, keď neexistuje portfólio $X \in \mathcal{X}$ také, že $\mathcal{E}_j(X) \geq \mathcal{E}_j(X_0)$ pre každé j a $\mathcal{R}_k(X) \leq \mathcal{R}_k(X_0)$ pre každé k , kde aspoň jedna nerovnosť je ostrá.

Model 2.6 môžeme z lomeného tvaru preformulovať na lineárny tvar pomocou transformácie. Položme

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varphi_j, \quad \tilde{x}_i = tx_i, \quad \tilde{\theta}_k = t\theta_k \quad \text{a} \quad \tilde{\varphi}_j = t\varphi_j.$$

DEA model s diverzifikáciou po transformácii má tvar

$$\theta(X_0) = \min_{\tilde{\theta}_k, \tilde{\varphi}_j, t, \tilde{x}_i} t - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\theta}_k$$

za podmienok

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tilde{\varphi}_j &= 1, \\ \mathcal{E}_j \left(\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i \right) &\geq t \cdot \mathcal{E}_j(X_0) + \tilde{\varphi}_j \cdot e_j(X_0), \quad j = 1, \dots, J, \\ \mathcal{R}_k \left(\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i \right) &\leq t \cdot \mathcal{R}_k(X_0) - \tilde{\theta}_k \cdot d_k(X_0), \quad k = 1, \dots, K, \\ \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i &= t, \\ \tilde{x}_i, \tilde{\varphi}_j, \tilde{\theta}_k, t &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dôkaz správnosti použitej transformácie je obsahom nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 10. *Tvary 2.6 a 2.8 DEA modelu s diverzifikáciou sú navzájom ekvivalentné.*

Poznámka. V Branda (2015, Appendix A) je uvedený dôkaz pre iný, jednoduchší model. Tento dôkaz naň nadväzuje a dopĺňa ho o dôkaz ekvivalencie modelov 2.6 a 2.8, ktorý v literatúre zatiaľ nie je uvedený.

Dôkaz. Aby sme ukázali, že tvary 2.6 a 2.8 sú ekvivalentné, stačí ukázať, že $t = 0$ nikdy nie je optimálnym riešením úlohy 2.8.

Pre spor predpokladajme, že $t = 0$. Potom $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i = 0$ spolu s nezápornosťou váh \tilde{x}_i implikuje, že $\tilde{x}_i = 0$ pre každé i . Z toho máme $\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i = 0$. Podľa axiémov koherencie ďalej platí $\mathcal{R}_k(\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i) = 0$ pre každé k , podobne $\mathcal{E}_j(\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i) = 0$ pre každé j . Dosadením do obmedzení úlohy 2.8 máme

$$0 \geq \tilde{\varphi}_j \cdot e_j(X_0)$$

pre každé j . Nezápornosť váh \tilde{x}_i a nezápornosť parametrov $\tilde{\varphi}_j$ implikuje

$$\tilde{\varphi}_j \cdot e_j(X_0) = 0 \tag{2.9}$$

pre každé j . Výraz 2.9 je nulový práve vtedy, keď $\tilde{\varphi}_j = 0$ alebo $e_j(X_0) = 0$. Ak $e_j(X_0) = 0$ pre nejaké j , potom podľa konvencie $\varphi_j = 0$ a teda aj $\tilde{\varphi}_j = 0$, viď diskusia po zavedení smerov 2.7. Pre všetky zvyšné j , pre ktoré $e_j(X_0) > 0$

musí platiť, že $\tilde{\varphi}_j = 0$. Spolu máme, že $\tilde{\varphi}_j = 0$ pre každé j , čo je spor s prvým obmedzením

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tilde{\varphi}_j = 1 \neq 0.$$

□

Dôsledok. Optimálne riešenia θ_k^* , φ_j^* a x_i^* modelu 2.6 môžeme získať z optimálnych riešení modelu 2.8 spätnou transformáciou:

$$x_i^* = \frac{\tilde{x}_i^*}{t}, \quad \theta_k^* = \frac{\tilde{\theta}_k^*}{t} \quad \text{a} \quad \varphi_j^* = \frac{\tilde{\varphi}_j^*}{t}.$$

Tvrdenie 11. *Výsledná hodnota DEA modelu 2.6 pre ľubovoľne zvolené referenčné portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$ leží v intervale $[0,1]$, t.j. $\theta(X_0) \in [0,1]$.*

Poznámka. Dôkaz pre iný, podobný model je uvedený v Branda (2015, Appendix A). Tento dôkaz je jeho rozšírením.

Dôkaz. Chceme ukázať, že $\theta(X_0) \in [0,1]$ pre každé $X_0 \in \mathcal{X}$. Z obmedzení DEA modelu 2.6 priamo máme, že $\varphi_j \geq 0$ a $\theta_k \geq 0$. Z nezápornosti φ_j a θ_k ďalej máme, že zlomok

$$\frac{1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \theta_k}{1 + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varphi_j} \quad (2.10)$$

je menší, nanajvýš rovný 1. Zostáva ukázať, že zlomok 2.10 je väčší, nanajvýš rovný 0 pre ľubovoľné nezáporné hodnoty φ_j a θ_k .

Menovateľ je vždy kladný. Stačí preto ukázať nezápornosť čitateľa. Ak pre každé k platí, že $0 \leq \theta_k \leq 1$, potom je čitateľ zrejme nezáporný. Nech existuje k také, že $\theta_k > 1$. Potom existuje portfólio $X \in \mathcal{X}$, ktorá dominuje referenčné portfólio X_0 v smere $d_k(X_0)$. V opačnom prípade by θ_k bolo rovné 0. Platí teda, že

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(X) &\leq \mathcal{R}_k(X_0) - \theta_k \cdot d_k(X_0), \\ \mathcal{R}_k(X) &< \mathcal{R}_k(X_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Podľa 2.7 pre smer $d_k(X_0)$ platí

$$d_k(X_0) = \mathcal{R}_k(X_0) - \min_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{R}_k(X). \quad (2.12)$$

Dosadením výrazu 2.12 do nerovnosti 2.11 máme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(X) &\leq \mathcal{R}_k(X_0) - \theta_k \cdot d_k(X_0) \\ &= (1 - \theta_k) \cdot \mathcal{R}_k(X_0) + \theta_k \cdot \min_{\tilde{X} \in \mathcal{X}} \mathcal{R}_k(\tilde{X}) \\ &\leq (1 - \theta_k) \cdot \mathcal{R}_k(X_0) + \theta_k \cdot \mathcal{R}_k(X). \end{aligned}$$

Úpravou a krátením dostaneme

$$\begin{aligned} (1 - \theta_k) \cdot \mathcal{R}_k(X) &\leq (1 - \theta_k) \cdot \mathcal{R}_k(X_0), \\ \mathcal{R}_k(X) &\geq \mathcal{R}_k(X_0), \end{aligned}$$

čo je spor s 2.11. Ukázali sme, že $0 \leq \theta_k \leq 1$ pre každé k a teda výsledná hodnota zlomku 2.10 leží v intervale $[0, 1]$. □

V ďalších troch tvrdeniach zhrnieme dôležité vlastnosti modelu 2.6 a preformulovaného modelu 2.8. V prvom tvrdení ukážeme, že preformulovaný model 2.8 je konvexná optimalizačná úloha. Konvexita je v optimalizácii mimoriadne dôležitá. Hlavnou výhodou konvexity je, že lokálne optimum je zároveň globálnym optimom. Konvexné úlohy sa preto dajú efektívne riešiť pomocou známych algoritmov.

Tvrdenie 12 (Branda (2015)). *Preformulovaný model 2.8 pôvodného nelineárneho lomeného DEA modelu 2.6 je konvexná optimalizačná úloha.*

Dôkaz. Vychádzame z dôkazu tvrdenia uvedenom v Branda (2015, Proposition 3.5). V Branda (2015) je uvedený dôkaz pre podobný, jednoduchší model.

Aby sme ukázali, že preformulovaný model 2.8 je konvexná úloha, musí platiť, že účelová funkcia je konvexná a zároveň množina prípustných riešení je taktiež konvexná.

Účelová funkcia modelu 2.8 je lineárna a teda konvexná. Prvé obmedzenie je lineárne. Podľa axiémov koherencie je miera rizika \mathcal{R} nerastúca a konvexná. Analogicky je potom miera výnosu \mathcal{E} neklesajúca a konkávna. Náhodný výnos portfólia $\sum_{i=1}^n R_i x_i$ je lineárny vo váhach x_i . Na pravej strane je súčet, prípadne rozdiel, dvoch lineárnych funkcií. Zvyšné dve obmedzenia sú lineárne. Spolu všetky obmedzenia tvoria konvexnú množinu prípustných riešení a teda sa jedná o konvexnú optimalizačnú úlohu. □

V prípade, ak má investor portfólio X_0 , ktoré DEA model označí za neeficientné, môže použiť optimálne váhy x_i^* k rebalancovaniu svojho portfólia. Optimálne portfólio X^* s váhami x_i^* je DEA efficientné.

Tvrdenie 13 (Branda (2015)). *Nech x_i^* sú optimálne váhy DEA modelu pre referenčné portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$. Potom príslušné portfólio $X^* = \sum_{i=1}^n R_i x_i^*$ je efficientné vzhľadom k modelu 2.6.*

Dôkaz. Vychádzame z dôkazu tvrdenia uvedenom v Branda (2015, Proposition 3.6). V Branda (2015) je uvedený dôkaz pre podobný, jednoduchší model.

Nech θ_k^* , φ_j^* a x_i^* sú optimálne riešenia úlohy 2.6 a pre spor predpokladajme, že portfólio $X^* = \sum_{i=1}^n R_i x_i^*$, $X^* \in \mathcal{X}$ nie je efficientné.

Potom ale existujú prípustné váhy x_i odpovedajúce príslušnému portfóliu $X = \sum_{i=1}^n R_i x_i$, $X \in \mathcal{X}$, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(X) &\geq \mathcal{E}_j(X^*) \text{ pre každé } j, \\ \mathcal{R}_k(X) &\leq \mathcal{R}_k(X^*) \text{ pre každé } k, \end{aligned}$$

kde aspoň jedna nerovnosť je ostrá. V opačnom prípade by bolo portfólio X^* neeficientné.

