MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stanislav Král

Logaritmicky optimální investování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D., za neskutečnou trpělivost se mnou a srozumitelné vysvětlování mých nejasností. Dále bych rád poděkoval Adamovi Sýkorovi za celoroční podporu při psaní této práce.

Název práce: Logaritmicky optimální investování

Autor: Stanislav Král

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Nechť máme kapitál, který budeme redistribuovat do nějakých investičních příležitostí. Finanční ohodnocení těchto investic bude tvořit posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných vektorů nabývajících konečně mnoha hodnot. Při každé investici budeme znát a brát v potaz celou historii těchto ohodnocení. Ukazuje se, že pokud naší strategií bude vždy maximalizovat střední hodnotu logaritmu hodnoty investice, označme ji Λ^*, pak je tato strategie v určitém smyslu asymptoticky nejlepší možná.

Pokud libovolná strategie Λ se limitně neblíží k Λ^* a pokud x jde limitně k nekonečnu, potom jednak střední hodnota času, za který si vyděláme alespoň x užitím Λ^*, je o nekonečno menší, než kdybychom užili Λ, a také si vyděláme nekonečněkrát více při strategii Λ^*.

Klíčová slova: střední hodnota logaritmu zisku vsázení asymptotická optimalita

Title: Log-optimal investment

Author: Stanislav Král

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Suppose we have a capital, which we will redistribute into investment opportunities. The financial valuation of these investments will be a sequence of independent, identically distributed random vectors that acquire finite amount of values. We will have full knowledge of the entire history of these valuations before each investment. It turns out that if our strategy is to always maximizes the mean value of the logarithm of the investment value, denoted by Λ^*, then this strategy is asymptotically the best one possible.

If strategy Λ is not asymptotically close to Λ^* and if x goes to infinity, then the mean of the time we earn atleast x using Λ^* is infinitely smaller than the time if we used Λ. We also earn infinitely times more money using the strategy Λ^*.

Keywords: expected log return gambling asymptotic optimality

Obsah

Úvod

Mějme posloupnost nezávislých, nezáporných, stejně rozdělených a diskrétních, náhodných m-dimenzionálních vektorů $\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,...$, který nabývají konečně mnoha hodnot, $m \in \mathbb{N}$. Vektor $\mathbb{X}_n$ budeme interpretovat jako výsledek hry v čase n, kde n je diskrétní. Označme $I = \{1,2,...,m\}$. I bude představovat množinu všech sázkových příležitostí, do kterých lze investovat, $m \in \mathbb{N}$.

Definice 1. *Definujeme funkci $w : b \mapsto E[\log(\mathbb{X}_1^T b)]$. Definiční obor funkce w zavedeme jako*

$$D := \{b \in [0,1]^m;\ \sum_{i=1}^{m} b_j^i = 1,\ P(\mathbb{X}_1^T b = 0) = 0\}.$$

Označme $w^* = \sup_{b\in D} w(b)$.

Věta 2. *Nechť je D neprádná, potom funkce w nabývá svého maxima na D.*

Důkaz. Pokud $b^* \in D$ Funkce w je spojitá na D z věty o spojité závislosti integrálu na parametru, Rataj, str. 13. Pro w^* existuje posloubnost $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in$ obor hodnot w taková, že platí $\lim_{n\to\infty} w_n = w^*$. Pro každé w_n najdeme $b_n \in D$ takové, že $w_n = w(b_n)$. Z $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybereme konvergentní podposloupnost $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že platí $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b^*$, pokud $b^* \in D$, potom ze spojitosti plyne $w(b^*) = w^*$. Stačí dokázat, že b^* je prvkem množiny D.

Množina $\Delta = \{b \in [0,1]^m;\ \sum_{i=1}^{m} b_j^i = 1\ \}$ je uzavřená, a proto b^* je prvkem Δ. Pro spor předpokládejme, že $P(\mathbb{X}_1^T b^* = 0) > 0$. Potom

$$w* = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_x \log(x) P(\mathbb{X}_1^T b_{n_k} = x).$$

Jelikož $\mathbb{X}_1$ i b_{n_k} jsou omezená s.j., $X_1^T b_{n_k}$ je omezená shora, tedy i všechna x.

$$\begin{aligned} w* &= \lim_{k\to\infty} w_{n_k} & (1)\\ &= \lim_{k\to\infty} E[\log(\mathbb{X}_1^T b_{n_k})] & (2)\\ &\le E \limsup_{k\to\infty} \log(\mathbb{X}_1^T b_{n_k}) & (3)\\ &= E \log(\mathbb{X}_1^T b^*), & (4) \end{aligned}$$

kde uvazujete $\log(0) := \infty$. Tedy $\lim_{k\to\infty} w(b_{n_k}) = -\infty$. To je spor, jelikož D je neprázná, takže existuje alespoň jeden prvek $b_0 \in D$ takový, že platí $w(b_0) \in \mathbb{R}$.

□

Libovolné $b \in D$, pro které platí $E[\log(\mathbb{X}_1^T b)] = w^*$. Vektory b^* nejsou jednoznačně určeny, ale hodnota $\log(\mathbb{X}_n^T b^*)$ ano s.j., důkaz ve větě 4.

Označme $\mathscr{F}_n = \sigma(\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,...,\mathbb{X}_n)$. Strategii Λ definujeme jako $\Lambda = (\beta_0,\beta_1,\dots)$ tak, že β_j je náhodný vektor mající hodnoty v D a je $\mathscr{F}_{j-1}$-měřitelné pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$.

$$W_n = \log(\mathbb{X}_n^T \beta_n), \qquad W_n^* = \log(\mathbb{X}_n^T b^*) \tag{5}$$

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} X_i^T \beta_i, \qquad C_n^* = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^T b^* \tag{6}$$

Definice 3. *Mějme strategii* Λ, ***bohatství*** *v čase* n *označíme* C_n *a definujeme jej jako*

$$C_n = \begin{cases} 1, \ n = 0 \\ (X_n^{\tau} b_n)\, C_{n-1}, \ n > 0 \end{cases}$$

$b_n = \Lambda_n$.

Pro strategii Λ, $\mathbb{X}_n^i$ bude představovat výnos akcie i $\in$ I v čase n za 1 jednotku bohatství. β_n budou reprezentovat váhy podle kterých rozdělíme naše bohatství v čase β_{n-1}.

1. Základní věty

Tato kapitola je založena na práci Breiman a kol. (1961).

Věta 4. *Nechť máme b a b^* z množiny D takové, že $w^* = E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*)] = E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b)]$, potom*

$$\mathbb{X}^{\intercal} b^* = \mathbb{X}^{\intercal} b \text{ s.j.}$$

Důkaz. Jelikož střední hodnota náhodných veličin $log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*), log(\mathbb{X}^{\intercal} b)$ existuje a je konečná, platí

$$\mathbb{X}^{\intercal} b^* > 0,\ \mathbb{X}^{\intercal} b > 0 \text{ s.j.} \tag{1.1}$$

Pro každé α, $\alpha^* > 0$, $\alpha + \alpha^* = 1$ zřejmě platí z definice w^*

$$\begin{aligned} \alpha\, E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*)] + \alpha^*\, E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b)] &= w^*(\alpha + \alpha^*) &(1.2)\\ &= w^* &(1.3)\\ &\geq E[\log(\alpha \mathbb{X}^{\intercal} b^* + \alpha^* \mathbb{X}^{\intercal} b)]. &(1.4) \end{aligned}$$

