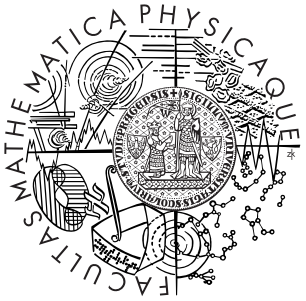
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Viktor Holubec

Parrondův paradox a jednoduchý diskrétní model molekulárního motoru

Katedra makromolekulární fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Petr Chvosta, CSc.
Studijní program: Fyzika

2007

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce panu Doc. RNDr. Petru Chvostovi, CSc. za laskavé vedení a podnětné připomínky během psaní práce. Dále děkuji mé mamince Mgr. Ing. Ivaně Holubcové za pečlivé přečtení práce a opravu gramatických chyb.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 13.11.2006 Viktor Holubec

Obsah

1 Parrondův paradox **8**
1.1 Úvod 8
1.2 Obecné vlastnosti uvažovaných her 9
1.3 Původní Parrondova hra 10

2 Markovské řetězce **13**
2.1 Definice Markovskosti a Markovských řetězců 13
2.2 Náhodná proměnná „kapitál hráče“ 14
2.3 Třístavový řetězec 15
2.4 Stacionární režim řetězce 16
2.5 Tok pravděpodobnosti 17
2.6 Stacionární tok pravděpodobnosti 18

3 Pravděpodobnostní střídání her **21**
3.1 Reprezentace her homogenním řetězcem 21
3.2 Analýza hry $\mathcal{C}$ 22

4 Deterministické střídání her **24**
4.1 Hra $\mathcal{AB}$ 24
4.2 Hry $\mathcal{AAB}$ a $\mathcal{BBA}$ 27

5 Diskuze a závěr **29**
5.1 Diskuze výsledků 29
5.2 Závěr 31

Literatura **34**

Název práce: Parrondův paradox a jednoduchý diskrétní model molekulárního motoru
Autor: Viktor Holubec
Katedra (ústav): Katedra makromolekulární fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Petr Chvosta, CSc.
e-mail vedoucího: Petr.Chvosta@mff.cuni.cz

Abstrakt: Jeden z navrhovaných způsobů přenosu materiálu na buněčné úrovni lze principielně popsat difuzí v časově proměnném periodickém potenciálu, jehož proměnlivost je způsobena hydrolýzou molekul ATP. Paradoxní chování tohoto „motoru“ spočívá v tom, že tepelné ani potenciální síly nejsou schopny sami o sobě způsobit usměrněný, makroskopický pohyb částic. Ten vzniká až střídavým zapínáním a vypínáním potenciálu v čase. Tento systém jsme zkoumali pomocí diskrétního modelu založeného na teorii časově nehomogenních Markovských řetězců. Dokázali jsme existenci jistých oblastí parametrů modelu, pro které se liší směr transportu částic při deterministickém a při pravděpodobnostním přepínání potenciálu.

Klíčová slova: Parrondův paradox, Molekulární motory, Markovské řetězce

Title: Parrondo's paradox and simple discrete model of a molecular motor
Author: Viktor Holubec
Department: Department of Macromolecular Physics
Supervisor: Doc. RNDr. Petr Chvosta, CSc.
Supervisor's e-mail address: Petr.Chvosta@mff.cuni.cz

Abstract: One of a suggested ways of a material transport on the cellular level could be theoretically described as a diffusion process in a time dependent periodic potential. The time dependence is induced by ATP hydrolysis. Paradoxical behaviour of this "motor" lies in that the thermal and the potential forces per se are not able to produce directed and macroscopic transport of particles, however transport arises when we alternately switch on and off the potential in time. We have investigated this system using a discrete model based on the theory of time inhomogeneous Markov chains. We have proved the existence of certain domains of the model parameters for which the direction of particle movement for the deterministic and for the probabilistic alternation of the potential differs.

Keywords: Parrondo's paradox, Molecular motors, Markov chains

Kapitola 1

Parrondův paradox

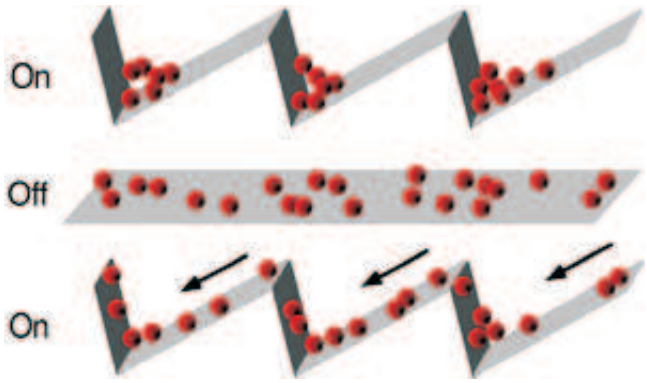
1.1 Úvod

V posledních letech byla věnována zvýšená pozornost tzv. Brownovým motorům [1], [2]. Tyto systémy sestávají z Brownovských částic, vykonávajících difúzní (termální) pohyb v asymetrickém potenciálu (s nulovým globálním sklonem), který se střídavě zapíná a vypíná (viz Obr. 1.1). Jako důsledek těchto dvou vlivů (asymetričnosti potenciálu a termálního pohybu) může vzniknout usměrněný proud částic a to i proti směru působení nenulové síly, která by, při absenci jedné z ingrediencí Brownova motoru, způsobila usměrněný pohyb částic na druhou stranu. Výsledkem kooperace výše uvedených vlivů je tedy možnost globálního transportu Brownovských částic proti odporové síle v situaci, kdy nepůsobí žádné globální hnací síly.

Při analýze popsaného systému je nutno řešit tzv. Langevinovu nebo jí odpovídající Fokker–Planckovu rovnici [3]. Přesné výpočty odpovídají závěrům předchozího odstavce (např. [4], [5]).

Tento objev se již zařadil k zásadním milníkům při studiu komplexity molekulárního světa. V současné době, po zhruba desetiletém intenzivním zkoumání, je princip experimentálně prověřen v řadě konkrétních situací.

Například byla prokázána existence „pump“ transportujících ionty skrze buněčnou membránu proti působení elektrochemického potenciálu membrány [6], [7], [8]; molekul pohybujících se skrze mikrotubuly, přenášejících rozličný buněčný materiál; nebo molekul schopných „stahovat“ vlákna a tvořit tak svalovou tkáň [7], [8]. Každý z těchto systémů sestává z unikátního proteinu, schopného měnit svůj tvar v prostoru pomocí hydrolýzy molekul ATP. Tento protein je odlišný pro všechny výše



Obr. 1.1: Jednoduchý náčrt funkce Brownova molekulárního motoru. Brownovské částice, vykonávající difúzní pohyb, jsou zachyceny v asymetrickém potenciálu, který se střídavě zapíná a vypíná. Jak je vidět na obrázku, náhodný difúzní pohyb je tímto přepínáním potenciálu usměrňován doleva.

popsané systémy (kinesin při transportu skrze mikrotubuly, myosin při tvorbě svalové tkáně). Všechny jsou však „motory“ schopné uvolňovat energii uloženou ve vazbách ATP a transformovat ji na energii mechanickou, přičemž každý z těchto dějů probíhá na škálách, na kterých hrají neopomenutelnou roli termální fluktuace.

V roce 1997 se povedlo španělskému profesoru J. M. R. Parrondovi vytvořit jednoduchý diskrétní matematický model výše rozebrané situace. Oběma ingrediencím motoru přiřadil po jednoduché hře, jejíž pravidla reflektovala vliv dané ingredience na pohyb Brownovské částice. Pohyb Brownovské částice potom odrážel vývoj kapitálu hráče hrajícího dané hry. K analýze takto zjednodušeného problému se dá jednoduše použít teorie Markovských řetězců, což jsme provedli v dalších kapitolách.

Původní Parrondovu hru popíšeme zevrubněji v přespříštím článku 1.3, prozatím jen poznamenejme, že z níže zkonstruovaných her odpovídá vlivu termálního pohybu Brownovských částic hra $\mathcal{A}$ a vlivu asymetrického potenciálu hra $\mathcal{B}$. Nyní přejděme k popisu obecných kvalit her uvažovaných v této práci.

1.2 Obecné vlastnosti uvažovaných her

Všechny hry, uvažované v této práci, se hrají podle následujícího scénáře: hráč vstupuje do hry s počátečním kapitálem $\mathbf{K}(0)$, s jistou pravděpo-

dobností vyhraje a jeho kapitál se zvýší na hodnotu $\mathbf{K}(1) = \mathbf{K}(0) + 1$, s doplňkovou pravděpodobností prohraje (tj. pravděpodobnost remízy je nulová) a jeho kapitál se sníží na hodnotu $\mathbf{K}(1) = \mathbf{K}(0) - 1$, přičemž pravděpodobnosti výhry v jednotlivých hrách mohou záviset jak na kapitálu hráče, tak na pořadovém čísle hry. Do další hry hráč vstupuje s kapitálem, se kterým ukončil hru předchozí. Do n-té hry tedy vstupuje s kapitálem $\mathbf{K}(n-1)$ a končí ji s kapitálem $\mathbf{K}(n)$.

Pokud označíme hru za vyhrávající resp. prohrávající, myslíme tím, že hra je vyhrávající resp. prohrávající ve středním smyslu, tedy střední hodnota kapitálu po určité posloupnosti her (dostatečně dlouhé, aby odezněly přechodové jevy — viz dále), středovaná přes mnoho realizací této posloupnosti, roste resp. klesá s pořadovým číslem hry.

Nyní již můžeme přejít k popisu paradoxní hry profesora Parronda.