Existujú teda hodnoty θ_k a φ_j také, že

$$\begin{aligned}\theta_k &\geq \theta_k^* \text{ pre každé } k, \\ \varphi_j &\leq \varphi_j^* \text{ pre každé } j,\end{aligned}$$

kde je opäť aspoň jedna nerovnosť ostrá. Tieto hodnoty spolu vedú k nižšej hodnote účelovej funkcie, čo je spor s optimalitou hodnôt θ_k^* , φ_j^* a x_i^* . □

Ak portfólio X_1 má skoro isto menší alebo rovný výnos ako portfólio X_2 , potom DEA skóre zachová toto usporiadanie. Voľne povedané, DEA model hľadá portfólio s najvyšším výnosom.

Tvrdenie 14 (Branda (2015)). *Uvažujme $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$. Pre zvolené smery 2.7 platí, ak $X_1 \leq X_2$ skoro isto, potom $\theta(X_1) \leq \theta(X_2)$.*

Dôkaz. Dôkaz je k nájdeniu v Branda (2015, Proposition 3.7). □

2.2 Stochastická dominancia druhého rádu

Stochastická dominancia je ďalšia možnosť ako pristupovať k rozhodovaniu o eficiencii portfólia. Podobne ako iné prístupy, aj stochastická dominancia od svojich počiatkov prešla určitým vývojom. V tejto práci sa budeme venovať konkrétne stochastickej dominancii druhého rádu (second-order stochastic dominance - SSD), ktorú viacerí autori uprednostňujú. Hlavným prínosom tejto časti je Tvrdenie 17, prevzaté z Branda (2015). Základné definície a vzťahy sú s súlade s Ogryczak a Ruszczyński (1999) a Levy (2006).

Stochastickú dominanciu môžeme definovať dvoma spôsobmi. Prvý z nich využíva integrovanú distribučnú funkciu. Distribučná funkcia portfólia $X \in \mathcal{X}$ je definovaná ako

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Potom integrovaná distribučná funkcia portfólia $X \in \mathcal{X}$ je definovaná ako

$$F_X^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^x F_X(\eta) d\eta \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Integrovaná distribučná funkcia $F_X^{(2)}$ je konvexná, spojitá, nezáporná a neklesajúca.

Definícia 15. *Nech $X, Y \in \mathcal{X}$. Povieme, že portfólio X (slabo) dominuje portfólio Y v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu (značíme $X \succeq_{SSD} Y$), ak platí*

$$F_X^{(2)}(x) \leq F_Y^{(2)}(x), \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Povieme, že portfólio X silno dominuje portfólio Y v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu (značíme $X \succ_{SSD} Y$), ak platí nerovnosť 2.13 a navyše existuje aspoň jedno $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je nerovnosť 2.13 ostrá.

Inou možnosťou je definovať stochastickú dominanciu pomocou úžitkovej funkcie investora. Tento pohľad je podrobnejšie predstavený v publikácii Levy (2006).

Definícia 16. *Nech $X, Y \in \mathcal{X}$. Povieme, že portfólio X (slabo) dominuje portfólio Y v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu, ak platí*

$$\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)], \quad (2.14)$$

pre každú konkávnou úžitkovú funkciu u .

Povieme, že portfólio X silno dominuje portfólio Y v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu, ak platí nerovnosť 2.14 a navyše existuje aspoň jedna konkávná úžitková funkcia u , pre ktorú je nerovnosť 2.14 ostrá.

Nech pre portfólia $X, Y \in \mathcal{X}$ platí, že $X \succ_{SSD} Y$. Úžitková funkcia vyjadruje kvantitatívne subjektívne uspokojenie investora s daným portfóliom. Konkávnosť úžitkovej funkcie ide interpretovať ako investorovu averziu voči riziku. Každý rizikovo averzný investor bude preferovať portfólio X pred Y .

Definícia 17. *Povieme, že portfólio $X \in \mathcal{X}$ je SSD efektívne vzhľadom k množine dostupných portfólií \mathcal{X} , ak neexistuje iné portfólio $Y \in \mathcal{X}$ také, že $Y \succ_{SSD} X$.*

Aby sme rozhodli, či portfólio $X \in \mathcal{X}$ je SSD efektívne vzhľadom k množine dostupných portfólií \mathcal{X} , potrebujeme X porovnať so všetkými portfóliami obsiahnutými množinou \mathcal{X} . To je z praktického hľadiska veľmi obmedzujúce. Riešením je Tvrdenie 17, ktoré dáva do súvislosti SSD efektívnosť a DEA efektívnosť. K rozhodnutiu o SSD efektívnosti použijeme DEA model s diverzifikáciou, ktorý zároveň identifikuje SSD efektívne portfólia. DEA model upravíme tak, že použijeme konkrétne miery rizika a výnosu.

Uvažujme S scenárov. Nech r_{is} , $s = 1, \dots, S$ sú diskkrétne realizácie náhodného výnosu i -teho aktíva, ktoré sú rovnako pravdepodobné, t.j. $p_s = 1/S$, $s = 1, \dots, S$. Potom CVaR portfólia $X = \sum_{i=1}^n R_i x_i$ je

$$\text{CVaR}_\alpha^S \left(\sum_{i=1}^n R_i x_i \right) = \min_{\psi \in \mathbb{R}} \left\{ -\psi + \frac{1}{\alpha S} \sum_{s=1}^S \max \left\{ -\sum_{i=1}^n r_{is} x_i + \psi, 0 \right\} \right\}. \quad (2.15)$$

Uvažujme predstavený DEA model s diverzifikáciou 2.6. Ako jedinou mieru výnosu zvolíme očakávaný výnos portfólia, t.j. $J = 1$. Ako miery rizika zvolíme miery CVaR na hladinách $\alpha_k = 1/S, \dots, (S-1)/S$, t.j. $K = S-1$. Výsledný model má potom tvar

$$\theta^{SSD}(X_0) = \min_{\theta_k, \varphi, x_i} \frac{1 - \frac{1}{S-1} \sum_{k=1}^{S-1} \theta_k}{1 + \varphi}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n R_i x_i \right] &\geq \mathbb{E}[X_0] + \varphi \cdot e(X_0), \\ \text{CVaR}_{k/S}^S \left(\sum_{i=1}^n R_i x_i \right) &\leq \text{CVaR}_{k/S}^S(X_0) - \theta_k \cdot d_k(X_0), \quad k = 1, \dots, S-1, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ x_i, \varphi, \theta_k &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde príslušné smery sú

$$e(X_0) = \max_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X_0],$$

$$d_k(X_0) = \text{CVaR}_{k/S}^S(X_0) - \min_{X \in \mathcal{X}} \text{CVaR}_{k/S}^S(X).$$

V Tvrdení 17 ukážeme, že eficientné portfólio vzhľadom k modelu 2.16 je zároveň SSD eficientné. Inak povedané, model 2.16 slúži ako test SSD eficiencie portfólia.

Oproti pôvodnému dôkazu, ktorý je uvedený v Branda (2015, Proposition 4.1), podrobne rozpracujeme technickejšie časti. Dôkaz je založený na nutnej a postačujúcej podmienke pre stochastickú dominanciu druhého rádu vzhľadom k miere CVaR formulovanej v Kopa (2013):

$$X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \text{CVaR}_\alpha(X) \leq \text{CVaR}_\alpha(Y) \text{ pre každé } \alpha \in [0,1] \quad (2.17)$$

a pre apoň jedno $\alpha \in [0,1]$ je nerovnosť ostrá.

K dôkazu použijeme Lemma 16, ktorého platnosť dokážeme. Podobné tvrdenie so slabou dominanciou odvodili autori v práci Kopa a Chovanec (2008, Theorem 4). Pre naše účely však potrebujeme silnú dominanciu. Ešte pred tým uvedieme znenie pomocného lemma, ktorého platnosť dokázali autori v práci Kopa a Chovanec (2008).

Lemma 15 (Kopa a Chovanec (2008)). *Uvažujme náhodný výnos X s diskrétnym rozdelením s hodnotami X_1, \dots, X_S . Označme $X_{(k)}$ k -ty najmenší prvok, t.j. platí $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(S)}$. Potom pre $\alpha \in [\frac{k-1}{S}, \frac{k}{S}]$, $\alpha \neq 0$ platí*

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = -X_{(k)} + \frac{1}{\alpha S} \sum_{i=1}^k (-X_{(i)} + X_{(k)})$$

pre $k = 1, \dots, S$ a $\text{CVaR}_0(X) = -X_{(1)}$.

Lemma 16. *Nech X a Y sú diskkrétne náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú s rovnakou pravdepodobnosťou hodnoty X_s a Y_s , $s = 1, \dots, S$. Potom platí*

$$X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \text{CVaR}_\alpha(X) \leq \text{CVaR}_\alpha(Y) \quad \forall \alpha \in \mathcal{M} = \left\{ \frac{1}{S}, \frac{2}{S}, \dots, \frac{S-1}{S}, 1 \right\}$$

a pre aspoň jedno $\alpha \in \mathcal{M}$ je nerovnosť ostrá.

Dôkaz. Z Lemma 15 máme, že

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\beta_1}(X) &= \text{CVaR}_{\beta_2}(X), \\ \text{CVaR}_{\beta_1}(Y) &= \text{CVaR}_{\beta_2}(Y) \end{aligned}$$

pre každé $\beta_1, \beta_2 \in [0, \frac{1}{S}]$.