Logaritmus z výrazů uvedených v (1.1) je skoro všude definován a protože logaritmus je konkávní funkce, tedy dostáváme

$$\alpha\ \log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*) + \alpha^*\ \log(\mathbb{X}^{\intercal} b) \leq \log(\alpha \mathbb{X}^{\intercal} b^* + \alpha^* \mathbb{X}^{\intercal} b) \text{ s.j.} \tag{1.5}$$

Aplikujeme-li střední hodnotu na obě strany

$$\begin{aligned} w^* &= \alpha E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*)] + \alpha^* E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b)] &(1.6)\\ &= E[(\alpha \log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*) + \alpha^* \log(\mathbb{X}^{\intercal} b))] &(1.7)\\ &\leq E[\log(\alpha \mathbb{X}^{\intercal} b^* + \alpha^* \mathbb{X}^{\intercal} b)]. &(1.8) \end{aligned}$$

Dohromady z (1.4) a (1.8) máme

$$\alpha E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*)] + \alpha^* E[\log(\mathbb{X}^{\intercal} b)] = E[\log(\alpha \mathbb{X}^{\intercal} b^* + \alpha^* \mathbb{X}^{\intercal} b)]. \tag{1.9}$$

Z nerovnosti (1.5) a z toho, že střední hodnoty se rovnají plyne

$$\alpha \log(\mathbb{X}^{\intercal} b^*) + \alpha^* \log(\mathbb{X}^{\intercal} b) = \log(\alpha \mathbb{X}^{\intercal} b^* + \alpha^* \mathbb{X}^{\intercal} b) \text{ s.j.} \tag{1.10}$$

Na množině $\mathrm{A} = [\mathbb{X}^{\intercal} b^* > 0, \mathbb{X}^{\intercal} b > 0, \mathbb{X}^{\intercal} b^* \neq \mathbb{X}^{\intercal} b]$ v (1.5) nastává ostrá nerovnost kvůli tomu, že logaritmus je ryze konkávní funce, tedy na A neplatí rovnost v (1.10), a proto také platí $P(A) = 0$.

□

Strategii Λ^* definujeme jako $\Lambda^* = (b^*, b^*, \ldots)$.

Poznámka. $W_1^*, W_2^*, \ldots$ tvoří posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin.

Poznámka. Předpokládejme, že $w^* \in \mathbb{R}$.

Definice 5. *Řekneme, že hra je **výhodná**, pokud existuje strategie Λ taková, pro kterou $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$ s.j.*

Věta 6. *Hra je výhodná právě tehdy, když $w^* > 0$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ Předpokládejme, že $0 < w^* = E[W_k^*]$, k $\in \mathbb{N}$, W_k^* jsou nezávislé, stejně rozdělené s konečnou střední hodnotou, definované v (5), tedy ze Silného zákona velkých čísel máme

$$0 < w^* = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} W_k^*}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{log(C_n^*)}{n}\ s.j. \tag{1.11}$$

tedy $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} W_k^* = \infty$, což implikuje i $\lim_{n\to\infty} C_n^* = \infty$ s.j.

$\Rightarrow$ Nechť $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$ s.j. Využijeme větu 23, která říká, že pro každou strategii platí $\lim_{n\to\infty}(\frac{C_n}{C_n^*}$ existuje konečná s.j. Tedy $\lim_{n\to\infty} C_n^* = \infty$ s.j. Využitím věty z Appendixu 4.1 dostáváme, že $w^* > 0$.

$\square$

2. Teorie obnovy

Tato kapitola je založena na práci Siegrist, kapitoly 1-3.

2.1 Základní věty

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. $X_i \in [0,\infty)$, $\mathrm{E}[X_i] = \mu > 0$.

Označme

F je distribuční funkce X_i,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{2.1}$$

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[S_i \leq t]}, \;\; t \in [0,\infty),$$

$$T_t = t - S_{N_t}, \; t \in [0,\infty), \tag{2.2}$$

$$R_t = S_{N_t+1} - t, \;\; t \in [0,\infty). \tag{2.3}$$

Poznámka. T_t značí, kolik času uběhlo od poslední události v čase t.
R_t značí, kolik času zbývá do další události v čase t.

Poznámka.

$$[S_{N_t} \leq t - x] = [T_t \geq x] = [R_{t-x} > x], \; x \in [0,t], \; t \in [0,\infty). \tag{2.4}$$

Důkaz. Druhý a třetí jev tvrdí, že nenastala událost procesu N v $(t-x,t]$.

$[T_t \geq x] = [t - S_{N_t} \geq x] = [S_{N_t} \leq t - x]$.

□

Dále označme

$F_n(t) = P(S_n \leq t)$, $t \in [0,\infty)$.

Definice 7. *Funkce $M(t) = E[N_t]$, $t \in [0,\infty)$, se nazývá* ***funkce obnovy.***

Tedy $M(t) = E[N_t] = E\sum_{n=1}^{\infty} 1_{[S_n \leq t]} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.

Věta 8. *$M(t)$ je skoro jistě konečná pro konečné t kladné.*

Důkaz. Z definice $M(t)$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t).$$

Pro $\varepsilon > 0$ zadefinujeme si náhodné veličiny Y_i

$$Y_i = \begin{cases} \varepsilon, \; X_i > \varepsilon \\ 0, \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí $0 \leq Y_i \leq X_i$, Y_i jsou nezávislé, stejně rozdělené a označme

$$P(Y_i = \varepsilon) = p \;\; a \;\; P(Y_i \neq \varepsilon) = 1 - p = q.$$

Dále

$$P(S_n \leq t) \leq P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq t) \tag{2.5}$$

$$= P(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\varepsilon} \leq \frac{t}{\varepsilon}) \tag{2.6}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.7}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.8}$$

$$\leq n^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} q^n \sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} \frac{p^k}{q^k} \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} \frac{p^k}{q^k} < \infty, \tag{2.10}$$

a jelikož výraz (2.10) nezáleží na n, tedy dostaneme odhad

$$E[M(t)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} n^k p^k (1-p)^{n-k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} q^n \sum_{k=1}^{\lceil \frac{t}{\varepsilon} \rceil} \frac{p^k}{q^k} < \infty.$$

□

Definice 9. *Řekneme, že funkce $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je **lokálně omezená**, pokud je omezená na [0,t] pro všechna t z intervalu $[0,\infty)$.*

Definice 10. *Nechť f je měřitelná, lokálně omezená funkce a G je distribuční funkce na $[0,\infty)$. **Konvolucí** f s G rozumíme $f * G$ definované vztahem*

$$(f * G)(t) = \int_{(0,t]} f(t-s) dG(s) = \int_0^t f(t-s) dG(s), \ t \in [0,\infty).$$

Poznámka. Nechť F a G jsou distribuční funkce na $[0,\infty)$, f,g jsou měřitené, lokálně omezené a $c \in \mathbb{R}$, potom
1)$F * G$ je také distribuční funkce na $[0,\infty)$ a platí $F * G = G * F$
2) $(f * G) * H = f * (G * H)$
3) $(f + g) * H = (f * H) + (g * H), (cf) * H = c(f * H)$
4)$f * (G + H) = (f * G) + (f * H), f * (cG) = c(f * G)$.

Poznámka. Všimneme si, že pro distribuční funkci F platí $F_n = F^{*n}$. Připomenutí definice F_n (2.1).

Definice 11. *Nechť $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná, lokálně omezená. Řekneme, že funkce $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ **řeší rovnici obnovy**, pokud splňuje*

$$\boldsymbol{u = g + u * F} \tag{2.11}$$

přičemž (2.11) se nazývá rovnice obnovy.

