Posudek oponenta na diplomovou práci
Autorka: Mária Wolfová
Název práce: *Kombinatorické úlohy o permutacích*

Předkládaná diplomová práce se zabývá využitím permutací (a poznatků o nich) v roztodivných kombinatorických úlohách. Práce je rozdělena do dvou částí: V první části je srozumitelně vyložen nezbytný teoretický základ o permutacích (včetně důkazů většiny uvedených tvrzení). Druhá polovina diplomové práce je v podstatě sbírkou kombinatorických úloh, které spojuje snadná možnost překladu do řeči teorie permutací. Obě části jsou napsány srozumitelně a vcelku čtivě a jsou spolu přirozeným způsobem propojeny: v teoretické části jsou uvedeny právě všechny poznatky nutné k řešení úloh v části „praktické“; teorie je přitom organicky vybudována až do potřebné hloubky. Složitost probírané látky je až na výjimky nízká, uvedené poznatky však na sebe často navazují a vymyslet celou jejich posloupnost ad hoc by mohlo být obtížné i pro zkušeného matematika; v podání autorky se však věc zdá jednoduchá a jasná. Autorka v úvodu píše, že některé uvedené úlohy jsou nově vymyšlené pro tuto práci. Mohu konstatovat, že všechny tyto úlohy jsou zajímavé a originální. Musím ovšem také poznamenat, že by mě nepřekvapilo, kdyby úlohy na tytéž jevy už v literatuře existovaly jen s trochu odlišným „maskováním“. Po formální stránce k práci nemám výhrady.

Následuje seznam některých nedostatků, které jsem našel, a připomínek, které mě napadly. Neuvádím vyložené drobnosti, překlepy apod.

- Je trochu smutné, že Definice 1.1.1 je špatně. Má být definována bijekce f mezi množinami A a B, z takto formulované definice nicméně neplyne, že f je zobrazení definované na celé množině A. (Tím pádem A by mohla mít více prvků než B.) Problém je v tom, že f je popsáno jako zobrazení *z množiny A do množiny B*, což znamená pouze to, že definiční obor f je podmnožina A a obor hodnot f je podmnožina B.

- Věta 1.1.2 je velice zvláštní. Obvyklá *definice* toho, že „množiny A a B mají stejný počet prvků“ je, že mezi nimi existuje bijekce; je tedy nesmysl to formulovat jako větu.

  Zde je ovšem nejasné, co přesně se myslí „počtem prvků“; může to být interpretováno také jako samostatný pojem, znamenající existenci bijekce mezi množinou a jistým kardinálem (v této práci typicky přirozeným číslem). Pokud definuji oba tyto pojmy, tedy *mohutnost množiny* a *relaci míti stejnou mohutnost*, pak je ovšem obsahem Věty 1.1.2 tvrzení, že tyto dvě definice jsou konzistentní, což zde vlastně neznamená nic jiného, než že složení dvou bijekcí je opět bijekce; tento fakt je však zmíněn níže v textu jako jasná věc. V tomto smyslu je tedy přístup k „mohutnosti“ nekonzistentní.

- Dole na str. 3 se tvrdí, že složení dvou permutací je permutace. To není obecně pravda.

- Str. 6, druhý bod: Kolik permutací má pevný bod? Odpověď zní, že je jich nekonečně mnoho.

- Str. 6 poznámka pod čarou: tato záležitost měla být jednoznačně vysvětlena už na straně tři.

- Věta 1.3.7: neškodilo by poznamenat, že $0! = 1$; je to ovšem standardní.

- Definice 1.4.1: Vzhledem k tomu, že ve dvojici nezáleží na pořadí (tj. (a_i, a_j) nese pro potřeby této definice tutéž informaci jako (a_j, a_i)), bylo by vhodnější značit inverzi složenými závorkami, tj. $\{a_i, a_j\}$. Důvodem je mj. i kolize se značením transpozice.

- Věta 1.4.6 nedává smysl pro obecnou množinu M, nýbrž pouze pro M tvaru $\{1, \ldots, n\}$. Nechápu tedy, proč se zde najednou hovoří o abstraktní množině M místo tolikrát výše uvedené $\{1, \ldots, n\}$.

- Definice 1.5.4 a zejména důkaz Věty 1.5.5: Kolize značení, kde n značí jak maximum nosné množiny permutace tak délku jednoho z cyklů.

- Čtvereček značící konec důkazu na samostatném řádku působí neesteticky. Pokud to lze, měl by být na stejném řádku jako poslední slovo nebo znak důkazu (včetně vysazené rovnice).