Cieľom dôkazu je overiť nutnú a postačujúcu podmienku 2.17 pre SSD. Môžeme predpokladať, že ostrá nerovnosť platí pre ľubovoľné $\alpha_k = k/S$, $\alpha_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, S-1$, t.j.

$$\text{CVaR}_{\alpha_k}(X) < \text{CVaR}_{\alpha_k}(Y).$$

Prípád, že by ostrá nerovnosť platila len pre $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$ také, že $\tilde{\alpha} \notin \mathcal{M}$ nemôže nastať, pretože potom by muselo súčasne platiť

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &= \text{CVaR}_\alpha(Y), \quad \forall \alpha \in \mathcal{M}, \\ \text{CVaR}_{\tilde{\alpha}}(X) &< \text{CVaR}_{\tilde{\alpha}}(Y), \quad \tilde{\alpha} \in [0, 1], \tilde{\alpha} \notin \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lemma 15 nám dáva, že ak

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{CVaR}_\alpha(Y), \quad \forall \alpha \in \mathcal{M},$$

potom musí nutne platiť

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{CVaR}_\alpha(Y), \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

čo je spor s 2.18. K dôkazu teda stačí ukázať, že ak

$$\text{CVaR}_{\alpha_k}(X) < \text{CVaR}_{\alpha_k}(Y), \quad (2.19)$$

$$\text{CVaR}_{\alpha_{k+1}}(X) \leq \text{CVaR}_{\alpha_{k+1}}(Y), \quad (2.20)$$

potom nerovnosť

$$\text{CVaR}_\alpha(X) \leq \text{CVaR}_\alpha(Y)$$

platí pre každé $\alpha \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.

Pre spor predpokladajme, že nerovnosti 2.19 a 2.20 platia a zároveň existuje $\tilde{\alpha} \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ také, že

$$\text{CVaR}_{\tilde{\alpha}}(X) > \text{CVaR}_{\tilde{\alpha}}(Y).$$

Zo spojitosti miery CVaR v α potom existujú $\beta_1, \beta_2 \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $\beta_1 \neq \beta_2$ také, že

$$\text{CVaR}_{\beta_1}(X) = \text{CVaR}_{\beta_1}(Y),$$

$$\text{CVaR}_{\beta_2}(X) = \text{CVaR}_{\beta_2}(Y).$$

Užitím Lemma 15 dostaneme, že $\beta_1 = \beta_2$, čo je spor s $\beta_1 \neq \beta_2$. □

Po prípravných Lemma 15 a 16 môžeme pristúpiť k formulácii a dôkazu nosného Tvrdenia 17.

Tvrdenie 17 (Branda (2015)). *Nech je rozdelenie náhodných výnosov diskkrétne. Portfólio $X_0 \in \mathcal{X}$ je SSD eficientné práve vtedy, keď je DEA eficientné podľa modelu 2.16, t.j. $\theta^{SSD}(X_0) = 1$.*

Dôkaz. K dôkazu Tvrdenia 17 využijeme pripravené Lemma 16. Na úvod upozorníme, že miera CVaR na hladine 100 % nie je nič iné, než stredná hodnota prenásobená -1 , t.j.

$$\text{CVaR}_1(X) = -\mathbb{E}[X], \quad X \in \mathcal{X}.$$

Lemma 16 nám dáva, že $X_1 \prec_{SSD} X_2$ práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{k/S}^S(X_1) &\geq \text{CVaR}_{k/S}^S(X_2), \quad k = 1, \dots, S-1, \\ \mathbb{E}[X_1] &\leq \mathbb{E}[X_2], \end{aligned}$$

kde aspoň jedna nerovnosť je ostrá. Ekvivalenciu v Tvrdení 17 dokážeme pomocou sporu.

Nech je portfólio X_0 DEA efektívne a SSD neefektívne. Potom existuje prípustné portfólio $X^* = \sum_{i=1}^n R_i x_i^*$, $X^* \in \mathcal{X}$, ktoré silno dominuje X_0 v zmysle SSD, t.j. $X_0 \prec_{SSD} X^*$. Podľa Lemma 16 platí

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{k/S}^S(X^*) &\leq \text{CVaR}_{k/S}^S(X_0), \quad k = 1, \dots, S-1, \\ \mathbb{E}[X^*] &\geq \mathbb{E}[X_0], \end{aligned} \tag{2.21}$$

kde aspoň jedna nerovnosť je ostrá. Podľa modelu 2.16 existuje aspoň jedno θ_k, φ kladné také, že x_i^* je prípustným riešením modelu 2.16. Z toho ale vyplýva, že $\theta^{SSD}(X_0) < \theta^{SSD}(X^*)$. Teda X_0 nie je DEA efektívne, čo je spor.

Nech je naopak portfólio X_0 SSD efektívne a DEA neefektívne. Označme $X^*, \theta_k^*, \varphi^*$ optimálne riešenie modelu 2.16. Aspoň jeden z parametrov θ_k^*, φ^* musí byť kladný (X_0 je DEA neefektívne). X^* spĺňa nerovnosti 2.21, kde aspoň jedna nerovnosť je ostrá. To znamená, že $X_0 \prec_{SSD} X^*$, čo je spor. □

Ďalšie tvrdenie je rozšírením Tvrdenia 13. V prípade, ak investorovo portfólio X_0 označí DEA model za neefektívne, investor môže použiť optimálne váhy modelu x_i^* k rebalancovaniu portfólia X_0 a získať tak portfólio, ktoré je DEA efektívne a zároveň SSD efektívne.

Tvrdenie 18 (Branda (2015)). *Nech je rozdelenie náhodných výnosov diskkrétne. Označme x_i^* váhy optimálneho portfólia vzhľadom k modelu 2.16. Ak je referenčné portfólio X_0 neefektívne, t.j. $\theta^{SSD}(X_0) < 1$, potom optimálne portfólio $X^* = \sum_{i=1}^n R_i x_i^*$ silno dominuje referenčné portfólio X_0 v zmysle SSD, t.j. $X^* \succ_{SSD} X_0$, a zároveň X^* je SSD efektívne.*

Dôkaz. Tvrdenie je priamym dôsledkom Tvrdení 13 a 17. □

Na záver ukážeme, že model 2.16 môže byť formulovaný ako úloha lineárneho programovania. Tento výsledok má veľký význam predovšetkým z praktického hľadiska.

Tvrdenie 19 (Branda (2015)). *Nech je rozdelenie náhodných výnosov diskkrétne. Model 2.16 môže byť formulovaný ako úloha lineárneho programovania, viď model 2.23*

Dôkaz. Stručný dôkaz tvrdenia je uvedený v Branda (2015, Proposition 4.4). V našom dôkaze podrobnejšie rozpiseme jednotlivé kroky.

Reformulácia modelu 2.16 na úlohu lineárneho programovania (model 2.23) sa skladá z dvoch krokov.

V prvom kroku použijeme transformáciu podobnú tej, ktorú sme použili pri modeli 2.6. Konkrétne položíme

$$\frac{1}{t} = 1 + \varphi, \quad \tilde{x}_i = tx_i, \quad \tilde{\theta}_k = t\theta_k \quad \text{a} \quad \tilde{\varphi}_j = t\varphi_j.$$

Aplikovaním transformácie získame model

$$\theta^{SSD}(X_0) = \min_{\tilde{x}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}_k} t - \frac{1}{S-1} \sum_{k=1}^{S-1} \tilde{\theta}_k$$

za podmienok

$$\begin{aligned} t + \tilde{\varphi} &= 1 \\ \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i\right] &\geq t \cdot \mathbb{E}[X_0] + \tilde{\varphi} \cdot e(X_0), \\ \text{CVaR}_{k/S}^S\left(\sum_{i=1}^n R_i \tilde{x}_i\right) &\leq t \cdot \text{CVaR}_{k/S}^S(X_0) - \tilde{\theta}_k \cdot d_k(X_0), \quad k = 1, \dots, S-1, \quad (2.22) \\ \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i &= t, \\ \tilde{x}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}_k, t &\geq 0. \end{aligned}$$

V druhom kroku použijeme minimalizačný tvar miery CVaR 2.15. Miery CVaR na ľavej strane transformovaného modelu 2.22 nahradíme minimalizovanými pomocnými funkciami. Voľné premenné ψ_k sú argumenty minima odpovedajúce mieram CVaR na hladine k/S . Nezáporné premenné u_{sk} sú náhradou za kladnú časť.

Preformulovaný model pôvodného modelu 2.16 ako úloha lineárneho programovania má tvar

$$\theta^{SSD}(X_0) = \min_{\tilde{x}_i, \tilde{\varphi}, t, \tilde{\theta}_k, \psi_k, u_{sk}} t - \frac{1}{S-1} \sum_{k=1}^{S-1} \tilde{\theta}_k$$

za podmienok

$$\begin{aligned} t + \tilde{\varphi} &= 1, \\ \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i r_{is} &\geq t \cdot \mathbb{E}[X_0] + \tilde{\varphi} \cdot e(X_0), \\ -\psi_k + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^S u_{sk} &\leq t \cdot \text{CVaR}_{k/S}^S(X_0) - \tilde{\theta}_k \cdot d_k(X_0), \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.23) \\ u_{sk} &\geq -\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i r_{is} + \psi_k, \quad s = 1, \dots, S, \quad k = 1, \dots, K, \\ \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i &= t, \\ \tilde{x}_i, \tilde{\varphi}, t, \tilde{\theta}_k, u_{sk} &\geq 0. \end{aligned}$$

□

2.3 Viackriteriálna optimalizácia

Na záver druhej kapitoly ukážeme zaujímavé prepojenie medzi spektrálnymi mierami rizika a DEA modelom s diverzifikáciou. Spojovacím mostom bude práve stochastická dominancia druhého rádu.

V tejto časti využijeme teóriu viackriteriálnej optimalizácie. Čerpáme z publikácie Dupačová, Hurt a Štěpán (2002). Naším cieľom je nájsť optimálne portfólio $X^* \in \mathcal{X}$, ktoré má minimálnu mieru rizika CVaR na každej hladine α , v našom prípade $\alpha = s/S$, pre $s = 1, \dots, S$. Formálne môžeme úlohu zapísať v tvare

$$\min_{\alpha \in \{\frac{1}{S}, \frac{2}{S}, \dots, \frac{S-1}{S}, 1\}} \text{CVaR}_\alpha^S(X), \quad X \in \mathcal{X}. \quad (2.24)$$

Optimálne portfólio $X^* \in \mathcal{X}$ úlohy viackriteriálnej optimalizácie 2.24 je definované ako

$$X^* \in \bigcap_{s=1}^S \arg \min_{X \in \mathcal{X}} \text{CVaR}_{s/S}^S(X).$$

Ideálne portfólio X^* však existuje len výnimočne.