1.3 Původní Parrondova hra

Paradoxní hra J. M. R. Parronda (např. [9], [10]), řekněme hra $\mathcal{C}$, vzniká vhodnou kombinací níže popsaných her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, kdy v původní verzi se hry kombinují tak, že s pravděpodobností γ je hrána hra $\mathcal{A}$ a s pravděpodobností $1-\gamma$ hra $\mathcal{B}$ (hra $\mathcal{C}$ tedy vzniká „pravděpodobnostním střídáním“ her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$). Schématicky je hra $\mathcal{C}$ zobrazena na Obr. 1.2. V následujících kapitolách představíme ještě další použitelné kombinace her, vykazující níže popsané paradoxní chování (hry budeme střídat „deterministicky“, např. v každém sudém kole budeme hrát hru $\mathcal{A}$, zatímco v každém lichém hru $\mathcal{B}$).

Hra $\mathcal{A}$ je velmi jednoduchá, pravděpodobnost výhry a nezávisí na kapitálu hráče. Odtud je vidět, že jsme na konci článku 1.1 neřekli celou pravdu. Hra $\mathcal{A}$ bude hrát roli difúze jen v případě $a = \frac{1}{2}$ (neboť difúze nezvýhodňuje pohyb v žádném směru). Pokud bude parametr a menší než $\frac{1}{2}$, bude hra $\mathcal{A}$ hrát roli difúze za působení konstantní síly proti kladnému směru pohybu částice (v případě hry růstu kapitálu).

Hra $\mathcal{B}$ je o něco složitější: pokud je kapitál hráče dělitelný třemi, je pravděpodobnost výhry b_0, pokud není, je pravděpodobnost výhry b. Odtud vidíme, že hra $\mathcal{B}$ je asymetrická a skutečně hraje roli asymetrického potenciálu z obrázku 1.1 (pravděpodobnost výhry b se bude uplatňovat ve dvou stavech kapitálu ze tří, což odpovídá delšímu úseku potenciálu atd.).

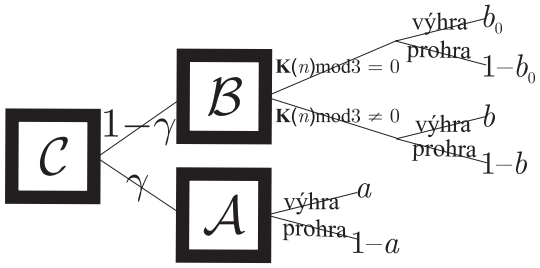
Tzv. Parrondův paradox spočívá v tom, že je při vhodné kombinaci her možné pravděpodobnosti a, b_0 a b nastavit tak, aby hry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ byly prohrávající, zatímco hra $\mathcal{C}$ vyhrávající. Hra $\mathcal{C}$ tedy hraje roli difúze částic

ve střídavě zapínaném a vypínaném asymetrickém potenciálu (do pojmu difúze již zahrnujeme i možnou konstantní působící sílu, zahrnutou v parametru hry $\mathcal{A}$), přičemž je jasné, že toto ztotožnění je nedokonalé (ve hře $\mathcal{C}$ se jednotlivé vlivy střídají, zatímco v případě pohybu v asymetrickém potenciálu probíhá difúze stále, pouze se „zapíná“ a „vypíná“ potenciál). Některé hodnoty pravděpodobností splňující požadavek paradoxního chování původní Parrondovy hry jsou uvedeny v Tab. 1.1.

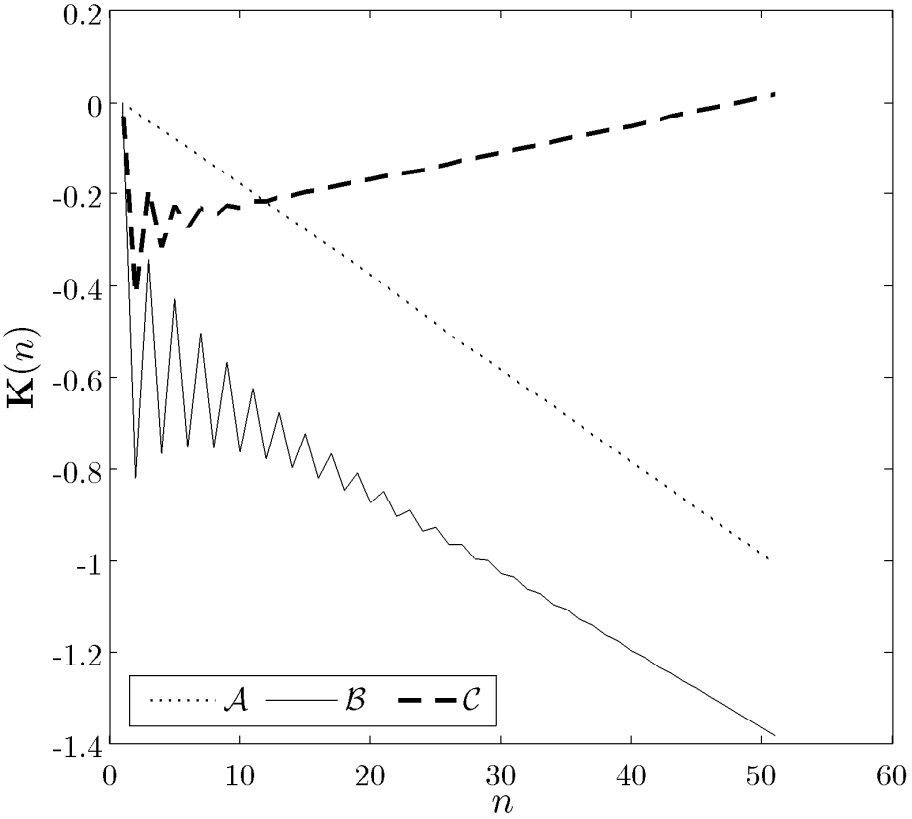
Na obrázku 1.3 je dále zobrazena simulace těchto her pro pravděpodobnosti z Tab. 1.1 ($\epsilon = 1/100$, $\gamma = 1/2$). Z obrázku jsou dobře patrné přechodové jevy, které u her $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ znemožňují pro krátké posloupnosti her definovat, zda je hra vyhrávající resp. prohrávající, neboť toto pro krátké posloupnosti závisí na jejich délce.

a	b_0	b
$\frac{1}{2} - \epsilon$	$\frac{1}{10} - \epsilon$	$\frac{3}{4} - \epsilon$

Tab. 1.1: Parrondovy pravděpodobnosti, pro které jsou hry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ prohrávající, zatímco hra $\mathcal{C}$ je (při vhodné volbě parametru γ, např. $1/2$) vyhrávající; ϵ musí být kladné a zároveň dostatečně malé (např. $1/100$).



Obr. 1.2: Hra $\mathcal{C}$: γ resp. $1-\gamma$ je pravděpodobnost, že bude hrána hra $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$. $\mathbf{K}(n)$ je kapitál hráče, se kterým vstupuje do hry s pořadovým číslem $n+1$, a je pravděpodobnost výhry ve hře $\mathcal{A}$, b_0 resp. b jsou pravděpodobnosti výhry ve hře $\mathcal{B}$ za předpokladu, že kapitál hráče je resp. není dělitelný třemi.



Obr. 1.3: Simulace Parrondových her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Na svislé ose je vynesen kapitál $\mathbf{K}(n)$ v závislosti na počtu odehraných kol hry n. Jednotlivé hry byly simulovány pro pravděpodobnosti z tabulky 1.1, kde jsme zvolili $\epsilon = 1/100$. Hra $\mathcal{C}$ byla vytvořena kombinací her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ popsanou výše a schematicky zobrazenou na obrázku 1.2, přičemž parametr střídání her γ jsme volili roven $1/2$. Křivky vynesené v grafu byly středovány přes 10^6 realizací her. Z grafů her $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou dobře vidět přechodové jevy, předcházející ustálení středního trendu vývoje kapitálu v těchto hrách. Výrok „hra je vyhrávající“ má tedy smysl pouze pro dostatečně dlouhé posloupnosti her, pro které vymizí přechodové jevy a střední trend vývoje kapitálu se ustálí. O hře potom tvrdíme, že je vyhrávající resp. prohrávající, pokud je střední trend vývoje kapitálu rostoucí resp. klesající. Dle této definice je z obrázku patrné, že pro dané pravděpodobnosti jsou hry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ prohrávající, zatímco hra $\mathcal{C}$, vzniklá jejich kombinací, je vyhrávající.

Kapitola 2

Markovské řetězce

V této kapitole rozvineme matematický aparát vhodný k analýze výše popsaných her.

2.1 Definice Markovskosti a Markovských řetězců

Mějme na čase t závislou náhodnou proměnnou (pro naše potřeby vystačíme s diskrétním časem), např. $\mathbf{X}(t)$, která může nabývat hodnot z určité N členné množiny $\{X_i\}_{i=1}^{N}$. Označme $p_i(t)$ pravděpodobnost nabývání i-té hodnoty náhodné proměnné v čase t, tedy $p_i(t) := \text{Prob}\{\mathbf{X}(t) = X_i\}$. Stav náhodné proměnné v čase t je tedy plně popsán sadou N pravděpodobností $p_i(t)$ nabývání N možných hodnot X_i.

Řekněme, že pravidla, řídící časový vývoj naší náhodné proměnné, závisí pouze na jejím okamžitém stavu (tedy pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot v čase $t+1$ závisí pouze na pravděpodobnostech nabývání těchto hodnot v čase t, nezávisí tak na způsobu, jakým se náhodná proměnná do stavu v čase t dostala) a na čase t. Takto definovanou náhodnou proměnnou nazveme Markovskou a jí příslušnou množinu hodnot nazveme Markovským řetězcem.

