MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Mária Wolfová

Kombinatorické úlohy o permutacích

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program:	Chemie
Studijní obor:	Učitelství chemie pro střední školy — Učitelství matematiky

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych ráda poděkovala doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za vstřícný a pečlivý přístup k vedení této diplomové práce. Dále chci poděkovat své rodině, především manželovi a rodičům, za podporu a trpělivost v době psaní této práce.

Název práce: Kombinatorické úlohy o permutacích

Autor: Mária Wolfová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce ve své teoretické části shrnuje základní poznatky týkající se permutací. Kromě způsobů reprezentace permutací a určování jejich základních charakteristik se teoretická část zaměřuje především na výsledky týkající se rozkladu permutace na nezávislé cykly a hledání počtu permutací s určitou vlastností. Je zavedena takzvaná základní bijekce užitečná při řešení mnoha problémů týkajících se permutací. Dále je odvozen počet permutací bez pevného bodu, Eulerova čísla vyjadřující počet permutací s daným počtem sestupů a počet permutací s daným počtem překročení, Stirlingova čísla 1. druhu vyjadřující počet permutací s daným počtem cyklů a Catalanova čísla vyjadřující počet permutací, které neobsahují zvolený vzor délky tři. Pozornost je věnována rovněž Gilbreathovým permutacím a jejich vlastnostem. V praktické části je prezentováno 14 motivačních úloh. Při řešení těchto úloh jsou využity poznatky z teoretické části a odvozeny některé další zajímavé výsledky týkající se náhodných permutací.

Klíčová slova: náhodná permutace, nezávislé cykly, pevné body, Eulerova čísla, Stirlingova čísla, vzory, Gilbreathovy permutace.

Title: Combinatorial problems on permutations

Author: Mária Wolfová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In its theoretical part, this thesis sums up the basic knowledge concerning permutations. Besides the representation of permutations and determination of their fundamental characteristics, the theoretical part is, first of all, aimed at results concerning the decomposition of permutations into disjoint cycles and at finding the number of permutations with a certain characteristic. We introduce the fundamental bijection that is useful for solving many problems concerning the permutations. Further on, we focus on the number of permutations without a fixed point, Eulerian numbers expressing the number of permutations with a given number of descents, and the number of permutations with a given number of excedances, Stirling numbers of the first kind expressing the number of permutations with a given number of cycles, and Catalan numbers representing the number of permutations avoiding a chosen pattern of length three. Attention is also paid to the Gilbreath permutations and their characteristics. The practical part consists of 14 solved problems. The solutions rely on the results presented in the theoretical part, and there are deduced some further interesting results concerning random permutations.

Keywords: random permutation, disjoint cycles, fixed points, Eulerian numbers, Stirling numbers, pattern avoidance, Gilbreath permutations.

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce si klade za cíl shromáždit a na vhodných příkladech ilustrovat zajímavé elementární poznatky o permutacích, z nichž mnohé nebývají součástí základních univerzitních kurzů, avšak k jejich pochopení není zapotřebí náročnější vysokoškolské matematiky.

Práce je sepsána tak, aby zpřístupnila téma širšímu okruhu zájemců o kombinatoriku, ať už z řad studentů matematiky, středoškolských učitelů, či talentovaných středoškolských studentů. Předpokládá pouze předchozí znalosti na úrovni středoškolské matematiky. Tam, kde se v práci vyskytují pojmy přesahující tuto úroveň, je uvedeno i potřebné vysvětlení, případně odkaz na literaturu, ve které je lze dohledat.

Práce je rozdělena na dvě části, teoretickou a praktickou. V teoretické části jsou shrnuty základní pojmy a poznatky týkající se permutací. Mimo jiné jsou zde zmíněny i různé způsoby reprezentace permutací, jako je například zápis pomocí nezávislých cyklů nebo reprezentace permutace pomocí permutační matice či mřížky. Dále je teoretická část zaměřena především na hledání počtu permutací s určitou vlastností, jako je například daný počet pevných bodů, cyklů či překročení nebo výskyt určitého vzoru. Ve své teoretické části práce vychází především ze zdrojů [1], [2], [3], [4] a [5]. České pojmy jsou použity ve shodě se zdroji [5] a [6]. Jsou zde však zavedeny i některé pojmy, které se v české literatuře běžně nevyskytují anebo jejich používání není jednotné. V takovém případě jsou použity ekvivalenty pojmů používaných v anglické literatuře.

V praktické části práce předkládá několik úloh, při jejichž řešení se využívají poznatky části teoretické. Ve velké části úloh je úkolem určit pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace bude mít určitou vlastnost. Dále jsou zde úlohy zaměřené na hledání střední hodnoty určité charakteristiky náhodné permutace, či nalezení (optimální) strategie řešení zadaného problému. Některé z úloh, jako například *problém 100 vězňů* nebo *patnáctka*, patří mezi známé úlohy rekreační matematiky. Jiné byly vytvořeny pro účely této práce, aby demonstrovaly typy problémů, které je možné řešit pomocí znalostí o permutacích. Konkrétně to jsou úlohy: *vyměněné doklady*, *vánoční*, *roztržitý prodavač*, *šaty pro princezny*, *prohlídka ZOO* a podúlohy II a III úlohy *šatnářka*.

1. Teoretická část

1.1 Permutace

Pojem *permutace* můžeme definovat více způsoby. Ve středoškolské matematice zavádíme permutaci nejčastěji jako speciální případ variace. Permutací množiny M obsahující n prvků pak rozumíme každou uspořádanou n-tici sestavenou z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou.

V této práci však použijeme definici, která permutaci definuje jako speciální případ bijekce. S pojmem bijekce se v této práci setkáme ještě mnohokrát, proto si jej zde připomeneme.

Definice 1.1.1. *Vzájemně jednoznačným zobrazením, neboli* ***bijekcí*** *množiny A na množinu B, budeme rozumět takové zobrazení f z množiny A do množiny B, pro které platí, že ke každému prvku $b \in B$ existuje právě jeden prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$.*

Připomeneme si i následující větu, která přímo plyne z definice bijekce. Tuto větu mnohokrát využijeme při určování počtu prvků množin.

Věta 1.1.2. *Existuje-li mezi konečnými množinami A a B bijekce, potom mají tyto množiny stejný počet prvků.*

Definice 1.1.3. ***Permutací*** *množiny $\{1, \ldots, n\}$ (nebo také n-permutací) nazveme každou bijekci množiny $\{1, \ldots, n\}$ na množinu $\{1, \ldots, n\}$. Množinu všech permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ budeme značit S_n.*

Poznámka 1.1.4. V širším smyslu lze permutaci zavést i na libovolné jiné konečné množině, například na množině žáků ve třídě. Při vyšetřování permutací je však lhostejné, jak prvky množiny označíme, a proto můžeme bez újmy na obecnosti pracovat s množinou $\{1, \ldots, n\}$.

Základním způsobem zápisu konkrétní permutace je takzvaný *dvouřádkový zápis*. Permutaci π množiny $\{1, \ldots, n\}$ zapisujeme schématem

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

kde pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $a_i = \pi(i)$.

Permutace skládáme stejně jako jiná zobrazení. Máme-li tedy dvě permutace π_1 a π_2, jejich složením rozumíme zobrazení $\pi_2 \circ \pi_1$ (zkráceně $\pi_2 \pi_1$), které každému číslu $i \in \{1, \ldots, n\}$ přiřadí číslo $\pi_2(\pi_1(i))$. O složení permutací můžeme mluvit také jako o jejich součinu.

Jak víme, složení dvou bijekcí je opět bijekce, proto i složení dvou permutací je opět permutace.

Příklad 1.1.5. *Jsou-li dány permutace*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

můžeme jejich složením získat permutace:

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jak dosvědčuje i příklad 1.1.5, skládání permutací není obecně komutativní.

Horní řádek n-permutace je pro pevně zvolené n neměnný a proto jej lze vynechat. Tím vzniká takzvaný *zápis jednořádkový*. Namísto

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

pak můžeme psát pouze

$$\pi = a_1\ a_2\ \dots\ a_n.$$

Příklad 1.1.6. *Namísto zápisu*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

můžeme použít zápis

$$\pi = 4\ 5\ 1\ 3\ 2\ 6.$$

Ještě připomeneme větu, kterou známe ze středoškolské matematiky.

Věta 1.1.7. *Počet n-permutací je $n!$.*

Příklad 1.1.8. *Určete počet permutací tříprvkové množiny* $\{1, 2, 3\}$.

Permutací této množiny můžeme najít celkem 6. Konkrétně jsou to permutace: 123, 132, 213, 231, 312 a 321.

Dále definujeme dva pojmy, které využijeme později.

Definice 1.1.9. *Nechť $\pi = p_1p_2 \dots p_n$ je n-permutace. Potom řekneme, že permutace $p_np_{(n-1)} \dots p_1$ je k permutaci π **opačná**. Dále řekneme, že permutace $(n+1-p_1)\ (n+1-p_2) \dots (n+1-p_n)$ je k permutaci π **doplňková**.*

Příklad 1.1.10. *Najděte opačnou a doplňkovou permutaci k permutaci*

$$\pi = 4\ 5\ 1\ 3\ 2\ 6.$$

Opačnou permutací k permutaci π je permutace 623154.

Doplňkovou permutací k permutaci π je permutace 326451.

Ke každé permutaci existuje vždy právě jedna permutace opačná a právě jedna permutace doplňková.

1.2 Matice permutace

Další možností, jak můžeme zapsat permutaci, je zápis pomocí permutační matice.

Definice 1.2.1 (matice permutace)**.** *Nechť π je permutace množiny $\{1,\ldots,n\}$. Řekneme, že matice A řádu n je **maticí permutace** π právě tehdy, když platí:*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \pi(i) = j \\ 0, & \pi(i) \neq j \end{cases}$$

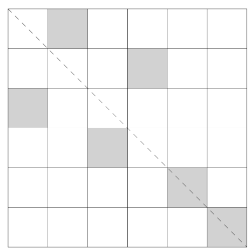
Příklad 1.2.2. *Najděte matici permutace $\pi = 54312$.*

Podle definice 1.2.1 je maticí této permutace matice:

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V dalších kapitolách se nám někdy bude hodit také znázornění permutace pomocí mřížky o $n \times n$ polích, kterou získáme z permutační matice nahrazením jedniček šedými a nul bílými políčky tak, jak to vidíme na obrázku 1.1. Takové mřížce budeme říkat mřížka permutace.

$$\pi = 2\ 4\ 1\ 3\ 5\ 6 \qquad A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 1.1: Reprezentace permutace pomocí mřížky permutace.

1.3 Pevné body permutace

Definice 1.3.1. *Nechť π je permutace množiny $\{1,\dots,n\}$. Pak řekneme, že prvek $x \in \{1,\dots,n\}$ je* ***pevným bodem*** *permutace π, pokud platí: $\pi(x) = x$.*

Příklad 1.3.2. *Určete všechny pevné body permutace*

$$\pi = 4\ 8\ 3\ 5\ 7\ 6\ 1\ 2\ 9.$$

Pevnými body jsou prvky 3, 6 a 9, které permutace π zobrazuje samy na sebe.

Při řešení nejednoho kombinatorického problému se hodí vědět, kolik je permutací, které mají daný počet pevných bodů. Na tuto otázku brzy odpovíme, předtím si ale položíme několik otázek jednodušších.

- Kolik existuje n-permutací, pro něž jsou zvolené prvky $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1,\dots,n\}$ pevnými body?
- Kolik permutací má alespoň jeden pevný bod?
- Kolik je n-permutací bez pevného bodu?

Zvolíme-li z množiny $\{1,\dots,n\}$ k různých prvků, které mají být pevnými body, zbývá nám $(n-k)$ prvků, které lze uspořádat $(n-k)!$ způsoby. Snadno nahlédneme, že výsledný počet nezávisí na konkrétní volbě pevných bodů. Můžeme tedy formulovat následující větu.

Věta 1.3.3. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navzájem různé prvky $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1,\dots,n\}$ platí, že počet n-permutací, pro něž jsou prvky $a_1, a_2, \dots, a_k$ pevnými body, je roven $(n-k)!$.*

Příklad 1.3.4. *Určete počet permutací 30 prvků takových, že prvky 1, 8, 10 a 17 jsou pevnými body.*

Hledáme počet permutací, pro něž jsou zvolené 4 prvky pevnými body. Tento počet bude roven

$$(n-k)! = (30-4)! = 26!.$$

Dále zjistíme, kolik n-permutací má alespoň jeden pevný bod. Označíme-li jako A_i množinu všech n-permutací, pro které je prvek $i \in \{1,\dots,n\}$ pevným bodem, bude počet n-permutací s jedním a více pevnými body roven mohutnosti[1] množiny

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n.$$

Nyní se nám bude hodit následující věta označovaná jako princip inkluze a exkluze, jejíž vysvětlení i důkaz můžeme najít například v [6].

[1] Mohutností konečné množiny rozumíme počet jejích prvků. Mohutnost množiny A značíme $|A|$.

Věta 1.3.5. *[Princip inkluze a exkluze]*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|J|-1} |\bigcap_{i \in J} A_i|$$

Lze tedy říci, že mohutnost sjednocení n množin dostaneme tak, že určíme mohutnosti všech jejich myslitelných průniků a tyto mohutnosti sečteme s tím, že před mohutnostmi průniků lichého počtu množin bude znaménko plus a před mohutnostmi průniků sudého počtu množin bude znaménko minus.

Vybereme-li z množin A_1 až A_n k různých množin, bude jejich průnik roven množině permutací s k vybranými pevnými body a jeho mohutnost tedy podle věty 1.3.3 bude rovna $(n-k)!$. Počet způsobů, jak vybrat k množin, jejichž průniky budeme tvořit, je roven $\binom{n}{k}$. Počet permutací s alespoň jedním pevným bodem potom bude podle věty 1.3.5 roven

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

Odsud už snadnou úpravou dostaneme následující tvrzení.

Věta 1.3.6. *Počet n-permutací s alespoň jedním pevným bodem je roven*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}.$$

Pokud se budeme ptát naopak na počet n-permutací bez pevného bodu, stačí počet permutací s alespoň jedním pevným bodem odečíst od počtu všech permutací.

Věta 1.3.7. *Počet n-permutací bez pevného bodu je roven*

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{n!}{k!}.$$

1.4 Znaménko permutace

Definice 1.4.1. *Nechť $\pi = a_1 \dots a_n$ je permutace množiny $\{1,\dots,n\}$. Pak řekneme, že dvojice prvků (a_i, a_j) je **inverze** permutace π, pokud $i < j$ a zároveň $a_i > a_j$.*

Definice 1.4.2. *Řekneme, že permutace je **sudá/lichá**, pokud má sudý/lichý počet inverzí.*

Definice 1.4.3. *Nechť π je permutace množiny $\{1,\dots,n\}$. **Znaménko permutace** značíme $\operatorname{sgn}\pi$ a definujeme jej vztahem*

$$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{\operatorname{inv}\pi},$$

kde $\operatorname{inv}\pi$ značí počet inverzí permutace π.

Poznámka 1.4.4. Je zřejmé, že liché permutace mají znaménko -1, sudé $+1$.

Příklad 1.4.5. *Najděte všechny inverze následující permutace a rozhodněte, zda se jedná o permutaci sudou či lichou. (Určete znaménko permutace.)*

$$\pi = 3\ 1\ 5\ 4\ 2$$

Inverze permutace π jsou dvojice: (3, 1), (3, 2), (5, 4), (5, 2), (4, 2). Permutace π je tedy lichá. (Její znaménko je -1.)

Věta 1.4.6. *Jsou-li π a σ permutace množiny M, potom*

$$\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\sigma.$$

Důkaz. Označme jako K množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny M. Množinu K můžeme vyjádřit jako sjednocení disjunktních podmnožin $K_1, \dots, K_4$ takových, že

$$K_1 = \{\{i,j\}; i < j, \sigma(i) < \sigma(j), \pi\sigma(i) < \pi\sigma(j)\},$$
$$K_2 = \{\{i,j\}; i < j, \sigma(i) < \sigma(j), \pi\sigma(i) > \pi\sigma(j)\},$$
$$K_3 = \{\{i,j\}; i < j, \sigma(i) > \sigma(j), \pi\sigma(i) < \pi\sigma(j)\},$$
$$K_4 = \{\{i,j\}; i < j, \sigma(i) > \sigma(j), \pi\sigma(i) > \pi\sigma(j)\}.$$

Množina $K_3 \cup K_4$ je množina všech inverzí permutace σ.

Množina $K_2 \cup K_4$ je množina všech inverzí permutace $\pi\sigma$.

Jelikož je permutace σ bijekce z množiny M do M, pak také platí, že počet inverzí permutace π je roven počtu prvků množiny $K_2 \cup K_3$.

Nyní již snadno ukážeme, že

$$\operatorname{inv}(\pi\sigma) = |K_2| + |K_4| = |K_2| + |K_3| + |K_3| + |K_4| - 2|K_3| = \operatorname{inv}\pi + \operatorname{inv}\sigma - 2|K_3|,$$

a tedy

$$\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = (-1)^{\operatorname{inv}\pi + \operatorname{inv}\sigma - 2|K_3|} = (-1)^{\operatorname{inv}\pi} \cdot (-1)^{\operatorname{inv}\sigma} = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\sigma.$$

□

1.5 Rozklad permutace na nezávislé cykly

Dalším způsobem, jak můžeme permutace zapisovat, je zápis pomocí *cyklů*.

Definice 1.5.1. *n-permutaci π nazýváme **cyklus**, jestliže existuje $m \geq 1$ a prvky $x_1, \ldots, x_m \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že*

$\pi(x_i) = x_{i+1}$ *pro každé* $i = 1, \ldots, m-1$,

$\pi(x_m) = x_1$,

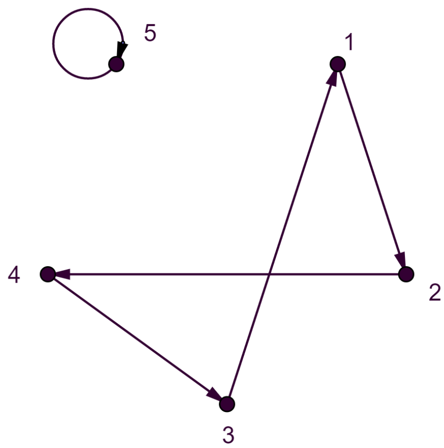
$\pi(x) = x$ *pro každé* $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Zapisujeme $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Číslo m se nazývá délka cyklu. Cyklus délky 2 se nazývá transpozice.

Příklad 1.5.2. *Permutace*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

je cyklus a graficky ji můžeme znázornit tak, jak vidíme na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Grafické znázornění cyklu π.