Definícia 18. *Portfólio $X^* \in \mathcal{X}$ je eficientným riešením úlohy viackriteriálnej optimalizácie 2.24, ak neexistuje také portfólio $X \in \mathcal{X}$, pre ktoré platí*

$$\text{CVaR}_\alpha^S(X) \leq \text{CVaR}_\alpha^S(X^*) \quad \forall \alpha \in \mathcal{M} = \left\{ \frac{1}{S}, \frac{2}{S}, \dots, \frac{S-1}{S}, 1 \right\} \quad (2.25)$$

a pre aspoň jedno $\alpha \in \mathcal{M}$ je nerovnosť 2.25 ostrá.

Lemma 20 (Adam a Branda (2019)). *Nech $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(S-1)} < X_{(S)}$ sú usporiadané rovnako pravdepodobné realizácie náhodného výnosu portfólia X . Ďalej uvažujme prípustné empirické rizikové spektrum $\{\phi_s\}_{s=1}^S$. Potom empirická spektrálna miera rizika*

$$M_\phi^S(X) = - \sum_{s=1}^S \phi_s X_{(s)}$$

môže byť vyjadrená ako

$$M_\mu^S(X) = \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X),$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_s &= s(\phi_s - \phi_{s+1}), \\ \phi_{S+1} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Dôkaz. Z prvej kapitoly vieme, že empirický odhad miery CVaR na hladine s/S , $s = 1, \dots, S$ je

$$\text{CVaR}_{s/S}^S(X) = -\frac{1}{s} \sum_{t=1}^s X_{(t)}, \quad s = 1, \dots, S.$$

Začneme odzadu

$$\begin{aligned}
M_{\mu}^S(X) &= \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X) \\
&= - \sum_{s=1}^S \mu_s \frac{1}{S} \sum_{t=1}^s X_{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^S \left(\sum_{s=t}^S \frac{\mu_s}{S} \right) X_{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^S \phi_t X_{(t)},
\end{aligned}$$

kde prípustné empirické rizikové spektrum je

$$\phi_t = \sum_{s=t}^S \frac{\mu_s}{S}, \quad t = 1, \dots, S.$$

Pre rizikové spektrum $\{\phi_t\}_{t=1}^S$ ďalej platí

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \sum_{s=1}^S \frac{\mu_s}{S}, \\
\phi_2 &= \sum_{s=2}^S \frac{\mu_s}{S}, \\
&\dots \\
\phi_{S-1} &= \sum_{s=S-1}^S \frac{\mu_s}{S} = \frac{\mu_{S-1}}{S-1} + \frac{\mu_S}{S}, \\
\phi_S &= \sum_{s=S}^S \frac{\mu_s}{S} = \frac{\mu_S}{S}.
\end{aligned}$$

Vyjadrením μ_s pre $s = 1, \dots, S$ máme

$$\begin{aligned}
\mu_S &= S\phi_S, \\
\mu_{S-1} &= (S-1)(\phi_{S-1} - \phi_S), \\
&\dots \\
\mu_2 &= 2(\phi_2 - \phi_3), \\
\mu_1 &= \phi_1 - \phi_2.
\end{aligned}$$

Ak položíme $\phi_{S+1} \equiv 0$, potom dostaneme všeobecné vyjadrenie

$$\mu_s = s(\phi_s - \phi_{s+1}),$$

pre $s = 1, \dots, S$.

□

Lemma 20 má pre nás kľúčový význam. Minimalizáciu empirickej spektrálnej miery rizika môžeme nahradiť minimalizáciou vážených mier rizika CVaR na hladinách s/S , kde $s = 1, \dots, S$. Za rozumných predpokladov je optimálne riešenie zároveň efektívnym riešením úlohy 2.24, čo je obsahom nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 21. Nech $\mu_s \geq 0$, $s = 1, \dots, S$ sú parametre a nech $X^* \in \mathcal{X}$ je optimálne riešenie úlohy

$$\min_{X \in \mathcal{X}} \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X). \quad (2.26)$$

Nech platí $\mu_s > 0$ pre každé $s = 1, \dots, S$, alebo nech X^* je jediné optimálne riešenie úlohy 2.26. Potom X^* je eficientným riešením úlohy 2.24.

Dôkaz. Chceme ukázať, že ak $\mu_s > 0$ pre každé $s = 1, \dots, S$, potom X^* je eficientným riešením úlohy 2.24. Pre spor predpokladajme, že X^* nie je eficientným riešením úlohy 2.24. Podľa Definície 18 existuje portfólio $\tilde{X} \in \mathcal{X}$, $\tilde{X} \neq X^*$ také, že

$$\text{CVaR}_{s/S}^S(\tilde{X}) \leq \text{CVaR}_{s/S}^S(X^*),$$

pre každé $s = 1, \dots, S$ a pre aspoň jedno s je nerovnosť ostrá. Pretože $\mu_s > 0$ pre každé $s = 1, \dots, S$, potom platí nerovnosť

$$\sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(\tilde{X}) < \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X^*).$$

Z toho vyplýva, že X^* nie je optimálnym riešením úlohy 2.26, čo je spor.

Ďalej chceme ukázať, že ak X^* je jediné optimálne riešenie úlohy 2.26, potom X^* je eficientným riešením úlohy 2.24. Pre spor opäť predpokladajme, že X^* nie je eficientným riešením úlohy 2.24. Podľa Definície 18 existuje portfólio $\tilde{X} \in \mathcal{X}$, $\tilde{X} \neq X^*$ také, že

$$\text{CVaR}_{s/S}^S(\tilde{X}) \leq \text{CVaR}_{s/S}^S(X^*),$$

pre každé $s = 1, \dots, S$ a pre aspoň jedno s je nerovnosť ostrá. Platí, že

$$\sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(\tilde{X}) \leq \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X^*).$$

Z toho ale vyplýva, že $\tilde{X} \neq X^*$ je tiež optimálnym riešením úlohy 2.26, čo je spor s jednoznačnosťou riešenia X^* . □

Poznámka. Aby platilo Tvrdenie 21, musí byť splnený buď predpoklad na nezápornosť váh μ_s pre každé $s = 1, \dots, S$, alebo jednoznačnosť optimálneho riešenia X^* . Ak uvažujeme rýdzo monotónne rizikové spektrum $\phi(p)$ definované na intervale $[0,1]$ a postupnosť $\{\phi_s\}_{s=1}^S$ získame pomocou integrálu

$$\phi_s = \int_{(s-1)/S}^{s/S} \phi(p) dp, \quad s = 1, \dots, S,$$

potom zrejme pre každé μ_s dané vzťahom

$$\begin{aligned} \mu_s &= s(\phi_s - \phi_{s+1}), \quad s = 1, \dots, S, \\ \phi_{S+1} &\equiv 0, \end{aligned}$$

platí $\mu_s > 0$. Ukázali sme, že pre rýdzo monotónne rizikové spektrum je predpoklad v Tvrdení 21 vždy splnený.

Podľa Lemma 16 pre efficientné riešenie X^* úlohy 2.24 platí, že je zároveň SSD efficientné. Našli sme nový prístup, ako hľadať SSD efficientné portfólia.

Investor môže k hľadaniu optimálneho portfólia použiť minimalizačnú úlohu 2.26. Predpokladajme, že investor aktuálne disponuje portfóliom $X_0 \in \mathcal{X}$. Ďalej nech X^* je optimálne portfólio vzhľadom k úlohe 2.26. V prípade, ak investor nemôže rebalancovať svoje aktuálne portfólio X_0 priamo na portfólio X^* , napríklad z dôvodu príliš veľkej diverzifikácie, chceli by sme rozumným spôsobom zmerať vzdialenosť dostupných portfólií od optimálneho portfólia X^* . Na základe tejto informácie by sa investor mohol rozhodnúť, ktoré z dostupných portfólií zvolí. Do podobnej situácie sa investor môže dostať aj v prípade, ak môže napríklad investovať len do jedného z n aktív, ktoré sú k dispozícii. Predstavíme dva možné prístupy, ako merať vzdialenosť dostupných portfólií a optimálneho portfólia X^* .

Prvý prístup vychádza zo vzdialenosti portfólií v priestore váh. Nech x_i sú váhy ľubovoľného dostupného portfólia X a nech x_i^* sú váhy optimálneho portfólia X^* . Potom vzdialenosť portfólií X a X^* môžeme vyjadriť ako

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^*|. \quad (2.27)$$

V prípade, ak by investor mohol investovať len do jedného z n dostupných aktív, potom by volil to portfólio, zložené len z jedného aktíva, ktoré minimalizuje výraz 2.27.

Vzdialenosť portfólií X a X^* v priestore váh je hodnota v intervale $[0, 2]$, t.j. pre výraz 2.27 platí

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^*| \leq 2.$$

Inou možnosťou je zamerať sa na absolútnu hodnotu rozdielu mier rizika CVaR na rôznych hladinách. Uvažujme sumu

$$\sum_{s=1}^S |\text{CVaR}_{s/S}^S(X) - \text{CVaR}_{s/S}^S(X^*)|. \quad (2.28)$$

Analogicky by sa investor mohol rozhodnúť pre také dostupné portfólio X , ktoré minimalizuje výraz 2.28. Jedná sa o hľadanie najbližšieho portfólia z hľadiska „rizikového profilu“ investora.

Uvažujme opäť optimalizačnú úlohu

$$\min_{X \in \mathcal{X}} \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X). \quad (2.29)$$

Pre praktické aplikácie je optimalizačná úloha 2.29 príliš zložitá. Našťastie môžeme úlohu 2.29 preformulovať do tvaru úlohy lineárneho programovania, ktorý je pri praktických aplikáciách ďaleko prijateľnejší.

$$\min_{x_i, \psi_k, u_{sk}} \sum_{k=1}^S \mu_k \left(-\psi_k + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^S u_{sk} \right)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} u_{sk} &\geq -\sum_{i=1}^n x_i r_{is} + \psi_k, \quad s, k = 1, \dots, S, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ x_i, u_{sk} &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Prechod od úlohy 2.29 k úlohe lineárneho programovania 2.30 vychádza z myšlienky minimalizácie miery CVaR, s ktorou prišli autori v práci Rockafellar a Uryasev (2002).