Poznámka. 1) Každá funkce s lokálně konečnou variací je lokálně omezená a měřitelná.
2)Pokud je G distribuční funkce na $[0,\infty)$ a f : $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná, lokálně omezená. Potom $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definovaná výrazem

$$g(t) = \int_0^t f(s)\, dG(s)$$

je taky lokálně omezená a měřitelná.

Konečnost variace funkce g(t). Vezměme libovolné dělení $D = \{0 = x_0, x_1, x_2, ..., t_0 = x_n\}$ intervalu $[0,t_0]$, potom

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \mid \leq \sum_{k=0}^{n-1} [\int_{x_k}^{x_{k+1}} \mid f(s) \mid \ dG(s)] \leq D_t.$$

Tato nerovnost platí pro všechny dělení, tedy i pro supremum, čímž dostáváme konečnost variace funkce g.

Věta 12. *Pro funkci obnovy M a distribuční funkci F platí rovnice obnovy* (2.11)

$$M = F + M * F. \tag{2.12}$$

Důkaz. Rozepíšeme si $M(t)$ jako

$$\begin{aligned} M(t) &= E[N_t] && (2.13)\\ &= E[E[N_t \mid X_1]] && (2.14)\\ &= \int_0^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dP_X(s) && (2.15)\\ &= \int_0^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dF(s) && (2.16)\\ &= \int_0^t E[N_t \mid X_1 = s] dF(s) + \int_t^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dF(s). && (2.17) \end{aligned}$$

Pokud $s > t$, tedy na množině $[X_1 > t] \subseteq [N_t = 0]$, platí

$$E[N_t \mid X_1 = s] = 0. \tag{2.18}$$

Na množině $[X_1 \leq t]$

$$N_t = \sum_{j=1}^\infty 1_{[\sum_{k=1}^j X_k \leq t]} = 1 + \sum_{j=2}^\infty 1_{[\sum_{k=1}^j X_k \leq t]} \tag{2.19}$$

Upravíme pravou stranu substitucí $j = i + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j=2}^\infty 1_{[\sum_{k=1}^j X_k \leq t]} &= 1 + \sum_{i=1}^\infty 1_{[\sum_{k=1}^{i+1} X_k \leq t]} && (2.20)\\ &= 1 + \sum_{i=1}^\infty 1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - X_1]}. && (2.21) \end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme pro $s \in [0,t]$

$$E[N_t \mid X_1 = s] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E[1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - X_1]} | X_1 = s] \tag{2.22}$$

$$= 1 + E \sum_{i=1}^{\infty} [1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - s]}] \tag{2.23}$$

$$= 1 + M(t-s). \tag{2.24}$$

Tedy pro $M(t)$ dostáváme z (2.18) a (2.24)

$$M(t) = \int_0^t 1 + M(t-s)\, dF(s) = F(t) + (M * F)(t). \tag{2.25}$$

□

Věta 13. *Předpokládejme, že $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná a lokálně omezená, potom exisutje právě jedna lokálně omezená funkce u, která řeší rovnici $u = g + u * F$, u je pak tvaru*

$$u = g + g * M. \tag{2.26}$$

Důkaz. Nejdříve ověříme, že (2.26) je lokálně omezené. $g+g*M$ splňuje podmínky věty 2.1, tedy pro ni to platí.

$$u * F = (g + g * M) * F \tag{2.27}$$

$$= g * F + g * M * F \tag{2.28}$$

z linearity integrálu, vlastnost 3). Z věty 12 platí, že $M - F = M * F$. Tedy použitím vlastnosti 4)

$$u * F = g * F + g * (M - F) = g * F + g * M - g * F = g * M = u - g.$$

Tedy $u = g + u * F$. Nyní pro spor předpokládejme, že v je další lokálně omezené řešení obnovy ze zadáni a označme $w = u - v$. Pak w je lokálně omezená. Poté

$$w * F = (u - v) * F = u * F - v * F = (u - g) - (v - g) = u - v = w$$

z vlastnosti 3). Tedy

$$w = w * F = w * F * F = w * F^{*n}, n \in \mathbb{N}.$$

$\mid w(s) \mid \leq D_t$, pro $D_t \in \mathbb{R}$ z definice lokální omezenosti (9), $0 \leq s \leq t$.

$$\mid w(t) \mid = \mid w * F^{*n}(t) \mid \leq \int_0^t \mid w(t-s) \mid \; dF^{*n}(s) \leq D_t \int_0^t dF^{*n}(s) = D_t F^{*n}(t).$$

Z věty 8 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t) < \infty$, což implikuje

$$\lim_{n \to \infty} F^{*n}(t) = 0,$$

což nám dává $w(t) = 0$ pro $\forall t \in [0,\infty)$, tedy $u = v$.

□

Věta 14. *Pro t ležící v intervalu $[0,\infty)$ a pro y z $[0,t]$ platí*

$$P(T_t \geq y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s),$$

kde $F^c(x) = 1 - F(x)$.

Důkaz. Z poznámky 2.4

$$[S_{N_t} \leq t - x] = [T_t \geq x] = [R_{t-x} > x],\ x \in [0,t],\ t \in [0,\infty). \tag{2.29}$$

Pokud y=t,

$$P(T_t \geq t) = P(R_{t-y} > t) = P(R_0 > t) = P(X_1 > t) = F^c(y)$$

integrál na pravé straně je rovný 0, tedy tvrzení platí. Pro y menší než t dostáváme, že

$$P(T_t \geq y) = P(R_{t-y} > y) = \int_0^{\infty} P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s)\, dF(s).$$

Budeme postupovat podobně jako v důkazu věty 12 a ukážeme, že

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s) = P(R_{t-y-s} > y), \forall s \in [0,t-y].$$

Dle poznámky 2.4 rozepíšeme výraz, tedy pro každé přirozené n a pro $s \in [0,t-y]$

$$P(S_n \leq t-y,\ N_t = n | X_1 = s) = P(S_n - X_1 \leq t - y - s,\ N_t = n | X_1 = s)$$
$$= P(S_{n-1} \leq t - y - s, N_{t-s} = n-1).$$

Jevy $[N_t = 0]$ a $[X_1 \leq t - y]$ jsou disjunktní, potom $P(N_t = 0 | X_1 = s) = 0$ a z toho dostaneme

$$P(S_{N_t} \leq t - y | X_1 = s) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t - y, N_t = n | X_1 = s) \tag{2.30}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{n-1} \leq t - y - s, N_{t-s} = n-1) \tag{2.31}$$
$$= P(S_{N_{t-s}} \leq t - y - s) = P(R_{t-y-s} > y). \tag{2.32}$$

Jevy $[R_{t-y} > y] = [S_{N_t} \leq t - y]$ a $[t - y < X_1 \leq t]$ jsou neslučitelné, proto

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s) = 0,\ \forall s \in (t-y,t].$$

Z poznámky 2.4, $[R_{t-y} \leq y] = [S_{N_t} > t - y]$ je jev disjunktni s jevem $[X_1 > t] \subseteq [N_t = 0] \subseteq [T_0 = 0]$. Což znamená, že $P(R_{t-y} \leq y \mid X_1 > t) = 0$, potom

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 > t) = 1 - P(R_{t-y} \leq y \mid X_1 > t) = 1.$$

Tedy celkově

$$P(R_{t-y} > y|X_1 = s)1_{[y\le t]} = P(R_{t-s-y} > y)1_{[s\le t-y]} + 1_{[s>t]} \tag{2.33}$$

$$P(R_{t-y} > y)1_{[y\le t]} = \int_0^\infty P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s)1_{[y\le t]}\, dF(s) \tag{2.34}$$

$$= \int_0^\infty P(R_{t-s-y} > y)1_{[s\le t-y]}\, dF(s) + F^c(t)1_{[y\le t]}. \tag{2.35}$$

Označme $u_y(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(T_t \ge y)$. Přepíšeme (2.35)

$$u_y(t) = \int_0^\infty u_y(t)dF(s) + F^c(t).$$

Potom předešlá rovnice je rovnice obnovy tvaru

$$u_y = u_y * F + F^c,$$

která má jednoznačné řešení z věty 13 $u_y = F^c + F^c * M$

$$P(T_t \ge y) = 1_{[y\le t]}P(R_{t-y} > y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)dM(s).$$

□

2.2 Limitní věty obnovy

Věta 15. *Věta obnovy.*
Pro neřešetovitý proces a $h > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} M(t+h) - M(t) = \frac{h}{\mu}. \tag{2.36}$$

Důkaz. Důkaz viz Feller, str. 360.