Protože jednotlivé hodnoty náhodné proměnné v řetězci se nazývají stavy tohoto řetězce (např. místo pravděpodobnosti nabývání určité hodnoty náhodné proměnné se mluví o pravděpodobnosti obsazení příslušného stavu jejího Markovského řetězce), nebudeme v dalším užívat slovo stav ve smyslu předešlých odstavců, ale pouze ve smyslu odstavce tohoto. V dalším tedy budeme hovořit pouze o stavech řetězce příslušného náhodné proměnné a pravděpodobnostech jejich obsazení.

V souladu s předchozím nyní označme $r_{ij}(t)$ pravděpodobnost přechodu (neboli přechodovou pravděpodobnost) ze stavu i do stavu j v čase t. Pro N-stavový řetězec bychom tedy měli v každém čase N^2 přechodových pravděpodobností. Protože však chceme analyzovat pouze Parrondovy hry představené v předchozí kapitole, kde roli přechodových pravděpodobností přebírají pravidla her, můžeme pro přechodové pravděpodobnosti psát $r_{ij}(t) = r_{ii\pm1}(t)$, neboť dle pravidel her platí $r_{ij}(t) = 0$, pokud $\mid i - j \mid \neq 1$ (nenulové jsou tedy pouze pravděpodobnosti přechodu mezi dvěma sousedními stavy). Konečně označme $r_{ii+1}(t) = r_i(t)$ a $r_{ii-1}(t) = 1 - r_i(t)$ ($r_i(t)$ je tedy pravděpodobnost přechodu řetězce ze stavu i do stavu $i+1$ v čase t, $1 - r_i$ je potom doplňkovou pravděpodobností k r_i a má význam přechodu ze stavu i do stavu $i-1$ ve stejném čase). Tohoto značení se již budeme v dalším textu držet.

S užitím předchozího definujme ještě poslední dva pojmy tohoto článku:

Definice 1 (Homogenní Markovský řetězec) *Markovský řetězec nazveme homogenním, pokud přechodové pravděpodobnosti mezi jednotlivými stavy řetězce nezávisí na (diskrétním) čase t, tedy platí-li $r_i(t) = r_i$ pro všechna $t \in \mathbb{N}_0$, kde $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Definice 2 (Nehomogenní Markovský řetězec) *Markovský řetězec nazveme nehomogenním, pokud přechodové pravděpodobnosti mezi jednotlivými stavy řetězce závisí na (diskrétním) čase t.*

V této práci se setkáme s homogenními a později s jednoduchými nehomogenními řetězci. V dalších odstavcích však provedeme podrobnou analýzu pouze pro řetězce homogenní, neboť tato půjde (v našem případě) snadno rozšířit i na řetězce nehomogenní.

2.2 Náhodná proměnná „kapitál hráče“

V předchozí kapitole jsme označili kapitál hráče po n hrách $\mathbf{K}(n)$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, přičemž $\mathbf{K}(0)$ značilo kapitál, s nímž hráč vstupoval do 1. hry. Aby mohla být veličina $\mathbf{K}(n)$ náhodnou proměnnou, je třeba aby vstupní kapitál do hry byl také náhodný. Bez újmy na obecnosti však můžeme tvrdit, že počáteční kapitál $\mathbf{K}(0)$ nabývá s pravděpodobností 1 hodnoty K_0.

Výše definovaná náhodná proměnná může obecně nabývat nekonečně mnoha hodnot (všech celých čísel). Příslušná množina přechodových

pravděpodobností bude tedy nekonečná, což je problematické. Díky periodičnosti pravidel Parrondových her však bude pro naše potřeby dostačující zkoumat náhodnou proměnnou $\mathbf{Z}(n) = \mathbf{K}(n) \bmod 3$, které přísluší pouze třístavový řetězec (může nabývat jen hodnot z množiny $\{0, 1, 2\}$).

Je zřejmé, že roli „času“ t z předchozího paragrafu přebere v další analýze „pořadové číslo hry“ n. Poznamenejme dále, že z pravidel Parrondových her, která určují výše popsané přechodové pravděpodobnosti plyne, že tento řetězec bude Markovský.

V dalším se tedy omezme na zkoumání třístavového Markovského řetězce odpovídajícího náhodné proměnné $\mathbf{Z}(n)$.

2.3 Třístavový řetězec

V souladu s článkem 2.1 užijme následující značení: označme $p_i(n)$ $(i = 0, 1, 2)$ pravděpodobnosti, že po n hrách bude zbytek po dělení kapitálu třemi i, neboli $p_i(n) = \mathrm{Prob}\,\{\mathbf{Z}(n) = i\}$. Protože vstupní kapitál hráče do hry je s jistotou K_0, nachází se řetězec před první hrou s jistotou ve stavu $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{K}(0) \bmod 3$. Odtud plyne pro pravděpodobnosti $p_i(0)$ vztah $\sum_{i=0}^{2} p_i(0) = 1$, který díky zákonu zachování pravděpodobnosti platí i pro pravděpodobnosti $p_i(n)$ (tj. platí $\sum_{i=0}^{2} p_i(n) = 1$ pro všechna n).

Nyní označme $\mathbb{R}$ tzv. matici přechodových pravděpodobností [11] hry $\mathcal{R}$. Pravděpodobnosti výhry v této hře, pokud $\mathbf{Z}(n) = i$, označme r_i. Zaveďme ještě sloupcový vektor $\mathbf{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), p_2(n))^+$, kterým bude dle článku 2.1 plně popsán stav řetězce v čase n.

S takto zavedeným značením můžeme popsat vývoj řetězce, příslušného hře $\mathcal{R}$, při hraní posloupnosti her délky n jednoduchou vektorovou rovnicí. O její platnosti se lze pro $n = 1$ snadno přesvědčit jejím roznásobením, neboť potom říká pouze to, že pravděpodobnost obsazení např. stavu 1 po první hře spočteme jako součet pravděpodobnosti obsazení stavu 0 před touto hrou násobené pravděpodobností výhry v tomto stavu (pravděpodobností přechodu ze stavu 0 do stavu 1) a pravděpodobnosti obsazení stavu 2 před touto hrou násobené pravděpodobností prohry v tomto stavu (pravděpodobností přechodu ze stavu 2 do stavu 1), pro větší n pak dále indukcí:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbb{R}^n \mathbf{p}(0), \qquad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - r_1 & r_2 \\ r_0 & 0 & 1 - r_2 \\ 1 - r_0 & r_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

2.4 Stacionární režim řetězce

Výše definovaná matice $\mathbb{R}$ je tzv. stochastická matice [12]. Existuje tedy tzv. stacionární vektor $\widetilde{\mathbf{p}}$ řešící vektorovou rovnici:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbb{R}\widetilde{\mathbf{p}}. \tag{2.2}$$

Vektor $\widetilde{\mathbf{p}}$ je tedy vlastním vektorem matice $\mathbb{R}$, odpovídající vlastnímu číslu jedna. Pro speciální třídu řetězců, jejichž matice přechodových pravděpodobností má od určité své mocniny všechny prvky striktně větší než nula (tzv. regulární řetězce), lze dokázat [11] ekvivalenci předchozí rovnice s rovnicí

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{R}^n \mathbf{p}(0), \tag{2.3}$$

kde $\mathbf{p}(0)$ je libovolný vektor popisující počáteční kapitál hráče. Tuto ekvivalenci, která bude v naší práci vždy splněna (budeme se tedy zabývat pouze regulárními řetězci), lze využít při numerickém výpočtu vektoru $\widetilde{\mathbf{p}}$ a (jak uvidíme v dalším paragrafu) k odvození tzv. stacionárního toku pravděpodobnosti.

Hledejme nyní řešení soustavy rovnic 2.2, rozšířené o podmínku normování součtu složek vektoru $\widetilde{p}$ k jedné (což je soustava tří nezávislých rovnic pro tři neznámé, neboť soustava 2.2 obsahuje jen dvě lineárně nezávislé rovnice). Standardním postupem obdržíme:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1-(1-r_2)r_1 \\ 1-(1-r_0)r_2 \\ 1-(1-r_1)r_0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

kde $\Delta = 2 + r_0 r_1 r_2 + (1-r_0)(1-r_1)(1-r_2) > 0$.

Označme $\widetilde{p}_i$ i-tou složku vektoru $\widetilde{\mathbf{p}}$ udávající stacionární pravděpodobnost výskytu řetězce ve stavu $Z(n) = i$, $i \in \{0,1,2\}$. Nyní již můžeme zavést veličinu, jež bude popisovat, zda je hra vyhrávající či prohrávající. Budeme ji nazývat „střední pravděpodobností výhry ve hře $\mathcal{R}$ ve stacionárním režimu“ a značit $v_{\mathcal{R}}$. Jak plyne z jejího názvu bude tato veličina definována jako střední hodnota pravděpodobnosti výhry ve stacionárním režimu, tedy $v_{\mathcal{R}} \equiv r_0\widetilde{p}_0 + r_1\widetilde{p}_1 + r_2\widetilde{p}_2$.

Po dosazení do předchozí rovnice z Rov. 2.4 obdržíme:

$$v_{\mathcal{R}} = \frac{1 + 2r_0r_1r_2 - (1-r_0)(1-r_1)(1-r_2)}{\Delta}. \tag{2.5}$$

Z tohoto vztahu již lze získat analytickou informaci o středním trendu vývoje kapitálu ve hře $\mathcal{R}$ po odeznění přechodových jevů. Hra bude ve

středním smyslu vyhrávající resp. prohrávající, bude-li „pravděpodobnost výhry“ $v_{\mathcal{R}}$ větší resp. menší než $\frac{1}{2}$. Odtud dostáváme následující podmínky pro parametry hry $\mathcal{R}$:

$$\text{Hra je vyhrávající} \iff r_0r_1r_2 > (1-r_0)(1-r_1)(1-r_2), \quad (2.6)$$
$$\text{Hra je prohrávající} \iff r_0r_1r_2 < (1-r_0)(1-r_1)(1-r_2). \quad (2.7)$$

Z předchozího je zřejmé, že hra bude férová ($v_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}$), pokud budou její parametry splňovat vztah $r_0r_1r_2 = (1-r_0)(1-r_1)(1-r_2)$.