V troch bodoch zhrnieme ako by mal investor pri hľadaní optimálneho portfólia s využitím teórie viackriteriálnej optimalizácie postupovať:

1. Optimálnym riešením úlohy 2.30 je portfólio $X^* \in \mathcal{X}$. Portfólio X^* je zároveň SSD efektívne. Optimalizačná úloha 2.30 navyše zohľadňuje individuálnu rizikovú averziu investora pomocou predom zvoleného rizikového spektra.
2. Vzdialenosť dostupných portfólií od optimálneho portfólia X^* určíme pomocou výrazu 2.27 alebo 2.28.
3. Usporiadame dostupné portfólia podľa vzdialenosti. Z dostupných portfólií vyberieme to, ktoré minimalizuje výraz 2.27 alebo 2.28. Inak povedané, je „najbližšie“ optimálnemu portfóliu X^* .

3. Numerická štúdia

V teoretickej časti sme predstavili dva možné prístupy, ako hľadať optimálne portfólia na množine dostupných portfólií tak, aby boli SSD efektívne. Náplňou praktickej časti je aplikovanie oboch prístupov na reálnom dátovom súbore.

V úvode kapitoly stručne predstavíme dátový súbor, s ktorým budeme pracovať. Ďalej opíšeme implementáciu jednotlivých optimalizačných úloh. Na záver bližšie rozoberieme oba prístupy a porovnáme získané výsledky.

Poznámka. Všetky optimalizačné úlohy sme riešili v programovacom prostredí MATLAB. Zdrojový kód je k nájdeniu v online elektronickej prílohe práce.

3.1 Dátový súbor

Za vhodný zdroj dát sme zvolili dátovú knižnicu profesora Kennetha Frencha (Kenneth R. French Data Library - French). Zvolený dátový súbor obsahuje hodnoty mesačných výnosov 49 priemyselných portfólií. V jednom priemyselnom portfóliu je zastúpené jedno, alebo viacero aktív, ktoré súvisia s daným priemyselným odvetvím. Úplný zoznam priemyselných odvetví je uvedený v Tabulke A.1 v prílohe práce. Pre úsporu miesta budeme jednotlivé portfólia označovať skráteným zápisom, ktorý sme prevzali od pôvodného zdroja dát. V Tabulke A.1 je zároveň zavedené spomínané značenie.

Celkom máme k dispozícii 120 mesačných pozorovaní, od mája 2009 do apríla 2019. Základné popisné štatistiky dátového súboru sú zhrnuté v Tabulke A.2 v prílohe práce. Z Tabulky A.2 môžeme pozorovať, že najvyšší priemerný výnos dosahujú priemyselné portfólia *Zábava*, *Lode*, *Laboratórne zariadenia* a *Lietadlá*. Naopak, najnižší priemerný výnos dosahujú priemyselné portfólia *Uhlie*, *Zlato* a *Poľnohospodárstvo*. Portfólia s najnižším priemerným výnosom majú zároveň najvyššiu smerodajnú odchýlku.

Poznámka. Značenie v praktickej časti je konzistentné so značením v predošlých kapitolách. Počet priemyselných portfólií značíme $n = 49$ a celkový počet pozorovaní značíme $S = 120$.

3.2 Implementácia DEA modelu

DEA model s diverzifikáciou 2.23 vo forme úlohy lineárneho programovania sme implementovali v programovacom prostredí MATLAB. Zápis modelu 2.23 formálne odpovedá zdrojovému kódu. Pripomíname, že sa jedná o model, ktorý medzi referenčnými portfóliami identifikuje SSD efektívne portfólia.

K dispozícii máme 49 priemyselných portfólií. Za referenčné portfólio X_0 postupne volíme vždy práve jedno priemyselné portfólio. Inými slovami, za všetky dostupné prostriedky nakúpime jedno konkrétne priemyselné portfólio. Výpočet modelu 2.23 preto spustíme celkom 49 krát.

Pre každé jedno referenčné portfólio hodnota účelovej funkcie úlohy 2.23 značí mieru efektivity, t.j. hodnotu v intervale $[0, 1]$. Referenčné portfólio je efektívne práve vtedy, keď miera efektivity je rovná jednej. Prvých 49 hodnôt vektoru riešenia sú váhy optimálneho portfólia. Ak je referenčné portfólio efektívne, optimálne

váhy sa zhodujú s váhami referenčného portfólia. V opačnom prípade sa optimálne váhy môžu použiť k rebalancovaniu neeficientného portfólia.

Výsledné hodnoty DEA modelu s diverzifikáciou 2.23 sú uvedené v Tabuľke 3.1. V tabuľke je uvedená optimálna hodnota účelovej funkcie pre každé jedno referenčné portfólio (stĺpec *Skóre*) a poradie vzhľadom k optimálnej hodnote účelovej funkcie. Ďalej je v tabuľke uvedená vzdialenosť optimálneho a referenčného portfólia v priestore váh, ktorá je definovaná v druhej kapitole, viď 2.27. Za ňou opäť nasleduje poradie referenčných portfólií vzhľadom k tejto vzdialenosti.

Vzdialenosť referenčného a optimálneho portfólia môžeme určiť aj iným spôsobom, a to ako súčet absolútnych hodnôt rozdielu mier CVaR pre referenčné a optimálne portfólio, ktorá je taktiež definovaná v druhej kapitole, viď 2.28. Tieto vzdialenosti a z nich vyplývajúce poradie sa nachádzajú v posledných dvoch stĺpcoch Tabuľky 3.1.

Zo 49 referenčných portfólií je podľa DEA modelu s diverzifikáciou jediným efficientným portfóliom portfólio *Zábava*. Portfólio *Zábava* zároveň dosahuje najvyšší priemerný výnos, viď Tabuľka A.1. *Zábava* je tak SSD efficientným portfóliom bez nutnosti rebalancovania. Zvyšné referenčné portfólia nie sú efficientné. Pre každé neeficientné portfólio máme k dispozícii optimálne portfólio, ktoré je možné použiť k rebalancovaniu.

Je dôležité zdôrazniť, že pre každé neeficientné referenčné portfólio môžeme získať odlišné optimálne portfólio. V skutočnosti je vysoko nepravdepodobné, že by sme pre dve rôzne referenčné portfólia získali totožné optimálne portfólio. Všetky optimálne portfólia sú zároveň SSD efficientné.

3.3 Implementácia spektrálnych mier rizika s rizikovou averziou

Implementácia spektrálnych mier rizika s rizikovou averziou je rozdelená do niekoľkých krokov:

1. Zvolíme vhodný tvar rizikového spektra $\phi(p)$, $p \in [0,1]$ tak, aby vystihoval rizikovú averziu investora.
2. Napočítame empirické rizikové spektrum $\{\phi_s\}_{s=1}^S$ pomocou integrálu

$$\phi_s = \int_{(s-1)/S}^{s/S} \phi(p) dp, \quad s = 1, \dots, S.$$

Hodnotu ϕ_{S+1} položíme rovnú nule.

3. Vypočítame váhy μ_s pre $s = 1, \dots, S$ podľa predpisu

$$\mu_s = s(\phi_s - \phi_{s+1}).$$

4. Riešime minimalizačnú úlohu

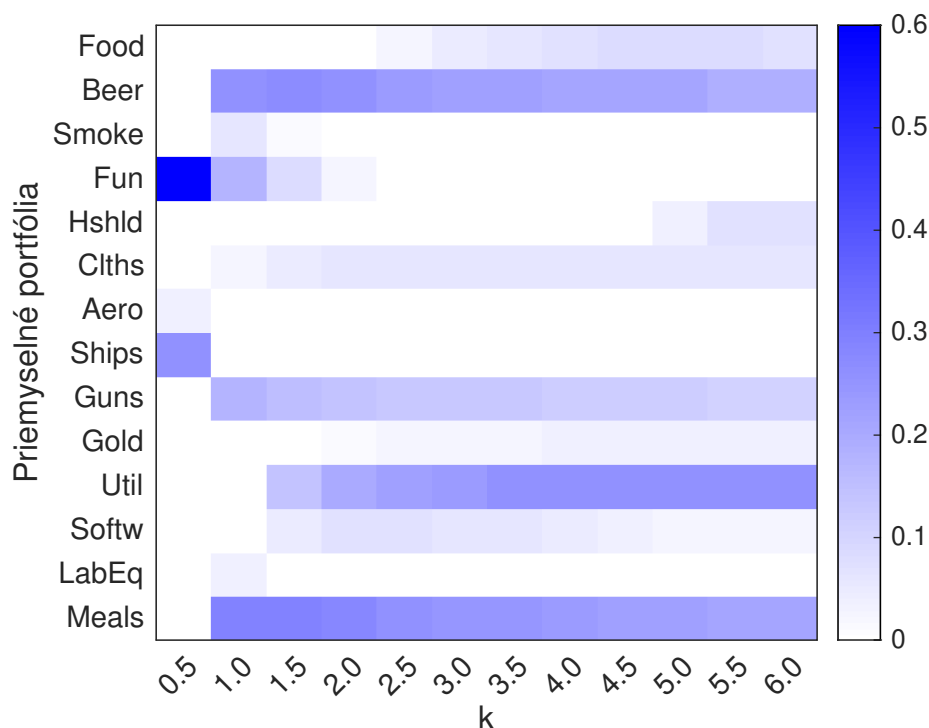
$$\min_{X \in \mathcal{X}} \sum_{s=1}^S \mu_s \text{CVaR}_{s/S}^S(X). \quad (3.1)$$