□

Věta 16. *Mějme neřešetovitý proces, potom existuje K nezáporné takové, že pro všechna h nezáporná a t nezáporné platí*

$$0 \le M(t+h) - M(t) \le K(1+h).$$

Důkaz. Pro $\epsilon > 0$ existuje z věty 15 kladné t_0 takové, že pro všechna $t \ge t_0$ platí $M(t+1)$ - $M(t) < \frac{1}{\mu} + \epsilon$. Pro tato t teda platí

$$M(t+h) - M(t) \le M(t+\lceil h\rceil) - M(t) = \sum_{n=1}^{\lceil h\rceil} M(t+n) - M(t+n-1) \le$$

$$\le \lceil h\rceil(\frac{1}{\mu} + \epsilon) \le (h+1)(\frac{1}{\mu} + \epsilon).$$

Proto

$$M(t+h) - M(t) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + \epsilon). \tag{2.37}$$

Pro $0 \leq t \leq t_0$

$$M(t+h) - M(t) \leq M(t+h) \leq M(t_0 + h).$$

Použijeme již dokázané (2.37) pro $t = t_0$

$$M(t_0 + h) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + \epsilon) + M(t_0) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + \epsilon + M(t_0)).$$

Pro K = $\max\{\frac{1}{\mu} + \epsilon, \frac{1}{\mu} + \epsilon + M(t_0)\}$ dostáváme tvrzení.

□

Věta 17. *Mějme neřešetovitý proces, potom pro limitu zbývajícího času do další události dostáváme formuli*

$$\lim_{t\to\infty} P(T_t \geq y) = \lim_{t\to\infty} [F^c(t+y) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s)] = \frac{1}{\mu} \int_y^{\infty} F^c(x)\, dx,$$

pro všechna y ležící v intervalu $[0,\infty)$.

Důkaz. Z tvrzení věty 14

$$P(T_t \geq y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s).$$

Nyní budeme upravovat pouze druhý člen.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s) = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t-y} \int_{t-s}^{\infty} dF(w)\, dM(s) \tag{2.38}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_y^{\infty} (\int_{(t-w)^+}^{t-y} dM(s))\, dF(w) \tag{2.39}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_y^{\infty} [M(t-w+w-y) - M((t-w)^+)]\, dF(w). \tag{2.40}$$

Kde Lebesgue–Stieltjesův integrál $\int_a^b F^c(t-s) dM(s)$ se definuje na polouzavřeném intervalu $(a,b]$. Což znamená, že v (2.38) integruji přes množinu $0 < s \leq t-y$ a podobně o řádek níže přes množinu $(t-w)^+ < s \leq t-y$.

Z věty 15 platí

$$\lim_{t\to\infty} [M(t-w+w-y) - M(t-w)^+] = \frac{w-y}{\mu},\ w > y, y \in [0,\infty), \tag{2.41}$$

jelikož w je pevné a $t \to \infty$. Použijeme Lebesgueho větu o majorantě získané v 16.

$$\lim_{t\to\infty} \int_y^{\infty} [M(t-w+w-y) - M(t-w)^+]\, dF(w) =$$

$$= \int_y^\infty \frac{w-y}{\mu}\, dF(w) = \frac{1}{\mu}\int_y^\infty \int_y^w \, dx\, dF(w)$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_y^\infty \int_x^\infty \, dF(w)dx = \frac{1}{\mu}\int_y^\infty F^c(x)\, dx.$$

Jelikož X ≥ 0, tedy $\int_y^\infty F^c(x)\,dx \leq \int_0^\infty F^c(x)\,dx = \mu < \infty$ a vše je dobře definováno. Nezapomeňme na to, že $\lim_{t\to\infty} F^c(t+y) = 0$, čímž dostáváme tvrzení.

□

Důsledek. $\lim_{t\to\infty} P(T_t < y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y F^c(z)\,dz.$

Důkaz.

$$\lim_{t\to\infty} P(T_t < y) = 1 - \frac{1}{\mu}\int_y^\infty F^c(z)dz = \frac{1}{\mu}(\mu - \int_y^\infty F^c(z))\, dz$$

platí

$$\mu = \int_0^\infty F^c(z)\, dz.$$

Tedy

$$\frac{1}{\mu}(\mu - \int_y^\infty F^c(z))\, dz = \frac{1}{\mu}(\int_0^\infty F^c(z))\, dz - \int_y^\infty F^c(z)\, dz) = \frac{1}{\mu}\int_0^y F^c(z)\, dz.$$

□

2.3 Rozšíření

Nechť X_1,X_2,... je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených neřešetovité náhodných veličin s kladnou střední hodnotou, ne nutně nezáporné, potom důsledek věty 2.2 stále platí. Označme

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,\ S_0 = 0\ s.j. \tag{2.42}$$
$$\tau_y = \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n \geq y\},\ \ y \in [0,\infty) \tag{2.43}$$
$$N_k = \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n > S_{N_{k-1}}\}, k \in \mathbb{N}, \tag{2.44}$$
$$\tilde{S}_n = S_{N_n}. \tag{2.45}$$

Potom z Blackwell a kol. (1953, str. 316)

$$P(S_{\tau_x} < x + \xi) = P(\tilde{S}_{\tilde{\tau}_x} < x + \xi), \tag{2.46}$$

z čehož plyne korektnost důkazu 2.2 bez předpokladu nezáporných náhodných veličin.

Důsledek. Nechť X_1, X_2,... je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených neřešetovitých náhodných veličin s kladnou střední hodnotou μ. Označme $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, potom existuje spojitá distribuční funkce G taková, že pro každé kladné ξ platí

$$\lim_{y\to\infty} F_y(\xi) = \lim_{x\to\infty} P(S_{\tau_{Y(y)}} < y + \xi) = G(\xi).$$

3. Asymptotické výsledky

Tato kapitola je založena na práci Breiman a kol. (1961).

Definujeme Λ_J jako strategii, kde odehrajeme prvních J tahů, $J \in \mathbb{N}$, jako ve strategii Λ, potom pokračujem ve strategii Λ^*.

$$N(y) = \{\inf_n; \sum_{k=1}^{n} W_k \geq y\} \tag{3.1}$$

$$N^*(y) = \{\inf_n; \sum_{k=1}^{n} W_k^* \geq y\} \tag{3.2}$$

$$W_k^J = W_k \, pro \, \Lambda_J \tag{3.3}$$

$$N_J(y) = N(y) \, pro \, \Lambda_J. \tag{3.4}$$

Poznámka. Pro $N(y)$ platí vztah $N_y + 1 = N(y)$. $M(y) = E[N_y] = E[N(y) - 1]$. Občas budeme psát jen N místo $N(y)$, pokud bude zřejmé, jaký argument myslíme.