Zde je vhodné poznamenat, že výše definovaná veličina $v_{\mathcal{R}}$ by již byla pro naše potřeby (zjištění, zda bude hra $\mathcal{R}$ vyhrávající či prohrávající) dostačující. Tato veličina však nemá příliš dobrý fyzikální význam. Zaměřme se proto nyní na (jak brzy uvidíme) ekvivalentní, avšak fyzikálnější popis třístavového řetězce, příslušného hře $\mathcal{R}$, pomocí tzv. toku pravděpodobnosti mezi jeho jednotlivými stavy.

2.5 Tok pravděpodobnosti

V tomto paragrafu již upustíme od značení veličin pro jednotlivé hry spodním indexem $\mathcal{R}$ atd., přičemž z kontextu bude vždy zřejmé, které hře daná veličina přísluší.

Pravděpodobnosti obsazení jednotlivých stavů náhodné proměnné $\mathbf{Z}(n) = i$ ($i \in \{0,1,2\}$) se mění v závislosti na počtu her n. Můžeme si představit, že pravděpodobnost obsazení stavu $\mathbf{Z}(n+1) = i$ se mění tak, že do něj „teče“ a z něj „vytéká“ pravděpodobnost. Pravděpodobnost obsazení tohoto stavu $p_i(n+1)$ lze potom spočíst jako součet pravděpodobnosti obsazení stavu $\mathbf{Z}(n) = i$ (tj. pravděpodobnosti $p_i(n)$ obsazení daného stavu po předchozí hře) a celkového toku pravděpodobnosti do daného stavu (tedy rozdílu toku pravděpodobnosti do a toku pravděpodobnosti ze stavu $\mathbf{Z}(n) = i$).

Označíme-li tok pravděpodobnosti ze stavu $\mathbf{Z}(n) = i$ do stavu $\mathbf{Z}(n+1) = j$ jako $J_{i\to j}(n)$ ($j = (i+1) \bmod 3$ — definujeme tedy pouze tok do sousedního vyššího stavu, přičemž vzhledem k periodičnosti řetězce užíváme pro indexy toku i a j pravidlo $2+1=0$), můžeme úvahu z předchozího odstavce zapsat následovně:

$$p_i(n+1) = p_i(n) + J_{i-1\to i}(n) - J_{i\to i+1}(n). \quad (2.8)$$

Uvážíme-li platnost vzorce $p_i(n+1) = r_{i-1}p_{i-1}(n) + (1-r_{i+1})p_{i+1}(n)$, který plyne z Rov. 2.1 a definujeme-li vazbu mezi stavy i a j jako pomyslnou spojnici mezi těmito stavy, zjistíme, že tok $J_{i\to j}(n)$, definovaný jako

rozdíl pravděpodobnosti průchodu vazbou v kladném smyslu, a pravděpodobnosti průchodu vazbou v záporném smyslu, kde kladný smysl chápeme jako vyhrávající směr (viz obrázek 2.1), splňuje výše uvedenou rovnici 2.8. Pro tok pravděpodobnosti $J_{i\to j}(n)$ vazbou mezi stavy i a j po n-té hře tak můžeme psát:

$$J_{i\to j}(n) = r_i p_i(n) - (1 - r_j)p_j(n), \qquad j = (i+1) \bmod 3. \tag{2.9}$$

Výše definovaný tok pravděpodobnosti je závislý na pořadovém čísle hry n. Nás však zajímá chování řetězce ve stacionárním režimu (tj. po odeznění přechodových jevů), jinými slovy hodnota toku po dostatečně dlouhé posloupnosti her. Tuto hodnotu nazveme stacionárním tokem pravděpodobnosti.

2.6 Stacionární tok pravděpodobnosti

Stacionární tok pravděpodobnosti mezi stavy i a j, který označíme symbolem $\widetilde{J}_{i\to j}$, tedy odpovídá toku mezi těmito stavy v ustálenému režimu hry po odeznění přechodových jevů a je již nezávislý na pořadovém čísle hry n. Protože pracujeme pouze s regulárními řetězci, můžeme pro něj získat vyjádření provedením limity $n \to \infty$ na výše uvedenou rovnost 2.9:

$$\widetilde{J}_{i\to j} = \lim_{n\to\infty} J_{i\to j}(n) = r_i \lim_{n\to\infty} p_i(n) - (1 - r_j) \lim_{n\to\infty} p_j(n). \tag{2.10}$$

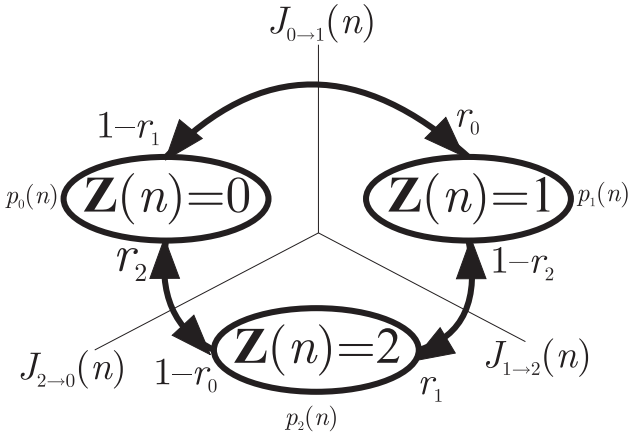
Dosadíme-li do předchozí rovnice ze vzorce 2.3, obdržíme pro stacionární tok pravděpodobnosti vztah:

$$\widetilde{J}_{i\to j} = r_i \widetilde{p}_i - (1 - r_j)\widetilde{p}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3. \tag{2.11}$$

Je intuitivně jasné, že pro stacionární tok pravděpodobnosti musí platit $\widetilde{J}_{0\to 1} = \widetilde{J}_{1\to 2} = \widetilde{J}_{2\to 0}$. V opačném případě by v některé z vazeb docházelo k hromadění pravděpodobnosti, tj. pravděpodobnost nalezení řetězce v daném stavu by se měnila. To se ovšem ve stacionárním stavu neděje. Po dosazení z Rov. 2.4 do Rov. 2.11 opravdu obdržíme[1]:

$$\widetilde{J} = \widetilde{J}_{0\to 1} = \widetilde{J}_{1\to 2} = \widetilde{J}_{2\to 0} = \frac{r_0 r_1 r_2 - (1 - r_0)(1 - r_1)(1 - r_2)}{\Delta}. \tag{2.12}$$

[1]Poněvadž stacionární tok pravděpodobnosti nezávisí na indexech vazby, zavedeme pro něj jednoduché označení $\widetilde{J}$.



Obr. 2.1: Tok pravděpodobnosti vazbou je definován jako rozdíl pravděpodobnosti průchodu vazbou v kladném smyslu (pravděpodobnosti r_i) a v záporném smyslu (pravděpodobnosti $1 - r_i$); $p_i(n)$ jsou pravděpodobnosti, že se řetězec po n hrách nachází ve stavu $\mathbf{Z}(n) = i$, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Zde je vhodné si povšimnout, že pro stacionární tok pravděpodobnosti platí (neboť $\Delta = 2 + r_0r_1r_2 + (1 - r_0)(1 - r_1)(1 - r_2) > 0$):

$$\widetilde{J} \gtreqless 0 \iff r_0r_1r_2 \gtreqless (1 - r_0)(1 - r_1)(1 - r_2), \tag{2.13}$$

což odpovídá relacím 2.6 atd. pro pravděpodobnost výhry ve stacionárním případě v. Porovnáním těchto relací s výše uvedenými zjistíme, že platí:

$$\text{Hra je vyhrávající} \iff \widetilde{J} > 0, \tag{2.14}$$

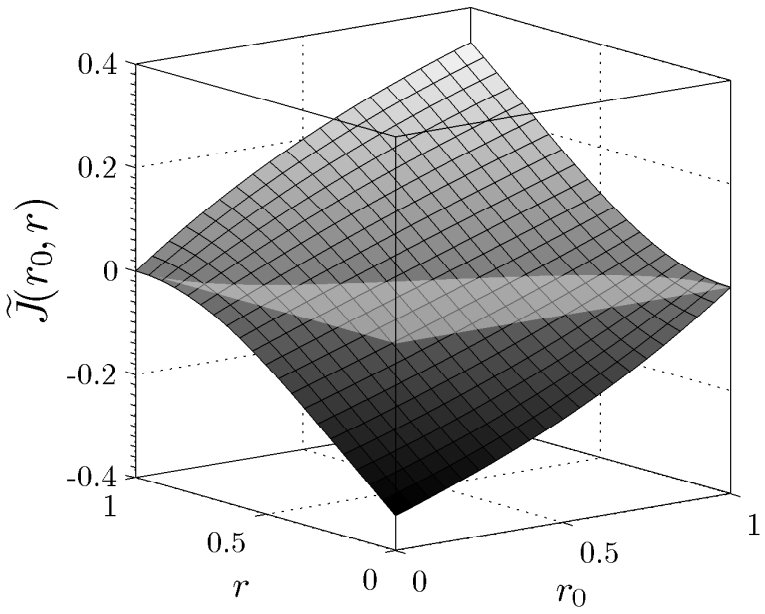
$$\text{Hra je prohrávající} \iff \widetilde{J} < 0, \tag{2.15}$$

$$\text{Hra je férová} \iff \widetilde{J} = 0. \tag{2.16}$$

Přístup z článku 2.4 je tedy v tomto smyslu zcela ekvivalentní přístupu tohoto článku.