DEA model s diverzifikáciou						
Portfólio	Skóre	Poradie	Vzdial ^a	Poradie	Vzdial ^b	Poradie
Agric	0,03	45	2,00	12	471,3	44
Food	0,12	22	1,97	10	101,4	8
Soda	0,15	16	1,93	9	127,7	12
Beer	0,20	12	1,58	4	70,0	3
Smoke	0,12	23	2,00	12	255,6	26
Toys	0,06	37	2,00	12	357,1	37
Fun	1,00	1	0,00	1	0,0	1
Books	0,06	40	2,00	12	327,8	32
Hshld	0,13	20	2,00	12	93,8	5
Clths	0,24	7	2,00	12	161,8	17
Hlth	0,07	34	2,00	12	299,0	31
MedEq	0,17	15	2,00	12	164,2	18
Drugs	0,13	21	2,00	12	148,5	16
Chems	0,09	28	2,00	12	289,4	29
Rubbr	0,24	8	2,00	12	172,7	19
Txtls	0,07	33	2,00	12	456,8	43
BldMt	0,08	31	2,00	12	352,2	36
Cnstr	0,05	42	2,00	12	409,6	40
Steel	0,03	47	2,00	12	574,1	46
FabPr	0,05	41	2,00	12	551,4	45
Mach	0,10	25	2,00	12	329,1	33
ElcEq	0,06	38	2,00	12	340,0	35
Autos	0,06	39	2,00	12	386,0	38
Aero	0,46	4	1,91	8	95,3	6
Ships	0,41	5	1,77	7	133,2	14
Guns	0,21	11	1,67	5	173,4	20
Gold	0,02	48	1,98	11	893,4	48
Mines	0,03	46	2,00	12	653,1	47
Coal	0,01	49	2,00	12	1236,4	49
Oil	0,04	44	2,00	12	402,2	39
Util	0,14	18	1,48	3	91,2	4
Telcm	0,14	19	2,00	12	138,8	15
PerSv	0,04	43	2,00	12	431,6	42
BusSv	0,23	9	2,00	12	128,7	13
Hardw	0,09	27	2,00	12	282,4	28
Softw	0,29	6	2,00	12	109,1	9
Chips	0,20	13	2,00	12	199,7	23
LabEq	0,47	3	1,75	6	101,4	7
Paper	0,11	24	2,00	12	188,1	22
Boxes	0,08	32	2,00	12	281,0	27
Trans	0,14	17	2,00	12	211,7	25
Whlsl	0,10	26	2,00	12	180,4	21
Rtail	0,17	14	2,00	12	126,5	11
Meals	0,72	2	0,78	2	19,6	2
Banks	0,09	29	2,00	12	290,5	30
Insur	0,22	10	2,00	12	114,6	10
RIEst	0,06	36	2,00	12	431,3	41
Fin	0,06	35	2,00	12	332,8	34
Other	0,09	30	2,00	12	206,2	24

Pozn: ^a Vzdialenosť referenčného a optimálneho portfólia v priestore váh.

^b Vzdial. ref. a opti. portfólia ako súčet absolútneho rozdielu mier CVaR.

Tabuľka 3.1: Výsledné hodnoty DEA modelu, vzdialenosti a poradia.



Obr. 3.1: Grafické znázornenie optimálnych váh jednotlivých priemyselných portfólií pri exponenciálnom rizikovom spektre pre rôzne hodnoty parametru $k > 0$. Na grafe sú zobrazené len tie portfólia, ktoré majú aspoň jednu nenulovú váhu.

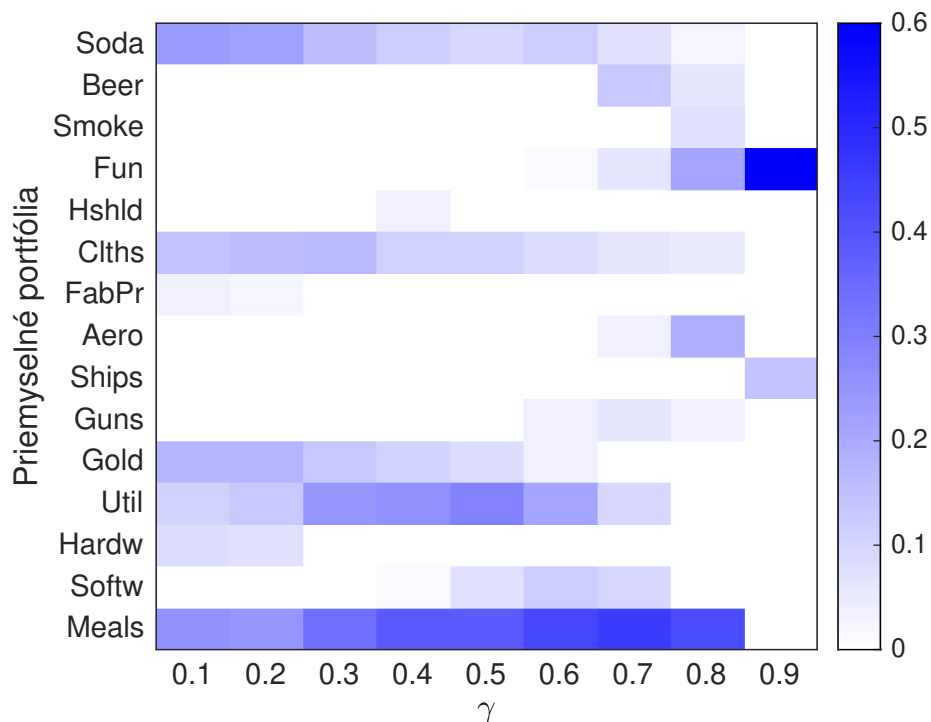
V našom prípade budeme uvažovať tri rôzne typy rizikových spektier: exponenciálne s parametrom $k > 0$, mocninové s parametrom $0 < \gamma \leq 1$ a mocninové s parametrom $\kappa \geq 1$, viď Obrázky 1.2, 1.3 a 1.4. Pre každý jeden typ ďalej vyskúšame viacero hodnôt parametrov a budeme sledovať, ako sa so zmenou parametru menia optimálne váhy.

V programovacom prostredí MATLAB sme implementovali minimalizačnú úlohu 3.1 vo forme úlohy lineárneho programovania, viď tvar 2.30. Riešením úlohy 3.1 je optimálne portfólio vhodné pre investora s danou rizikovou averziou. Získané optimálne portfólio je zároveň SSD eficientné.

Najprv sme skúmali vplyv zmeny parametru pri exponenciálnom rizikovom spektre. Hodnotu parametru k sme volili od 0,5 do 6,0 s krokom 0,5. Na Obrázku 3.1 je graficky zachytená zmena optimálnych váh jednotlivých priemyselných portfólií.

Pre hodnotu parametru k blízku nule vidíme, že optimálne portfólio sa blíži k portfóliu, v ktorom výrazne prevláda priemyselné portfólio *Zábava*. Práve portfólio *Zábava* označil DEA model za SSD eficientné. Naopak, so zvyšujúcou sa hodnotou parametru k sa portfólio *Zábava* z optimálneho portfólia úplne vytratí. Na Obrázku 3.1 môžeme ďalej pozorovať, že z celkového počtu 49 priemyselných portfólií má nenulovú váhu v istom momente len štrnásť. Optimálne portfóliá predstavujú v priemere kombináciu približne ôsmich priemyselných portfólií.

Ďalej sme sa zaoberali vplyvom zmeny parametru pri mocninovom rizikovom spektre s parametrom $0 < \gamma \leq 1$. Hodnotu parametru γ sme volili od 0,1 do 0,9 s krokom 0,1. Opäť na Obrázku 3.2 je graficky zachytená zmena optimálnych váh jednotlivých priemyselných portfólií.



Obr. 3.2: Grafické znázornenie optimálnych váh jednotlivých priemyselných portfólií pri mocninovom rizikovom spektre pre rôzne hodnoty parametru $0 < \gamma \leq 1$. Na grafe sú zobrazené len tie portfóliá, ktoré majú aspoň jednu nenulovú váhu.

Je zaujímavé sledovať, že s rastúcou hodnotou parametru γ sa približujeme k optimálnemu portfóliu, v ktorom prevláda portfólio *Zábava*. Ďalej prevládajú, podobne ako pri exponenciálnom rizikovom spektre, portfóliá *Turizmus* a *Služby*.

Na záver sme bližšie preskúmali vplyv zmeny parametru pri mocninovom rizikovom spektre s parametrom $\kappa \geq 1$. Hodnoty parametru κ sme volili od 1,5 do 6,0 s krokom 0,5. Aj tentokrát sú výsledky zachytené na Obrázku 3.3.

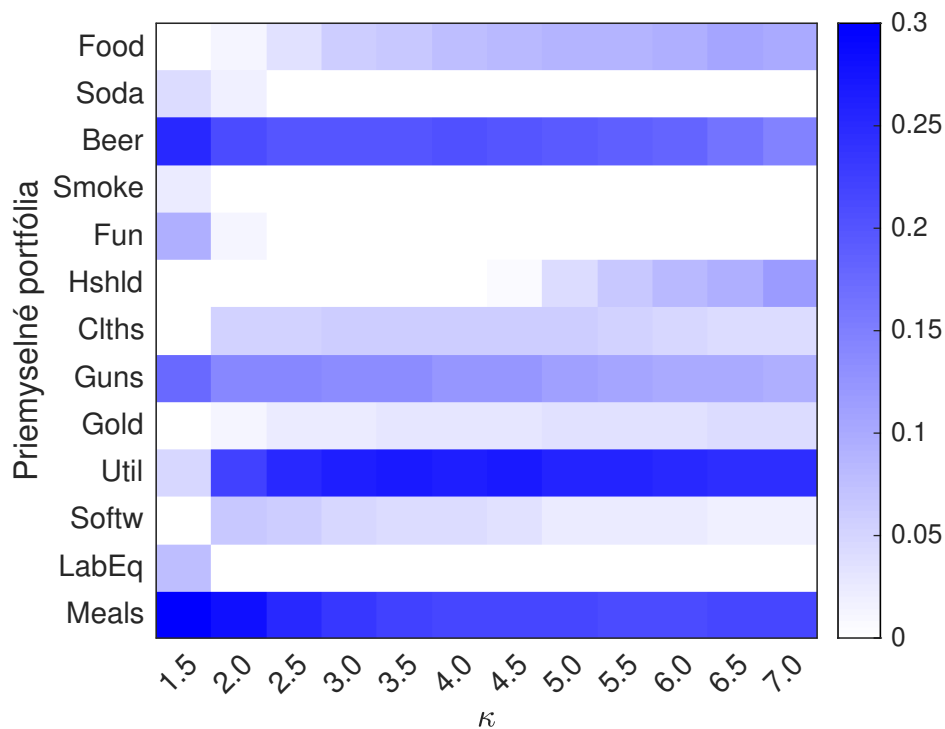
Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, aj v týchto optimálnych portfóliách prevládajú predovšetkým portfóliá *Turizmus*, *Služby* a *Pivo*. Vo väčšine optimálnych portfólií sú zastúpené s váhou až okolo 25 %.