Lze ji zapsat také následujícím způsobem:

$$\pi = (1,\ 2,\ 4,\ 3).$$

Poznámka 1.5.3. Zápis cyklu můžeme začít od kteréhokoli v něm zapojeného prvku (další pořadí už je pak jednoznačně dané). Pro cyklus délky m tedy existuje m různých zápisů, které vzniknou takzvanou cyklickou záměnou. Například:

$$(1,\ 2,\ 4,\ 3) = (2,\ 4,\ 3,\ 1) = (4,\ 3,\ 1,\ 2) = (3,\ 1,\ 2,\ 4).$$

Obvykle však všechny cykly pro přehlednost zapisujeme od jejich nejnižšího, nebo nejvyššího prvku. Přístup můžeme volit podle situace.

Definice 1.5.4. *Dva cykly $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nazveme **nezávislé**, jestliže $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ a $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ jsou disjunktní množiny.*

Věta 1.5.5. *Součin dvou nezávislých cyklů nezávisí na jejich pořadí.*

Důkaz. Nechť $\pi_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\pi_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$. Pokud jsou π_1 a π_2 nezávislé, potom π_1 zobrazuje samy na sebe prvky $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a π_2 zobrazuje samy na sebe prvky $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Potom platí, že $\pi_1\pi_2(x) = \pi_2\pi_1(x)$ pro každé $x \in \{1, \ldots, n\}$.

□

Věta 1.5.6. *Každou permutaci lze rozložit na součin nezávislých cyklů. Tento rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný.*

Důkaz. Myšlenka důkazu této věty je poměrně jednoduchá. Stačí si uvědomit, jak budeme postupovat, když budeme hledat rozklad na nezávislé cykly libovolné permutace π.

Vybereme libovolný prvek p permutace π a začneme postupně psát cyklus, ve kterém se tento prvek nachází, ve tvaru $(p, \pi(p), \pi(\pi(p)) \ldots)$, kde posledním prvkem v zápisu cyklu bude prvek, který permutace π zobrazuje na p. Po uzavření prvního cyklu budeme obdobně tvořit další cykly, přičemž vždy začneme libovolným prvkem, který není součástí žádného z dosud vytvořených cyklů. Skončíme ve chvíli, kdy vyčerpáme všechny prvky permutace. Že tímto postupem vždy získáme nezávislé cykly permutace π vyplývá přímo z definice permutace. Je zřejmé, že rozklad na nezávislé cykly je až na pořadí jednoznačný.

□

Poznámka 1.5.7. Jednotlivé nezávislé cykly rozkladu permutace budeme označovat jako cykly této permutace.

Příklad 1.5.8. *Je dána permutace*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rozložte tuto permutaci na cykly.

Permutace je tvořena třemi cykly:

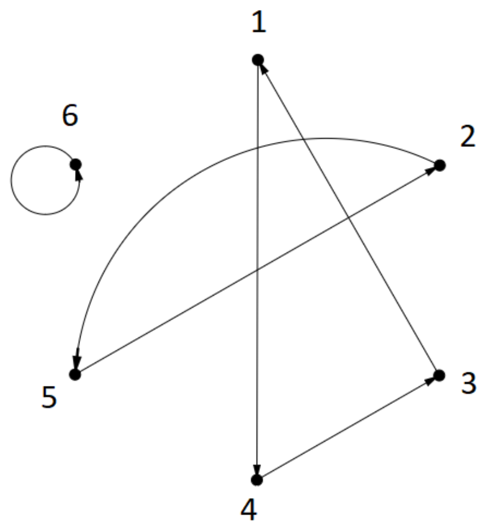
$\pi_1 = (1,\ 4,\ 3)$,

$\pi_2 = (2,\ 5)$,

$\pi_3 = (6)$.

Můžeme tedy psát $\pi = (1, 4, 3)(2, 5)(6)$. Rozklad na cykly dobře ilustruje grafické znázornění permutace, viz obrázek 1.3.

Jak vidíme, zápis permutace pomocí nezávislých cyklů není jednoznačný. Například permutaci π z předchozího příkladu bychom mohli zapsat také jako $\pi = (6)(3, 1, 4)(5, 2)$. Někdy se však hodí jednoznačný zápis permutace mít. Je více způsobů, jak toho dosáhnout. My to uděláme následujícím způsobem, který se nám bude později hodit při řešení některých problémů.



Obrázek 1.3: Grafické znázornění permutace π.

Definice 1.5.9. *Řekneme, že zápis permutace pomocí nezávislých cyklů je **standardní**, pokud zápis každého cyklu začíná jeho nejvyšším prvkem a cykly jsou seřazeny vzestupně podle počátečního prvku.*

Příklad 1.5.10. *Je dána permutace*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zapište tuto permutaci pomocí standardního zápisu.

Nejprve najdeme cykly permutace. Poté je zapíšeme tak, aby začínaly svým nejvyšším prvkem, a seřadíme vzestupně podle prvního prvku. Tedy

$$\pi = (4,\ 3,\ 1)(5,\ 2)(6).$$

Příklad 1.5.11. *Jaký je počet cyklů délky n permutujících množinu $\{1, \ldots, n\}$?*

Cyklus je dán svým zápisem. Různých (cyklických) zápisů cyklů n prvků můžeme vytvořit $n!$. Jak už ale víme, n různých zápisů určuje vždy jeden cyklus. Počet různých cyklů n daných prvků je tedy

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Věta 1.5.12. *Každý cyklus lze rozložit na součin transpozic.*

Důkaz. Každý cyklus délky s lze rozložit například následujícím způsobem:

$$\pi = (a_1,\ \ldots,\ a_s) = (a_1,\ a_s)(a_1,\ a_{s-1})\ldots(a_1,\ a_2).$$

$\square$

Důsledek 1.5.13. *Každá permutace se dá rozložit na součin transpozic.*

Rozklad permutace na cykly dokáže značně usnadnit určení znaménka permutace. Využijeme následující tvrzení.

Věta 1.5.14. *Každá transpozice je lichá.*

Důkaz. Nechť (i,j) je transpozice. Můžeme psát

$$(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & \ldots n \\ 1 & 2 & \ldots & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & \ldots n \end{pmatrix}.$$

Lze nahlédnout, že inverze této transpozice jsou dvojice

$$\begin{array}{ccccc} \{i+1,j\} & \{i+2,j\} & \ldots & \{j-1,j\} & \{i,j\} \\ \{i,i+1\} & \{i,i+2\} & \ldots & \{i,j-1\}. & \end{array}$$

Těchto inverzí je $2(j-i)-1$, tedy lichý počet, a proto transpozice (i,j) je lichá.

$\square$

Z věty 1.4.6 víme, že složíme-li dvě permutace, výsledné znaménko bude součinem znamének těchto permutací. Nyní, když jsme dokázali, že každá transpozice je lichá, získáváme další způsob, jak určit znaménko libovolné permutace pomocí rozkladu permutace na transpozice.

Věta 1.5.15. *Nechť π je permutace, kterou můžeme rozložit na m transpozic. Potom platí, že* $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^m$.

Poznámka 1.5.16. Je třeba si uvědomit, že rozklad permutace na transpozice není jednoznačný. Jednu permutaci můžeme rozložit na transpozice různými způsoby. Těchto transpozic může být pokaždé jiný počet, avšak sudou permutaci můžeme vždy rozložit pouze na sudý počet transpozic a lichou jen na lichý počet transpozic.

Věta 1.5.17. *Jestliže má permutace $\pi \in S_n$ právě k cyklů, je* $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{n-k}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $r_1, \ldots, r_k$ jsou délky cyklů permutace π. Potom platí $r_1 + \ldots + r_k = n$. Z důkazu věty 1.5.12 víme, že cyklus délky s lze rozložit na $s-1$ transpozic. Pokud podobným způsobem rozložíme všechny cykly permutace π, počet transpozic tohoto rozkladu bude

$$(r_1 - 1) + \ldots + (r_k - 1) = n - k.$$

$\square$

Příklad 1.5.18. *Určete znaménko permutace*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutace $\pi = (2)(5,4)(6,1,3)$ je složena z jednoho cyklu délky jedna, jednoho cyklu délky dva a jednoho cyklu délky tři.

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{6-3} = -1.$$

Jedná se tedy o permutaci lichou.

Definice 1.5.19. *Nechť π je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$.* ***Řádem permutace*** *rozumíme nejmenší přirozené číslo k takové, že π^k zobrazí každý prvek sám na sebe.*

Řád permutace nám říká, kolikrát musíme permutaci složit samu se sebou, abychom získali identitu. Skládáním identity se sebou samou získáme opět identitu, a tedy zřejmě je-li k řád permutace π, potom π^m je identita právě tehdy, když $m = nk$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Snadno nahlédneme, že je-li permutace π cyklus délky l, potom l je i řádem této permutace.

Je-li permutace π složena z více nezávislých cyklů $\pi_1, \dots, \pi_m$ délek $l_1, \dots, l_m$ potom π^k bude identita právě tehdy, když k bude dělitelné čísly $l_1, \dots, l_m$. Nejmenším takovým číslem a tedy řádem permutace bude nejmenší společný násobek čísel $l_1, \dots, l_m$. Můžeme tedy formulovat následující větu.

Věta 1.5.20. *Řád permutace je roven nejmenšímu společnému násobku délek cyklů této permutace.*

Víme, že každou permutaci lze rozložit na nezávislé cykly. Odtud pak vyplývá, že pro každou permutaci lze určit její řád.

Příklad 1.5.21. *Určete řád permutace*

$$\pi = 3\ 8\ 5\ 4\ 1\ 7\ 6\ 2.$$

Permutaci rozložíme na cykly

$$\pi = (4)(5,\ 1,\ 3)(7,\ 6)(8,\ 2).$$

Rozklad obsahuje jeden cyklus délky 3, dva cykly délky 2 a jeden cyklus délky 1. Řád permutace je tedy $2 \cdot 3 = 6$.

1.6 Základní bijekce

V této kapitole definujeme zobrazení, které se později ukáže být velmi užitečné při řešení úloh týkajících se permutací.

Věta 1.6.1. *Nechť $f : S_n \to S_n$ je zobrazení, které každé permutaci π přiřadí takovou permutaci, jejíž jednořádkový zápis vznikne tak, že ze standardního zápisu permutace π vypustíme všechny závorky. Potom zobrazení f je bijekce.*

Důkaz. Je zřejmé, že předpis f definovaný ve větě 1.6.1 každé permutaci $\pi \in S_n$ přiřazuje právě jednu permutaci $\sigma \in S_n$. Zbývá tedy ukázat, že také pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ najdeme právě jednu permutaci $\pi \in S_n$ tak, že $f(\pi) = \sigma$.

Nechť $\sigma = s_1 s_2 \dots s_n$ je libovolná n-permutace. Podívejme se na to, jak může vypadat permutace π, pro niž $f(\pi) = \sigma$. Budeme prvek po prvku procházet jednořádkový zápis permutace σ a hledat místa, na která vložíme závorky tak, abychom tím vytvořili standardní zápis permutace π. Prvek s_1 musí zřejmě být i prvním prvkem prvního cyklu permutace π, tedy před něj vložíme závorku „(“.

Pokud dále narazíme na prvek, který je nižší než první prvek cyklu, který právě tvoříme, zařadíme jej do tohoto cyklu, protože v standardním zápisu nemůže být prvním prvkem nového cyklu.

Pokud narazíme na prvek, který je vyšší než první prvek cyklu, který zrovna tvoříme, je naopak zřejmé, že tento prvek do cyklu již patřit nemůže a musí tak být prvním prvkem cyklu nového. Proto před něj vložíme dvojici závorek „)(“.

Tento postup opakujeme, dokud nedojdeme na konec permutace σ. Za poslední prvek pak vložíme závorku „)“.

Ukázali jsme, že postup, jak k jakékoli permutaci $\sigma \in S_n$ najít permutaci $\pi \in S_n$, pro kterou $f(\pi) = \sigma$, je jednoznačný, a tedy zobrazení f je bijekce.

□

Definice 1.6.2. *Zobrazení f zavedené ve větě 1.6.1 nazveme* ***základní bijekcí***[2].

Příklad 1.6.3. *Je dáno zobrazení f (základní bijekce) zavedené v předchozí větě, permutace $\pi_1 = (4,3,1)(5,2)(6)$ a permutace $\pi_2 = 241653$.*

1. *Najděte $f(\pi_1)$.*
2. *Najděte $f^{-1}(\pi_2)$.*

1. Odstraníme závorky z cyklického zápisu permutace π_1. Dostaneme

$$f(\pi_1) = 4\ 3\ 1\ 5\ 2\ 6.$$

2. Doplníme závorky na začátek a konec zápisu a vložíme dvojici závorek „)(“ před každé *maximum zleva doprava*, čímž rozumíme každý takový prvek, před kterým není žádný větší prvek. Dostaneme

$$f^{-1}(\pi_2) = (2)(4,\ 1)(6,\ 5,\ 3).$$

[2] V angličtině: fundamental bijection.

1.7 Eulerova čísla

Definice 1.7.1. *Nechť $\pi = a_1a_2\dots a_n$ je permutace množiny $\{1,\dots,n\}$. Řekneme, že i je* ***sestup***[3] *permutace π, pokud $a_i > a_{i+1}$. Pokud $a_i < a_{i+1}$, pak řekneme, že i je* ***vzestup***[4] *permutace π.*

Příklad 1.7.2. *Určete sestupy a vzestupy permutace $\pi = 21453$.*

Podle definice 1.7.1 označují sestupy/vzestupy pozice prvků, které jsou v jednořádkovém zápisu následovány prvkem nižším/vyšším.

- sestupy permutace π jsou: 1 a 4
- vzestupy permutace π jsou: 2 a 3

Definice 1.7.3. *Počet permutací množiny $\{1,\dots,n\}$ s $k-1$ sestupy značíme $A(n,k)$. Tato čísla se nazývají* ***Eulerova čísla*** *řádu (n,k). Navíc dodefinováváme $A(0,0) = 1$.*

Může být zarážející, proč parametr k Eulerova čísla není roven raději počtu permutací s k sestupy. Toto značení bylo zvoleno tak, aby parametr odpovídal počtu úseků, ve kterých permutace roste.

Příklad 1.7.4. *Určete Eulerovo číslo $A(3,2)$.*

Mezi šesti permutacemi tří prvků najdeme právě 4 takové, které mají jeden sestup. Jsou to permutace: 132, 312, 213, 231. Tedy $A(3,2) = 4$.

Je zřejmé, že má-li nějaká permutace $k-1$ vzestupů, má permutace k ní opačná právě $k-1$ sestupů. Můžeme tedy formulovat následující větu.

Věta 1.7.5. *Počet permutací množiny $\{1,\dots,n\}$ s $k-1$ vzestupy je roven $A(n,k)$.*

Eulerova čísla nižších řádů můžeme poměrně snadno počítat pomocí rekurentního vztahu uvedeného v následují větě:

Věta 1.7.6. *Pro všechna $n,k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, platí vztah*

$$A(n,k+1) = (k+1)A(n-1,k+1) + (n-k)A(n-1,k).$$

Důkaz. Na permutaci se nyní budeme dívat jako na uspořádání prvků. Permutaci množiny $\{1,\dots,n\}$ s k sestupy pak můžeme získat z permutace množiny $\{1,\dots,n-1\}$ vložením prvku n dvěma způsoby.

Za prvé můžeme vložit prvek n do jedné z $A(n-1,k+1)$ permutací s k sestupy tak, aby žádný nový sestup nevznikl, tedy na konec některého z $k+1$ úseků, kde permutace roste.

[3] V angličtině: descent.
[4] V angličtině: ascent.

Druhou možností je vložit prvek n do jedné z $A(n-1,k)$ permutací s $k-1$ sestupy tak, aby nový sestup vznikl, tedy jinam než na konec některého z úseků, kde permutace roste. Takových pozic je $n-k$.

□

Nyní si stačí uvědomit, že $A(0,0)=1$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí: $A(n,n)=1$ a $A(n,0)=0$. S využitím věty 1.7.6 pak můžeme vypočítat libovolné Eulerovo číslo.

Příklad 1.7.7. *Určete Eulerova čísla pro n od nuly do pěti.*

$$\begin{array}{llllll}
A(0,0)=1 & & & & & \\
A(1,0)=0 & A(1,1)=1 & & & & \\
A(2,0)=0 & A(2,1)=1 & A(2,2)=1 & & & \\
A(3,0)=0 & A(3,1)=1 & A(3,2)=4 & A(3,3)=1 & & \\
A(4,0)=0 & A(4,1)=1 & A(4,2)=11 & A(4,3)=11 & A(4,4)=1 & \\
A(5,0)=0 & A(5,1)=1 & A(5,2)=26 & A(5,3)=66 & A(5,4)=26 & A(5,5)=1
\end{array}$$

Pro výpočet Eulerových čísel vyšších řádů můžeme použít třeba následující jednoduchý program v jazyce Python.

```
n = 0
while n > -1:
    n = int(input("n: "))
    k = int(input("k: "))

    def A(n, k):
        if n == k:
            return 1
           if k == 0:
            return 0
        if n < k:
            return 0
        return k*A(n-1, k) + (n-k+1)*A(n-1, k-1)

    print("A(n,k)=", A(n,k))
```

Tabulku Eulerových čísel do $n = 10$ najdete v příloze této práce (viz příloha A.1).

Věta 1.7.8. *Pro všechna $n,k \in \mathbb{N}$, kde $k \leq n$, platí*

$$A(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n.$$

Důkaz této věty je poměrně zdlouhavý, zájemci jej však mohou najít v práci [1, str. 8].

1.8 Stirlingova čísla

Definice 1.8.1. *Počet n-permutací tvořených k cykly značíme $s(n,k)$. Tato čísla se nazývají* ***Stirlingova čísla 1. druhu****. Dodefinovááme* $s(0,0) = 1$.

Příklad 1.8.2. *Určete Stirlingovo číslo 1. druhu $s(5,3)$.*

Pokud má permutace pěti prvků obsahovat tři cykly, musí být složena z jednoho trojcyklu a dvou pevných bodů, nebo z dvou dvojcyklů a jednoho pevného bodu. V prvním případě je takových permutací $2\binom{5}{3}$, ve druhém pak $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}$. Celkem tedy platí

$$s(5,3) = 2\binom{5}{3} + \frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 35.$$

Stirlingova čísla 1. druhu můžeme snadno počítat pomocí rekurentního vztahu uvedeného v následující větě.

Věta 1.8.3. *Pro všechna Stirlingova čísla 1. druhu platí vztah*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).$$

Důkaz. Uvažujme permutaci množiny $\{1,\ldots,n\}$. Prvek n je buďto pevným bodem permutace, nebo je součástí většího cyklu.