Abychom mohli stacionární tok pravděpodobnosti zpracovat graficky, potřebujeme zredukovat počet proměnných, na kterých závisí, na dvě. Volme tedy $r_1 = r_2 = r \Rightarrow \widetilde{J}(r_0, r_1, r_2) = \widetilde{J}(r_0, r)$. Toto zjednodušení odpovídá Parrondovým hrám $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Stacionární tok pravděpodobnosti $\widetilde{J}(r_0, r_1, r_2) = \widetilde{J}(r_0, r)$ je vykreslen na Obr. 2.2.

Tímto je popis matematického aparátu potřebného k analýze hry $\mathcal{R}$, které odpovídá homogenní Markovský řetězec, hotov. V dalších dvou kapitolách se zaměříme na aplikaci tohoto aparátu na konkrétní hry.



Obr. 2.2: Stacionární tok pravděpodobnosti $\widetilde{J}(r_0, r)$. V grafu je dále vykreslena vodorovná rovina. Na průsečnici této roviny s plochou $\widetilde{J}(r_0, r)$ je stacionární tok pravděpodobnosti právě nulový, což odpovídá férové hře. Vyhrávající resp. prohrávající jsou hry, jejichž tok je kladný (leží tedy nad vodorovnou rovinou) resp. záporný (tedy pod vodorovnou rovinou).

Kapitola 3

Pravděpodobnostní střídání her

V této kapitole se budeme věnovat aplikaci výsledků kapitoly předchozí na hru vzniklou pravděpodobnostním střídáním her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, jak je definovaná v článku 1.3.

3.1 Reprezentace her homogenním řetězcem

V článku 1.3 vzniká hra $\mathcal{C}$ pravděpodobnostním střídáním her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. V každém kole je s pravděpodobností γ hrána hra $\mathcal{A}$ a s doplňkovou pravděpodobností $1-\gamma$ hra $\mathcal{B}$. To znamená, že pro vývoj příslušného řetězce dle vztahu 2.1 používáme v každém kole s pravděpodobností γ matici přechodových pravděpodobností hry $\mathcal{A}$ a s pravděpodobností $1-\gamma$ matici přechodových pravděpodobností hry $\mathcal{B}$.

Označíme-li matice přechodových pravděpodobností příslušející hrám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ po řadě $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$, můžeme dle předchozí definice hry $\mathcal{C}$ pro matici přechodových pravděpodobností $\mathbb{C}$ napsat $\mathbb{C} = \gamma\mathbb{A} + (1-\gamma)\mathbb{B}$.

Napišme nyní explicitně matice přechodových pravděpodobností $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$. Jejich tvar získáme jednoduše tak, že v rovnosti 2.1 zaměníme přechodové pravděpodobnosti obecné hry $\mathcal{R}$ za přechodové pravděpodobnosti příslušející hrám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, tedy pro hru $\mathcal{A}$: $r_0 = r_1 = r_2 = a$, pro hru $\mathcal{B}$: $r_0 = b_0,\ r_1 = r_2 = b$, pro hru $\mathcal{C}$: $r_0 = \gamma a + (1-\gamma)b_0 = c_0$, $r_1 = r_2 = \gamma a + (1-\gamma)b = c$. Konečně pišme:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1-b & b \\ b_0 & 0 & 1-b \\ 1-b_0 & b & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{C} = \gamma\mathbb{A} + (1-\gamma)\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1-c & c \\ c_0 & 0 & 1-c \\ 1-c_0 & c & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Z předchozího je zřejmé, že výše uvedené matice přechodových pravděpodobností nezávisí na pořadovém čísle hry n. Příslušné Markovské řetězce jsou tedy homogenní a je možné plně využít analýzu her pomocí stacionárního toku pravděpodobnosti definovaného v předchozí kapitole. Tok pro jednotlivé hry spočteme podobně jako jsme spočetli jejich matice přechodových pravděpodobností (dosadíme za parametry obecné hry $\mathcal{R}$ v rovnosti 2.12 definující tok parametry hry, o jejíž tok se zajímáme).

3.2 Analýza hry $\mathcal{C}$

Dosadíme-li do nerovnic 2.13 parametry her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ a uvážíme-li, že realizace Parrondova paradoxu vyžaduje, aby hry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ byly prohrávající ($\widetilde{J} < 0$) a zároveň hra $\mathcal{C}$ byla vyhrávající ($\widetilde{J} > 0$), obdržíme nerovnosti (v dalším budeme tok příslušející jednotlivým hrám rozlišovat pomocí jeho proměnných, tedy např. tok pro hru $\mathcal{A}$ zapíšeme jako $\widetilde{J}(a)$):

$$\widetilde{J}(a) < 0 \iff a < \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{J}(b_0, b) < 0 \iff b_0 b^2 < (1-b_0)(1-b)^2, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{J}(c_0, c) > 0 \iff c_0 c^2 > (1-c_0)(1-c)^2. \tag{3.6}$$

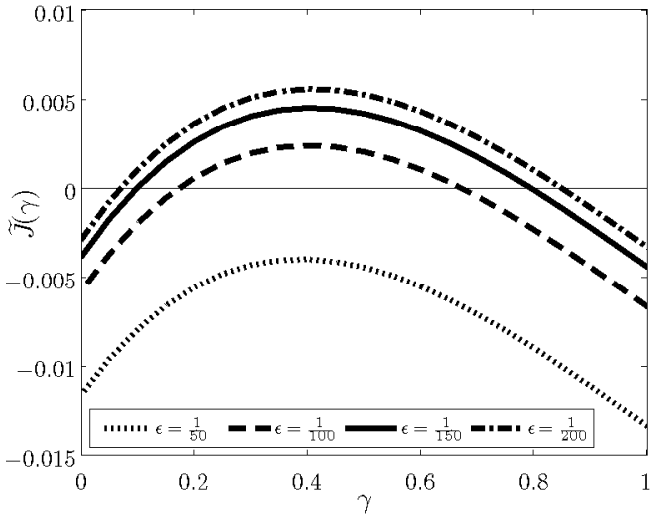
Jak je vidět z následující tabulky, hodnoty parametrů a, b a b_0 z Tab. 1.1 ($\epsilon = \frac{1}{100}$) samozřejmě uvedené nerovnice splňují.

hra	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$
$\widetilde{J}$	-0.007	-0.006	0.002

Tab. 3.1: Pravděpodobnosti z tabulky 1.1 ($\epsilon = \frac{1}{100}$) splňují nerovnosti 3.4 až 3.6, jejichž platnost je nutná k realizaci Parrondova paradoxu. Parametry hry $\mathcal{C}$ jsme spočetli ze vzorce 3.3, kde jsme volili $\gamma = \frac{1}{2}$. Čísla jsou zaokrouhlena na tři desetinná místa.

Mohli bychom ještě uvést explicitní vzorec pro stacionární tok pravděpodobnosti příslušející hře $\mathcal{C}$, tento je však značně dlouhý a nepřehledný. Místo toho si povšimněme závislosti toku na parametru střídání her γ pro přechodové pravděpodobnosti her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ z Tab. 1.1 (pro několik hodnot parametru ϵ), vynesené v následujícím obrázku 3.1. Z grafu je vidět,

že pro příliš velké hodnoty parametru ϵ paradox nenastává. Důležitějším poznatkem však je možnost optimalizace hry $\mathcal{C}$ pomocí vhodného nastavení parametru γ tak, aby tok dosáhl svého maxima, což odpovídá nejrychlejšímu možnému růstu kapitálu pro daný scénář hry (při zvolených parametrech her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$), konkrétně pro hodnoty parametru ϵ z Obr. 3.1 ($\epsilon \in \{\frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{150}, \frac{1}{200}\}$) dostáváme po řadě $\gamma \in \{0.388, 0.402, 0.406, 0.408\}$ (čísla jsou zaokrouhlena na tři desetinná místa).



Obr. 3.1: Stacionární tok pravděpodobnosti $\widetilde{J}$ v závislosti na parametru střídání her γ pro pravděpodobnosti z Tab. 1.1, kde jsme zvolili čtyři různé hodnoty parametru ϵ (pro křivky od shora $\epsilon = \frac{1}{200}, \frac{1}{150}, \frac{1}{100}, \frac{1}{50}$). Z grafů je vidět, že všechny křivky vykazují pro určitou hodnotu parametru γ maximální hodnotu toku, a tedy nerychlejší růst kapitálu pro daný scénář. Rychlost růstu kapitálu pro hru $\mathcal{C}$ lze tedy optimalizovat pomocí parametru γ. Z grafu je také vidět, že pro příliš velké hodnoty parametru ϵ (např. $\epsilon = \frac{1}{50}$) je tok, pro všechny možné hodnoty parametru střídání her, záporný — Parrondův paradox se tedy nerealizuje.

Nyní již přejděme k analýze deterministických scénářů her.

Kapitola 4

Deterministické střídání her

Jak jsme uvedli v článku 1.3 myslíme deterministickým střídáním her scénář, kdy je přesně určeno, která hra se má hrát v určitém kole (např. v každém sudém kole hra $\mathcal{A}$, zatímco v každém lichém hra $\mathcal{B}$). Pravidla hry tedy v tomto případě budou záviset na pořadovém čísle hry n a příslušný Markovský řetězec bude nehomogenní.

Pro naše potřeby bude dostačující zkoumat scénáře, ve kterých se periodicky opakuje určitá sekvence her (např. sekvence $\mathcal{AB}$ — první hrajeme hru $\mathcal{A}$, potom hru $\mathcal{B}$, dále opět $\mathcal{A}$ atd.). Konkrétně prozkoumáme sekvence (periody) her $\mathcal{AB}$, $\mathcal{AAB}$ a $\mathcal{ABB}$. Začněme nejjednodušší z nich, na jejímž případě zavedeme aparát vhodný také k analýze ostatních.

