



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stanislav Šípka

**Optimalizační úlohy s nejistotou
závislou na rozhodnutí**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ďakujem vedúcemu mojej bakalárskej práce RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za odborné vedenie práce, množstvo užitočných komentárov a čas strávený spoločnými konzultáciami. Moja srdečná vďaka patrí aj môjmu bratovi Martinovi Šípovi, ktorého rady mi pomohli v čase, keď som nevedel ako v práci pokračovať. V neposlednom rade ďakujem mojej blízkej rodine, ktorá ma podporovala nielen počas písania tejto práce, ale aj počas celého môjho štúdia. Ďakujem tiež dobrej kamarátke Sabíne Vančíkovej, ktorá pri korekcii mojich pravopisných a štylistických chýb robila čo mohla. Na záver by som touto cestou rád poďakoval mojim najlepším priateľom Dominikovi Rózsahegyimu a Marekovi Šešulkovi, ktorí vždy vedeli, ako si z vecí nerobiť zbytočne príliš ťažkú hlavu a pomohli mi problémy súvisiace s touto prácou a skúškovými obdobiami brať s nadhľadom.

Název práce: Optimalizační úlohy s nejistotou závislou na rozhodnutí

Autor: Stanislav Šípka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V praktických optimalizačních úlohách sa často objavuje neistota v hodnotách parametru, ktorú je nutné zohľadniť pri rozhodovaní v reálnom svete. Takýmto typom úloh sa zaoberá odvetvie lineárnej optimalizácie s názvom robustná lineárna optimalizácia. V týchto problémoch parametre úlohy patria do predom zadaných množín. Ich špeciálnym prípadom sú množiny, ktoré závisia na rozhodnutiach. V tejto práci sa budeme zaoberať práve týmito úlohami, pričom sa zameriame predovšetkým na reformulácie klasickej formy tohoto problému, ktoré vedú k formuláciám pomocou ktorých možno riešiť úlohy použitím štandardných výpočetných softwarov. Tieto zistenia využijeme v numerickej štúdii, v ktorej sa zameriame na správanie robustných najkratších ciest v grafoch.

Klíčová slova: robustná optimalizácia, náhoda závislá na rozhodnutí, najkratšia cesta

Title: Optimization problems with decision-dependent uncertainty

Author: Stanislav Šípka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In practical optimization problems, uncertainty in parameter values is often present. This uncertainty needs to be taken in account when taking real-life decisions. Such issues, where the parameters of the problem lie in the sets with a given shape, can be solved by a type of linear optimization called robust linear optimization. Special cases of these robust optimization are problems, where the sets depend on decisions. In this thesis we will focus on these special problems. The main aim of this thesis is to reformulate the classical form of the problems, leading to formulations which can be solved by standard computational software. We will then use these formulations in numerical study, focusing on behavior of robust shortest path in graphs.

Keywords: robust optimization, decision-dependent uncertainty, shortest path

Obsah

Úvod	2
1 Motivácia	3
1.1 Najkratšia cesta v grafe	3
1.2 Zameranie	6
2 Robustná úloha s všeobecnou závislosťou na rozhodnutí	7
2.1 Komplexita	7
2.2 Reformulácia problému	9
2.3 Odhadovanie hornej medze	13
2.4 Metóda big-M	14
3 Numerická štúdia	16
3.1 Problém najkratšej cesty po druhé	16
3.2 Poplatok za zníženie neistoty	17
3.3 Najkratšia cesta v pražskom centre	19
3.4 Zhrnutie	23
Záver	24
Zoznam použitej literatúry	25

Úvod

V predloženej práci sa zaoberáme optimalizačnými úlohami lineárneho programovania s neistou závislou na rozhodnutí. Presnejšie sa jedná o lineárne optimalizačné úlohy, v ktorých sa objavuje neistota v hodnotách parametru, ktorú je nutné zohľadniť pri rozhodovaní. Tomuto typu optimalizácie hovoríme robustná optimalizácia a toto odvetvie lineárneho programovania rieši problémy, kde parametre úlohy patria do predom daných množín. Špeciálnym prípadom sú úlohy, kde tvar tejto množiny závisí na rozhodnutiach. Práve týmto úlohám sa budeme venovať. Práca je rozdelená do troch hlavných kapitol.

Prvá kapitola popisuje základnú problematiku, ktorej sa práca venuje a rieši praktický problém, ktorý slúži ako ukážka rozdielov medzi jednoduchším variantom robustnej optimalizácie, ktorý neobsahuje prvky rozhodovania a robustnou optimalizáciou s neistou závislou na rozhodnutí. Tieto rozdiely sú ilustrované na probléme hľadania najkratšej cesty v grafe s neistou dĺžkou hrán.