V prvním případě existuje $s(n-1,k-1)$ způsobů, jak mohou být uspořádány ostatní prvky do $k-1$ cyklů.

Ve druhém případě může být prvek n zařazen za libovolný z $n-1$ prvků, které mohou být do k cyklů uspořádány $s(n-1,k)$ způsoby.

□

Snadno nahlédneme, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí: $s(n,n) = 1$ a $s(n,0) = 0$.

Příklad 1.8.4. *Určete Stirlingova čísla 1. druhu pro n od nuly do pěti.*

$s(0,0)=1$					
$s(1,0)=0$	$s(1,1)=1$				
$s(2,0)=0$	$s(2,1)=1$	$s(2,2)=1$			
$s(3,0)=0$	$s(3,1)=2$	$s(3,2)=3$	$s(3,3)=1$		
$s(4,0)=0$	$s(4,1)=6$	$s(4,2)=11$	$s(4,3)=6$	$s(4,4)=1$	
$s(5,0)=0$	$s(5,1)=24$	$s(5,2)=50$	$s(5,3)=35$	$s(5,4)=10$	$s(5,5)=1$

Prvních několik Stirlingových čísel spočítáme snadno jen s pomocí tužky a papíru. Postupně se však výpočet stává čím dál tím složitější, můžeme si tak pomoci například níže uvedeným jednoduchým programem v jazyce Python.

```
n = 0
while n > -1:
    n = int(input("n: "))
```

```
k = int(input("k: "))

def s(n, k):
    if n == k:
        return 1
    if k == 0:
        return 0
    if n < k:
        return 0
    return s(n-1, k-1) + (n-1)*s(n-1, k)

print("s(n,k)=", s(n,k))
```

Tabulku Stirlingových čísel 1. druhu do $n = 10$ najdete v příloze této práce (viz příloha A.2).

1.9 Překročení

Definice 1.9.1. *Nechť $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$ je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že i je* ***překročení***[5] *permutace π, pokud $a_i > i$. Řekneme, že i je* ***slabé překročení***[6] *permutace π, pokud $a_i \geq i$.*

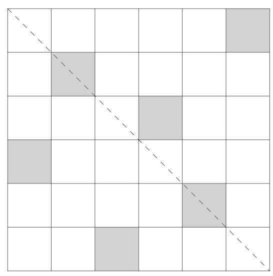
Příklad 1.9.2. *Určete všechna překročení permutace $\pi = 624153$.*

Jako překročení označujeme takovou pozici permutace, na které je prvek vyšší než je pozice sama. Pro zadanou permutaci jsou to pozice 1 a 3.

Jako slabé překročení označujeme takovou pozici permutace, na které je prvek vyšší nebo roven pozici samotné. Pro zadanou permutaci jsou to pozice 1, 2, 3 a 5.

Pokud si sestavíme permutační matici či mřížku některé permutace, snadno si uvědomíme, že překročením permutace odpovídají jedničky/šedá pole nad hlavní diagonálou. Slabým překročením odpovídají jedničky/šedá pole ležící nad hlavní diagonálou a na ní. Viz obrázek 1.4.

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Obrázek 1.4: Matice a mřížka permutace 624153 z příkladu 1.9.2.

S využitím dříve získaných poznatků můžeme nyní dokázat věty, které nám umožní určit počet permutací, které mají daný počet slabých překročení/překročení. Začneme větou týkající se překročení slabých.

Věta 1.9.3. *Počet permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ s k slabými překročeními je roven $A(n, k)$.*[7]

Důkaz. Dokážeme, že počet permutací s k slabými překročeními je stejný jako počet permutací s $k-1$ vzestupy, tedy $A(n, k)$. Použijeme k tomu základní bijekci formulovanou ve větě 1.6.1.

Nechť
$$\pi = (p_1, \ \dots, p_l)(p_{l+1}, \ \dots) \dots (p_m, \ \dots, p_n)$$
je standardní zápis n-permutace π a f je základní bijekce. Potom
$$f(\pi) = p_1 \ \dots \ p_l \ p_{l+1} \ \dots \ p_m \ \dots \ p_n.$$

[5] V angličtině: excedance.

[6] V angličtině: weak excedance.

[7] $A(n, k)$ je Eulerovo číslo řádu (n, k) určující počet n-permutací s $k - 1$ vzestupy, viz definice 1.7.3

Ukážeme, že platí $i \neq n$ a $p_i \leq \pi(p_i)$ (což znamená, že p_i je slabé překročení permutace π), právě když $p_i < p_{i+1}$ (což znamená, že i je vzestup permutace $f(\pi)$).

Pokud je p_i na konci cyklu permutace π, potom přímo z vlastností standardního zápisu plyne, že prvek $p_i \leq \pi(p_i)$ (rovnost nastává v případě, že i je pevný bod permutace π). Zároveň platí, že pokud $i \neq n$, potom $p_i < p_{i+1}$ a to opět přímo z vlastností standardního zápisu permutace.

Pokud je prvek p_i jinde než na konci cyklu permutace π, potom platí $\pi(p_i) = p_{i+1}$, a proto $(p_i < p_{i+1}) \Leftrightarrow (p_i < \pi(p_i))$.

Nyní si již stačí uvědomit, že poslední prvek p_n posledního cyklu v cyklickém zápisu permutace π je vždy slabým překročením permutace π. Oproti tomu pozice n permutace $f(\pi)$ vzestupem nikdy není, protože za prvkem p_n již další prvek nenásleduje.

$\square$

Tento poměrně náročný důkaz se stane zřejmým, když si na příkladě ukážeme, jak základní bijekce promění všechna slabá překročení, dané permutace různá od $\pi^{-1}(n)$ ve vzestupy permutace $f(\pi)$.

Například permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

kterou pomocí standardního zápisu zapíšeme jako

$$\pi = (3,\ \mathbf{1})(\mathbf{4})(8,\ \mathbf{6})(9,\ \mathbf{5},\ 7,\ \mathbf{2}),$$

základní bijekce zobrazí na

$$f(\pi) = 3\ \mathbf{1}\ \mathbf{4}\ 8\ \mathbf{6}\ 9\ \mathbf{5}\ 7\ 2.$$

V permutaci π jsou zvýrazněna její slabá překročení. V permutaci $f(\pi)$ jsou zvýrazněny prvky na pozicích vzestupů. Můžeme tak snadno vidět, jak si tyto dvě charakteristiky odpovídají.

Nyní, když umíme určit počet permutací s daným počtem slabých překročení, odvodíme další větu, která nám umožní určit počet permutací s daným počtem překročení.

Věta 1.9.4. *Počet permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s $k-1$ překročeními je roven počtu permutací s k slabými překročeními, a tedy je roven $A(n,k)$.*

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$, M_k je množina všech n-permutací, které obsahují právě k slabých překročení a N_{k-1} je množina všech n-permutací obsahujících právě $k-1$ překročení.

Definujeme zobrazení f, které každé permutaci $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \in M_k$ přiřadí permutaci $f(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} \circ \pi$.

Permutace $f(\pi)$ tedy:

- každému prvku $i \in \{1, \dots, n\}$, pro který $p_i \neq n$, přiřadí prvek $p_i + 1$,
- prvku $i \in \{1, \dots, n\}$, pro který $p_i = n$, přiřadí prvek 1.

Snadno nahlédneme, že pokud $p_i \neq n$ a i je slabým překročením permutace π, je i také překročením permutace $f(\pi)$. Pokud $p_i = n$, pak je i vždy slabým překročením permutace π, avšak už není překročením permutace $f(\pi)$.

Zobrazení f tedy opravdu přiřazuje každé permutaci $\pi \in M_k$ právě jednu permutaci z množiny N_{k-1}.

Podobně zobrazení f^{-1} každé permutaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \in N_{k-1}$ přiřadí permutaci $f^{-1}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \circ \sigma$.

Obdobně jako předtím platí, že $f^{-1}(\sigma)$:

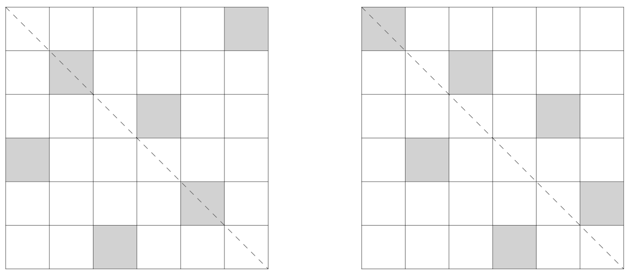
- každému prvku $i \in \{1, \dots, n\}$ pro který $s_i \neq 1$, přiřadí prvek $s_i - 1$,
- prvku $i \in \{1, \dots, n\}$ pro který $s_i = 1$, přiřadí prvek n.

Pokud je i překročením permutace σ, také slabým překročením permutace $f^{-1}(\sigma)$. Pokud $s_i = 1$, pak i není překročením permutace σ, avšak je překročením permutace $f^{-1}(\sigma)$.

Zobrazení f^{-1} tedy každé permutaci $\sigma \in N_{k-1}$ přiřazuje právě jednu permutaci z množiny M_k, což dokazuje, že f je bijekcí mezi množinami M_k a N_{k-1}, a tedy že tyto množiny obsahují stejný počet prvků.

$\square$

Tento důkaz snadno pochopíme, když si uvědomíme, jak z mřížky permutace π vznikne mřížka permutace $f(\pi)$ a opačně. Viz obrázek 1.5.



Obrázek 1.5: Mřížky permutací 624153 a $f(624153)$.

1.10 Vzory

Další vlastností permutace, která nás může zajímat, je výskyt takzvaných vzorů[8]. Pojem vzor si objasníme pomocí definice a následných příkladů.

Definice 1.10.1. *Nechť $\sigma = s_1 s_2 \dots s_k \in S_k$ je permutace a nechť $k \leq n$, potom řekneme, že permutace $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ obsahuje **vzor** σ, pokud permutace π obsahuje prvky $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik}$ takové, že $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a $p_{ia} < p_{ib}$ právě tehdy, když $s_a < s_b$. V opačném případě řekneme, že permutace π vzor σ neobsahuje.*

Na základě definice 1.10.1 tedy můžeme říci, že permutace $\pi = 541632$ obsahuje vzor $\sigma_1 = 312$, protože například prvky 5, 1 a 3 jsou v permutaci π ve stejném pořadí, jako prvky $3, 1$ a 2 v permutaci $\sigma_1 = 312$. (První v pořadí je prvek nejvyšší, poté následuje prvek nejnižší a poslední v trojici je prvek střední.) Naopak vzor $\sigma_2 = 123$ v permutaci π nenajdeme, a tedy můžeme říci, že permutace π vzor σ_2 neobsahuje.

Příklad 1.10.2. *Rozhodněte, zda permutace $\pi = 12534$ obsahuje vzory $\sigma_1 = 1423$ a $\sigma_2 = 4321$.*

Mezi pěti čtveřicemi, které můžeme vybrat z prvků permutace π, najdeme hned dvě, jejichž uspořádání odpovídá uspořádaní prvků v permutaci σ_1. Jsou to čtveřice $2, 5, 3, 4$ a $1, 5, 3, 4$. Ani jedna z pěti čtveřic však neodpovídá vzoru σ_2. Permutace π tedy obsahuje vzor σ_1 a neobsahuje vzor σ_2.

V následujících odstavcích se budeme zabývat otázkou, kolik existuje permutací, které neobsahují určitý vzor. Počet n-permutací, které neobsahují vzor q, si označíme jako $S_n(q)$ a pokusíme se jej určit alespoň pro některé případy. Hned na úvod je však třeba říci, že obecně se nám tento problém vyřešit nepodaří.

Pro oba možné vzory délky dva je otázka triviální. Pokud n-permutace nesmí obsahovat vzor 12, musí být klesající. Pokud nesmí obsahovat vzor 21, musí být rostoucí. Pro libovolné n tedy platí

$$S_n(12) = S_n(21) = 1.$$

Pro vzory délky tři je situace o poznání složitější. Permutací prvků $\{1, 2, 3\}$, a tedy i různých vzorů délky tři, je celkem 6. Učiníme však několik pozorování, která nám situaci alespoň o něco zjednoduší.

Pro tato pozorování se nám budou hodit pojmy opačná a doplňková permutace z definice 1.1.9. Připomeňme si, že ke každé permutaci existuje právě jedna permutace opačná a právě jedna permutace doplňková.

- Permutace π obsahuje vzor 123 právě tehdy, když permutace k π opačná obsahuje vzor 321.

[8] V angličtině: patterns.

- Permutace π obsahuje vzor 132 právě tehdy, když permutace k π opačná obsahuje vzor 231.
- Permutace π obsahuje vzor 132 právě tehdy, když permutace k π doplňková obsahuje vzor 312.
- Permutace π obsahuje vzor 213 právě tehdy, když permutace k π doplňková obsahuje vzor 231.

Z těchto čtyř pozorování plyne, že

$$S_n(123) = S_n(321)$$

a také

$$S_n(132) = S_n(231) = S_n(312) = S_n(213).$$

Platí i další rovnost, ze které vyplyne, že počet n-permutací, které neobsahují zvolený vzor délky tři, je stejný pro všech šest možných vzorů. Její důkaz ale již není triviální.

Věta 1.10.3. *Nechť σ je libovolná permutace množiny Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$S_n(132) = S_n(123).$$

Důkaz této věty pouze naznačíme. Tento důkaz využívá toho, že lze sestrojit bijekci f, která každé permutaci neobsahující vzor 132 přiřadí permutaci, která neobsahuje vzor 123 a má v jednořádkovém zápisu stejná minima zleva doprava na stejných pozicích (viz příklad 1.10.4). Tato bijekce je dána následujícím předpisem:

- Permutace $f(\pi)$ je permutace, která vznikne, když v permutaci π neobsahující vzor 132 zachováme na původních pozicích všechna minima zleva doprava a ostatní prvky seřadíme sestupně.

Příklad 1.10.4. *Pro permutaci* $\pi = 67341258$ *neobsahující vzor* 132 *najděte permutaci, která má stejná minima zleva doprava na stejných pozicích a neobsahuje vzor* 123.

Permutace má tři minima zleva doprava umístěná následujícím způsobem $6 - 3 - 1 - --$. Nyní na volná místa zapíšeme zbylé prvky v sestupném pořadí. Vznikne permutace 68371542. Tato permutace je jedinou permutací splňující zadání.

Zobrazení inverzní k f je pak dáno předpisem:

- Permutace $f^{-1}(\pi)$ je permutace, která vznikne, když v permutaci π neobsahující vzor 123 zachováme na původních pozicích všechna minima zleva doprava a ostatní prvky zapíšeme na volné pozice tak, že budeme postupovat zleva doprava a na každou prázdnou pozici umístíme vždy nejmenší zatím neumístěný prvek, který je větší než nejbližší předcházející minimum zleva doprava.

Příklad 1.10.5. *Pro permutaci* $\pi = 7562413$ *neobsahující vzor* 123 *najděte permutaci, která má stejná minima zleva doprava na stejných pozicích a neobsahuje vzor* 132.

Permutace má čtyři minima zleva doprava umístěná následujícím způsobem $75-2-1-$. Když na volná místa zapíšeme zbylé prvky, podle výše uvedeného pravidla získáme permutaci 7562314. Tato permutace je jedinou permutací splňující zadání.

Zájemci mohou podrobný důkaz najít například v práci [1, str. 148].

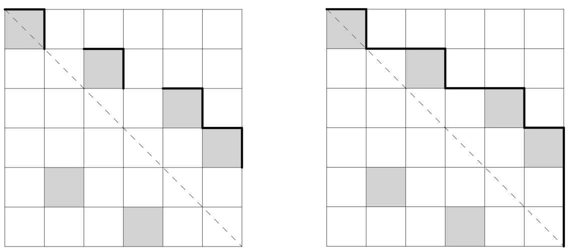
Nyní již je zřejmé, že stačí určit $S_n(q)$ pro kterýkoli vzor délky tří a budeme tuto hodnotu znát pro všech šest vzorů délky tři.

Stejně jako v knize [2] i my si vybereme $S_n(321)$ a formulujeme větu, která otázku hledání počtu permutací převede na otázku hledání počtu monotónních cest pravoúhlou sítí. Monotónní cestou sítí zde budeme rozumět cestu složenou pouze z kroků doprava a dolů.

Věta 1.10.6. *Existuje bijekce, která každé mřížce permutace neobsahující vzor* 321 *přiřadí monotónní cestu z levého horního do pravého dolního rohu, která nepřekračuje hlavní diagonálu a odbočuje dolů právě kolem všech šedých polí mřížky, která jsou nad nebo na diagonále.*

Příklad 1.10.7. *Pro permutaci* $\pi = 135624$ *neobsahující vzor* 321 *najděte cestu mřížkou vyhovující podmínkám věty 1.10.6.*

Nejprve sestavíme mřížku permutace $\pi = 135624$. Poté zakreslíme části cesty dotýkající se vybarvených polí na a nad diagonálou. Nakonec prodloužíme úseky cesty tak, aby vznikla jedna cesta. Viz obrázek 1.6.



Obrázek 1.6: Obrázek k příkladu 1.10.7.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro každou permutaci neobsahující vzor 321 existuje cesta vyhovující popsaným podmínkám a že tato cesta je právě jedna.

Pokud cesta existuje, postup jejího sestrojení je jednoznačný. Snadno si uvědomíme, že sestrojení cesty by mohla zabránit pouze situace, kdy by se v mřížce nad nebo na hlavní diagonále vyskytovala dvě šedá pole, z nichž by dolní bylo dále vlevo než horní. Předpokládejme, že mřížka taková pole obsahuje. Horní z nich označme A, dolní B. Počet řádků pod polem B je větší nebo roven počtu sloupců napravo od B, přičemž jeden z těchto sloupců již je obsazen polem A. Potom však zřejmě pod polem B najdeme pole, které je vzhledem k němu více vlevo. Taková situace ale nenastane, má-li se permutace vyhnout vzoru 321.

Dále ukážeme, že je-li dána cesta vyhovující popsaným podmínkám, existuje jednoznačný postup, jak k ní získat mřížku odpovídající permutace neobsahující vzor 321.

Nejprve musíme zaplnit všechna pole, kolem kterých cesta odbočuje dolů. Poté zaplníme pole v prázdných sloupcích a řádcích tak, aby každé další zaplněné pole leželo pod diagonálou a aby pro každou dvojici polí pod diagonálou platilo, že pole, které je výše, je zároveň i dále vlevo. Snadno nahlédneme, že to je jediný způsob, jak se vyhnout vytvoření vzoru 321, protože nad výše položeným polem je vždy alespoň jedno pole, které je dále vpravo. Počet sloupců vlevo od kteréhokoli pole pod diagonálou je totiž menší než počet řádků nad ním.