Je mierne zarážajúce, že SSD efektívne portfólio *Zábava*, ktoré má zároveň najvyšší priemerný výnos, vo väčšine optimálnych portfólií zobrazených na Obrázkoch 3.1, 3.2 a 3.3 nie je vôbec zastúpené. Na druhej strane, výrazne sú zastúpené priemyselné portfóliá na prvých priečkach poradia vzhľadom ku vzdialenosti v priestore váh, viď Tabuľka 3.1, štvrtý stĺpec.

Poznámka. Všetky rizikové spektrá s hodnotami parametrov, ktoré sme uvažovali, sú rýdzo monotónne. Z toho vyplýva, že pre každé $s = 1, \dots, S$ platí $\mu_s > 0$. Tým pádom sú splnené predpoklady Tvrdenia 21 a optimálne riešenia úlohy 3.1 sú zároveň optimálnymi riešeniami minimalizačnej úlohy 2.24. Získané optimálne portfóliá sú preto SSD efektívne.

3.4 Zhrnutie výsledkov

Aby sme mohli porovnať dva rôzne prístupy, DEA model s diverzifikáciou a model založený na spektrálnych mierach rizika s rizikovou averziou, spome-



Obr. 3.3: Grafické znázornenie optimálnych váh jednotlivých priemyselných portfólií pri mocninovom rizikovom spektre pre rôzne hodnoty parametru $\kappa \geq 1$. Na grafe sú zobrazené len tie portfólia, ktoré majú aspoň jednu nenulovú váhu.

dzi nekonečne veľa možných rizikových spektier sme zvolili dve konkrétne a to exponenciálne s hodnotou parametru $k = 6$ a mocninové s hodnotou parametru $\gamma = 0,1$. Model založený na spektrálnych mierach rizika pre tieto hodnoty parametrov našiel optimálne portfóliá, viď Obrázok 3.1, parameter $k = 6$ a Obrázok 3.2, parameter $\gamma = 0,1$. Jednotlivé váhy oboch optimálnych portfólií sú zhrnuté v Tabuľke 3.2. V prípade, ak investor môže investovať len do jedného zo 49 dostupných priemyselných portfólií, zaujíma nás, ktoré z dostupných portfólií je najvhodnejším riešením. Inými slovami, ktoré z dostupných priemyselných portfólií je najbližšie k optimálnym portfóliám.

Jednotlivé priemyselné portfólia môžeme usporiadať na základe vzdialenosti referenčného a optimálneho portfólia. Vzdialenosť môžeme opäť merať dvoma spôsobmi, buď v priestore váh, viď druhá kapitola 2.27, alebo ako súčet absolútnych hodnôt rozdielu mier CVaR pre referenčné a optimálne portfólio, viď druhá kapitola 2.28. Pre každé jedno referenčné portfólio sme spočítali obe spomínané vzdialenosti. Výsledné hodnoty, spolu s poradím vzhladom k napočítaným vzdialenostiam sú uvedené v Tabuľke 3.3.

V ľavej časti Tabuľky 3.3 sú výsledné hodnoty pre exponenciálne rizikové spektrum s hodnotou parametru $k = 6$. Môžeme pozorovať, že poradie najvhodnejších portfólií sa v závislosti na spôsobe merania vzdialenosti mierne líši. Je však v súlade s grafom 3.1, parameter $k = 6$. Odporúča sa investovať do jedného z portfólií *Pivo*, *Služby* alebo *Turizmus*. V Tabuľke 3.2 a na Obrázku 3.1 môžeme pozorovať, že práve tieto priemyselné portfólia sú v optimálnom portfóliu zastúpené s najväčšou váhou.

Podobne v pravej časti Tabuľky 3.3 sú výsledné hodnoty pre mocninové rizi-

Exponenciálne spektrum, $k = 6$		Mocninové spektrum, $\gamma = 0,1$	
Portfólio	Váha	Portfólio	Váha
Food	0,071	Soda	0,226
Beer	0,184	Clths	0,132
Hshld	0,070	FabPr	0,031
Clths	0,051	Guns	0,002
Guns	0,100	Gold	0,177
Gold	0,034	Util	0,106
Util	0,257	Hardw	0,072
Softw	0,020	Meals	0,254
Meals	0,214		

Tabuľka 3.2: Váhy optimálnych portfólií pre exponenciálne rizikové spektrum s hodnotou parametru $k = 6$ a pre mocninové rizikové spektrum s hodnotou parametru $\gamma = 0,1$.

kové spektrum s hodnotou parametru $\gamma = 0,1$. V tomto prípade sa výraznejšie líši poradie najvhodnejších portfólií v závislosti na spôsobe merania. Zaujímavé je, že z pohľadu vzdialenosti absolútnych hodnôt rozdielu mier CVaR je k optimálnemu portfóliu najbližšie priemyselné portfólio *Pivo*, ktoré však v optimálnom portfóliu nie je vôbec zastúpené, viď váhy v Tabuľke 3.2.

Ako sme ukázali v teoretickej časti práce, DEA model s diverzifikáciou zároveň slúži ako test SSD eficientie portfólia. Rovnako sme ukázali, že optimálnym riešením modelu založenom na spektrálnych mierach rizika s rizikovou averziou je SSD eficientné portfólio. Z toho vyplýva, ak vezmeme optimálne riešenie získané z modelu založenom na spektrálnych mierach a použijeme ho ako referenčné portfólio X_0 v DEA modeli s diverzifikáciou, výsledné DEA skóre musí byť rovné jednej. Takýmto spôsobom zároveň otestujeme správnosť teoretických výsledkov.

Uvedený postup sme aplikovali na obe optimálne portfólia. Výsledné skóre DEA modelu s diverzifikáciou v oboch prípadoch vyšlo rovné jednej. Na záver zdôrazňujeme, že takéto spätné overenie v žiadnom prípade nenahrádza rigorózne odvodenie teoretických častí. Slúži len v zmysle spätnej kontroly.

Portfólio	Exponenciálne spektrum, $k = 6$				Mocninové spektrum, $\gamma = 0,1$			
	Vzdial ^a	Poradie	Vzdial ^b	Poradie	Vzdial ^a	Poradie	Vzdial ^b	Poradie
Agric	2,00	10	471,2	44	2,00	9	422,3	44
Food	1,85	5	100,9	5	2,00	9	52,0	5
Soda	2,00	10	130,6	6	1,54	2	84,1	6
Beer	1,63	3	70,3	2	2,00	9	34,5	1
Smoke	2,00	10	265,6	24	2,00	9	218,5	24
Toys	2,00	10	360,5	35	2,00	9	311,6	35
Fun	2,00	10	389,4	37	2,00	9	344,9	37
Books	2,00	10	328,8	30	2,00	9	279,9	30
Hshld	1,86	6	92,8	4	2,00	9	43,9	4
Clths	1,89	7	213,4	20	1,73	4	166,4	19
Hlth	2,00	10	302,1	29	2,00	9	253,2	29
MedEq	2,00	10	174,8	13	2,00	9	130,6	13
Drugs	2,00	10	151,5	11	2,00	9	104,0	10
Chems	2,00	10	294,7	27	2,00	9	246,2	27
Rubbr	2,00	10	225,0	22	2,00	9	180,5	22
Txtls	2,00	10	464,6	43	2,00	9	415,8	43
BldMt	2,00	10	359,0	34	2,00	9	310,4	34
Cnstr	2,00	10	411,6	39	2,00	9	362,8	39
Steel	2,00	10	574,8	46	2,00	9	525,9	46
FabPr	2,00	10	557,6	45	1,93	7	508,8	45
Mach	2,00	10	343,0	33	2,00	9	294,7	33
ElcEq	2,00	10	342,6	32	2,00	9	293,7	32
Autos	2,00	10	389,1	36	2,00	9	340,3	36
Aero	2,00	10	200,8	16	2,00	9	157,2	16
Ships	2,00	10	453,1	42	2,00	9	406,0	42
Guns	1,79	4	210,4	19	1,99	8	165,4	18
Gold	1,93	8	893,9	48	1,64	3	845,0	48
Mines	2,00	10	654,9	47	2,00	9	606,1	47
Coal	2,00	10	1237,5	49	2,00	9	1188,7	49
Oil	2,00	10	402,3	38	2,00	9	353,4	38
Util	1,48	1	90,3	3	1,78	5	43,6	3
Telcm	2,00	10	141,2	9	2,00	9	93,4	9
PerSv	2,00	10	433,0	40	2,00	9	384,1	40
BusSv	2,00	10	154,3	12	2,00	9	113,3	12
Hardw	2,00	10	287,6	26	1,85	6	239,2	26
Softw	1,95	9	151,0	10	2,00	9	109,1	11
Chips	2,00	10	239,8	23	2,00	9	194,3	23
LabEq	2,00	10	209,8	18	2,00	9	169,7	20
Paper	2,00	10	191,3	15	2,00	9	142,6	15
Boxes	2,00	10	284,1	25	2,00	9	235,3	25
Trans	2,00	10	224,4	21	2,00	9	176,8	21
Whsl	2,00	10	182,1	14	2,00	9	133,2	14
Rtail	2,00	10	133,5	7	2,00	9	88,5	7
Meals	1,57	2	58,9	1	1,49	1	41,9	2
Banks	2,00	10	295,6	28	2,00	9	247,0	28
Insur	2,00	10	134,6	8	2,00	9	91,1	8
RIEst	2,00	10	436,6	41	2,00	9	387,9	41
Fin	2,00	10	335,8	31	2,00	9	287,0	31
Other	2,00	10	206,8	17	2,00	9	157,9	17

Pozn: ^a Vzdialenosť referenčného a optimálneho portfólia v priestore váh.

^b Vzdialenosť refer. a opti. portfólia ako súčet absolútneho rozdielu mier CVaR.