Nasleduje kapitola, ktorá najprv popisuje komplexitu riešeného problému. Jej zbytok je venovaný odvodeniu dvoch reformulácií pôvodnej úlohy založených na dualite lineárneho programovania, ktoré dovoľujú problém numericky riešiť za použitia výpočetných softwarov, čo je hlavným cieľom tejto práce.

Tretia a zároveň posledná kapitola je venovaná numerickej štúdiu. Táto štúdia rieši úlohu hľadania najkratšej cesty v daných grafoch s neistou dĺžkou hrán použitím výpočetného softwaru. V tomto type úloh máme možnosť našimi rozhodnutiami meniť dĺžku hrán v grafe. Na začiatku kapitoly uvádzame tvar formulácií pre tento špecifický problém hľadania najkratšej cesty, ktorých tvar je všeobecne popísaný v druhej kapitole. Ostatok kapitoly je venovaný praktickému riešeniu problému pre dané grafy, pričom prvým riešeným problémom je úloha, ktorá bola už čiastočne vyriešená pre sprísnené obmedzujúce podmienky v prvej kapitole. Druhá časť numerickej štúdie je venovaná správaniu najkratšej robustnej cesty v grafe, ktorý predstavuje graf mestskej hromadnej dopravy pražského centra. Numerickej časť je ukončená krátkym zhrnutím pozorovaných výsledkov.

1. Motivácia

Optimalizačné úlohy závislé na neistote rozdeľujeme na dva hlavné smery. Úlohy stochastickej optimalizácie a úlohy robustnej optimalizácie. Stochastická optimalizácia sa využíva v prípadoch, kedy máme k dispozícii rozdelenie neistoty, a teda rozhodnutie je závislé od náhody. V prípadoch, kedy sa neistota nachádza v množinách (tzv. množinách neistoty) používame výpočetne atraktívnejšiu cestu robustnej optimalizácie. Metóda robustnej optimalizácie štandardne využíva množiny neistoty, ktoré sú predom dané (exogénne). Motivovaní mnohými problémami z reálneho života, kde rozhodnutia môžu mať efekt na neistote, sme nútení prístup rozšíriť na množiny, ktoré sú závislé na našom rozhodnutí. V takomto prípade hovoríme o endogénnej množine neistoty. Tieto problémy sa vyznačujú svojou vysokou výpočetnou náročnosťou, čo je jeden z dôvodov, prečo i napriek širokým uplatneniam v reálnom živote tieto úlohy v minulosti neobdržali množstvo pozornosti. V tejto práci sa zmeriame práve na tieto problémy lineárnej optimalizácie s endogénnou neistotou. Presnejšie sa zamierame na prípad dvojstupňovej robustnej optimalizácie s množinami neistoty závislými na rozhodnutiach (ďalej ako RO-DDU – z ang. *Robust optimization under decision-dependent uncertainty*). V prvom stupni určíme naše rozhodnutie formou binárneho vektora $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ a následne v závislosti na tomto vektore hľadáme v druhom stupni vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ktorý nám dáva optimálne riešenie úlohy. Všeobecne ho popíšeme nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{y}, \quad (\text{RO-DDU}) \\ \text{s.t. } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{y} \leq b_i, \quad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ a $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, m$. Všimnime si, že obmedzenia sú znova dané ako lineárna kombinácia vektoru rozhodnutia \mathbf{x} , k nemu príslušného vektoru \mathbf{y} a prvku $\boldsymbol{\xi}$ z množiny $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$, ktorú budeme nazývať množina neistoty a jej tvaru sa budeme venovať neskôr. Vektor z množiny $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$ budeme nazývať vektorom neistoty. Problém priblížime na úlohe hľadania najkratšej cesty v grafe.