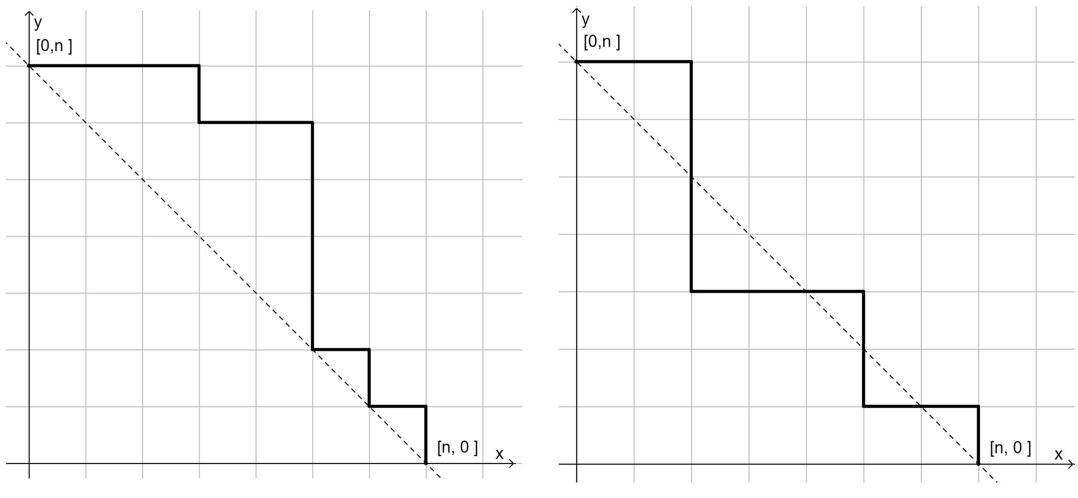
□

Nyní již stačí najít počet všech cest mřížkou o $n \times n$ polích, které splňují výše uvedené podmínky.

Počet cest se nám bude lépe hledat, když umístíme mřížku do kartézské soustavy souřadnic tak, že levý horní roh bude mít souřadnice $[0, n]$ a pravý dolní bude mít souřadnice $[n, 0]$. Nyní použijeme metodu zrcadlení, používanou k řešení velmi podobného hlasovacího problému [7].

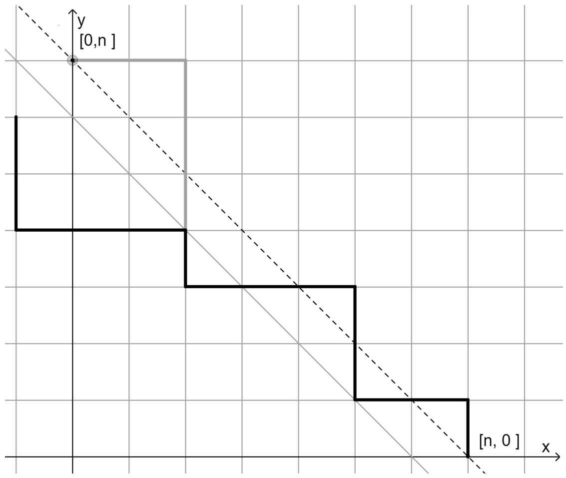
Nejprve určíme celkový počet monotónních cest mřížkou z bodu $[0, n]$ do bodu $[n, 0]$. Taková cesta bude mít vždy právě $2n$ kroků, z nichž n bude doprava a n dolů. Počet různých cest proto odpovídá počtu způsobů, jak z $2n$ prvků vybrat n, tedy $\binom{2n}{n}$.

Všechny tyto cesty můžeme rozdělit na vyhovující a nevyhovující podle toho, zda překračují přímku $y = -x + n$ odpovídající hlavní diagonále. Viz obrázek 1.7. Vyhovující označíme jako *dobré* a nevyhovující jako *špatné*.



Obrázek 1.7: Ukázka vyhovující (vlevo) a nevyhovující (vpravo) cesty.

Nyní se zaměříme na špatné cesty. Je zřejmé, že každá špatná cesta se alespoň dotýká přímky $y = -x+n-1$. Použijeme zmiňované zrcadlení a úsek každé špatné cesty od bodu $[0, n]$ do prvního bodu ležícího na přímce $y = -x+n-1$ překlopíme podle této přímky tak, jak to vidíme na obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Cesta vzniklá překlopením části špatné cesty.

Vidíme, že začátek každé z takto upravených cest je v bodě $[-1, n-1]$. Nyní si již stačí všimnout, že popsaným zrcadlením můžeme získat kteroukoli z monotónních cest z bodu $[-1, n-1]$ do bodu $[n, 0]$. Popsané zrcadlení je tedy bijekcí mezi množinou špatných cest a množinou všech monotónních cest z bodu $[-1, n-1]$ do bodu $[n, 0]$. Tyto množiny jsou tedy stejně velké.

Monotónních cest z bodu $[-1, n-1]$ do bodu $[n, 0]$ je celkem $\binom{2n}{n-1}$ a tedy počet všech dobrých cest je

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} =$$

$$= \frac{(2n)!(n+1) - (2n)!n}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}.$$

Výraz, který jsme získali, odpovídá n-tému *Catalanovu číslu*. Catalanova čísla jsou čísla, která jsou řešením až překvapivě velkého počtu na první pohled nesouvisejících kombinatorických úloh [3]. Tato čísla značíme C_n.

Nyní již tedy můžeme zformulovat následující větu o počtu n-permutací neobsahujících zvolený vzor délky tři.

Věta 1.10.8. *Nechť q je libovolná permutace množiny* $\{1,2,3\}$. *Potom*

$$S_n(q) = C_n = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}.$$

1.11 Gilbreathovy permutace

V této kapitole se budeme věnovat množině permutací, které neobsahují současně dva vzory, vzor 132 a vzor 312. Ukážeme si postup, kterým lze všechny tyto permutace získat, a seznámíme se s některými jejich zajímavými vlastnostmi.

Jako první si položíme otázku, kolik existuje permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$, které neobsahují ani vzor 132, ani vzor 312. Počet těchto permutací budeme značit $S_n(132{,}312)$ a odvodíme jej podle [1] (str. 406).

Předpokládejme, že prvek n je umístěn na pozici i. Abychom se vyhnuli vzoru 132, musí platit, že kterýkoli prvek stojící v permutaci před prvkem n je větší než kterýkoli prvek stojící v permutaci za prvkem n.

Část permutace před n nesmí obsahovat ani jeden ze zakázaných vzorů. Možných uspořádání této části je tedy $S_{i-1}(132{,}312)$. Prvky za n musí být seřazeny sestupně, abychom se vyhnuli vytvoření vzoru 312. Existuje pro ně tedy jen jedno možné uspořádání. Z této úvahy plyne, že

$$S_n(132{,}312) = \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}(132{,}312) = \sum_{j=1}^{n-1} S_{j-1}(132{,}312) + S_{n-1}(132{,}312) =$$

$$= 2S_{n-1}(132{,}312),$$

přičemž $S_0(132{,}312) = S_1(132{,}312) = 1$.

Odtud plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(132{,}312) = 2^{n-1}.$$

Nyní zavedeme pojem *Gilbreathova permutace*, který můžeme najít například v [8], a jehož souvislost s tématem se zanedlouho ukáže.

Definice 1.11.1. *Jako **Gilbreathovu permutaci** budeme označovat každou permutaci množiny $\{1,\ldots,n\}$, pro kterou existují čísla $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ a $1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n$ taková, že $a_{i_k} < \cdots < a_{i_1} < a_{j_1} < \cdots < a_{j_m}$ a množiny $\{i_1,\ldots,i_k\}, \{j_1,\ldots,j_m\}$ tvoří disjunktní rozklad[9] množiny $\{1,\ldots,n\}$.*

Jinými slovy Gilbreathova permutace je taková permutace, kterou můžeme rozdělit na dvě podposloupnosti, jednu rostoucí a druhou klesající, přičemž kterýkoli prvek rostoucí podposloupnosti je větší než kterýkoli prvek podposloupnosti klesající. Příkladem Gilbreathovy permutace je permutace 564783921, jejíž možné rozklady můžeme vidět na obrázku 1.9. Všimněme si, že rozklad permutace na podposloupnosti je jednoznačný až na první prvek, který můžeme zařadit jak do jedné, tak do druhé podposloupnosti.

[9]Říkáme, že množiny $M_1,\ldots,M_n$ tvoří disjunktní rozklad množiny M právě tehdy, když M je sjednocením množin $M_1,\ldots,M_n$ a průnikem množin $M_1,\ldots,M_n$ je prázdná množina.

Obrázek 1.9: Rozklad Gilbreathovy permutace 564783921.

Představa rozkladu nám nyní pomůže i při určení počtu Gilbreathových permutací. Stačí si uvědomit, že Gilbreathovu permutaci délky n můžeme jednoznačně zadat tím, že určíme, které pozice mají být obsazeny prvky z rostoucí a které z klesající posloupnosti. Takových zadání je zřejmě 2^n. Prvek na pozici 1 můžeme zařadit jak do jedné, tak druhé posloupnosti a tedy vždy dvě různá zadání odpovídají jedné Gilbreathově permutaci. Proto celkový počet Gilbreathových n-permutací je 2^{n-1}.

Není náhoda, že tento výsledek získáváme již podruhé v této kapitole. Snadno nahlédneme, že Gilbreathovy permutace patří do množiny permutací neobsahujících vzory 132 a 312. Víme-li navíc, že počet Gilbreathových n-permutací je roven počtu všech n-permutací neobsahujících vzory 132 a 312, můžeme formulovat následující větu.

Věta 1.11.2. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina všech Gilbreathových permutací prvků množiny $\{1,\dots,n\}$ rovna množině všech permutací prvků množiny $\{1,\dots,n\}$, které neobsahují vzory* 132 *a* 312.

Gilbreathovy permutace mají několik zajímavých vlastností, které si shrneme v následující větě.

Věta 1.11.3. *Nechť π je permutace prvků $\{1,\dots,n\}$. Následující čtyři tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *π je Gilbreathova permutace.*
2. *Pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$ platí, že prvních j prvků permutace π, tedy prvky $\pi(1),\dots,\pi(j)$, tvoří množinu po sobě jdoucích přirozených čísel.*
3. *Pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$ platí, že prvních j prvků permutace π dává po dělení číslem j různé zbytky.*
4. *Pro všechna j,k taková, že $jk \le n$, dávají čísla $\pi((k-1)j+1)$, $\pi((k-1)j+2)$, $\dots,\pi(kj)$ různé zbytky při dělení číslem j.*

Důkaz.

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Víme, že Gilbreathovu permutaci lze rozdělit na rostoucí a klesající podposloupnost. Z definice plyne, že první prvek rostoucí podposloupnosti musí být právě o 1 vyšší než první prvek klesající podposloupnosti a v obou podposloupnostech se po sobě jdoucí prvky musí lišit právě o jedna. Pro každý prvek tedy platí, že je o jedna menší než nejmenší, nebo o jedna větší než největší z předchozích prvků. Odtud plyne (1) $\Rightarrow$ (2).

Naopak pokud má prvních j prvků tvořit množinu po sobě jdoucích přirozených čísel, musí být prvek $\pi(j)$ o 1 menší než nejmenší, nebo o 1 větší než největší z předchozích prvků. Zřejmě jej pak můžeme zařadit do klesající, nebo rostoucí podposloupnosti, které tvoří Gilbreathovu permutaci. Vidíme tedy, že i (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

Implikace (2) $\Rightarrow$ (3) je zřejmá.

Implikaci (3) $\Rightarrow$ (2) dokážeme. Předpokládejme, že druhý prvek permutace $\pi(2)$ není roven ani $\pi(1) + 1$ ani $\pi(1) - 1$, tedy existuje nějaké $d > 1$, pro které platí $\pi(2) = \pi(1) + d$ nebo $\pi(2) = \pi(1) - d$. Zde však docházíme ke sporu s (3), protože prvních d prvků už by po dělení číslem d nedávalo různé zbytky.

Obdobně, pokud prvních $k - 1$ členů permutace π tvoří množinu po sobě jdoucích čísel a budeme předpokládat, že existuje nějaké $d > 1$, pro které platí $\pi(k) = \pi(k-1) + d$ nebo $\pi(k) = \pi(k-1) - d$, dojdeme ke sporu. Pro $d \leq k$ by prvek $\pi(k)$ měl stejný zbytek po dělení k jako některý z předcházejících prvků. Pro $d > k$ by opět již nemohlo platit, že prvních d prvků dává různé zbytky po dělení číslem d.

(3) $\Leftrightarrow$ (4)

Implikace (4) $\Rightarrow$ (3) je zřejmá.

Dokážeme, že i (3) $\Rightarrow$ (4). Podle (3) dává prvních $2j$ prvků permutace π po dělení číslem $2j$ různé zbytky. Odtud plyne, že pro každý možný zbytek po dělení číslem j v této množině najdeme právě dva prvky, které dávají tento zbytek při dělení číslem j. Jelikož prvních j prvků dává po dělení j různé zbytky, musí různé zbytky dávat i prvky z množiny $\{\pi(j+1), \pi(j+2), \dots \pi(2j)\}$.

Obdobně bychom ukázali, že různé zbytky dávají i prvky množiny $\{\pi(2j + 1), \pi(2j+2), \dots, \pi(3j)\}$ a tak dále.

$\square$

2. Praktická část

2.1 Patnáctka

Příklad 2.1.1 (Patnáctka)**.** *Hlavolam Patnáctka, s jehož různými obměnami se můžeme setkat i v současnosti, se těšil velké oblibě už v devatenáctém století. Tato hračka se skládá z* 15 *očíslovaných čtvercových dílků a čtvercové krabičky, do které lze dílky vyskládat tak, jak to vidíme na obrázku* 2.1*. Vedle* 15 *dílků je zde jedno volné místo, které umožňuje přesouvání dílků.*

Úkolem je naskládat dílky náhodně do krabičky a pak je pomocí dovolených tahů, tedy přesunů dílků vodorovně nebo svisle na volné místo, uvést do základního uspořádání, viz obrázek 2.1 *– vpravo.*

8	2	5	4
1	6	7	11
9	10	15	12
3	14	13	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obrázek 2.1: Hlavolam patnáctka, vpravo základní uspořádání.

Vypráví se, že jedním z důvodů, proč se patnáctka těšila velké oblibě, byla odměna vypsaná na konci 19. století. Výrobce tohoto hlavolamu prý přislíbil 1000 dolarů tomu, komu se podaří vyřešit uspořádání znázorněné na obrázku 2.2 *[9].*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Obrázek 2.2: Uspořádání, za jehož vyřešení byla vypsána odměna.

Na první pohled by se mohlo zdát, že úkol nebude příliš obtížný, protože oproti základnímu uspořádání jsou zde zaměněny pouze dva dílky. Vypsanou odměnu však nikdy nikdo nezískal. Důvodem byla skutečnost, že hlavolam v tomto uspořádání vyřešit nelze. Dokažte, že hlavolam v uspořádání na obrázku 2.2 *opravdu není řešitelný.*

Je zřejmé, že řešitelná jsou právě ta uspořádání, která lze získat ze základního uspořádání povolenými tahy. Podívejme se tedy, jaká uspořádání takto můžeme získat.

Vyjdeme ze základního uspořádání, ve kterém pomyslný dílek na prázdném místě označíme číslem 16. Jednotlivým pozicím v krabičce přiřadíme rovněž odpovídající čísla od 1 do 16.

Chceme-li provést sérii tahů, na jejímž konci bude prázdná pozice opět v pravém dolním rohu, snadno nahlédneme, že celkový počet tahů musí být sudý. (Počet posunutí prázdného místa nahoru musí být stejný jako počet posunutí dolů a počet posunutí doprava musí být stejný jako počet posunutí doleva.)

Nyní se zaměříme na vlastnosti permutace, která bude po této sérii tahů číslu pozice přiřazovat číslo dílku. Jelikož každý tah odpovídá jedné transpozici, bude tuto permutaci vždy možné vyjádřit jako složení sudého počtu transpozic. Podle věty 1.5.15 můžeme říci, že tato permutace bude tedy vždy sudá.

Podíváme-li se však na zadané uspořádání, na první pohled vidíme, že jemu odpovídající permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & \dots & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

má pouze jednu transpozici, a proto je lichá. Zřejmě tedy neexistuje taková série povolených tahů, která by zadané uspořádání přeměnila v uspořádání základní.

Při řešení této úlohy jsme ukázali, že uspořádání, která odpovídají lichým permutacím, nejsou řešitelná. O řešitelnosti zadání odpovídajících sudým permutacím toho zatím mnoho nevíme. Lze však dokázat, že všechna tato zadání řešitelná jsou. Důkaz již přesahuje rámec této práce, avšak můžeme jej najít například v [9].

2.2 Vězni a čepice

Příklad 2.2.1 (Vězni a čepice). *Ve věznici je 10 vězňů. Ředitel je postaví do řady tak, že každý z vězňů vidí pouze na vězně, kteří stojí před ním. Poslední tedy vidí na všechny ostatní vězně, první naopak nevidí na nikoho. Ředitel vezme 11 čepic různých barev, které vězni předem znají, a 10 z nich náhodně posadí vězňům na hlavy. Jedenáctou čepici ukryje. Úkol, který musejí vězni splnit, aby se dostali na svobodu, je následující: Počínaje posledním budou vězni postupně hádat, jakou barvu čepice mají na své hlavě. Vězni stojící před nimi jejich odpověď vždy uslyší. Žádná barva nesmí být vyslovena dvakrát. Před plněním úkolu mají vězni povoleno dohodnout se na společné strategii. Pokud všichni odpoví správně, budou propuštěni, pokud kdokoli z nich neuspěje, budou všichni popraveni. Najděte nejvhodnější strategii, kterou mohou vězni zvolit.*

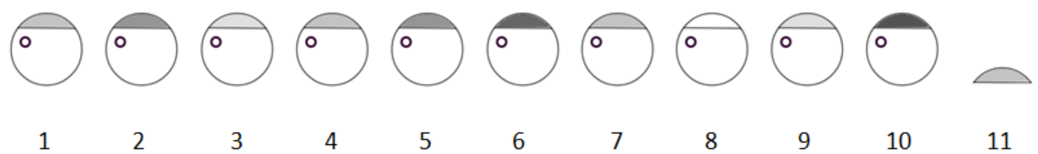
Úloha převzata z [10].

Budeme hledat optimální řešení, proto je užitečné si hned na začátku uvědomit omezení tohoto řešení. První hádající vidí 9 z 11 čepic a tedy má na výběr dvě barvy, které mohou být barvou jeho čepice. Není však nic, co by mu mohlo napovědět, která z nich to je. Jakákoli strategie tedy nemůže mít pravděpodobnost úspěchu větší než 50%.