Věta 18. *Markovův čas $N^*(y)$ je integrovatelná náhodná veličina.*

Důkaz. Z věty 8 a pozorování v (2.46) víme, že N_y^* je integrovatelná, tedy i N_y+1 $= N(y)$.

□

Poznámka. Čas $N_J(y)$ je integrovatelný.

Věta 19. *Pro jakoukoli strategii Λ, pro niž naše bohatství C_n* (5) *roste do nekonečna skoro jistě pro $n \to \infty$, platí*

$$E[N(y)] = \frac{1}{w^*} E[\sum_{k=1}^{N(y)} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*} E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k]. \tag{3.5}$$

Důkaz. Jelikož $C_n \to \infty$ s.j., tedy N(y) i $N_J(y)$ jsou konečné s.j. Posloupnost náhodných veličin $\{Z_n\}$,

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} (W_k^J - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}]), \forall n \in \mathbb{N},$$

je martingál.

$$E[Z_n] = E[\sum_{k=1}^{n} (W_k^J - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = \sum_{k=1}^{n} E[W_k^J] - E[W_k^J] = 0,$$

W_k^J jsou omezené, tedy $E[\mid Z_n \mid] < \infty$

Použijeme větu Optional stopping theorem 27. Ověříme, že $\mid Z_{min\{n,N_J\}} \mid$ je omezená. Pro pevné y platí

$$\mid Z_{min\{n,N_j(y)\}} \mid < y + 2\alpha.$$

Tedy podmínka je splněna, jelikož W_k^J nabývá hodnot z konečné množiny, proto existuje $\alpha \in (0,\infty)$ takové, že
$\mid W_k^J \mid \leq \alpha$ s.j., a proto

$$E[Z_{N_J}] = E[Z_0] = 0. \tag{3.6}$$

Dále

$$
\begin{aligned}
w^* E[N_J] &= E[\sum_{k=1}^{N_J} w^*] && (3.7)\\
&= E[\sum_{k=1}^{N_J} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J} W_k^J] && (3.8)\\
&= E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J} W_k^J] && (3.9)\\
&= E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J} W_k^J] && (3.10)
\end{aligned}
$$

kde (3.7) plyne z toho, že w^* je konstanta, (3.8) plynez z (3.6) a poslední rovnosti platí, jelikož pro $J > N$ platí N=N_J a pro $J \leq N$

$$E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] =$$

$$= E[\sum_{k=1}^{J} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=J+1}^{N} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])],$$

ale

$$E[\sum_{k=J+1}^{N} (w^* - E[W_k^* \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = E[\sum_{k=J+1}^{\infty} (w^* - w^*).1_{[N>k-1]}] = 0$$

Pokud $E[N] = \infty$, potom $\lim_{J\to\infty} E[N_J] = \infty$, jelikož na množině $[N_J \leq J] = [N \leq J]$ platí $N_J = N$, tedy $E[N_J] \geq E[N_J; N_J \leq J] = E[N; N \leq J]$ pro všechna J. Limitním přechodem dostáváme $\lim_{J\to\infty} E[N_J] \geq \lim_{J\to\infty} E[N; N \leq J] = E[N]$.

$$y < E[\sum_{k=1}^{N_j} W_k^J] < y + \alpha.$$

Tedy (3.7) jde k ∞ pro $J \to \infty \implies$ první člen v (3.10) jde k ∞. Jelikož $w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] \geq 0$, tedy můžeme použít Léviho větu a z omezenosti $N(y)$ pro pevné y platí

$$\infty = \lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = E[\sum_{k=1}^{N} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])].$$

Nyní předpokládejme, že $E[N] < \infty$.

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] \tag{3.11}$$

$$= \lim_{J\to\infty} w^* E[min\{N,J\}] - \lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]] \tag{3.12}$$

$$= w^* E[N] - E[\sum_{k=1}^{N} E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]. \tag{3.13}$$

Na oba sčítance z (3.12) použijeme Léviho větu, funkce $min\{N,J\}$ je neklesající, funkce $W_k > 0$ s.j., tedy i $E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] > 0$ s.j., pro pevné y je$N(y)$ omezená s.j. a $\sum_{k=1}^{min\{N,J\}} E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]$ přepíšeme jako $\sum_{k=1}^{\infty} E[W_k \mathscr{F}_{k-1}]1_{[min\{N,J\}=k]}$. Celkem dostáváme, že $E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]1_{[min\{N,J\}=k]} > 0$ s.j., tedy z Léviho věty platí (3.13).

Podobně pro $E[\sum_{k=1}^{N_J} W_k^J]$, $\sum_{k=1}^{N_j} W_k^J$ je nezáporná, omezená $y + \alpha$, použijeme Lebesgueovu větu.

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{N_J} W_k^J] = E[\sum_{k=1}^{N} W_k]. \tag{3.14}$$

Pokračujeme úpravamy

$$E[N_J] = \int_{N\le J} NdP + \int_{N>J} N_J dP.$$

Označme $U_J = \sum_{k=1}^{J} W_k$, $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=J+1}^{J+n} W_k^J > y - U_J\}$ a $\tilde{N}(U_J) = \{\sum_{k=J+1}^{J+\tau} W_k^J\}$. Přepíšeme výraz

$$\int_{N>J} N_J dP = \int_{N>J} J + \tilde{N}(U_J) dP = JP(N > J) + \int_{N>J} \tilde{N}(U_J) dP.$$

Všimneme si, že platí $\lim_{J\to\infty} JP(N > J) = 0$ z Lebesgueovy věty. Dále

$$\int_{N>J} \tilde{N}(U_J) dP = E[E[\tilde{N}(U_J) 1_{[N>J]} \mid \mathscr{F}_J]] \tag{3.15}$$

$$= E[E[\tilde{N}(U_J) \mid \mathscr{F}_J] 1_{[N>J]}] \tag{3.16}$$

$$= E[E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J] 1_{[N>J]}] \tag{3.17}$$

$$= E[E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J] \mid [N > J]] P(N > J). \tag{3.18}$$

Jelikož platí

$$E[\tilde{N}(U_J) \mid \mathscr{F}_J] = E[E[\tilde{N}(U_J) \mid \mathscr{F}_J] \mid U_J] = E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J]\ s.j.$$

Budeme upravovat výraz

$$y - U_J + \alpha \geq E[\sum_{k=J}^{J+\tilde{N}(U_J)} W_k^J \mid U_J] \tag{3.19}$$

$$= E[\sum_{k=J}^{\infty} W_k^* 1_{[\tilde{N}(U_J)+J>k-1]} \mid U_J] \tag{3.20}$$

$$= w^* E[\sum_{k=J}^{\infty} 1_{[\tilde{N}(U_J)+J>k-1]} \mid U_J] \tag{3.21}$$

$$= w^* E[\sum_{k=J}^{\tilde{N}(U_J)+J} 1 \mid U_J] \tag{3.22}$$

$$= w^* E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J] \tag{3.23}$$

$$\Rightarrow E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J] \leq \frac{y - U_J + \alpha}{w^*} \tag{3.24}$$