1.1 Najkratšia cesta v grafe

Uvážme graf $D = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, kde \mathcal{A} je množina hrán a \mathcal{V} je množina vrcholov. Problém najkratšej cesty z vrcholu $s \in \mathcal{V}$ do vrcholu $t \in \mathcal{V}$ formulujeme z pohľadu lineárneho programovania na základe knihy [3, str. 42] pomocou množín následníkov a predchodcov

$$\mathcal{V}^+(i) = \{k : (i, k) \in \mathcal{A}\} \quad \text{a} \quad \mathcal{V}^-(i) = \{k : (k, i) \in \mathcal{A}\}$$

ako

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \bar{d}_{ij} y_{ij} \\
s.t. & \sum_{k \in \mathcal{V}^+(s)} y_{sk} - \sum_{k \in \mathcal{V}^-(s)} y_{ks} = 1 \\
& \sum_{k \in \mathcal{V}^+(i)} y_{ik} - \sum_{k \in \mathcal{V}^-(i)} y_{ki} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{s, t\} \\
& \sum_{k \in \mathcal{V}^+(t)} y_{tk} - \sum_{k \in \mathcal{V}^-(t)} y_{kt} = -1, \quad y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

kde \bar{d}_{ij} je nominálne ohodnotenie hrany $(i, j) \in \mathcal{A}$ a $y_{ij} = 1$ práve vtedy, keď je hrana (i, j) súčasťou najkratšej cesty. V opačnom prípade platí $y_{ij} = 0$. Je teda jasné, že pre vektor \mathbf{y} v úlohe hľadania najkratšej cesty platí $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|\mathcal{A}|}$.

Túto formuláciu problému najkratšej cesty teraz využijeme na priblíženie úlohy hľadania najkratšej cesty v grafe s neistou závislou na rozhodovaní. V nasledujúcom príklade sme sa inšpirovali príkladom č. 2 z článku [5, str. 1774].

Príklad. Majme graf $D = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$. Našou úlohou je nájsť najkratšiu cestu z vrcholu $s \in \mathcal{V}$ do vrcholu $t \in \mathcal{V}$. Zameriame sa na rozdiely medzi exogénnou a endogénnou robustnou formuláciou takejto úlohy. V preklade teda porovnáme dva prípady, kedy v prvom z nich vektor neistoty $\boldsymbol{\xi}$ nedokážeme ovplyvniť. Naopak v druhom prípade naše rozhodnutie \mathbf{x} môže meniť tvar vektoru neistoty $\boldsymbol{\xi}$. Upozorníme taktiež na očividné rozdiely medzi klasickým problémom hľadania najkratšej cesty a z neho vychádzajúcim robustným problémom. Pri riešení robustných úloh predpokladáme, že dĺžka hrany $(i, j) \in \mathcal{A}$ je pre každú hranu neistá a rovná $d_{ij} = \bar{d}_{ij}(1 + 0.5\xi_{ij})$, pričom \bar{d}_{ij} značí nominálne ohodnotenie hrany (i, j) . Je teda prirodzené, že pri riešení takejto úlohy uvažujeme ako najkratšiu možnú cestu práve takú cestu, ktorá je najkratšia pri najhoršej možnej realizácii neistoty. Vektor neistoty $\boldsymbol{\xi}$ uvažujeme nezáporný a patriaci do množiny neistoty $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ popísanej v (1.2). Všimnime si, že táto množina je závislá na binárnom vektore rozhodnutí \mathbf{x} . Pre jednoduchosť predpokladajme, že zmenšenie neistoty je možné previesť najviac pre jednu z hrán. Množina neistoty má tvar

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \mid 0 \leq \xi_{ij} \leq 1 - 0.8x_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} \xi_{ij} \leq 1 \right\}. \tag{1.2}$$

Tento prípad je teda špeciálnym prípadom problému (RO-DDU) a vieme ho popísať ako

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}(\mathbf{x})} \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} y_{ij} d_{ij}(\xi_{ij}) \\
s.t. & \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} \leq 1 \\
& \mathbf{y} \in Y,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

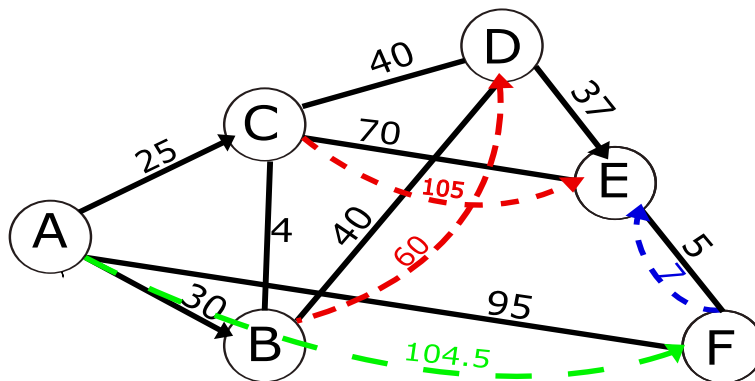
kde Y je množina daná podmienkami definovanými v (1.1).