Pokud by vězni žádnou strategii nezvolili, zbývají každému z nich po vyloučení barev, které vidí před sebou a barev, které už vyslovil někdo za ním, dvě rovnocenné možnosti. Pravděpodobnost úspěchu jednotlivých vězňů je tedy $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost společného úspěchu je součinem těchto pravděpodobností.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 9{,}8 \cdot 10^{-4}$$

Nyní se pokusme najít strategii, která vězňům poskytne více naděje. Na pomoc vezmeme své poznatky o permutacích. Označíme si osoby v řadě zepředu dozadu čísly od 1 do 10. Navíc si představíme prázdné místo za posledním vězněm, na kterém je položena poslední zbývající čepice, a toto místo označíme číslem 11. Viz obrázek 2.3. Čísla od 1 do 11 přiřadíme i barvám. (Předem, nezávisle na rozmístění čepic.)



Obrázek 2.3: Obrázek k úloze 2.2.1.

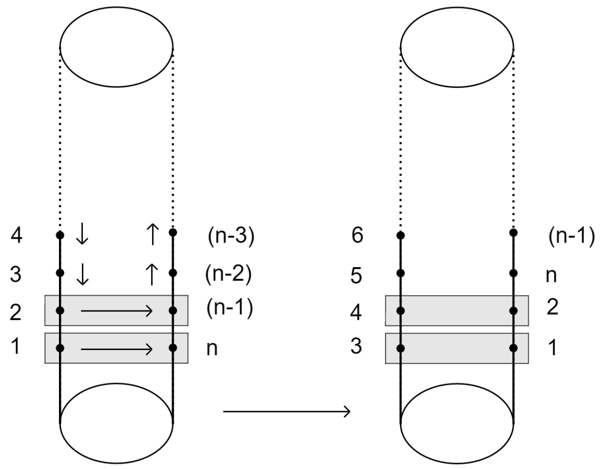
Ve chvíli kdy 10. vězeň hádá barvu své čepice, vidí čepice všech vězňů před sebou, má tedy na výběr dvě možnosti, barvu čepice na své hlavě a barvu čepice, která leží na místě za ním. Každé možnosti odpovídá jedna permutace množiny $\{1,\ldots,11\}$, která číslu vězně přiřazuje číslo barvy. Tyto dvě permutace se liší právě jednou transpozicí a tedy je jedna z nich sudá a druhá lichá. Strategie, která maximalizuje šanci na úspěch, spočívá v tom, že se vězni již předem dohodnou, že vsadí na jednu z těchto možností, a této volbě pak podřídí všechna rozhodnutí.

Vysvětleme si nyní, jak strategie funguje. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že vězni vsadí na to, že permutace je lichá. Vězeň číslo 10 tedy zvolí ze dvou možností tu, která odpovídá liché permutaci (šance, že je volba správná, je 50%). Vězeň číslo 9 má nyní na výběr dvě barvy, které nevidí na hlavách vězňů před sebou a které ještě nebyly vyřčeny. Za předpokladu, že permutace je lichá, a tedy i že vězeň číslo 10 volil správně, volí vězeň číslo 9 opět ze dvou možností, které se liší znaménkem odpovídající permutace, přičemž zvolí tu lichou. Obdobná situace nastane pro každého dalšího vězně.

Pokud je permutace opravdu lichá, rozhodli se všichni vězni správně a budou propuštěni. Pokud je permutace sudá, rozhodl se špatně již první vězeň, všichni budou popraveni a na odpovědích ostatních vězňů pro účely naší úlohy již nezáleží. Pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace je lichá, a tedy i úspěšnost popsané strategie, je 50%. Výše jsme zdůvodnili, že tato úspěšnost je nejvyšší možná, což dokazuje, že toto řešení je optimální.

2.3 Lanovka v Breckenridge

Příklad 2.3.1 (Lanovka v Breckenridge)**.** *V coloradském městečku Breckenridge je lyžařská lanovka fungující následujícím způsobem: Mezi horní a dolní stanicí lanovky neustále obíhá smyčka lana, na které jsou připevněny sedačky. V horní stanici je jedno výstupní místo, kde lyžaři opouštějí lanovku – sedačky se zde pohybují spolu s lanem. V dolní stanici jsou však dvě nástupní místa umístěná nad sebou. Vždy, když do této stanice vjede dvojice sedaček, obě dvě se odpojí z vlečného lana, lyžaři se usadí na sedačky a poté se obě sedačky připojí na protější straně smyčky vlečného lana, viz obrázek* 2.4. *Dojde tedy k záměně pořadí těchto sedaček. Popsaný postup umožňuje, aby lanovka mohla jet rychleji a lyžaři stále stíhali nastupovat do sedaček.[11]*



Obrázek 2.4: Obrázek k úloze 2.3.1.

Určete, kolik sedaček musí projet nástupní stanicí, než se poprvé obnoví výchozí pozice sedaček, pokud je celkový počet sedaček n.

Úloha převzata z [12].

Očíslujme sedačky ve výchozí pozici tak, jak je naznačeno na obrázku 2.4. Nyní najdeme permutaci, která odpovídá průchodu jedné dvojice sedaček nástupní stanicí. Jedná se o permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & (n-2) & (n-1) & n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ptáme se, po kolika provedeních této permutace se obnoví výchozí postavení sedaček. Zajímá nás tedy řád permutace π. Podle věty 1.5.20 můžeme řád permutace snadno určit jako součin délek jejích cyklů.

Další postup se bude mírně lišit podle toho, zda je n sudé, nebo liché. Pokud je n **sudé**, je permutace π tvořena jedním jediným cyklem délky n a můžeme ji zapsat takto:

$$\pi = (1,\ 3,\ 5,\ \dots, n-1,\ 2,\ 4,\ \dots,\ n)$$

.

Řád permutace je v tomto případě roven délce tohoto cyklu.

Pokud je n **liché**, je permutace tvořena dvěma cykly, čili ji lze zapsat takto:

$$\pi = (1,\ 3, 5,\ \ldots, n-2,\ n)(2,\ 4,\ 6,\ n-3,\ n-1).$$

Snadno si rozmyslíme, že délka prvního cyklu je $\frac{(n+1)}{2}$, zatímco délka druhého cyklu je $\frac{(n-1)}{2}$. Jelikož se jedná o dvě po sobě jdoucí a tedy nesoudělná čísla, získáme řád permutace jejich vynásobením. Pro n lichá je tedy řád permutace π roven $\frac{(n+1)\dot(n-1)}{4}$.

Jelikož jedno provedení permutace π odpovídá průchodu dvou sedaček, musíme řád permutace nakonec ještě vynásobit dvěma. Pro n sudá se výchozí postavení sedaček obnoví po projetí $2n$ sedaček. Pro n lichá musí nástupní stanicí projet $\frac{(n+1)\dot(n-1)}{2} = \frac{(n^2-1)}{2}$ sedaček.

2.4 Problém 100 vězňů

Příklad 2.4.1 (Problém 100 vězňů)**.** *Ve věznici je* 100 *vězňů s přidělenými čísly* 1 *až* 100*. Všichni jsou odsouzeni k smrti, avšak ředitel věznice jim dá poslední šanci na záchranu. V jeho kanceláři je* 100 *zásuvek (označených čísly* 1 *až* 100*) a v zásuvkách jsou náhodně umístěny karty s čísly všech vězňů. (V každé zásuvce je právě jedna karta.) Ředitel řekne, že každý z vězňů smí sám vejít do kanceláře a nahlédnout do* 50 *zásuvek s cílem najít kartu s vězňovým číslem. Vězni musí všechny karty v zásuvkách nechat a zásuvky po sobě zavřít. Po opuštění místnosti už nesmí komunikovat s ostatními vězni. Pokud se všem podaří najít svou kartu, budou propuštěni. Pokud byť jen jediný z nich neuspěje, všichni zemřou. Jakou strategii mají vězni zvolit a jaká je jejich šance na přežití?*

Úloha převzata z [13, str. 124] a [14].

Na první pohled se může zdát, že vyhlídky vězňů jsou velmi neveselé. Pokud by každý z nich šel a otevřel 50 náhodných zásuvek, je pro každého jednotlivě pravděpodobnost úspěchu $\frac{1}{2}$. Jelikož úspěchy jednotlivých vězňů jsou v tomto případě nezávislé jevy, je pravděpodobnost, že uspěje všech 100 vězňů, rovna

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 8 \cdot 10^{-31}.$$

Je tu však jiná strategie, která sice nedokáže úspěch všech vězňů zaručit, ale dokáže jeho pravděpodobnost značně zvýšit. Nejprve si popíšeme, jak tato strategie vypadá, a poté si objasníme, jak funguje. Vězni znalí kombinatoriky budou postupovat následujícím způsobem: Každý z vězňů jako první otevře zásuvku označenou svým číslem. Pokud v ní nenajde své číslo, otevře jako další zásuvku popsanou právě tím číslem, které našel. Takto pokračuje, dokud nenajde své číslo nebo nevyčerpá svých 50 pokusů.

Ač se nám to třeba nezdá, má výše popsaná strategie více než 30% šanci na úspěch. Myšlenka je následující: Zobrazení, které každému číslu zásuvky přiřazuje číslo karty v ní obsažené, není nic jiného než permutace, označme ji π. Snadno si uvědomíme, že pokud vězni dodrží popsanou strategii, pak pořadí otevíraných zásuvek odpovídá pořadí prvků v cyklech permutace π. Každý z vězňů pak uspěje právě tehdy, když cyklus, ve kterém se jeho číslo nachází, má délku nejvýše 50. Společně tedy vězni uspějí právě v případě, kdy permutace π neobsahuje cyklus delší než 50. Pravděpodobnost, že se vězni tímto způsobem dostanou ven, odpovídá pravděpodobnosti, že náhodná permutace 100 prvků neobsahuje cyklus délky více než 50.

Potřebujeme tedy zjistit, kolik existuje permutací 100 prvků, které obsahují cyklus délky větší než 50. Uvědomme si, že cyklus takové délky může být v permutaci 100 prvků nejvýše jeden. Délku tohoto cyklu označme l. Je $\binom{100}{l}$ způsobů, jak vybrat prvky tohoto cyklu a $(l-1)!$ (viz příklad 1.5.11) způsobů, jak z nich vytvořit cyklus. Prvky, které nejsou součástí cyklu, pak mohou být uspořádány $(100-l)!$ způsoby. Počet permutací 100 prvků obsahujících cyklus délky $l > 50$ je pak

$$\binom{100}{l} \cdot (l-1)! \cdot (100-l)! = \frac{100!}{l!(100-l)!}(l-1)!(100-l)! = \frac{100!}{l}.$$

Počet všech permutací s cyklem délky větší než 50, který budeme značit Q, pak získáme jako sumu

$$Q = \sum_{l=51}^{100} \frac{100!}{l} = 100! \cdot \sum_{l=51}^{100} \frac{1}{l},$$

a pravděpodobnost, že náhodná permutace bude obsahovat cyklus délky větší než 50, jako

$$\overline{P} = \frac{Q}{100!} = \frac{1}{100!} \cdot 100! \cdot \sum_{l=51}^{100} \frac{1}{l} = \sum_{l=51}^{100} \frac{1}{l}.$$

Pravděpodobnost jevu opačného, tedy pravděpodobnost, že náhodná permutace neobsahuje cyklus délky více než 50, a tedy i pravděpodobnost, že se vězni výše popsanou strategií dostanou na svobodu, je

$$P = 1 - \overline{P} = 1 - \sum_{l=51}^{100} \frac{1}{l} \approx 0{,}31 = 31\%.$$

Příklad 2.4.2 (Problém 100 vězňů II)**.** *Pokud by nepřející ředitel znal tuto strategii, mohl by karty do zásuvek schválně uspořádat tak, aby permutace obsahovala cyklus délky větší než* 50*. Měli by i v takovém případě vězni šanci uniknout?*

Ano, vězni se mohou předem domluvit na jiném náhodně zvoleném způsobu číslování zásuvek a tím obnovit náhodnost permutace a svoji 31% šanci na přežití.

2.5 Puntičkář v autobuse

Příklad 2.5.1 (Puntičkář v autobuse). *Představme si místenkový autobus o n místech, ve kterém jsou všechny místenky předem rozprodány. Cestující, kteří si předem zakoupili jízdenku, postupně přistupují do vozu a každý z nich stojí před rozhodnutím, zda se posadí na své rezervované sedadlo, nebo se spokojí s libovolným neobsazeným místem.*

Adam, první osoba, která nastoupí do autobusu, příliš nedbá pravidel, a tak se náhodně usadí na jednu ze sedaček. Následně nastoupí dalších $n-2$ osob, které se zachovají stejně jako Adam a sednou si na náhodně zvolené sedačky, aniž by se ohlíželi na číslo své místenky. Poslední n-tý cestující je však puntičkář, a tak se rozhodne, že bude stůj co stůj sedět právě na místě, které si rezervoval. Pokud najde místo volné, posadí se. Pokud ale na svém místě najde jinou osobu, donutí ji, aby mu místo uvolnila a navíc trvá na tom, že i tato osoba se musí posadit na své místo. Puntičkář kontroluje přesouvání cestujících i nadále a stále trvá na tom, že každý, kdo se zvedne ze sedačky, se smí posadit pouze na místo, které mu určuje jeho místenka.

Jaká je pravděpodobnost, že Adam, který nastoupil do autobusu jako první a usadil se na náhodné sedadlo, bude otravným puntičkářem donucen toto sedadlo opustit?

Úloha převzata z [15].

Cestujícím přiřadíme čísla od 1 do n a stejně označíme i jim místenkou přiřazená sedadla. Bez újmy na obecnosti můžeme puntičkáře označit číslem 1 a Adama číslem 2. Nyní uvažujeme permutaci, která každému cestujícímu kromě puntičkáře přiřazuje sedadlo, na které se na počátku náhodně usadil, a puntičkáři přiřazuje poslední volné sedadlo, které zbylo. Snadno nahlédneme, že taková permutace odpovídá náhodné permutaci množiny $\{1,\dots,n\}$. Označme tuto permutaci π.

Nyní se zamyslíme nad tím, jak by vypadal rozklad permutace π na cykly. Pokud na puntičkáře zbude právě jeho vlastní sedadlo, pak $\pi(1) = 1$. Je zřejmé, že prvek 1 se nachází sám v cyklu délky 1. Pokud však $\pi(1) \neq 1$, nachází se prvek 1 v cyklu s dalšími prvky. V takovém případě najde puntičkář své místo obsazené a spustí lavinu přesouvání, ve které každý zúčastněný, nenajde-li své místo volné, zvedne ze sedačky toho, kdo sedí na jeho místě. Lze nahlédnout, že toto přesouvání se dotkne právě těch pasažérů, jejichž čísla se nacházejí s 1 ve stejném cyklu. Náš úkol zjistit, jaká je pravděpodobnost, že Adam bude muset opustit místo, na které se posadil, tedy můžeme převést na otázku: Jaká je pravděpodobnost, že prvky 1 a 2 leží v témže cyklu permutace π?

Víme, že permutací n prvků je celkem $n!$. Nyní najdeme počet permutací obsahujících prvky 1 a 2 v témže cyklu.

1. způsob řešení

Označíme k délku takového cyklu. Zřejmě platí $2 \leq k \leq n$. Počet možností jak vybrat prvky, které se budou nacházet s prvky 1 a 2 v témže cyklu délky k, je $\binom{n-2}{k-2}$. Cyklů obsahujících daných k prvků, je $(k-1)!$ (viz příklad 1.5.11) a počet způsobů, jak uspořádat zbylých $n-k$ prvků, je $(n-k)!$. Počet všech permutací

$\{1, \ldots, n\}$ obsahujících prvky 1 a 2 v témže cyklu označíme Q a vyjádříme jej jako sumu

$$Q = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}(k-1)!(n-k)! = \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}(k-1)!(n-k)!$$

$$= (n-2)! \sum_{k=2}^{n}(k-1) = (n-2)! \sum_{k=1}^{n-1} k = (n-2)! \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n!}{2}.$$

Pravděpodobnost, že prvky 1 a 2 budou v témže cyklu náhodně zvolené permutace, označíme P a získáme ji jako podíl počtu permutací, které tuto podmínku splňují, ku všem možným permutacím.

$$P = \frac{Q}{n!} = \frac{\frac{n!}{2}}{n!} = \frac{1}{2}.$$

2. způsob řešení

Množinu S_n všech permutací $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny A a B. Do množiny A zařadíme permutace, které mají prvky 1 a 2 v různých cyklech. Do množiny B pak zařadíme permutace, které mají prvky 1 a 2 v témže cyklu. Pokud budeme permutace zapisovat tak, že cykly budou začínat svým nejnižším prvkem a budou seřazeny podle počátečního prvku vzestupně, můžeme psát:

$$A = \{\pi \in S_n : \pi = (1, \ldots)(2, \ldots) \ldots\}.$$

$$B = \{\pi \in S_n : \pi = (1, \ldots 2, \ldots) \ldots\}.$$

Nyní uvažujme zobrazení $\varphi : A \to B$, které každé permutaci z A přiřadí permutaci z B, kterou získáme vymazáním dvojice závorek „)(“ stojící před prvkem 2. Zobrazení inverzní $\varphi^{-1} : B \to A$ naopak přiřadí permutaci z B takovou permutaci z A, kterou získáme vložením dvojice závorek „)(“ před prvek 2.

Např. pro $n = 8$:

$$\varphi((1, 7, 3)(2, 8)(6, 5, 4)) = (1, 7, 3, 2, 8)(6, 5, 4)$$

a

$$\varphi^{-1}((1, 7, 3, 2, 8)(6, 5, 4)) = (1, 7, 3)(2, 8)(6, 5, 4).$$

Zobrazení φ je bijekce, a proto víme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost. Množiny A a B tvoří disjunktní rozklad množiny S_n, a proto platí, že součet jejich mohutností je mohutnost S_n, tedy $n!$. Odtud jednoduchou úvahou plyne

$$|A| = |B| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}.$$

Odtud stejně jako v 1. způsobu řešení dostáváme $P = \frac{1}{2}$.

Příklad 2.5.2 (Puntičkář v autobuse II)**.** *Pojďme nyní naši původní otázku trochu rozšířit. Představme si, že s Adamem nastoupilo do autobusu na první zastávce i několik jeho kamarádů, jichž bylo s Adamem celkem k. Jaká je pravděpodobnost, že puntičkář donutí změnit sedadlo všech těchto k osob?*

Příklad převzat z [15].