(3.24) plyne z definice $\tilde{N}(U_J)$ a (3.21) z nezávislosti W_k^* a U_J. Obráceně

$$\alpha(N - J) \geq \sum_{k=J+1}^{N} W_k \geq \sum_{k=1}^{N} W_k - \sum_{k=1}^{J} W_k \geq y - U_J$$

$$\Rightarrow \alpha(N - J) \geq y - U_J \tag{3.25}$$

na jevu $[N > J]$. Dosadíme (3.24) a (3.25) do (3.18), tedy

$$\int_{N>J} \tilde{N}(U_J) dP = E[E[\tilde{N}(U_J) \mid U_J] \mid [N > J]] P(N > J) \tag{3.26}$$

$$\leq E[\frac{y - U_J + \alpha}{w^*} \mid [N > J]] P(N > J) \tag{3.27}$$

$$\leq E[\frac{\alpha(N - J) + \alpha}{w^*} \mid [N > J]] P(N > J) \tag{3.28}$$

$$\leq \frac{\alpha}{w^*} \int_{N>J} (N - J) dP + \frac{\alpha}{w^*} P(N > J). \tag{3.29}$$

Pošleme J do nekonečna

$$\lim_{J\to\infty} \frac{\alpha}{w^*} \int_{N>J} (N-J) dP + \frac{\alpha}{w^*} P(N > J) \leq \lim_{J\to\infty} \frac{\alpha 2K}{w^*} P(N > J) + \frac{\alpha}{w^*} P(N > J) = 0.$$

Pro nějaké $K \in \mathbb{R}$, $\mid N \mid \leq K$ z omezenosti N skoro všude. Celkově máme

$$\lim_{J\to\infty} E[N_J] = \int_{N\leq J} N dP + \int_{N>J} N_J dP \tag{3.30}$$

$$= E[N] + 0$$

Použitím Lebesgueovi věty a omezensostí N. Potom z (3.7), (3.14), (3.12) a (3.30) plyne tvrzení.

□

Nechť máme posloupnost náhodných veličin $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, potom označme

$$\tau_V(y) = \{\inf_n;\ V_n \geq y\}.$$

Věta 20. *Nechť* $(Y_1,Y_2,...)$ *a* $(V_1,V_2,...)$ *jsou posloupnosti takových náhodných veličin, že platí* $\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty$ *s.j,* $\lim_{n\to\infty} Y_n + V_n = \infty$ *s.j. Nechť je* Z *libovolná náhodná veličina a* $V = sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_n \mid$*. Označme*

$$H_y(\xi) = P(V_{\tau_V(Z+y)} < Z + y + \xi) \tag{3.31}$$
$$D_y(\xi) = P((Y + V)_{\tau_{Y+V}(Z+y)} < Z + y + \xi), \tag{3.32}$$

potom pro libovolné $u > 0$ *platí*

$$H_{x+u}(\xi - 2u) - P(V \geq u) \leq D_y(\xi) \leq H_{y-u}(\xi + 2u) + P(V \geq u).$$

Důkaz.

$$D_y(\xi) \leq P((Y + V)_{\tau_{Y+V}(Z+y)} < Z + y + \xi;\ V < u) + P(V \geq u) \tag{3.33}$$
$$\leq P(Y_{\tau_Y(Z+y-u)} Y_k < Z + y + \xi + u;\ V < u) + P(V \geq u) \tag{3.34}$$
$$\leq H_{y-u}(\xi + 2u) + P(V \geq u) \tag{3.35}$$

a obráceně

$$D_y(\xi) \geq P((Y + V)_{\tau_{Y+V}(Z+y)} < Z + y + \xi;\ V < u) \tag{3.36}$$
$$\geq P(Y_{\tau_Y(Z+y+u)} < Z + y + \xi - u;\ V < u) \tag{3.37}$$
$$\geq P(Y_{\tau_Y(Z+y+u)} < Z + y + \xi - u) + P(V < u) - 1 \tag{3.38}$$
$$\geq H_{y+u}(\xi - 2u) - P(V \geq u) \tag{3.39}$$

kde 2. nerovnost plyne z toho, že rozšiřujem přípustný prostor pro Y_n, respektivě zúžujeme.

□

Věta 21. *Nechť* $X_1,X_2,...$ *je posloupnost stejně rozdělených, nezávislých, nešeršovitých náhodných veličin s kladnou konečnou střední hodnotou. Definujeme* $Y_n = X_1 + ... + X_n$*. Dále mějme* Z*, libovolnou náhodnou veličinu nezávislou s* $X_1,X_2,...,G$*, kde* G *je limitní distribuční funkce z důsledku 2.2 a úvahy* (2.46)*, a označme*

$$F_{y,Z}(\xi) = P(Y_{\tau_Y(Z+y)} < Z + y + \xi),$$

potom $\lim_{y\to\infty} F_{y,Z}(\xi) = G(\xi)$

Důkaz.

$$F_{y,Z}(\xi) = E[P(Y_{\tau_Y(Z+y)} < Z + y + \xi \mid Z)].$$

Dále

$$\lim_{y\to\infty} E[P(Y_{\tau_Y(Z+y)} < Z + y + \xi \mid Z = z)]$$
$$= \lim_{y\to\infty} E[F_{y+z,0}(\xi)] = E[\lim_{y\to\infty} F_{y+z,0}(\xi)] = G(\xi).$$

Kde jsme použili Lebesgueovu větu o konvergektní majorantě s 1 jako majorantou. Tedy i $\lim_{y\to\infty} F_{y,Z}(\xi) = G(\xi)$.

□

Věta 22. *Nechť* $\sum_{k=1}^{n} W_k - \sum_{k=1}^{n} W_k^*$ *konverguje s.j. k nějaké konečné náhodné veličině. Předpokládejme, že* W_k^* *jsou nešeršovité a* $F_y(\xi)$ *je distribuční funkce* $\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y$*, potom* $\lim_{y\to\infty} F_y(\xi) = F^*(\xi)$.

Důkaz. Pro pevné $m \in \mathbb{N}$ označme

$$U_m = -\sum_{k=1}^{m-1} W_k, \tag{3.40}$$

$$V_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} W_k - \sum_{k=m}^{n} W_k^*, \tag{3.41}$$

$$V_m = \sup_n \mid V_{m,n} \mid, \tag{3.42}$$

$$\tau_0(y) = \inf\{n;\ \sum_{k=m}^{n} W_k^* \geq U_m + y\}, \tag{3.43}$$

$$\tau_1(y) = \inf\{n;\ \sum_{k=m}^{n} W_k^* + V_{m,n}) \geq U_m + y\}, \tag{3.44}$$

$$H_y(\xi) = P(\sum_{k=m}^{\tau_0(y)} W_k^* < U_m + y + \xi). \tag{3.45}$$

Konvergence skoro jistě je ekvivalentní cauchyovské konvergenci skoro jistě a z definice cauchyovsé posloupnonosti máme $\lim_{m\to\infty} V_m = 0$ s.j. Tedy

$$F_y(\xi) = P(\sum_{k=m}^{\tau_1(y)} W_k^* + V_{m,n} < U_m + y + \xi)$$

rovnost plyne přímo z dosazení. Využijeme odvozenou nerovnost z 20, potom pro $u > 0$ platí

$$H_{y+u}(\xi - 2u) - P(V_m \geq u) \leq F_y(\xi) \leq H_{y-u}(\xi + 2u) + P(V_m \geq u).$$

Pošleme y $\to \infty$ a aplikujeme předešlou větu 21, tedy

$$F^*(\xi - 2u) - P(V_m \geq u) \leq \liminf_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq \limsup_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq F^*(\xi + 2u) + P(V_m \geq u)$$

pak pošleme $m \to \infty \implies P(U_m \geq u) \to 0$ pro pevné u.

$$F^*(\xi - 2u) \leq \liminf_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq \limsup_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq F^*(\xi + 2u)$$