Na ilustráciu nám postačí jednoduchý graf na obrázku 1.1. Uvážme teda tri prístupy, pomocou ktorých ilustrujeme rozdiely v úlohách popísaných vyššie.

Ako prvú uvážime úlohu hľadania najkratšej nominálnej cesty. Po nájdení tejto najkratšej nominálnej cesty nájdeme také rozdelenie neistoty ξ , aby bola skutočná dĺžka tejto cesty najväčšia možná. Týmto spôsobom ilustrujeme vplyv robustnosti na úlohu hľadania najkratšej cesty. Na obrázku 1.1 môžeme pozorovať tvar a v tabuľke 1.1 vidíme optimálnu hodnotu tejto cesty. Tá je rovná **130**.

V druhom prístupe vezmeme do úvahy fakt, že skutočná dĺžka ciest medzi vrcholmi je neistá a môže byť rôzna od nominálnej, avšak tieto skutočné dĺžky hrán nebudeme schopní žiadnym spôsobom ovplyvniť. Takto riešená úloha je príkladom úlohy exogénnej robustnej optimalizácie. Platí teda, že v tomto a taktiež predošlom prístupe k úlohe uvažujeme, že pre binárny vektor rozhodnutia \mathbf{x} platí $x_{ij} = 0 \forall (i,j) \in \mathcal{A}$. Na obrázku 1.1 môžeme znova pozorovať tvar a v tabuľke 1.1 vidíme optimálnu hodnotu tejto cesty rovnú hodnote **122**.

Posledným prístupom je endogénny prípad, kedy naše rozhodnutie \mathbf{x} má možnosť meniť tvar množiny neistoty $\mathcal{U}(\mathbf{x})$. To sa môže prejavovať na skutočnej dĺžke ciest $d_{ij}(\xi_{ij})$. Keďže máme možnosť znížiť neistotu len pre jednu z hrán, neistota bola znížená pre najdlhšiu hranu, ktorá je súčasťou najkratšej cesty, ako môžeme sledovať na obrázku 1.1. Zaujímavé je si na tejto ceste uvedomiť, prečo je hrana medzi vrcholmi F a E rovná iba 1.4-násobku svojej nominálnej dĺžky, a nie 1.5-násobku ako tomu bolo v predošlých dvoch prípadoch. Tento fakt je spôsobený tým, že časť neistoty leží v hrane medzi vrcholmi A a F , a teda sa na tejto kratšej hrane najkratšej cesty prejavuje len zbytok neistoty kvôli podmienke (1.2) pre množinu $\mathcal{U}(\mathbf{x})$. Optimálna hodnota je v tomto prípade najnižšia a rovná **111.5**.



Obr. 1.1: Najkratšia cesta v grafe z vrcholu A do vrcholu E . Čísla nad hranami predstavujú nominálne ohodnotenie príslušných hrán. Prerušované čiary upozorňujú na hrany, ktorých skutočná dĺžka je uvažovaná rôzna od nominálnej v optimálnych riešeniach troch spomenutých prístupov k riešeniu úlohy. Červená prerušovaná čiara značí, že príslušná hrana bola v niektorom z optimálnych riešení uvažovaná s dĺžkou $d_{i,j} = 1.5\bar{d}_{i,j}$, teda jej bola priradená neistota $\xi_{i,j} = 1$. Zelenou prerušovanou čiarou je vyznačený prípad, kedy bola neistota danej hrany upravená na $\xi_{i,j} \leq 0.2$, čo spôsobilo, že pre jej dĺžku platilo $d_{i,j} = 1.1\bar{d}_{i,j}$. Modrou farbou značíme hranu, ku ktorej bola príslušná neistota vďaka nášmu rozhodnutiu nepriamo upravená na $\xi_{i,j} \leq 0.8$ a jej dĺžka je teda rovná $d_{i,j} = 1.4\bar{d}_{i,j}$.

Najkratšia cesta	Cesta	Nominálna hodnota	Robustná hodnota
Nominálna	A-C-E	95	$25+70\times 1.5=130$
Exogénna robustná	A-B-D-E	107	$25+1.5\times 40+37=122$
Endogénna robustná	A-F-E	100	$1.1\times 95+1,4\times 5=111.5$

Tabuľka 1.1: Tabuľka udávajúca dĺžku ciest v rôznych prípadoch optimalizačných úloh príslušná k obrázku 1.1

V tabuľke 1.1 vidíme riešenia úlohy pre všetky tri komentované prístupy. Ukazuje sa, že i napriek faktu, že nominálna hodnota je v prvom prípade najnižšia, z pohľadu robustnej optimalizácie nám táto cesta dáva najhorší výsledok. Vidíme, že optimálna robustná hodnota riešenia postupne pre tieto tri prístupy klesá. Jednoduchou úvahou dokážeme toto tvrdenie zovšeobecniť. Platí, že nominálna najkratšia cesta nám nemôže dať menšiu optimálnu hodnotu ako optimálna hodnota najkratšej cesty hľadanej exogénnym prístupom. Pre exogénny prístup rovnako nemôže vyjsť menšia optimálna hodnota riešenia ako by tomu bolo v prípade najkratšej cesty hľadanej endogénnym prístupom.