Podobně jako v předchozí úloze můžeme cestujícím přiřadit libovolná čísla od 1 do n. Tentokrát pro nás bude o něco pohodlnější, pokud si puntičkáře označíme číslem n a Adama s jeho kamarády čísly $n-1, \ldots, n-k$. Analogicky jako v předchozím příkladě se pak můžeme ptát: Jaká je pravděpodobnost, že se prvky $n-k$ až n budou nacházet v témže cyklu náhodné permutace?

I v tomto případě nám pomůže bijekce. A sice bijekce definovaná ve větě 1.6.1. Označme si náhodnou permutaci množiny $\{1, \ldots, n\}$ symbolem π a uvědomme si, jak bude vypadat její standardní zápis (viz definice 1.5.9). Prvek n je největší ze všech prvků, a proto standardní zápis bude ve tvaru

$$\pi = (\ldots)\ldots(n\ldots).$$

n tedy bude vždy na první pozici posledního cyklu. Nyní se podívejme na permutaci, kterou permutaci π přiřadí základní bijekce (věta 1.6.1). Snadno si uvědomíme, že prvky $n-k$ až $n-1$ se v této permutaci budou nacházet v jednořádkovém zápisu za prvkem n právě tehdy, pokud patřily všechny do téhož cyklu permutace π spolu s prvkem n. Díky základní bijekci tak můžeme místo pravděpodobnosti, že se prvky $n-k$ až n budou nacházet v témže cyklu náhodné n-permutace, počítat pravděpodobnost, že v jednořádkovém zápisu náhodné permutace bude prvek n předcházet prvky $n-k$ až $n-1$. V náhodné n-permutaci jsou vůči sobě i prvky $n-k$ až n uspořádány náhodně, a tak pravděpodobnost, že prvek n předchází prvky $n-k$ až $n-1$, je stejná, jako že prvek n stojí na prvním místě náhodné permutace prvků $n-k$ až n. Jelikož těchto prvků je dohromady $k+1$ a každá pozice je pro prvek n stejně pravděpodobná, je tato pravděpodobnost rovna

$$\frac{1}{k+1}.$$

Pokud za k dosadíme 1, dostáváme řešení předcházející úlohy.

2.6 Vyměněné doklady

Příklad 2.6.1 (Vyměněné doklady)**.** *Karel cestoval na služební cestu do zahraničí. Na zpáteční cestě jeho autobus zastavila hraniční kontrola, při které řidič autobusu vybral doklady od všech n cestujících. Po příjezdu byl řidič tak unavený, že když cestujícím doklady vracel, rozdal jim je zcela náhodně.*

Karel se doma podívá do peněženky a pokud najde cizí občanský průkaz, vydá se na adresu na něm uvedenou. Najde majitele průkazu a průkaz si s ním vymění. Pokud stále nebude mít svůj vlastní průkaz, vydá se na adresu uvedenou na nově získaném průkazu. Stejně bude pokračovat, dokud nedostane svůj vlastní průkaz.

Budeme předpokládat, že se žádní dva cestující neznají a že nikdo nedostal stejný nápad, jako Karel. Určete pravděpodobnost, že Karel navštíví právě $k < n$ osob, než najde svůj občanský průkaz.

Tak jako vždy úlohu nejprve převedeme do řeči matematiky. Cestující a příslušné doklady označíme čísly od 1 do n. Karlovi bez újmy na obecnosti přiřadíme číslo n. Nyní budeme uvažovat permutaci přiřazující číslu cestujícího číslo dokladu. Tuto permutaci označíme jako π.

Počet osob, které bude muset Karel navštívit, je závislý na délce cyklu permutace π, ve kterém se nachází prvek n. Než se Karel dostane ke svému průkazu, bude muset navštívit všechny osoby, které jsou s ním „v jednom cyklu“. Počet osob, které bude muset Karel navštívit, tedy bude vždy o jedna menší než délka cyklu, ve kterém se nachází prvek n.

Naše otázka tedy zní: Kolik je permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$, ve kterých je prvek n součástí cyklu délky $k+1$?

Stejně jako již několikrát využijeme základní bijekci, zavedenou ve větě 1.6.1. Tuto bijekci budeme značit f.

Prvek n bude ve standardním zápisu permutace π vždy prvním prvkem posledního cyklu. Snadno si uvědomíme, že tento cyklus má délku $k+1$ právě tehdy, když platí $(f(\pi))(n-k) = n$. Počet permutací, ve kterých je prvek n součástí cyklu délky $k+1$, je proto stejný, jako počet permutací, v jejichž jednořádkovém zápisu je prvek n na pozici $(n-k)$. Těchto permutací je, jak víme,

$$(n-1)!.$$

Na tomto výsledku je zajímavé, že nezávisí na hodnotě k. Jinými slovy, pro všechny hodnoty $k < n$ existuje stejný počet n-permutací, v nichž je vybraný prvek součástí cyklu délky k.

Využijeme-li získané výsledky, můžeme již určit pravděpodobnost, že n je součástí cyklu délky k, a tedy že Karel navštíví právě k osob. Tato pravděpodobnost bude rovna

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

a je tedy stejně pravděpodobné, že Karel dostane svůj průkaz hned při první návštěvě, jako že bude muset obejít všech n cestujících.

2.7 Vánoční

Příklad 2.7.1 (Vánoční)**.** *V některých třídách je zvykem, že si žáci rozdávají dárky následujícím způsobem. Každý napíše své jméno na lístek a vhodí jej do klobouku. Jména v klobouku se zamíchají a následně si žáci jeden po druhém vylosují jméno spolužáka, kterému pak na vánoční besídku pořídí dárek.*

Někdy se stane, že se takto vytvoří dvojice žáků, kteří si dárky vymění mezi sebou. Určete, kolik takových dvojic můžeme očekávat ve třídě o n žácích. (Předpokládejme, že pokud si někdo vylosuje své vlastní jméno, opravdu přinese dárek sám sobě.)

Úloha inspirována [16].

Chceme-li určit očekávanou hodnotu náhodné veličiny, hledáme její střední hodnotu. Připomeňme, že střední hodnota $\mathbf{E}(X)$ diskrétní náhodné veličiny X, která nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_i$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_i$ se počítá podle vzorce

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

Tedy lze říci, že střední hodnota veličiny X je vážený průměr hodnot, kterých veličina X nabývá.

Při našich výpočtech využijeme následující vztahy, které plynou z definice střední hodnoty a jejichž odvození můžeme najít například v [17].

Pro diskrétní náhodné veličiny X a Y a pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí vztahy

$$\mathbf{E}(a) = a,$$

$$\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X + Y).$$

Nyní již zpět k řešení naší úlohy. Žákům přiřadíme čísla od 1 do n. Permutaci, která přiřazuje číslu dárce číslo obdarovaného, označíme jako π. Je zřejmé, že počet vzniklých dvojic odpovídá počtu cyklů délky dva v rozkladu permutace π na nezávislé cykly. Pro řešení naší úlohy tedy potřebujeme určit střední hodnotu počtu cyklů délky dva náhodné permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$.

V řešení úlohy 2.6.1 jsme odvodili, že pravděpodobnost, že vybraný prvek n-permutace je součástí cyklu délky k, nezávisí na volbě hodnoty k a je rovna $\frac{1}{n}$. Tento poznatek nyní využijeme.

Abychom se vyhnuli příliš abstraktnímu odvození, pomůžeme si názornou představou převzatou z [18]. Představme si, že vezmeme tužku a papír a budeme dělat čárku za každý prvek náhodné permutace π, který je součástí cyklu délky k. Víme, že za každý z prvků s pravděpodobností $\frac{1}{n}$ čárku uděláme a s pravděpodobností $\frac{n-1}{n}$ ji neuděláme. Střední hodnota počtu čárek za jednotlivými prvky tedy bude rovna

$$\frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} \cdot 0 = \frac{1}{n}.$$

Střední hodnota celkového počtu čárek za všemi prvky pak bude rovna

$$\frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

k čárek na našem pomyslném papíře odpovídá přítomnosti jednoho cyklu délky k v naší permutaci. Proto můžeme říci, že pro $k \leq n$ je střední hodnota počtu cyklů délky k v náhodné n-permutaci rovna

$$\frac{1}{k}.$$

Může to být překvapivé, ale tato hodnota opravdu nezávisí na počtu prvků permutace.

Nyní už se můžeme vrátit k naší původní otázce. Střední hodnota počtu cyklů délky dva u náhodné permutace je rovna $\frac{1}{2}$. Můžeme tedy říci, že na dvě třídy, kde si žáci rozdávají dárky způsobem popsaným v zadání úlohy, připadá průměrně jedna dvojice žáků, kteří si dárky vymění mezi sebou.

2.8 Šatnářka

Příklad 2.8.1 (Šatnářka). *Problém roztržité šatnářky je jednou z klasických úloh kombinatoriky. Do divadelní šatny přijde* 10 *pánů a každý z nich si zde odloží svůj klobouk. Po skončení představení však roztržitá šatnářka vydá každému z pánů jeden náhodně vybraný klobouk. Určete, jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj vlastní klobouk.*

Úloha převzata z [6].

Abychom zjistili, jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj vlastní klobouk, musíme se ptát, kolika způsoby lze pánům klobouky přiřadit, aniž by některý z nich dostal ten svůj. V řeči matematiky zní otázka takto: Kolik je permutací 10 prvků, které nemají ani jeden pevný bod? Na tuto otázku nám přímo odpovídá věta 1.3.6. Počet permutací 10 prvků bez pevných bodů, který označíme N, podle ní můžeme spočítat ze vztahu

$$N = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{10!}{k!}.$$

Pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk, je rovna

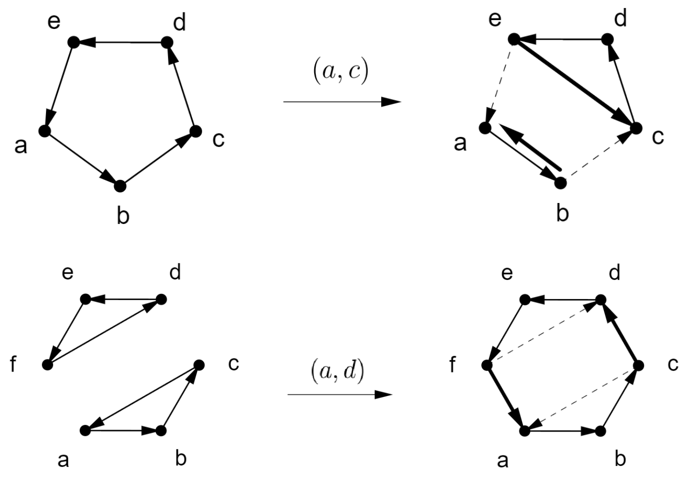
$$\frac{N}{10!} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{1}{k!} \approx 0{,}37.$$

Příklad 2.8.2 (Šatnářka II). *Nyní si položíme jinou otázku. Představme si, že šatnářka pánům náhodně rozdá klobouky, avšak pánové budou všímaví a každý, kdo dostane jiný než svůj klobouk, si výměny ještě v šatně všimne. Pánové si mezi sebou začnou klobouky ve dvojicích vyměňovat tak, aby nakonec každý z nich odešel se svým vlastním. Určete, na čem závisí, kolik výměn bude potřeba, a spočtěte pravděpodobnost, že jich nebude potřeba více než tři.*

Způsobů, jak si pánové mezi sebou mohou měnit klobouky tak, aby každý dostal ten svůj, je samozřejmě mnoho. Nás zajímají ty z nich, při kterých je potřeba nejméně výměn. Výměna klobouků mezi dvěma pány není v řeči matematiky nic jiného než transpozice. A tak se tedy vlastně ptáme: Kolik nejméně je potřeba transpozic k tomu, abychom z dané permutace vytvořili identitu?

Na permutaci, podle které šatnářka pánům přidělila klobouky, se můžeme dívat jako na součin cyklů. Identita, kterou se snažíme získat, je jediná permutace, která je tvořena pouze jednoprvkovými cykly, a její počet cyklů je tedy 10. Nyní se podívejme na to, jak se počet cyklů změní, pokud mezi sebou dva prvky vyměníme, tedy pokud původní permutaci složíme s transpozicí. Pokud transpozice zamění dva prvky, které jsou každý součástí jiného cyklu, vznikne z těchto dvou cyklů jeden. Pokud transpozice zamění prvky téhož cyklu, cyklus se naopak rozdělí na dva, viz obrázek 2.5.

Nejrychlejší cestou, jak získat identitu, je tedy volit transpozice tak, aby se každou z nich počet cyklů o jedna zvýšil. Je-li pak počet cyklů původní permutace k, budeme potřebovat pro získání identity $10 - k$ transpozic. Vrátíme-li se



Obrázek 2.5: Složením cyklu $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ s transpozicí $(a,\ c)$ vzniká permutace $(a,\ b)(c,\ d,\ e)$ složená ze dvou nezávislých cyklů. Složením permutace $(a,\ b,\ c)(d,\ e,\ f)$ složené ze dvou nezávislých cyklů s transpozicí $(a,\ d)$ vzniká cyklus $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$.

zpět k pánům a kloboukům, počet potřebných výměn je závislý na počtu cyklů původní permutace.

Nikdo z pánů samozřejmě nezná celou permutaci, a tak je nejjednodušší, když si budou měnit klobouky tak, aby při každé výměně alespoň jeden z dvojice dostal zpátky svůj vlastní klobouk. Při každé takové výměně dojde k tomu, že z jednoho cyklu délky n vznikne jeden cyklus délky 1 a jeden cyklus délky $n-1$.

Zajímá-li nás pravděpodobnost, že nebudou nutné více než tři výměny, budeme potřebovat znát počet desetiprvkových permutací složených ze sedmi a více cyklů. Zde nám pomohou Stirlingova čísla 1. druhu z definice 1.8.1. Stirlingovo číslo $s(n,k)$ udává počet n-permutací o k cyklech[1]. Naše pravděpodobnost tedy bude rovna

$$\frac{s(10,7)+s(10,8)+s(10,9)+s(10,10)}{10!} = \frac{9450+870+45+1}{10!} \approx 0{,}003 = 0{,}3\%.$$

Příklad 2.8.3 (Šatnářka III). *Představme si, že pánové i ředitel divadla jsou velmi shovívaví a nevadí jim šatnářčina roztržitost. Šatnářka tak nedostane výpověď, ale každý večer znovu a znovu přivítá* 10 *pánů a provede náhodnou permutaci jejich klobouků. Jaká bude střední hodnota počtu výměn, které každý večer proběhnou?*

Již víme, že počet potřebných výměn závisí na počtu cyklů permutace. Určíme tedy nejprve střední hodnotu počtu cyklů náhodné n-permutace.

[1]Hodnoty Stirlingových čísel 1. druhu jsou uvedeny v příloze A.2 této práce.

1. způsob řešení

Již víme, že pravděpodobnost, že n-permutace bude mít právě k cyklů, je rovna

$$\frac{s(n,k)}{n!},$$

a tedy střední hodnota počtu cyklů n-permutace bude rovna

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s(n,i)}{n!} i = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} s(n,i) i.$$

Nás konkrétně zajímá střední hodnota počtu cyklů desetiprvkové permutace, proto za n dosadíme 10 a dostaneme

$$\frac{1}{10!} \sum_{i=1}^{10} s(10,i) i \approx 2{,}93.$$

Proto očekávaný průměrný počet výměn bude roven

$$10 - \frac{1}{10!} \sum_{i=1}^{10} s(10,i) i \approx 7{,}07.$$

2. způsob řešení

Nyní si ukážeme ještě jeden způsob, jak najít střední hodnotu počtu cyklů n-permutace, aniž bychom potřebovali znát hodnoty Stirlingových čísel 1. druhu. Využijeme výsledek odvozený v řešení příkladu 2.7.1, který říká, že pro $k \leq n$ je střední hodnota počtu cyklů délky k v náhodné n-permutaci rovna

$$\frac{1}{k}.$$

Sečteme-li střední hodnoty počtu cyklů délky k přes všechna k od jedné do n, získáme střední hodnotu celkového počtu cyklů náhodné n-permutace. Dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

tedy n-tý částečný součet harmonické řady.

Pro porovnání dosadíme za n hodnotu 10 a získáme

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10} \approx 2{,}93,$$

což je stejný výsledek jako při použití 1. způsobu řešení.

2.9 Roztržitý prodavač

Příklad 2.9.1 (Roztržitý prodavač). *Šatnářka z předchozí úlohy není jediná, kdo má ve svém zaměstnání potíže. Její bratr Pavel pracuje v internetové prodejně koberců a má na starosti rozesílání objednávek zákazníkům. Jednoho dne si* 10 *různých lidí objednalo jeden a tentýž druh koberce, avšak každý o jiné délce. Pavel všech* 10 *koberců zabalil a vytiskl štítky s adresami zákazníků. Ve své roztržitosti ale štítky s adresami pomíchal a nalepil je na balíky zcela náhodně.*

Zákazníci, kteří dostali koberec stejné nebo větší délky, než si objednali, byli spokojeni. Každý zákazník, který dostal kratší koberec, než si objednal, však poslal do prodejny koberců stížnost. Pokud na Pavla přijdou více než tři stížnosti, bude propuštěn ze zaměstnání. Jaká je pravděpodobnost, že o místo nepřijde?

Seřadíme zákazníky vzestupně podle délky objednaného koberce a přiřadíme jim čísla od jedné do deseti. Stejná čísla přiřadíme i všem jimi objednaným kobercům.

Nyní se budeme zabývat náhodnou permutací přiřazující číslu zákazníka číslo odeslaného koberce. Tuto permutaci označíme π. Podle zadání zákazník číslo i odešle stížnost právě tehdy, když bude platit, že $\pi(i) < i$, tedy v případě, že i není slabým překročením permutace π. V našem případě nás tedy bude zajímat, jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace π má alespoň sedm slabých překročení.

Z věty 1.9.3 víme, že počet n-permutací s k slabými překročeními je roven $A(n,k)$, a tedy konkrétně počet desetiprvkových permutací s alespoň sedmi slabými překročeními je $A(10,10) + A(10,9) + A(10,8) + A(10,7)$. Nyní již snadno určíme, že pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace deseti prvků má alespoň sedm slabých překročení, a tedy i pravděpodobnost, že prodejce Pavel nebude propuštěn, je rovna

$$\frac{A(10,10) + A(10,9) + A(10,8) + A(10,7)}{10!} =$$

$$= \frac{1 + 1013 + 47840 + 455192}{10!} = \frac{504046}{10!} \approx 0{,}14 = 14\%.$$

Pavel by se tedy měl začít poohlížet po jiné práci.