Protože konkrétní vztahy pro níže uvedené veličiny, které samozřejmě závisí na přechodových pravděpodobnostech her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, jsou velice dlouhé a nepřehledné, nebudeme je zde uvádět a spokojíme se s uvedením vzorců, ze kterých se dají „snadno“ spočíst (například v některém z programů pro symbolické výpočty — v našem případě „Mathematica 4.1“).

4.1 Hra $\mathcal{AB}$

Stejně jako v předchozí kapitole se budeme věnovat zkoumání hry po dostatečném počtu kol, tedy po odeznění přechodových jevů. Odtud je zřejmé, že významnou roli v analýze hry $\mathcal{AB}$ bude hrát matice $\mathbb{BA}$ (je to matice, popisující vývoj řetězce příslušného náhodné proměnné $\mathbf{Z}$ po dvou kolech hry — nejprve hrajeme hru $\mathcal{A}$, tj. v rovnici 2.1 dosazujeme za matici $\mathbb{R}$ její matici přechodových pravděpodobností, po té hrajeme hru $\mathcal{B}$ a postupujeme stejně).

Matice $\mathbb{BA}$ je součinem dvou regulárních stochastických matic, odkud je zřejmé, že je sama regulární stochastickou maticí. Podle článku 2.4 tedy

existuje „stacionární“ vektor, který označíme $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}$, splňující rovnice ($\mathbf{p}(0)$ opět značí vektor popisující libovolný počáteční stav řetězce):

$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \mathbb{B}\mathbb{A}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{B}\mathbb{A})^n\mathbf{p}(0). \tag{4.2}$$

Vektor $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}$ je tedy „stacionárním“ vektorem po sudém počtu her. Aplikujeme-li na něj matici $\mathbb{A}$ (pokračujeme-li ve hře dalším kolem), získáme „stacionární“ vektor po lichém počtu her, který označíme $\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)}$. Zapišme ještě jeho definici matematicky:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)} = \mathbb{A}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}. \tag{4.3}$$

Je dobré povšimnout si faktu, že aplikací matice $\mathbb{B}$ na předchozí vektor (pokračování ve hře dalším kolem) získáme vektor $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}$ atd. Třístavový Markovský řetězec příslušející hře $\mathbb{B}\mathbb{A}$ tedy po odeznění přechodových jevů nenabývá žádného stacionárního stavu. Existují však dva stavy $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}$ (sudá n) a $\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)}$ (lichá n), které budeme nazývat asymptotickými stavy po lichém resp. sudém počtu kol, mezi nimiž tento řetězec osciluje. Povšimněme si, že horní index výše uvedených stavových vektorů je roven zbytku po dělení pořadového čísla hry n délkou zkoumané sekvence her (tedy dvěma). Zdůrazněme ještě, že matice přechodových pravděpodobností řetězce po sudém resp. lichém počtu kol je maticí hry $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$ (neb v lichém kole se hraje hra $\mathcal{A}$ a v sudém hra $\mathcal{B}$).

Označme nyní toky pravděpodobnosti v těchto stavech řetězce $\widetilde{J}^{(0)}$ (sudá n) a $\widetilde{J}^{(1)}$ (lichá n) a ve shodě s předchozím je nazvěme asymptotickými toky po lichém resp. sudém počtu kol. Na rozdíl od stacionárního toku definovaného v článku 2.6 budou tyto toky obecně záviset na indexech vazby, neboť pravděpodobnost obsazení jednotlivých asymptotických stavů obecně závisí na pořadovém čísle hry n. Označíme-li $\widetilde{p}_j^{(i)}$ ($j \in \{0,1,2\}$) složky vektorů $\widetilde{\mathbf{p}}^{(i)}$ ($i \in \{0,1\}$), můžeme, podobně jako ve vztahu 2.11, pro asymptotické toky psát:

$$\widetilde{J}^{(0)}_{i\to j} = a\widetilde{p}_i^{(0)} - (1-a)\widetilde{p}_j^{(0)}, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{J}^{(1)}_{i\to j} = b_i\widetilde{p}_i^{(1)} - (1-b_j)\widetilde{p}_j^{(1)}, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.5}$$

kde a a b_j ($j \in \{0,1,2\}$) jsou přechodové pravděpodobnosti her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, platí tedy $b_j = b$ ($j \in \{1,2\}$).

Protože právě zavedené asymptotické toky závisí na indexech vazby (tedy např. tok ze stavu 1 do stavu 2 může být kladný, zatímco tok ze stavu 2 do stavu 3 záporný atd.), nelze z nich přímo usoudit, zda bude

hra v daném kole (toky po lichém počtu kol se mohou lišit od toků po sudém počtu kol) vyhrávající či prohrávající. Z tohoto důvodu zaveďme tzv. integrované toky $\widetilde{J}^{(i)}$ ($i \in \{0,1\}$), které jsou definovány jako součet příslušných asymptotických toků přes všechny vazby. Je jasné, že tato veličina bude kladná, pokud bude v příslušném čase kladný průměrný tok a tedy pokud bude hra v tomto čase vyhrávající. Zapišme nyní výše uvedenou definici:

$$\widetilde{J}^{(0)} = \widetilde{J}^{(0)}_{0\to1} + \widetilde{J}^{(0)}_{1\to2} + \widetilde{J}^{(0)}_{2\to0}, \tag{4.6}$$

$$\widetilde{J}^{(1)} = \widetilde{J}^{(1)}_{0\to1} + \widetilde{J}^{(1)}_{1\to2} + \widetilde{J}^{(1)}_{2\to0}. \tag{4.7}$$

Konečně hra bude celkově po velkém počtu kol vyhrávající resp. prohrávající, bude-li průměrná hodnota toku přes jednu periodu (sekvenci her) větší resp. menší než nula. Označme proto střední hodnotu integrovaných toků přes jednu periodu $\widetilde{I}$ a pišme:

$$\widetilde{I} = \frac{1}{2}(\widetilde{J}^{(0)} + \widetilde{J}^{(1)}). \tag{4.8}$$

Výše popsaná analýza byla provedena pro sekvenci her $\mathcal{AB}$. Lze však jednoduše nahlédnout, že stejné výsledky obdržíme při analýze hry $\mathcal{BA}$ (stačí v rovnici 4.2 místo počátečního stavu popsaného vektorem $\mathbf{p}(0)$ uvažovat počáteční stav popsaný vektorem $\mathbb{A}\mathbf{p}(0)$ a brát jako počáteční hru v sekvenci hru $\mathcal{B}$ — takto lze „zapomenout“ libovolný konečný počet her). Obecně pokud budeme analogicky zkoumat delší sekvence her (analýza bude naprosto stejná, jen obdržíme více obecně různých asymptotických toků pravděpodobnosti atd.), získáme stejné výsledky pro ty sekvence her, které mohou vzniknout cyklickou záměnou pořadí her v dané sekvenci. Prozkoumáme-li tedy např. sekvenci her $\mathcal{AAB}$, budeme mít prozkoumány i sekvence $\mathcal{BAA}$ a $\mathcal{ABA}$.

Poznamenejme na tomto místě, že stejnou analýzu je možno provést pro hru $\mathcal{C}$ vzniklou pravděpodobnostním střídání her. Pro ni jsou ovšem asymptotické toky všemi vazbami a v každém kole stejné, platí tedy $\widetilde{J}^{(0)} = \widetilde{J}^{(1)} = 3\widetilde{J}$, $\widetilde{I} = 3\widetilde{J}$, kde $\widetilde{J}$ bylo zavedeno v Rov. 2.12 (v níž je samozřejmě, stejně jako v článku 3.1, nutno za přechodové pravděpodobnosti hry $\mathcal{R}$ dosadit přechodové pravděpodobnosti hry $\mathcal{C}$). Tyto vztahy využijeme později pro srovnání her vzniklých pravděpodobnostním a deterministickým střídáním.

Aplikujme nyní výše zavedenou analýzu na další slíbené sekvence her.

4.2 Hry $\mathcal{AAB}$ a $\mathcal{BBA}$

Stejnou roli, jako hrála při analýze hry $\mathcal{AB}$ matice $\mathbb{BA}$, bude zřejmě hrát při analýze této hry matice $\mathbb{BAA}$. Ta bude opět regulární stochastickou maticí. Zcela analogicky jako výše můžeme zavést asymptotické vektory (nyní již budou tři — horní index označuje zbytek po dělení pořadového čísla hry n délkou zkoumané sekvence, tedy třemi). Zapišme nyní rovnice pro asymptotické vektory:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \mathbb{BAA}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}, \tag{4.9}$$
$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)} = \mathbb{A}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}, \tag{4.10}$$
$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(2)} = \mathbb{A}\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)}. \tag{4.11}$$

Samozřejmě opět platí vztah $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{BAA})^n\mathbf{p}(0)$, kde $\mathbf{p}(0)$ je opět libovolný vektor popisující počáteční stav řetězce. Podobně jako v rovnicích 4.4 a 4.5 definujme asymptotické toky v jednotlivých asymptotických stavech:

$$\widetilde{J}^{(0)}_{i\to j} = a\widetilde{p}^{(0)}_i - (1-a)\widetilde{p}^{(0)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.12}$$
$$\widetilde{J}^{(1)}_{i\to j} = a\widetilde{p}^{(1)}_i - (1-a)\widetilde{p}^{(1)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.13}$$
$$\widetilde{J}^{(2)}_{i\to j} = b_i\widetilde{p}^{(2)}_i - (1-b_j)\widetilde{p}^{(2)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.14}$$

kde a a b_j ($j \in \{0,1,2\}$) jsou přechodové pravděpodobnosti her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, platí tedy $b_j = b$ ($j \in \{1,2\}$).