$u \to 0 \implies F^*(\xi \pm u) \to F^*(\xi)$ ze spojitosti F^* z důsledku věty 17, tedy celkem

$$F^*(\xi) \leq \liminf_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq \limsup_{y\to\infty} F_y^*(\xi) \leq F^*(\xi)$$

$$\implies F^*(\xi) = \liminf_{y\to\infty} F_y^*(\xi) = \limsup_{y\to\infty} F_y^*(\xi).$$

$\square$

Věta 23. *Nechť Λ je nějaká strategie. Potom $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_n^*}$ existuje s.j. a $E[\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_n^*}] \leq 1$.*

Důkaz. Označme $V_n = log(X_n^{\mathsf{T}} b_n)$ a $V_n^* = log(X_n^{\mathsf{T}} b^*)$.
Z definice w^*,

$$E[W_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq w^*$$

kde W_n může záležet na $\mathscr{F}_{n-1}$, tedy úpravamy

$$E[log((1-\epsilon)V_n^* + \epsilon V_n) - logV_n^* \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq 0 \tag{3.46}$$

$$E[log((1-\epsilon)V_n^*(1+\frac{\epsilon V_n}{(1-\epsilon)V_n^*})) - logV_n^* \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq 0 \tag{3.47}$$

$$E[log(\frac{(1-\epsilon)V_n^*}{V_n^*}) + log((1+\frac{\epsilon V_n}{(1-\epsilon)V_n^*})) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq 0 \tag{3.48}$$

$$\frac{1}{\epsilon}E[log((1+\frac{\epsilon V_n}{(1-\epsilon)V_n^*})) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \frac{1}{\epsilon}log(\frac{1}{1-\epsilon}). \tag{3.49}$$

Použijeme Fatouovo lemma

$$\liminf_{\epsilon\to 0} E[\frac{1}{\epsilon}log((1+\frac{\epsilon V_n}{(1-\epsilon)V_n^*})) \mid \mathscr{F}_{n-1}] = \liminf_{\epsilon\to 0} E[\frac{1}{\epsilon}\frac{\epsilon V_n}{(1-\epsilon)V_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}]$$

$$= E[\frac{V_n}{V_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}log(\frac{1}{1-\epsilon})$$

$$= \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}log(1+\frac{\epsilon}{1-\epsilon}) = 1.$$

Tedy

$$E[\frac{C_n}{C_n^*}] = E[E[\frac{C_n}{C_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}]] = E[\frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}E[\frac{V_n}{V_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}]] \leq E[\frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}]$$

implikuje, že $E[\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_n^*}] \leq 1$. Stačí jen dokázat, že $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_n^*}$ existuje s.j, ale to platí, jelikož $E[\frac{C_n}{C_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}$, tedy $E[\frac{C_n}{C_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}]$ je nezáporný supermartingál a tedy má limitu s.j. viz 28.

□

Věta 24. *Pokud pro strategii Λ platí, že pro žádnou hodnotu b_n, $X_n^{\mathsf{T}} b_n = 0$ pro všechny n, potom skoro jistě platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty \iff \lim_{n\to\infty}\frac{C_n^*}{C_n} = \infty s.j.$$

Důkaz. Zvolme $K > 0$. Označme

$$A = [(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) \geq K \text{ nekonečně mnohokrát}]$$

. Nalezneme p takové, že $p = \min_i P(\mathbb{X}_1 = x_i)$. Pokud $(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) \geq K$, tak to implikuje, že $P(w^* - W_k \geq K \mid \mathscr{F}_{k-1}) \geq p$, jelikož aby střední hodnota mohla bát větší než K, musí náhodný vektor být větší nebo rovno K s kladnou pravděpodobností. Potom z Borel-Cantelliho lemmatu podmíněné verze Doob (1953) platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(w^* - W_k \geq K \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \infty \iff [W_1^* - W_1 \geq K \text{nekonečně mnohokrát}]\, s.j.$$

Tedy na A

$$\lim_{n\to\infty} log(\frac{C_n^*}{C_n}) = \sum_{k=1}^{\infty}(W_k^* - W_k) = \infty s.j.$$

tedy i $\lim_{n\to\infty} log(\frac{C_n^*}{C_n}) = \infty\ s.j.$

Nadefinujeme si strategii pro Λ,

$$\Lambda_n^K = \begin{cases} \Lambda_n,\ (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) < K \\ \Lambda_n^*, \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujeme náhodné veličiny

$$U_n = \log(\frac{C_n^*}{C_n^K}) - \sum_{k=1}^{n}(w^* - E(W_k^K \mid \mathscr{F}_{n-1})),$$

kde C_n^K a W_k^K jsou ekvivalenty C_n a W_k za strategie Λ^K. U_n je martingální posloupnost a platí

$$U_n - U_{n-1} = W_n^* - W_n^K - (w^* - E[W_n^K \mid \mathscr{F}_{n-1}]).$$

Dále platí

$$\sup(W_n^* - W_n) \leq \frac{K}{p} + 2K \implies U_n - U_{n-1} \leq \frac{K}{p} + 2K$$

$$U_n - U_{n-1} \geq \alpha - \beta - K.$$

Pro $\alpha = \inf_{\omega\in\Omega},\ \log(\mathbb{X}(w)^\intercal b^*)$ a $\beta = \max_{\omega\in\Omega,\, j\in I}\ \log(X^j(\omega))$. α je konečné z předpokladu.

Použijeme Doobovu Větu o konvergenci martingálu 29 na U_n.
Tedy $\lim_{n\to\infty} U_n$ existuje s.j. kdykoli $\limsup_{n\to\infty} U_n < \infty$ nebo $\liminf_{n\to\infty} U_n > -\infty$ s.j.

Nechť platí $\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_k \mid \mathscr{F}_{n-1})) < \infty$ s.j. Předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^*}{C_n} = \infty$ s.j., což implikuje, že $\liminf_{n\to\infty} U_n > -\infty$ s.j., tedy $\lim_{n\to\infty} U_n$ existuje s.j., což je spor. Podobně obráceně. Dostáváme ekvivalenci skoro jistě

$$\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n^K \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^*}{C_n^K} = \infty.$$

Ale jestliže $\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n^K \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty$, potom nutně $\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty$, jelikož $W_n > W_n^k$ jen v konečně mnoha případech a W_n jsou omezené s.j. Podobně pro C_n a C_n^K.

□

Věta 25. *Nechť náhodné veličiny $W_1^*, W_2^*, \ldots$ jsou nešeršovité náhodné veličiny. Potom pro jakoukoliv strategii λ platí*

$$\lim_{y\to\infty}(E[N(y)] - E[N^*(y)]) = \frac{1}{w^*}\sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E[W_n])$$

Důkaz. Dle věty 19

$$E[N(y)] = \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{n-1}])] + \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k].$$

Tedy

$$E[N^*] - E[N] =$$

$$= \frac{E[\sum_{k=1}^{N^*}(E[W_k^* - E[W_k^* \mid \mathscr{F}_{n-1}])]}{E[W_k^*]} - \frac{E[\sum_{k=1}^{N}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{n-1}])]}{w^*} +$$

$$+\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*} W_k^* - \sum_{k=1}^{N} W_k]$$

ale

$$\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*}(E[W_k^* - E[W_k^*] \mid \mathscr{F}_{n-1}])] = 0$$

z nezávislosti W_k^* na $\mathscr{F}_{n-1}$.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*} W_k^* - y - \sum_{k=1}^{N} W_k + y] = 0$$

z věty 22

Tedy když pošleme y do nekonečna, dostáváme tvrzení, pokud $\sum_{k=1}^{n} W_k - \sum_{k=1}^{n} W_k^*$ konverguje ke skoro všude konečné hodnotě, pokud ne, pak z věty 3 $\sum_{n=1}^{\infty}(E[W_n^*] - E(W_k \mid \mathscr{F}_{k-1})) = \infty$ na množině kladné pravděpodobnosti, tedy z

$$E[N] - E[N^*] = \frac{E[\sum_{k=1}^{N}(w^* + E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])]}{w^*} - \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*} W_k^* - \sum_{k=1}^{N} W_k]$$

druhý člen je omezený, tedy levá strana se rovná nekonečnu a tvrzení je dokázáno, jelikož obě strany se rovnají nekonečnu.