2.10 Futurama theorem

Příklad 2.10.1 (Futurama theorem)**.** *Zajímavou úlohu týkající se permutací můžeme najít také ve známém americkém animovaném seriálu Futurama. V 10. díle 6. série nazvaném The prisoner of Benda jedna z hlavních postav profesor Farnsworth sestrojí přístroj, který dokáže dvěma lidem vyměnit těla, a sám si hned vymění tělo s postavou jménem Amy. Zpočátku se to zdá jako výborný nápad, ale po čase, když chtějí svá těla dostat zpět, se ukáže, že přístroj může výměnu s každou dvojicí těl provést pouze jednou.*

Je jasné, že pokud se má problém vyřešit, bude nutné do výměny zapojit další osoby. Dříve než se podaří najít řešení, použijí přístroj i další postavy a tím se situace ještě zkomplikuje. V jednu chvíli je ve výměně zapojeno 9 postav, z nichž žádná nemá své vlastní tělo, viz tabulka 2.1*. Vše nakonec vyřeší dvojice matematicky zdatných basketbalistů, kteří přijdou s tvrzením, že dokáží vše uvést do původního stavu nezávisle na tom, k jakým výměnám do dané chvíle došlo, a že k tomu budou potřebovat pouze dvě osoby dosud nezapojené do výměn. [19] [20]*

mysl	**tělo**
Amy (A)	Hermes (H)
Bender (B)	císař Nikolai (N)
císař Nikolai (N)	úklidový kbelík (K)
Fry (F)	Zoidberg (Z)
Hermes (H)	Leela (L)
Leela (L)	profesor Farnsworth (P)
profesor Farnsworth (P)	Bender (B)
úklidový kbelík (K)	Amy (A)
Zoidberg (Z)	Fry (F)

Tabulka 2.1: Tabulka k příkladu 2.10.1.

Dokažte, že se řešení opravdu dá najít vždy nezávisle na počtu zapojených osob a způsobu, jak k promíchání došlo. Najděte konkrétní způsob, jakým lze vyřešit situaci zadanou tabulkou 2.1.

Nejprve si uvědomíme, že přiřadíme-li n osobám čísla od jedné 1 do n a stejná čísla přiřadíme i jejich tělům, pak předpis, který přiřadí číslu osoby číslo těla, není nic jiného než permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$. Situaci, kdy každá osoba má své vlastní tělo, odpovídá permutace $12 \ldots n$ a výměně těl mezi dvojicí postav odpovídá složení původní permutace s transpozicí zaměňující pozice jim příslušných prvků.

Ukážeme, že platí následující tvrzení, označované v angličtině někdy jako „Futurama theorem“:

Pro každou permutaci π se dvěma pevnými body x a y existuje posloupnost navzájem různých transpozic, které vždy zahrnují alespoň jeden z prvků x,y, jejichž složením s permutací π vznikne permutace $12 \ldots n$.

Důkaz výše zmíněného tvrzení najdeme v samotném seriálu Futurama. Tvůrce tohoto dílu Ken Keeler, mimo jiné absolvent oboru aplikovaná matematika na

Harvardově univerzitě, jej vložil do krátké scény, ve které basketbalisté ukazují tento důkaz zapsaný na tabuli. Budeme sledovat jejich myšlenky. Oproti původnímu důkazu však provedeme drobné změny, aby důkaz více odpovídal tomu, jak k permutacím v této práci přistupujeme a byl lépe srozumitelný.

Pozorování 1.

Nechť n-permutace π je cyklus délky $k \geq 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme prvky přeznačit tak, abychom mohli psát

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ k & 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Přidáme-li dva další prvky x a y, které se budou zobrazovat samy na sebe, získáme permutaci

$$\pi_1^\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & x & y \\ k & 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n & x & y \end{pmatrix}.$$

Zavedeme permutaci σ množiny $\{1, \dots, n, x, y\}$ složenou z navzájem různých transpozic

$$\sigma = (x,\ k) \dots (x,\ 2)(y,\ 1)(y,\ k)(x,\ 1).$$

Ukážeme, že platí

$$\sigma \circ \pi_1^\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & x & y \\ 1 & 2 & \dots & n & y & x \end{pmatrix}.$$

Nahlédneme, že složením permutací $\pi_1^\star$ a transpozic $(y, k)(x, 1)$ se prvky x a y začlení do cyklu. Složením vzniklé permutace s transpozicemi $(x, k) \dots (x, 2)(y, 1)$ se pak prvky 1 až k z cyklu vyčlení a zobrazí samy na sebe, viz obrázek 2.6. Permutace σ tedy vrátila prvky 1 až k na „původní místa“ a zaměnila pozice prvků x a y.

Pozorování 2.

Nechť n-permutace π je cyklus délky $k \geq 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme prvky přeznačit tak, abychom mohli psát

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ k & 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Přidáme-li k π další dva prvky x a y, které se zobrazí na sebe navzájem, získáme permutaci

$$\pi_2^\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & x & y \\ k & 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n & y & x \end{pmatrix}.$$

Zavedeme permutaci σ množiny $\{1, \dots, n, x, y\}$ složenou z navzájem různých transpozic:

$$\sigma = (x,\ k) \dots (x,\ 2)(y, 1)(y,\ k)(x,\ 1).$$

Ukážeme, že platí

$$\sigma \circ \pi_2^\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & x & y \\ 1 & 2 & \dots & n & x & y \end{pmatrix}$$

Lze nahlédnout, že složením permutací $\pi_2^\star$ a transpozice $(x,\ 1)$ se prvky x a y začlení do cyklu. Složením vzniklé permutace s transpozicí $(y,\ k)$ se cyklus rozdělí na dva cykly, v jednom z těchto cyklů se nachází prvek x a v druhém prvek y. Složením vzniklé permutace s transpozicemi $(x,\ k)\dots(x,\ 2)(y,\ 1)$ se pak všechny prvky zobrazí samy na sebe, viz obrázek 2.7. Permutace σ tedy vrátila všechny prvky na „původní místa“.

Nyní uvažujme libovolnou permutaci n prvků a přidejme k ní dva prvky x, y, které se zobrazují samy na sebe. Každou takovou permutaci můžeme rozložit na nezávislé cykly. Jak jsme ukázali, každý z těchto cyklů lze pomocí navzájem různých transpozic, splňujících podmínky zadání, rozložit na cykly délky jedna tak, že budeme střídavě aplikovat poznatky pozorování 1 a pozorování 2. V případě, že měla permutace na začátku sudý počet cyklů délky větší než jedna, vrátíme výše naznačeným postupem všechny prvky na svá místa. V případě, že měla permutace na začátku lichý počet cyklů délky větší než jedna, provedeme na závěr ještě transpozici prvků x a y.

Nyní popsaný postup použijeme na konkrétní situaci řešenou v seriálu. Uspořádáme osoby do kruhů odpovídajících cyklům permutace a přidáme dvě samostatně stojící osoby X a Y

$$(A, H, L, P, B, N, K)(F, Z)(X)(Y).$$

Jako první se budeme zbavovat kruhu délky dva, Zvolíme výměny (X, F) a (Y, Z), čímž osoby X a Y začleníme do kruhu

$$(X, F)(Y, Z)(A, H, L, P, B, N, K)(F, Z)(X)(Y) =$$

$$= (A, H, L, P, B, N, K)(F, Y, Z, X).$$

Nyní provedeme výměny (X, Z) a (Y, F) čímž se těla Frye a Zoidberga navrátí svým původním majitelům

$$(X, Z)(Y, F)(A, H, L, P, B, N, K)(F, Y, Z, X) =$$

$$= (A, H, L, P, B, N, K)(Y, X)(F)(Z).$$

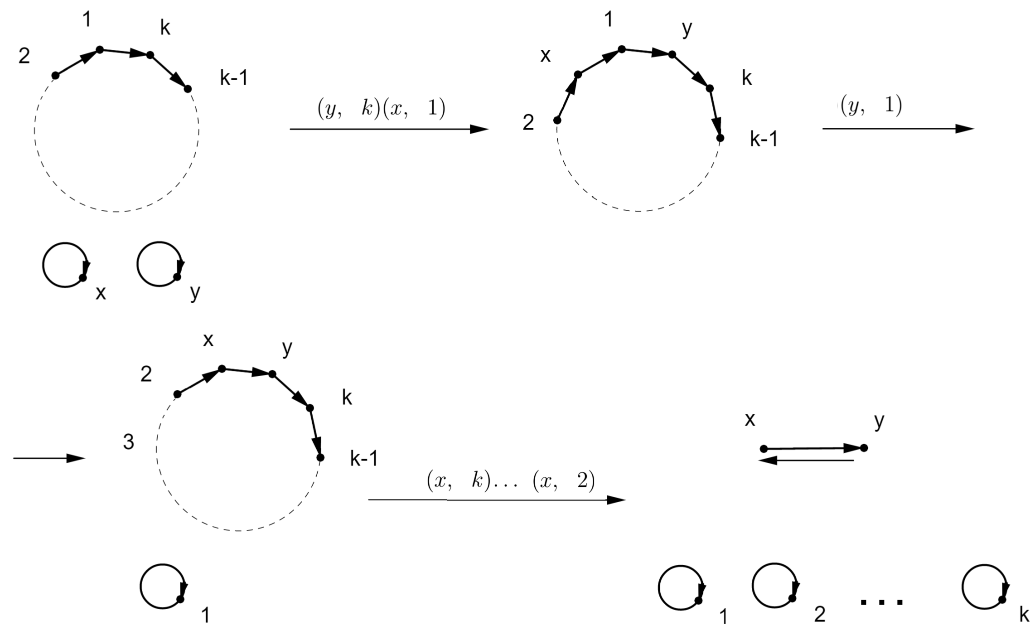
Pokračujeme cyklem délky 7. Provedeme výměnu (X, A), čímž se osoby X a Y zapojí do cyklu

$$(X, A)(A, H, L, P, B, N, K)(Y, X)(F)(Z) = (X, Y, A, H, L, P, B, N, K)(F)(Z)$$

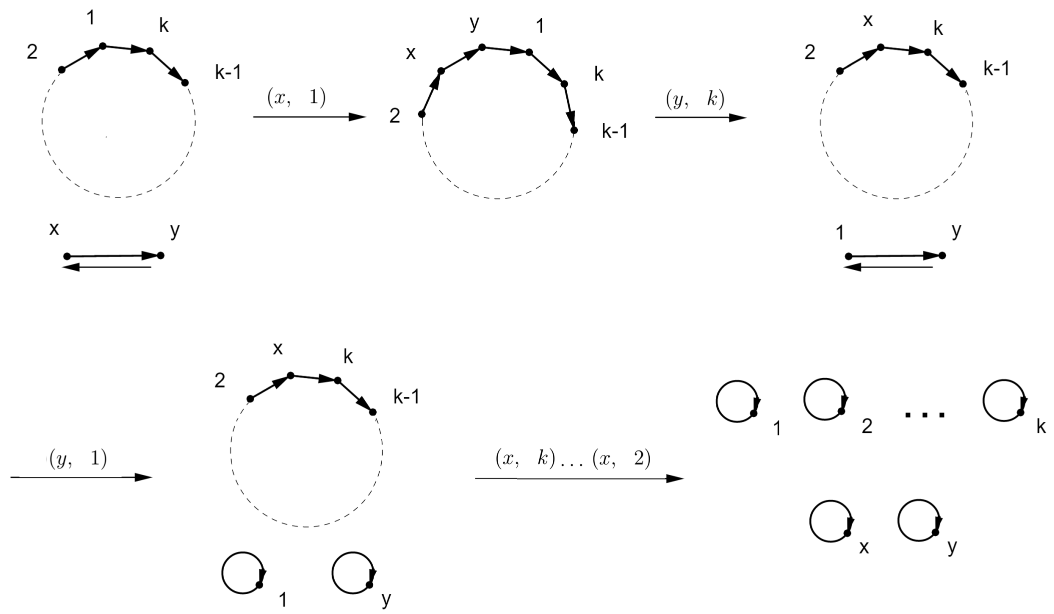
a výměnu (Y, K), čímž se kruh rozdělí na dva, z nichž jeden obsahuje X a druhý Y

$$(Y, K)(X, Y, A, H, L, P, B, N, K)(F)(Z) =$$

$$= (K, X)(A, H, L, P, B, N, Y)(F)(Z).$$



Obrázek 2.6: Postupné složení permutace $\pi_1^\star$ s transpozicemi tvořícími permutaci σ.



Obrázek 2.7: Postupné složení permutace $\pi_2^\star$ s transpozicemi tvořícími permutaci σ.

Pak už jen postupně provedeme výměny (X, K), (Y, N), (Y, B), (Y, P), (Y, L), (Y, H) a (Y, A), čímž navrátíme všem osobám jejich původní těla

$$(Y, A)(Y, H)(Y, L)(Y, P)(Y, B)(Y, N)(X, K)(K, X)(A, H, L, P, B, N, Y)(F)(Z)$$

$$=$$

$$(A)(H)(L)(Y)(P)(B)(N)(K)(X)(F)(Z).$$

2.11 Šaty pro princezny

Příklad 2.11.1 (Šaty pro princezny)**.** *Král má sedm dcer, všechny jsou štíhlé, ale žádné dvě nejsou stejně vysoké. Všechny sestry se těší, až přijde jejich den a ony se provdají za krásného prince. Tatínek král je šetrný, a tak rozhodl takto: Královský krejčí ušije šaty na míru princezně, která se provdá jako první. Pokud se bude vdávat jako další princezna, která bude menší, sama si zkrátí šaty po své sestře a vdá se v nich. Pokud bude vyšší než předchozí princezna, král šaty prodá a za utržené peníze nakoupí látku, ze které krejčí ušije šaty nové. Obdobně se bude postupovat i před svatbou každé další princezny. Jaká je pravděpodobnost, že krejčí bude šít právě troje svatební šaty?*

Snadno domyslíme, že krejčí bude šít troje šaty právě tehdy, když právě dvakrát dojde k situaci, že po nižší princezně se bude vdávat princezna vyšší. Jak už to nejen v reálném světě, ale i v pohádkách někdy bývá, v řešení problému nám opět pomohou permutace. Seřadíme sestry vzestupně podle výšky a přiřadíme jim čísla od jedné do sedmi a problém tak převedeme na otázku: Kolik permutací sedmi prvků má dva vzestup[2]?

Kdo pozorně četl teoretickou část práce, ten již ví, že o počtu takových permutací mluví Eulerova čísla zavedená v definici 1.7.3. Konkrétně počet permutací sedmi prvků se dvěma vzestupy určuje číslo $A(7,3)$[3]. Jelikož počet všech permutací 7 prvků je 7!, bude výsledná pravděpodobnost rovna

$$\frac{A(7,3)}{7!} = \frac{1191}{5040} \approx 0{,}24 = 24\%.$$

[2]Vzestup je taková pozice v jednořádkovém zápisu permutace, na které je prvek, který je bezprostředně následován prvkem vyšším. Viz definice 1.7.1

[3]Hodnoty Eulerových čísel jsou uvedeny v příloze A.1 této práce.

2.12 Prohlídka ZOO

Příklad 2.12.1 (Prohlídka ZOO)**.** *Pavel s Jitkou rádi navštěvují zoologickou zahradu. Dokonce zde mají i svou oblíbenou trasu, kudy vždy chodí. Když dnes přišli ke vchodu, zjistili na informační ceduli, že do konce otevírací doby se na jejich trase bude konat krmení pěti různých druhů zvířat, každé v jiný čas. Pavel s Jitkou by rádi navštívili co nejvíce z nich, ale zároveň se chtějí držet své trasy a nechtějí se vracet. Čekání jim nevadí. Jaká je pravděpodobnost, že se jim podaří vidět krmení alespoň tří druhů zvířat?*

Jednotlivým zvířatům přiřadíme čísla od jedné do pěti tak, jak jsou jejich výběhy postupně umístěny na požadované trase. Časy, kdy jsou krmeny jednotlivé druhy zvířat, seřadíme a rovněž jim přiřadíme čísla od jedné do pěti. Nyní si stačí uvědomit, že Jitce s Pavlem se podaří naplánovat vycházku tak, aby na své trase postupně zhlédli alespoň troje krmení právě tehdy, když permutace přiřazující číslu zvířecího druhu číslo času bude obsahovat vzor 123.

Víme, že počet n-permutací, které neobsahují vybraný vzor délky tři, je roven n-tému Catalanovu číslu. Viz věta 1.10.8. Počet permutací, které tento vzor obsahují, je tedy roven $n! - C_n$. Pravděpodobnost, že n-permutace obsahuje vybraný vzor délky tři, je pak rovna

$$\frac{n! - C_n}{n!}.$$

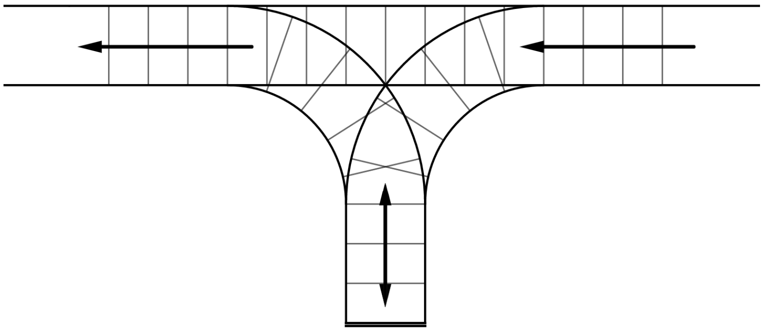
Pavel s Jitkou si budou moci naplánovat vycházku podle svého přání s pravděpodobností

$$\frac{5! - C_5}{5!} = \frac{120 - 42}{120} = 0{,}65 = 65\%.$$

2.13 Řazení vlaků

Příklad 2.13.1 (Řazení vlaků)**.** *V řadě problémů matematické informatiky se využívají takzvané třídící algoritmy, které umožňují seřadit daný soubor prvků podle zadaného kriteria. Následující úloha je inspirována řadícím algoritmem popsaným v knize [21].*

Po trati znázorněné na obrázku 2.8 *přijely z pravé strany v náhodném pořadí vlaky označené čísly od jedné do n.*



Obrázek 2.8: Obrázek k úloze 2.13.1.

Naším úkolem je vlaky seřadit podle čísel vzestupně k odjezdu po levé koleji, přičemž vlaky se po kolejích smí pohybovat pouze ve směru šipek.

Popište postup, kterým lze seřadit co největší počet výchozích uspořádání vlaků a určete, jaká je pravděpodobnost, že se tímto postupem podaří seřadit n vlaků, které přijely v náhodném pořadí.

Budeme postupovat podle [22]. Z obrázku 2.8 vidíme, že k seřazení vlaků máme k dispozici pouze tři různé kroky, které můžeme opakovaně provádět v různém pořadí. Je to

- přesunutí vlaku z pravé koleje na slepou kolej,
- přesunutí vlaku ze slepé koleje na levou kolej,
- přesunutí vlaku z pravé koleje na levou kolej.