Tabuľka 3.3: Výsledné vzdialenosti a poradia pre dve rôzne rizikové spektrá.

Záver

Témou diplomovej práce bola riziková averzia v eficiencii portfólia. Ako sme naznačili v úvode práce, téme výberu optimálneho portfólia sa venovalo veľké množstvo autorov. Aj preto sme sa v práci snažili o trochu odlišný prístup.

Hlavným cieľom teoretickej časti práce bolo pripraviť úplný teoretický aparát k praktickým aplikáciám. Hneď v prvej kapitole sme sa snažili o ucelené zhrnutie publikovaných výsledkov. Na viacerých miestach odkazujeme čitateľa ďalej na odborné články. Zaviedli sme axiómy koherencie a plynule sme prešli ku spektrálnym mieram rizika. Tie navyše vystihujú individuálnu rizikovú averziu investora. Po predstavení vlastností spektrálnych mier sme uviedli niekoľko príkladov, postup pri empirickom odhadovaní a minimalizáciu spektrálnych mier.

V druhej kapitole, po všeobecnom úvode k analýze obalu dát, sme zhrnuli najzaujímavejšie výsledky z práce Branda (2015) a podrobnejšie rozpracovali dôkazy niekoľkých dôležitých tvrdení. Definovali sme stochastickú dominanciu druhého rádu. Ďalej sme predstavili model, ktorý vychádza z teórie viackriteriálnej optimalizácie. Ukázali sme zaujímavé prepojenie medzi uvedenými modelmi a stochastickou dominanciou druhého rádu. Eficientné portfólia oboch modelov sú v súlade s eficienciou v zmysle stochastickej domimancie druhého rádu. Unikátny prínos spočíva v prepojení teórie viackriteriálnej optimalizácie a spektrálnych mier rizika.

V praktickej časti práce sme aplikovali získané teoretické výsledky na reálnom dátovom súbore. V programovacom prostredí MATLAB sme postupne implementovali DEA model s diverzifikáciou a model založený na viackriteriálnej optimalizácii pre rôzne rizikové spektrá. Pomocou DEA modelu s diverzifikáciou sme určili eficienciu každého jedného priemyselného portfólia. Model našiel jediné DEA efficientné priemyselné portfólio, a to portfólio *Zábava*. Pre zvyšné neeficientné portfólia model ponúka optimálne váhy, ktoré môžu slúžiť k rebalancovaniu neeficientných portfólií. Naproti tomu, pomocou modelu založenom na viackriteriálnej optimalizácii sme našli optimálne portfólia pre investorov s rôznymi rizikovými spektrami. Zmenu v rozložení portfólia pre rôzne hodnoty parametrov sme prehľadne zachytili pomocou grafov, viď Obrázky 3.1, 3.2 a 3.3. V praktickej časti sme zároveň overili správnosť teoretických výsledkov.

Zoznam použitej literatúry

- ACERBI, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, **26**(7), 1505–1518.
- ACERBI, C. a TASCHE, D. (2002). Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, **31**(2), 379–388.
- ADAM, L. a BRANDA, M. (2019). Risk-aversion in data envelopment analysis models with diversification. Research Paper.
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203–228.
- BANKER, R. D., CHARNES, A. a COOPER, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, **30**(9), 1078–1092.
- BRANDA, M. (2015). Diversification-consistent data envelopment analysis based on directional-distance measures. *Omega*, **52**, 65–76.
- BRANDTNER, M. a KÜRSTEN, W. (2015). Decision making with expected shortfall and spectral risk measures: The problem of comparative risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, **58**, 268–280.
- CHARNES, A., COOPER, W. a RHODES, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**(6), 429–444.
- CIPRA, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*, volume Vydání I. Ekopress, s.r.o., Praha. ISBN 978-80-87865-24-8.
- COOPER, W. W., SEIFORD, L. M. a ZHU, J. (2011). Data envelopment analysis: History, models, and interpretations. In *International Series in Operations Research & Management Science*, pages 1–39. Springer US.
- DOWD, K., COTTER, J. a SORWAR, G. (2008). Spectral risk measures: Properties and limitations. *Journal of Financial Services Research*, **34**(1), 61–75.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0840-6.
- FARRELL, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, **120**(3), 253.
- FRENCH, K. R. Data library. Dostupné online (27.5.2019). URL https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.
- KOPA, M. (2013). Stochastic dominance in portfolio efficiency testing. Habilitation thesis, Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics.
- KOPA, M. a CHOVANEC, P. (2008). A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure. *Kybernetika*, **44**(2), 243–58.

- LEVY, H. (2006). *Stochastic Dominance*. Springer US. ISBN 0-387-29302-7.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77.
- OGRYCZAK, W. a RUSZCZYŃSKI, A. (1999). From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, **116**(1), 33–50.
- PFLUG, G. C. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In *Nonconvex Optimization and Its Applications*, pages 272–281. Springer US.
- PORTELA, M. C. A. S., THANASSOULIS, E. a SIMPSON, G. (2004). Negative data in DEA: a directional distance approach applied to bank branches. *Journal of the Operational Research Society*, **55**(10), 1111–1121.
- ROCKAFELLAR, R. a URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**(7), 1443–1471.
- SEIFORD, L. M. a THRALL, R. M. (1990). Recent developments in DEA. *Journal of Econometrics*, **46**(1-2), 7–38.
- SZEGÖ, G. (2004). *Risk Measures for the 21st Century*. John Wiley & Sons. ISBN 0-470-86154-1.
- SZEGÖ, G. (2005). Measures of risk. *European Journal of Operational Research*, **163**(1), 5–19.
- ŠTEFÁNIK, M. (2014). Spektrální míry rizika v úlohách optimalizace portfolia. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

A. Prílohy

A.1 Prílohy k praktickej časti práce

Kód	Názov	Kód	Názov
Agric	Poľnohospodárstvo	Guns	Obrana
Food	Potravinárstvo	Gold	Vzácne kovy
Soda	Sladené nápoje	Mines	Baníctvo
Beer	Pivo	Coal	Uhlie
Smoke	Tabakové výrobky	Oil	Ropa
Toys	Hobby	Util	Služby
Fun	Zábava	Telcm	Telekomunikácie
Books	Knihy	PerSv	Osobné služby
Hshld	Spotrebný tovar	BusSv	Obchodné služby
Clths	Odevníctvo	Hardw	Počítače
Hlth	Zdravotníctvo	Softw	Softvér
MedEq	Medicínske vybavenie	Chips	Elektronika
Drugs	Farmaceutické výrobky	LabEq	Laboratórne zariadenia
Chems	Chemikálie	Paper	Kancelárske potreby
Rubbr	Guma a plasty	Boxes	Prepravné kontajnery
Txtls	Textil	Trans	Doprava
BldMt	Konštrukčné materiály	Whsl	Veľkoobchod
Cnstr	Stavebníctvo	Rtail	Maloobchod
Steel	Oceliarstvo	Meals	Turizmus
FabPr	Oceliarske produkty	Banks	Bankovníctvo
Mach	Stroje	Insur	Poistovníctvo
ElcEq	Elektrické zariadenia	RIEst	Nehnutelnosti
Autos	Automobily	Fin	Obchodovanie
Aero	Lietadlá	Other	Iné odvetvia
Ships	Lode		

Tabuľka A.1: Zoznam 49 priemyselných portfólií spolu s kódovým označením.

Portfólio	Priemer	Smerod. odchýlka	Min	Max
Fun	2,20	7,17	-21,13	19,10
Ships	2,06	7,92	-18,82	29,15
LabEq	1,75	5,05	-11,29	16,31
Aero	1,75	5,05	-10,18	15,54
Rubbr	1,62	5,11	-13,08	19,03
Clths	1,62	5,24	-10,76	17,54
Chips	1,58	5,22	-9,02	13,01
Softw	1,58	4,40	-9,38	11,80
Guns	1,56	4,80	-14,46	12,14
BusSv	1,52	4,31	-9,71	14,16
Meals	1,52	3,44	-6,48	10,09
Insur	1,50	4,18	-9,85	13,46
Mach	1,47	6,18	-16,44	23,02
Trans	1,46	4,92	-15,19	15,28
MedEq	1,44	4,38	-11,53	11,78
Smoke	1,42	5,14	-15,80	10,90
Rtail	1,42	4,07	-10,56	13,59
Txtls	1,41	7,35	-25,79	36,05
BldMt	1,39	6,18	-16,35	24,11
Chems	1,38	5,59	-16,46	18,21
Hardw	1,34	5,45	-11,85	13,71
Soda	1,32	3,92	-8,38	13,70
Banks	1,31	5,37	-12,79	13,32
Beer	1,30	3,34	-9,69	9,45
RlEst	1,29	6,78	-17,45	19,99
Paper	1,29	4,46	-9,74	15,95
Drugs	1,28	3,96	-10,73	8,81
Telcm	1,28	3,95	-8,84	9,74
FabPr	1,25	7,76	-21,15	18,82
Boxes	1,19	5,15	-12,98	12,93
Autos	1,18	6,38	-14,09	23,94
Toys	1,18	5,95	-16,35	16,71
Whsl	1,17	4,18	-11,21	13,76
Other	1,15	4,59	-10,95	13,21
Hlth	1,15	5,25	-15,46	14,35
Fin	1,14	5,59	-14,30	15,17
ElcEq	1,10	5,66	-13,64	17,43
Food	1,09	3,40	-10,93	8,43
Hshld	1,06	3,32	-6,94	10,27
Util	1,05	3,20	-6,99	7,92
Books	1,05	5,66	-14,42	16,43
Cnstr	0,99	6,22	-15,99	19,99
Mines	0,84	8,68	-30,64	26,91
PerSv	0,80	6,10	-19,67	18,60
Steel	0,62	7,45	-20,49	21,36
Oil	0,61	5,69	-13,25	16,10
Agric	0,58	6,73	-18,19	20,97
Gold	0,33	10,68	-26,27	33,91
Coal	-0,28	12,45	-36,74	35,29

Tabuľka A.2: Popisné štatistiky výnosu 49 uvažovaných priemyselných portfólií usporiadané podľa priemerného výnosu.