□

4. Appendix

4.1 Náhodná procházka

Věta 26. *Nechť X_1,X_2,... jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny omezené konstantou α a mají konečnou střední hodnotou. Označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.*

Pokud

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \; s.j., \tag{4.1}$$

potom $E[X_i] > 0$.

Důkaz. Pokud $E[X_i] < 0$, potom ze Silného zákona velkých čísel dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ s.j., což je spor. Tedy $E[X_i] \geq 0$.

Nyní předpokládejme, že $E[X_i] = 0$. Pokud $E[\mid X_i \mid] = 0$, potom $X_i = 0$ s.j., tedy i $S_n = 0$ s.j. pro všechna n, což je spor s předpokladem (4.1).

Nechť $E[\mid X_i \mid] > 0$, potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že splňuje
$0 < \varepsilon \leq P(X_1 \leq -\varepsilon)$. Označme posloupnost Markovských časů

$$\tau_n := \inf\{k \in \mathbb{N}; S_k \notin (-\varepsilon, n\varepsilon)\},$$

která je skoro jistě konečná z předpokladu $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ s.j. Je splněn předpoklad Lebesgueovy věty o majorantě, konkrétně
$\mid S_{\tau_n \wedge m} \mid \leq n\varepsilon + \mid X_{\tau_n} \mid \leq n\varepsilon + \alpha; \alpha \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{N}$. Potom

$$0 = E[S_{\tau_n \wedge m}] \implies \lim_{m\to\infty} E[S_{\tau_n \wedge m}] = E[S_{\tau_n}] = 0.$$

$$0 < \varepsilon \leq P(X_1 < -\varepsilon) \leq P(Z < -\varepsilon)$$

Náhodná veličina S_{τ_n} nabývá hodnot v $(\infty, -\varepsilon] \cup [n\varepsilon, \infty)$ s.j., tedy

$$E[S_{\tau_n}] = E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \geq n\varepsilon] + E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \leq -\varepsilon] \tag{4.2}$$

$$E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \geq n\varepsilon] \geq n\varepsilon P(S_{\tau_n} \geq n\varepsilon) \geq n\varepsilon(1-\varepsilon) \tag{4.3}$$

$$E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \leq -\varepsilon] = E[S_{\tau_{n-1}}; S_{\tau_n} \leq -\varepsilon] + E[X_i; S_{\tau_n} \leq -\varepsilon] \geq -\varepsilon - \alpha \tag{4.4}$$

Vidíme, že druhý člen je omezený ze zdola a první člen jde k nekonečnu pro zvětšující se n.

$$\varepsilon + \alpha \geq -E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \geq n\varepsilon] = E[S_{\tau_n}; S_{\tau_n} \leq n\varepsilon] \geq n\varepsilon(1-\varepsilon)$$

Pro $n > \frac{\varepsilon+\alpha}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ dostáváme spor s předpokladem (4.1) a proto tedy nutně $E[X_i] > 0$.

□

4.2 Pomocné věty

Věta 27. *Bhattacharya a Waymire (2007, str. 43) Optional sampling theorem. Nechť* $\{X_t; t \in T\}$ *je zprava spojitý* $\mathscr{F}_t$*-martingál, kde* $T = \mathbb{N}$ *nebo* $T = [0,\infty)$*. Nechť* τ *je Markovský čas takový, že platí* $P(\tau < \infty)$ *a* $| X_{\tau\wedge t} |$, $t \in T$, *je stejnoměrně integrovatelná, potom*

$$E[X_\tau] = E[X_0]$$

Věta 28. *Lachout, str. 35 Doobova věta*
Nechť X *je supermartingal spojitý zprava vzhledek k filtraci* $\{\mathscr{F}_n\}$*, neboli*

$$X_s \geq E[X_t \mid \mathscr{F}_s]$$

pro $0 \leq s \leq t < \infty$*. Dále nechť platí*

$$\sup_{t>0} E[X_t^-] < \infty,$$

potom existuje náhodná, skoro jistě konečná veličina Z *taková, že platí*
$\lim_{t\to\infty} X_t = Z$ *s.j.*

Věta 29. *Lachout, str. 40 Nechť* X *je submartingal, neboli*

$$X_s \leq E[X_n \mid \mathscr{F}_s].$$

$0 \leq s \leq n < \infty$*. Pokud* $(\sup\{X_n - X_{n-1}\};\ n \in \mathbb{N})^+$ *je integrovatelné, potom existuje reálná, náhodná veličina* Z *a* $\Omega_0 \subseteq \Omega$ *taková, že platí*
$\lim_{n\to\infty} X_n = Z$ *na množině* $[\omega; \omega \in \Omega_0, P(\Omega_0) = 1] \cap [\omega; \sup X_n(\omega); n \in \mathbb{N} < \infty]$.

Závěr

Zformulovali jsme matematický model pro naši situaci. Ukázali jsme, že složky Λ^* nemusí být jednoznačně určeny, ale W_1^* skoro jistě již ano. Poté jsme se omezili jen na kladná X_i a vybudovali základy teorie obnovy s cílem ukázat, že

$$\lim_{y\to\infty} P(C_{N(y)} < y + C)$$

je spojitá distribuční funkce $G(\xi)$. Na konci druhé kapitoli jsme se zbavili předpokladu nezápornosti. Ve třetí, finální kapitole porovnáváme libovolnou strategii Λ s Λ^*. Pokud nám jde o to, abychom si vydělali co nejvíce peněz, dokazujeme, že pokud Λ není asymptoticky blízko Λ^*, potom je tato strategie na tom asymptoticky nekonečně krát hůře než alternativa. Dále používáme spojitost limitní funkce $G(\xi)$, abychom ukázali, že při používání Λ^* nabydeme nekonečně velkého bohatství mnohem rychleji než-li za Λ.

V druhé kapitole jsme pracovali s obecnými náhodnými veličinm, tedy se domnívám, že by mohlo jít pracovat s nezápornými, omezenými náhodnými vektory $\mathbb{X}_1$,$\mathbb{X}_2$,..., které nabývají nespočetně hodnot.

Seznam použité literatury

BHATTACHARYA, R. N. a WAYMIRE, E. C. (2007). *A basic course in probability theory*. ISBN 978-0-387-71938-2.

BLACKWELL, D. A KOL. (1953). Extension of a renewal theorem. *Pacific J. Math*, **3**(1991), 315–320.

BREIMAN, L. A KOL. (1961). Optimal gambling systems for favorable games.

DOOB, J. L. (1953). *Stochastic processes*, volume 101. New York Wiley.

FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications. *1991*.

LACHOUT, P. Diskrétní martingaly. Skripta k výuce předmětu Teorie Pravděpodobnosti 2 na MMF UK.

RATAJ, J. Teorie míry a integrálu. Skripta k výuce předmětuti Teorie míry a integrálu na MMF UK.

SIEGRIST, K. Random services. `https://www.randomservices.org/random/renewal/index.html`. Accessed: July 17, 2019.