- Věta 1.6.1 by se asi měla v textu dovysvětlit, aby bylo naprosto jasné, že kromě závorek vynecháváme taky čárky. Čtenář si to sice domyslí, ale když už se uchylujeme k takto zvláštním způsobům formulace věty, je dobré se vyjadřovat přesně. Ona zvláštnost spočívá v tom, že v práci uvedená definice základní bijekce vlastně není definice, protože hovoří nikoliv o objektech samotných, nýbrž o jejich zápisu; jedná se tedy spíše o *metadefinici*. Protože se pohybujeme ve světě konečných čísel a množin, nikomu to vadit nebude a tato „metadefinice“ se snadno upřesní.

- Odstavec pod Definicí 1.7.3: Bylo by vhodné vysvětlit, že „úsek, ve kterém permutace roste“ může mít i délku 1 (tj. obsahovat pouze jedno číslo) – podobně, jako se obvykle upřesňuje, že třeba $[0, 0]$ je (tzv. degenerovaný) interval.

- Definice 1.8.1. Slovo „dodefinováváme“ bychom patrně ve slovníku nenašli. Proč nenapsat prostě „definujeme“? Níže se mi také příliš nezamlouvají slovíčka „dvojcyklus“ a „trojcyklus“. Je sice pravda, že je jasné, co se tím myslí, ale ideální stav je, když text bez újmy na srozumitelnosti využívá pouze existující (nebo dříve definovaná) slova – obvykle toho dosáhnout lze.

- Str. 26, ř. 2: „stačí si všimnout“ – mám dojem, že toto by stálo za stručné vysvětlení.

- Str. 27, poznámka pod čarou: Definice disjunktního rozkladu je chybná; správně má být, že každé dvě množiny z onoho rozkladu mají prázdný průnik.

- Str. 38, ř. 9: má být „ohlížely“ místo „ohlíželi“. V práci jsem jinou hrubou pravopisnou chybu nenašel, jen občas někde chybí čárka.

- Str. 39: Výsledek $P = \frac{1}{2}$ je celkem překvapivý, a možná by si tedy zasloužil nějaký komentář. Ta pravděpodobnost je stejná pro všechny pasažéry, je tedy úplně jedno, že Adam nastoupil jako první.

- Příklad 2.6.1: Za explicitní zmínku stojí, že zde připouštíme i možnost $k = 0$.
- První věta řešení Příkladu 2.7.1 je podle mě velmi zvláštně formulovaná. Bylo by lépe prostě konstatovat, že ty dva pojmy chápeme jako totožné – a že ostatně značení **E** pochází z anglického slova „expectation“.
- Str. 43, ř. 3: Věta by neměla začínat matematickým symbolem, pokud je možné se tomu vyhnout vhodnou reformulací (což lze vždy).
- Str. 45, komentář k obrázku: Zde by se mělo upřesnit, v jakém pořadí permutaci a transpozici skládáme (výsledky se můžou lišit).
- Str. 48: Myslím si, že Futurama Theorem si zaslouží vlastní číslovanou větu mnohem víc než Věta 1.1.1.
- Str. 49: Trvalo mi docela dlouho, než jsem si ujasnil, co přesně se myslí zápisem $\sigma = (x, k) \dots (x, 2)(y, 1)(y, k)(x, 1)$. Až dosud totiž v práci používáme takové značení zejména (nehledal jsem výjimky) pro standardní zápis permutace pomocí nezávislých cyklů. Zde cykly nezávislé nejsou, a bylo by tedy vhodné se o značení zmínit, aby čtenář (jako já) netápal. Zejména je potřeba zdůraznit, že zde najednou záleží na pořadí, protože cykly nejsou nezávislé.
- Str. 49, Pozorování 2: Dá se dokázat daleko jednodušeji s použitím Pozorování 1 a V 1.5.5. Jde nám o důkaz první rovnosti na str. 50; dokážeme-li ji, jsme spokojeni, a to bez ohledu na to, že v tomto jednodušším důkazu použijeme transpozici (x, y) (které je při aplikaci na situaci ve Futuramě potřeba se vyhýbat, protože oba basketbalisty smíme přímo prohodit pouze jednou); rovnost platí, jak je vidět níže:

$$\sigma \circ \pi_2^* = (\sigma \circ (x, y) \circ \pi_1^* =)\ \sigma \circ \pi_1^* \circ (x, y).$$

- Str. 54: Vzhledem k dané otázce je formulace odpovědi podivná.
- Str. 57: Bylo by hezké pro představu zařadit tabulku výsledků pro některé hodnoty n.

Závěr: Vzhledem k rozsahu práce chyb není mnoho a jsou plně vyváženy celkově kvalitním obsahem i zpracováním. Po matematické stránce je práce vcelku elementární, ne však zcela triviální: některé úlohy by byly bez znalosti teorie takřka neřešitelné. Po stránce didaktické jsem si práci dovolil otestovat sám na sobě a zdá se, že funguje: poučil jsem se. Z těchto důvodů práci považuji za *výbornou*.

Martin Rmoutil