Dále zapišme integrované toky $\widetilde{J}^{(i)}$, $i \in \{0,1,2\}$:

$$\widetilde{J}^{(0)} = \widetilde{J}^{(0)}_{0\to1} + \widetilde{J}^{(0)}_{1\to2} + \widetilde{J}^{(0)}_{2\to0}, \tag{4.15}$$
$$\widetilde{J}^{(1)} = \widetilde{J}^{(1)}_{0\to1} + \widetilde{J}^{(1)}_{1\to2} + \widetilde{J}^{(1)}_{2\to0}, \tag{4.16}$$
$$\widetilde{J}^{(2)} = \widetilde{J}^{(2)}_{0\to1} + \widetilde{J}^{(2)}_{1\to2} + \widetilde{J}^{(2)}_{2\to0}, \tag{4.17}$$

a konečně průměrnou hodnotu toku přes jednu periodu $\widetilde{I}$:

$$\widetilde{I} = \frac{1}{3}(\widetilde{J}^{(0)} + \widetilde{J}^{(1)} + \widetilde{J}^{(2)}). \tag{4.18}$$

Podobně jako výše bude hra vzniklá deterministickým střídáním sekvence her $\mathcal{AAB}$ (a dle výše uvedeného i sekvencí $\mathcal{BAA}$ a $\mathcal{ABA}$) vyhrávající, bude-li tato veličina kladná.

Nyní bychom měli zopakovat výše uvedený postup pro hru $\mathcal{BBA}$. Protože je však téměř stejný, zopakujeme ho jen velice stručně (v podstatě provedeme ve výše uvedených rovnicích záměny $a \leftrightarrow b$ a $\mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{B}$).

Důležitou maticí při analýze hry $\mathcal{BBA}$ je regulární stochastická matice $\mathbb{ABB}$. Zapišme rovnice pro asymptotické vektory (opět platí také vztah $\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{ABB})^n\mathbf{p}(0)$, kde $\mathbf{p}(0)$ je znovu libovolný vektor popisující počáteční stav řetězce):

$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \mathbb{ABB}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}, \tag{4.19}$$
$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)} = \mathbb{B}\widetilde{\mathbf{p}}^{(0)}, \tag{4.20}$$
$$\widetilde{\mathbf{p}}^{(2)} = \mathbb{B}\widetilde{\mathbf{p}}^{(1)}. \tag{4.21}$$

Dále zapišme vzorce pro asymptotické toky v jednotlivých asymptotických stavech:

$$\widetilde{J}^{(0)}_{i\to j} = b_i\widetilde{p}^{(0)}_i - (1-b_i)\widetilde{p}^{(0)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.22}$$
$$\widetilde{J}^{(1)}_{i\to j} = b_i\widetilde{p}^{(1)}_i - (1-b_j)\widetilde{p}^{(1)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.23}$$
$$\widetilde{J}^{(2)}_{i\to j} = a\widetilde{p}^{(2)}_i - (1-a)\widetilde{p}^{(2)}_j, \qquad j = (i+1) \bmod 3, \tag{4.24}$$

kde a a b_j ($j \in \{0,1,2\}$) jsou přechodové pravděpodobnosti her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Jako vždy tedy platí $b_j = b$ ($j \in \{1,2\}$).

Vzorce pro integrované toky $\widetilde{J}^{(i)}$, $i \in \{0,1,2\}$ a pro průměrnou hodnotu toku přes jednu periodu $\widetilde{I}$ již uvádět nebudeme, neboť jsou naprosto shodné se vzorci 4.15 až 4.18. Znovu podotkněme, že hra $\mathcal{BBA}$ (stejně jako hry $\mathcal{ABB}$ a $\mathcal{BAB}$) bude vyhrávající, bude-li příslušný tok $\widetilde{I}$ kladný.

Tímto jsme tedy provedli analýzu všech sekvencí délky dva a tři. Uveďme ještě, že analogickou veličinou výše definované veličině $\widetilde{I}$ pro pravděpodobnostní střídání her je opět $\widetilde{I} = 3\widetilde{J}$, kde $\widetilde{J}$ bylo zavedeno v Rov. 2.12 (v níž je samozřejmě, stejně jako v článku 3.1, nutno za přechodové pravděpodobnosti hry $\mathcal{R}$ dosadit přechodové pravděpodobnosti hry $\mathcal{C}$).

Pokusme se nyní pomocí těchto vztahů porovnat deterministické a pravděpodobnostní střídání her.

Kapitola 5

Diskuze a závěr

5.1 Diskuze výsledků

Jak víme z článku 3.2, Parrondův paradox nastává, pokud pro parametry her $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$ platí nerovnosti 3.4 resp. 3.5 (hry jsou prohrávající), zatímco jejich kombinace je vyhrávají (což je dle předchozí analýzy ekvivalentní tvrzení, že příslušný tok $\widetilde{I}$ je kladný).

Naším cílem nyní bude ukázat, že existují parametry her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, pro které se paradox při jistém deterministickém střídání her realizuje, zatímco u hry vzniklé paravděpodobnostním střídáním her nenastává.

Vzhledem k již předeslané složitosti vztahů 4.8 a 4.18, pokud je vyjádříme v parametrech her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, je obtížné řešit tento problém analyticky. Použili jsme proto metodu „hrubé síly“, kdy jsme pomocí počítače zkoumali znaménka toku pravděpodobnosti příslušného hře $\mathcal{C}$ $\widetilde{I} = 3\widetilde{J}$ a toku pravděpodobnosti příslušného deterministickému střídání her (neboť dle předchozího jsou tyto dvě veličiny ekvivalentní), pro parametry hry $\mathcal{A}$ splňující Nerov. 3.4 a parametry hry $\mathcal{B}$ splňující Nerov. 3.5.

Zde je ještě nutné podotknout, že parametr střídání her γ, který určuje zastoupení jednotlivých her ve hře $\mathcal{C}$ (připomeňme, že pro matici přechodových pravděpodobností hry $\mathcal{C}$ platí vztah 3.3), jsme volili tak, aby odpovídal procentuálnímu zastoupení her v základní sekvenci porovnávané deterministicky utvořené hry (tedy při srovnávání směsi her se hrou $\mathcal{AB}$ jsme volili $\gamma = 1/2$, při srovnávání se hrou $\mathcal{AAB}$ $\gamma = 2/3$ atd.).

Výše popsanou analýzou jsme zjistili, že pro hru $\mathcal{AB}$ (tedy i pro hru $\mathcal{BA}$) se paradox nerealizuje pro žádnou kombinaci parametrů a, b_0 a b, zatímco u pravděpodobnostního střdání her s parametrem $\gamma = 1/2$ paradox nastává.

Tento výsledek je poměrně intuitivní. Paradox se totiž realizuje v důsledku nesymetričnosti pravidel hry $\mathcal{B}$ (ve stavech, kdy kapitál není dělitelný třemi, je pravděpodobnost výhry větší než 1/2, těchto stavů je 2× více než stavů, kdy kapitál dělitelný třemi je a pravděpodobnost výhry je menší než 1/2). Hra $\mathcal{A}$, ve které je pravděpodobnost výhry jen o málo menší než 1/2, způsobí, že se kapitál s téměř stejnou pravděpodobností zvýší i sníží. Pokud tedy hraji hru $\mathcal{A}$ a můj kapitál je dělitelný třemi, potom, pokud prohraji, hraji hru $\mathcal{B}$ a s velkou pravděpodobností vyhraji. Následně hraji opět hru $\mathcal{A}$ a pokud vyhraji, následují dva stavy (ve vyhrávajícím směru), kdy je velká pravděpodobnost výhry. Pokud by se teď hrála 2× hra $\mathcal{B}$, pravděpodobně by se můj kapitál zvýšil o dvě. Protože se však hraje jen jednou, následuje hra $\mathcal{A}$. Střídáním sekvence her délky dva se tedy paradox nerealizuje, protože se málo využívá „vyhrávající části hry“ $\mathcal{B}$. Odtud je také vidět, že pomocí hry $\mathcal{A}$ se překonává „silně prohrávající část“ hry $\mathcal{B}$ ve stavech, kdy je kapitál dělitelný třemi.

Dále jsme zjistili, že realizuje-li se paradox pro hru $\mathcal{AAB}$, realizuje se i pro hru $\mathcal{C}$ s parametrem $\gamma = 2/3$, přičemž u pravděpodobnostního střídání her paradox nastává pro větší množinu parametrů a, b_0 a b.

Konečně realizuje-li se paradox u pravděpodobnostního střídání her s parametrem $\gamma = 1/3$, realizuje se i u hry $\mathcal{BBA}$, přičemž pro hru $\mathcal{BBA}$ nastává pro obsáhlejší množinu parametrů a, b_0 a b. Pro tento jev existuje jednoduché intuitivní vysvětlení. Jak plyne z popisu výše, sekvence her $\mathcal{BBA}$ je pro realizaci paradoxu velmi výhodná. Ve hře $\mathcal{C}$ se však zároveň s touto výhodnou sekvencí objevují i jiné, méně výhodné, sekvence. Je tedy pravděpodobné, že existují nějaké „hraniční“ parametry, pro které se paradox ještě realizuje u výhodného scénáře $\mathcal{BBA}$, přičemž u odpovídajícího pravděpodobnostního scénáře her, který obsahuje „méně“ sekvencí tipu $\mathcal{BBA}$, paradox nenastává. Zdůrazněme ještě, že realizuje-li se paradox u scénáře $\mathcal{BBA}$ i u pravděpodobnostního scénáře, je růst kapitálu při deterministickém střídání her *vždy* rychlejší. Budeme-li tedy chtít optimalizovat scénář hry pro maximální rychlost růstu kapitálu, je vhodné hledat nejvýhodnější deterministickou sekvenci her. Fyzikálním důsledkem je možnost optimalizace výkonnosti Brownových motorů (rychlosti transferu částic), popsaných v článku 1.1 nalezením vhodného *deterministického* scénáře přepínání asymetrického potenciálu (viz Obr. 1.1).