Poslední ze zmíněných kroků lze plně nahradit složením prvních dvou, proto jej nemusíme uvažovat.

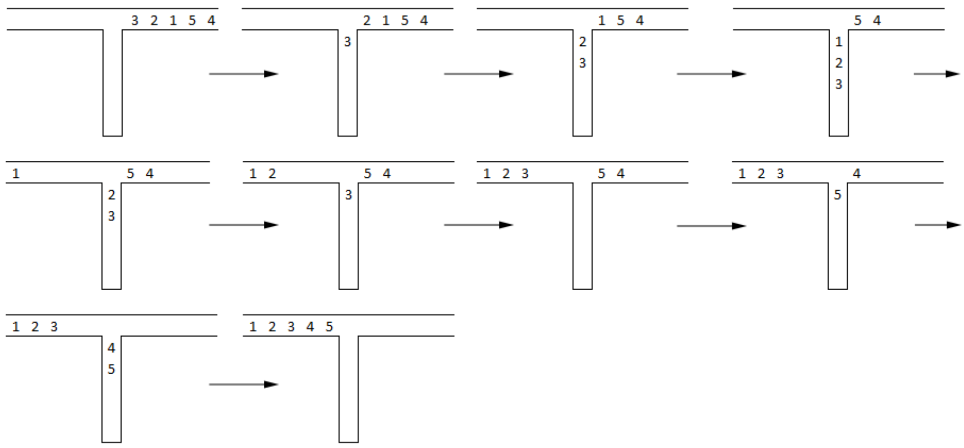
K seřazení použijeme následující postup, při kterém budeme porovnávat čísla vlaků stojících na pravé koleji a na slepé koleji nejblíže k výjezdu:

- Pokud je číslo nejbližšího vlaku na pravé koleji menší než číslo nejbližšího vlaku na slepé koleji nebo pokud je slepá kolej prázdná, přesuneme vlak z pravé koleje na slepou kolej.

- Pokud je číslo nejbližšího vlaku na pravé koleji větší než číslo vlaku na slepé koleji, přesuneme jeden vlak ze slepé koleje na levou kolej.

- Pokud na pravé koleji již nejsou žádné další vlaky, přesuneme vlaky ze slepé koleje jeden po druhém na levou kolej.

Postup si ukážeme na příkladu. Přijede-li po pravé koleji postupně pět vlaků s čísly 3 2 1 5 a 4, seřadíme je podle popsaného postupu tak, jak znázorňuje schéma na obrázku 2.9.

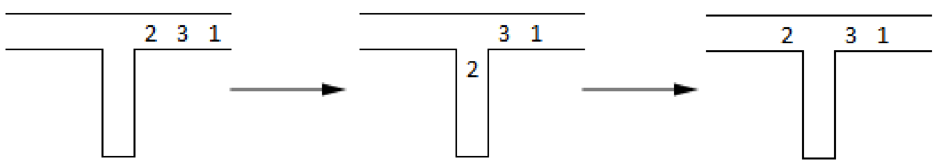


Obrázek 2.9: Ilustrace seřazení vlaků v pořadí 3 2 1 5 4

Snadno nahlédneme, že pokud bychom postupovali jinak, tedy z dvojice vlaků stojících nejblíže na pravé a slepé koleji přesunuli ten s vyšším číslem, vlaky by se seřadit jistě nepodařilo. Tedy výše popsaný postup je jediný možný.

Rovněž ale snadno najdeme taková počáteční uspořádání vlaků, která se ani tímto postupem seřadit nepodaří. Pojďme zjistit, jaká uspořádání to jsou a kolik jich je. Čísla vlaků přijíždějících po pravé koleji tvoří n-permutaci, budeme ji značit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n$.

Nejkratší permutace odpovídající uspořádání, které není možné seřadit popsaným algoritmem, je permutace 231. Že vlaky v tomto počátečním uspořádání popsaným postupem neseřadíme, je zřejmé již po dvou krocích. Viz obrázek 2.10.



Obrázek 2.10: První dva kroky řazení uspořádání odpovídajícího permutaci 231.

Ukážeme, že k obdobnému problému jako v případě permutace 231 dojde i u každé permutace, která bude obsahovat vzor 231.

Pokud permutace π obsahuje vzor 231, můžeme najít tři prvky $p_k < p_i < p_j$ takové, že $i < j < k$. V takovém případě vlak p_i musí opustit slepou kolej dříve, než na ni vjede vlak p_j, což ale znamená, že vlak p_k se už nemůže dostat na svou pozici, která je před vlakem p_i.

Uvědomme si, že vlaky na slepé koleji budou seřazeny vždy správně, a že pokud jsou dva vlaky ve správném pořadí na pravé koleji, budou po provedení algoritmu ve správném pořadí i na levé koleji.

Nyní budeme uvažovat uspořádání, které popsaný algoritmus neseřadí. Pokud po provedení algoritmu stojí dva vlaky ve špatném pořadí, pak tyto dva vlaky musely stát ve špatném pořadí i na pravé koleji před provedením algoritmu. Označme je jako p_i a p_k, kde $i < k$ a $p_k < p_i$. Vlak p_i zřejmě opustil slepou kolej dříve, než na ni vjel vlak p_k, což nutně znamená, že na pravé koleji musel být mezi vlaky p_i a p_k nějaký další vlak s číslem větším než p_i (označme jej p_j), který způsobil, že vlak p_i opustil slepou kolej dříve, než na ni vjel vlak p_k. Permutace odpovídající tomuto uspořádání tedy obsahuje prvky $p_k < p_i < p_j$, pro které platí, že $i < j < k$, a tedy obsahuje vzor 231.

Ukázali jsme, že vlaky lze popsaným postupem uspořádat právě tehdy, když permutace odpovídající výchozímu uspořádání neobsahuje vzor 231. Jak již víme, počet n-permutací neobsahujících vzor 231 je roven n-tému Catalanovu číslu C_n. Pravděpodobnost, že n-permutace nebude obsahovat vzor 231, a tedy i pravděpodobnost, že bude možné náhodné uspořádání n vlaků seřadit popsaným postupem, tedy bude rovna

$$\frac{C_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}\binom{2n}{n}.$$

2.14 Červená, nebo černá?

Příklad 2.14.1 (Červená, nebo černá?). *Na pódium vstoupí kouzelník a požádá publikum, aby zvedl ruku ten, kdo si myslí, že umí poznat lháře. Z lidí, kteří se přihlásí, vybere dobrovolníka, kterého požádá, aby za ním přišel na pódium. Vytáhne balíček karet a několikrát jej promíchá tak, že rozdělí balíček na dvě části a původně spodní část balíčku přesune navrch balíčku. Poté požádá vybraného diváka, aby takto karty zamíchal i on. Nakonec kouzelník vezme karty do ruky a zeptá se diváka kolik mu je let, načež z balíčku kartu po kartě odpočítá na druhou hromádku právě tolik karet, kolik divák odpověděl. Nakonec kouzelník uchopí oba dva balíčky a smíchá je postupem známým jako riffle shufle, který je znázorněný na obrázku* 2.11*.*

Obrázek 2.11: Při míchání *riffle shufle* tvoříme nový balíček tak, že na něj střídavě pouštíme karty z jednoho a druhého balíčku. Karty není nutné pouštět pravidelně.

„Myslím, že karty jsou zamíchány dostatečně“, vykřikne kouzelník, „nyní se ukáže, kdo z nás umí poznat lež lépe.“ Balíček, který má v ruce, kartu po kartě rozdá na dvě stejné hromádky a vybídne dobrovolníka, aby si jednu z hromádek vybral. Druhou z hromádek si vezme kouzelník sám.

„Nyní se podívám na první kartu své hromádky a povím Vám, zda je karta černá, nebo červená. Vaším úkolem je poznat, zda lžu, nebo mluvím pravdu,“ řekne dobrovolníkovi a zahledí se na první kartu. „První karta je černá,“ oznámí. „Věříte mi, nebo ne?“ Po divákově odpovědi kouzelník kartu ukáže publiku a kouzelníkova asistentka zaznamená na připravenou tabuli, zda se divák trefil, či nikoli. Postupně takto kouzelník projde deset karet. Vždy se na kartu podívá, řekne barvu a divák se snaží určit, zda mluví pravdu. Po deseti kartách asistentka spočítá počet správných a špatných odpovědí a oznámí jej publiku.

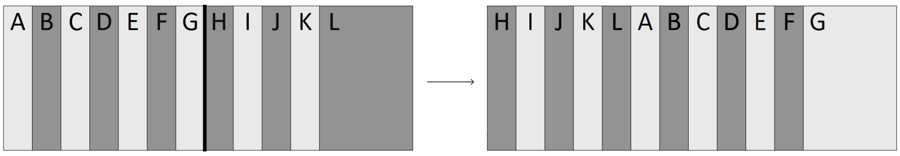
„Nyní si role vyměníme“, řekne kouzelník a požádá dobrovolníka, aby se tentokrát on podíval na vrchní kartu. Poté, co divák řekne barvu karty, kouzelník se na něj dlouze zadívá a určí, zda odpověď byla pravdivá, či nikoli. Dobrovolník kartu opět zvedne a všem ji ukáže. Stejným způsobem pak odkrývá i dalších devět karet a jeho údiv stále roste, protože kouzelník ve všech případech s jistotou pozná lež od pravdy.

Vysvětlete, v čem asi spočívá podstata tohoto karetního triku.

Úloha převzata z [8] a upravena.

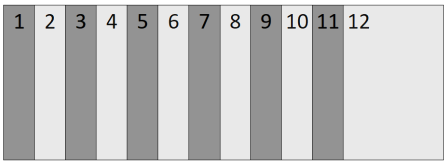
V průběhu tohoto triku není zapotřebí, aby kouzelník tajně nahlížel do karet, měl karty nějak označené, či dokonce měl v publiku „falešného dobrovolníka“. Jediné, co kouzelník potřebuje, je předem připravený balíček karet a trocha matematiky.

Balíček, který kouzelník použil, je předem poskládaný ze sudého počtu karet tak, aby se v něm po jedné střídaly karty černé a červené. Při prvním míchání popsaném v zadání, kdy kouzelník opakovaně rozdělí balíček na dvě části a původně spodní část balíčku přesune navrch balíčku, se na této skutečnosti nic nezmění. V balíčku se budou stále po jedné střídat černé a červené karty. Viz například obrázek 2.12.



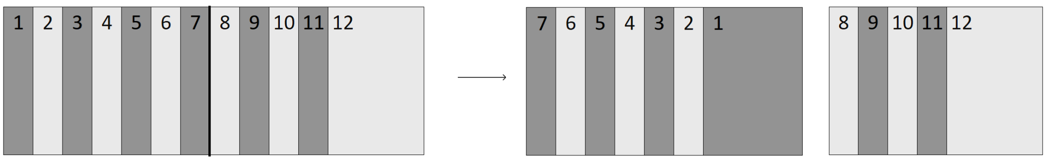
Obrázek 2.12: Rozdělení balíčku karet na dvě části a přesunutí spodní části balíčku navrch zachovává pravidelné střídání barev.

Další míchání je o něco složitější. Abychom mohli sledovat, co se při něm s kartami děje, označme si je čísly od 1 do n tak, jak jsou v této chvíli seřazeny v balíčku. Bez újmy na obecnosti můžeme nyní předpokládat, že liché karty jsou červené a sudé černé, tak jako například na obrázku 2.13.



Obrázek 2.13: Očíslování karet - pohled z lícové strany, karta č. 1 na vrchu balíčku.

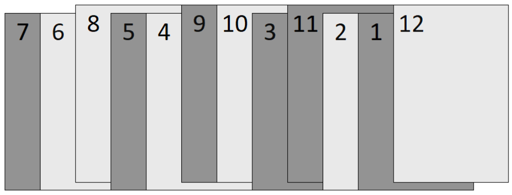
Když kouzelník vytvořil druhou hromádku karet tak, že jednu po druhé odpočítal určitý počet karet, karty v nově vzniklém balíčku byly zřejmě v opačném pořadí než v balíčku původním, tak jako na obrázku 2.14.



Obrázek 2.14: Balíčky vzniklé odpočítáním karet.

Poté, když obě hromádky spojil do jedné mícháním *riffle shuffle*, vytvořil balíček, jehož příklad můžeme vidět na obrázku 2.15.

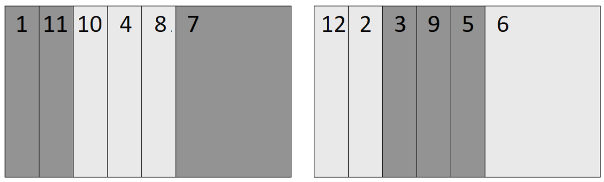
Pozorný čtenář si již nejspíš uvědomil, že permutace, která přiřazuje číslu pozice v nově vzniklém balíčku číslo karty, patří mezi Gilbreathovy permutace. O Gilbreathových permutacích víme, že pro jakékoli j platí, že jak v první, tak i v každé další j-tici této permutace bude dávat každý prvek jiný zbytek po dělení



Obrázek 2.15: Balíček vzniklý mícháním *riffle shuffle*. Karty pocházející původně z balíčku s odpočítanými kartami jsou o něco níže než ostatní.

číslem j. Pokud za j zvolíme číslo 2, znamená to, že pokud permutaci postupně rozdělíme na dvojice, bude v každé dvojici jedno číslo liché a druhé sudé. Proto i v hromádce karet vzniklé popsaným postupem bude první i každá další dvojice obsahovat právě jednu černou a jednu červenou kartu.

Tím, že kouzelník rozdal karty po jedné na dvě hromádky, dosáhl toho, že v těchto hromádkách na stejné pozici byly vždy karty různých barev. Viz například obrázek 2.16. Proto poté, co prohlédl karty na své hromádce, již věděl, jaké barvy mají karty dobrovolníka.



Obrázek 2.16: Výsledné balíčky mají na stejných pozicích karty různé barvy.

Seznam použité literatury

[1] M. Bóna. *Combinatorics of Permutations.* 2nd edition. CRC Press, 2012. ISBN:978-1-4398-5052-7.

[2] R. Stanley. *Enumerative combinatorics.* 2nd edition. Cambridge University Press, 2011. ISBN:978-1-4615-9763-6.

[3] R. Stanley. *Enumerative combinatorics – Volume 2.* 1st edition. Cambridge University Press, 1999. ISBN:0-521-56069-1.

[4] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics.* 2nd edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. ISBN:0-201-55802-5.

[5] J. Bečvář. *Lineární Algebra.* 4. vydání. Matfyzpress, 2010. ISBN:978-80-7378-135-4.

[6] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 3. vydání. Karolinum, 2007. ISBN:978-8-0246-1411-3.

[7] L. Comtet. *Advanced combinatorics.* D. Reidel Publishing Company, 1974. ISBN:90-277-0441-4.

[8] P. Diaconis and R. Graham. *Magical Mathematics.* 3rd edition. Princeton University Press, 2012. ISBN:978-06-9115-164-9.

[9] A. Archer. A modern treatment of the 15 puzzle. *The American Mathematical Monthly*, 106(9):793–799, 1999.

[10] S. Wagon. *Macalester College Problem of the Week – Too Many Hats [online].* [Citováno 9. července 2019], Dostupné z: http://stanwagon.com/potw/2014/p1193.html.

[11] *coloradoskihistory.com [online].* [Citováno 5. července 2019], Dostupné z: http://www.coloradoskihistory.com/chairlift/hss.html.

[12] S. Wagon. *Macalester College Problem of the Week – The Ski Lift Shuffle [online].* [Citováno 5. července 2019], Dostupné z: http://stanwagon.com/potw/2016/p1232.html.

[13] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics.* Cambridge University Press, 2009. ISBN:978-0-521-89806-5.

[14] M. Warshauer and E. Curtin. The locker puzzle. *The Mathematical Intelligencer*, 28(1):28–31, 2006.

[15] V. Pozdnyakov and M. Steele. Buses, bullies, and bijection. *Mathematics Magazine 89*, 89(3):167–176, 2016.

[16] *math.stackexchange.com [online].* [Citováno 13. července 2019], Dostupné z: math.stackexchange.com/questions/1138537/4-people-gift-exchange.

[17] K. Zvára a J. Štěpán. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Matfyzpress, 2012. ISBN:978-80-7378-218-4.

[18] *www.inference.org.uk/is/ [online].* [Citováno 9. července 2019], Dostupné z: www.inference.org.uk/itila/cycles.pdf.

[19] *Futurama.* 10. epizoda 6. série, The Prisoner of Benda [epizoda televizního seriálu]. Comedy Central, USA, 2010.

[20] *www.cut-the-knot.org [online].* [Citováno 9. července 2019], Dostupné z: www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/Futurama.shtml.

[21] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming – Volume 1.* Third edition. Perarson Education, 2012. ISBN:0-201-89683-4.

[22] S. Linusson. *Pattern avoidance and Catalan numbers [online].* [Citováno 13. července 2019], Dostupné z: www.kth.se/social/files/5493dabff2765406ac5c8e75/CatalanEng.pdf.

A. Příloha

	$A(n,0)$	$A(n,1)$	$A(n,2)$	$A(n,3)$	$A(n,4)$	$A(n,5)$	$A(n,6)$	$A(n,7)$	$A(n,8)$	$A(n,9)$	$A(n,10)$
$A(0,k)$	1										
$A(1,k)$	0	1									
$A(2,k)$	0	1	1								
$A(3,k)$	0	1	4	1							
$A(4,k)$	0	1	11	11	1						
$A(5,k)$	0	1	26	66	26	1					
$A(6,k)$	0	1	57	302	302	57	1				
$A(7,k)$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1			
$A(8,k)$	0	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
$A(9,k)$	0	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
$A(10,k)$	0	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

Tabulka A.1: Tabulka Eulerových čísel.

	$s(n,0)$	$s(n,1)$	$s(n,2)$	$s(n,3)$	$s(n,4)$	$s(n,5)$	$s(n,6)$	$s(n,7)$	$s(n,8)$	$s(n,9)$	$s(n,10)$
$s(0,k)$	1										
$s(1,k)$	0	1									
$s(2,k)$	0	1	1								
$s(3,k)$	0	2	3	1							
$s(4,k)$	0	6	11	6	1						
$s(5,k)$	0	24	50	35	10	1					
$s(6,k)$	0	120	274	225	85	15	1				
$s(7,k)$	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
$s(8,k)$	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
$s(9,k)$	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
$s(10,k)$	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

Tabulka A.2: Tabulka Stirlingových čísel 1. druhu.