Na obrázku 5.1, uvedeném níže, jsme zobrazili množinu parametrů her, pro které nastává paradox jen u hry vzniklé deterministickým střídáním. Některé konkrétní parametry, reflektující výše popsanou situaci, jsou také uvedeny v následující tabulce 5.1.

Konečně na obrázku 5.2 je zobrazen výsledek Monte Carlo simulace

a	b_0	b	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{BBA}$
0.25	0.02	0.87	-0.500	-0.002	-0.084	0.008
0.40	0.09	0.76	-0.200	-0.001	-0.035	0.009
0.49	0.18	0.67	-0.020	-0.012	-0.005	0.011

TAB. 5.1: Některé z parametrů, pro něž paradox u pravděpodobnostního střídání her s parametrem $\gamma = 1/3$ nenastává (hra $\mathcal{C}$), přičemž pro hru $\mathcal{BBA}$ nastává. Pod značkami her jsou vyneseny konkrétní hodnoty toku $\widetilde{I}$ zaokrouhlené na tři desetinná místa.

her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ a $\mathcal{BBA}$ pro pravděpodobnosti z posledního řádku předchozí tabulky. Tato simulace potvrzuje výše popsané závěry.

5.2 Závěr

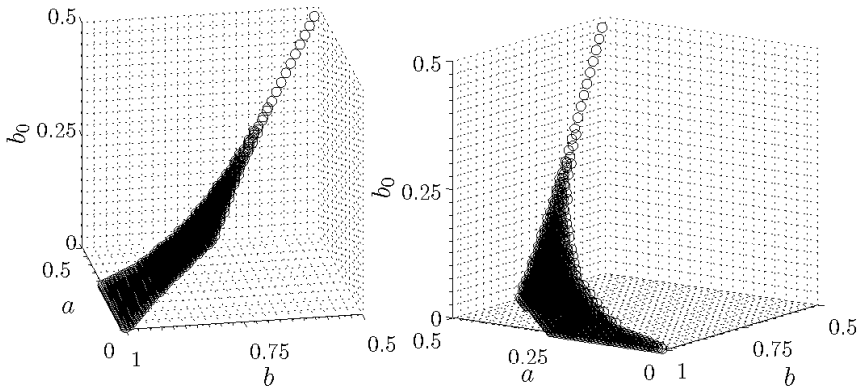
Pomocí standardního matematického aparátu jsme popsali hru vzniklou pravděpodobnostním střídáním her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Dále jsme tento aparát rozšířili i na jednoduché hry vzniklé deterministickým střídáním jisté konkrétní sekvence her. Tím jsme získali analytický nástroj k porovnání obou tipů scénářů.

Využitím tohoto nástroje jsme zjistili, že oba přístupy nejsou ekvivalentní (tedy realizuje-li se paradox u hry vzniklé deterministicky, nemusí se ještě realizovat u příslušného pravděpodobnostního scénáře a naopak). Dále jsme zjistili, že nejlepší optimalizace scénáře vzhledem k rychlosti růstu kapitálu dosáhneme nalezením vhodné deterministické sekvence her.

Fyzikálně, v řeči Brownových motorů, jsou získané výsledky následující (fráze „motor funguje“ znamená, že dochází k transportu částic bez působení makroskopické síly ve směru jejich pohybu viz OBR. 1.1 — dochází tedy k realizaci paradoxu):

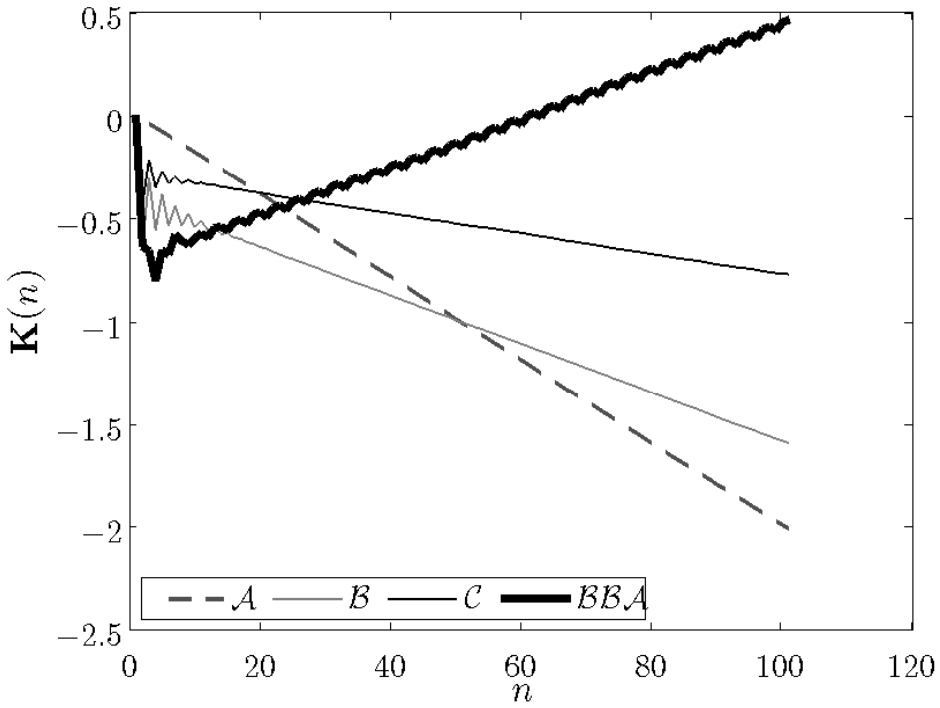
1. Funguje-li motor pro nějaké hodnoty parametrů systému (velikost difuze, odporové síly a tvar asymetrického potenciálu) při deterministickém scénáři přepínání potenciálu, nemusí ještě fungovat při náhodném (pravděpodobnostním) přepínání potenciálu a naopak.

2. Výkonnost motoru (rychlost posunu částic, počet přenesených částic v čase atd.) lze nejlépe optimalizovat nalezením vhodného *deterministického* scénáře přepínání potenciálu.



Obr. 5.1: Oblast parametrů, pro které se Parrondův paradox pro pravděpodobnostní střídání her s parametrem $\gamma = 1/3$ nerealizuje, zatímco pro hru vzniklou deterministickým střídáním her o základní sekvenci $\mathcal{BBA}$, ano. Pravý i levý obrázek zobrazují stejnou množinu bodů, pouze jsou vůči sobě trochu pootočeny, aby byl lépe vidět její tvar. Obrázek jsme získali následovně: Pomocí počítače jsme vygenerovali množinu bodů o souřadnících $[a, b, b_0]$, pro které platí výše uvedená podmínka. Na získané souřadnice jsme následně do grafu vynesli značky $\bigcirc$. Je třeba si uvědomit, že získaný objekt zakreslený v grafu je trojrozměrný a v principu bychom byli schopni napsat nerovnice, podobné nerovnicím 3.4 a 3.5, kterými by byl plně definován. Tyto však jsou, na rozdíl od výše zmíněných, velice složité a nepřehledné.

Pokud je nám známo, tento výsledek ještě nebyl v odborné literatuře publikován.



Obr. 5.2: Simulace Parrondových her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (označuje hru vzniklou pravděpodobnostním střídáním her) a $\mathcal{BBA}$ (označuje hru vzniklou deterministickým střídání her o základní sekvenci $\mathcal{BBA}$), pro parametry her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ z posledního řádku předchozí tabulky 5.1 (tedy $a = 0,49$, $b_0 = 0,18$ a $b = 0,67$). Parametr střídání her γ jsme volili roven $1/3$, což odpovídá procentuelnímu zastoupení hry $\mathcal{A}$ ve hře $\mathcal{BBA}$. Z grafu je vidět, že pro tyto parametry jsou hry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ prohrávající, zatímco hra $\mathcal{BBA}$ je vyhrávající. Parrondův paradox se tedy u pravděpodobnostního střídání her pro tyto parametry nerealizuje, zatímco pro „ekvivalentní“ (se stejným procentuelním zastoupením her $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ ve scénáři) hru vzniklou deterministickým střídáním her ano. Křivky vynesené v grafu byly středovány přes 10^6 realizací her.

Literatura

[1] Parrondo J. M. R., de Cisneros B. J.: *Energetics of Brownian Motors: A Review*, Appl. Phys. A **75**, 2002, strana 179–191.

[2] Reimann P.: *Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium*, Physics Reports **361**, 2002.

[3] Risken H.: *The Fokker–Planck Equation*, Springer, 1989.

[4] Magnasco M. O.: *Forced Thermal Ratchets* , Phys. Lett. **71**, 1993, strany 1477–1481.

[5] Parrondo J. M. R.: *Reversible Ratchets as Brownian Particles in an Adiabatically Changing Periodic Potential*, Phys. Rev. E **57**, 1998, strany 7297–7300.

[6] Alberts B., Bray D., Lewis J., Raff M., Roberts K. and Watson J.D.: *Molecular Biology of The Cell*, Garland Publishing Inc., New York, 1994, kapitoly 11 a 14.

[7] Astumian R. D.: *Making Molekuls into Motors*, Scientific American, July 2001, strany 57–64.

[8] Cooper G.M.: *The Cell: A Molecular Approach*, Sinauer, Sunderland, Massachussets, 1997, kapitola 11.

[9] Harmer G. P., Abbott D.: *A Review of Parrondo's Paradox*, Fluctuation and Noise Letters Vol. 2, No. 2, 2002, strany 71–107.

[10] Lee Y., Allison A., Abbott D., Stanley H. E.: *Minimal Brownian Ratchet: An Exactly Solvable Model*, Phys. Rev. Lett. **91**, 2003, strany 220601–220604.

[11] Feller W.: *An Itroduction to Probability Theory and its Applications Vol.1*, Wiley, New York, 1970, kapitoly 15 a 16.

[12] Motl L., Zahradník M.: *Pěstujeme Lineární Algebru*, Karolinum, Praha, 2003, kapitola 14.