V riešenom príklade sme uvažovali, že rozhodnutie znížiť neistotu neprichádza so žiadnou penalizáciou účelovej funkcie. Tento model zovšeobecňujeme v kapitole 3 na prípad, kedy naše rozhodnutie znížiť neistotu pre hranu $(i,j) \in \mathcal{A}$ prichádza s penalizáciou c_{ij} . Vplyv tejto penalizácie na najkratšiu cestu detailne popisujeme v podkapitole 3.2.

1.2 Zameranie

V tejto práci budeme čerpať prevažne z článku [5] a zmeriame sa na tieto témy:

- Riešenie úloh robustnej lineárnej optimalizácie s polyédrickými množinami závislými na rozhodnutí. Poznamenáme, že tieto problémy sú v všeobecnosti NP-úplné. Ukážeme, že v prípade, kedy je vektor rozhodnutia ovplyvňujúci neistotu binárny, možno problém reformulovať ako problém zmiešanej celočíselnej optimalizácie.
- Pre binárne \mathbf{x} , predvedieme triedu množín neistoty, pre ktorú existuje efektívnejšia reformulácia (RO-DDU) problému. Ukáže sa, že štruktúra množín a podstata závislosti na rozhodnutí sa dajú použiť na reformuláciu pracujúcu s menším počtom podmienok.
- Pre problém (RO-DDU) predvedieme dve formulácie, ktorých tvar dovoľuje problémy (RO-DDU) riešiť pomocou štandardných výpočetných softwarov.
- V numerickej štúdii uvedieme tvar oboch uvedených všeobecných formulácií pre problém hľadania robustnej najkratšej cesty v grafe. Pre jednu z týchto formulácií vyšetríme správanie grafov pre rôzne prvotné nastavenia úloh v praktických problémoch spočítaných softwarom AMPL, určeným k riešeniu optimalizačných úloh.

2. Robustná úloha s všeobecnou závislosťou na rozhodnutí

2.1 Komplexita

V tejto časti sa zameriame na komplexitu problému (RO-DDU) a na základe prebraných tvrdení z [5, str. 1777] ukážeme, že príslušný problém je NP-úplný a zavedieme príslušnú potrebnú teóriu týkajúcu sa tejto problematiky. V nasledujúcich definíciách pracujeme s knihou [4, str.30]

Definícia 1. Literálom nazveme premennú x , ktorá môže nadobúdať hodnoty *TRUE* ($x = 1$), alebo *FALSE* ($x = 0$).

Definícia 2. Klauzulou nazveme disjunkciu ľubovoľného počtu literálov.

Poznámka. V prípade literálov uvažujeme značenie $\neg x := \neg x$. Príkladom klauzuly je výraz $(x_1 \vee x_2 \vee (\neg x_1))$, kde x_1 a x_2 sú literály.

Definícia 3. Povieme, že výraz je v konjunktívnom normálnom tvare, ak je výraz konjunkcia klauzúl.

Definícia 4. Problémom splniteľnosti SAT (z anglického satisfiability) nazývame problém, kedy riešime úlohu, či pre výraz v konjunktívnom normálnom tvare tvorený literálmi x_1, \dots, x_n , existujú hodnoty literálov, pre ktoré tento výraz má kladnú pravdivostnú hodnotu.

Príklad. Majme výraz $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$. Tento výraz je v konjunktívnom normálnom tvare, pretože obsahuje dve klauzuly, ktoré sú spojené konjunktívnym znamienkom \wedge a každá klauzula navyše spája literály v jej vnútri disjunktívnym znamienkom \vee . Úloha je teda úlohou splniteľnosti. Riešením takejto úlohy by bol záver, že riešenie existuje, pretože napríklad pre $x_1 = 1, x_2 = 0$ a $x_3 = 1$, dostávame výraz $(1 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1)$ s pravdivostnou hodnotou 1.

Príklad. Jednoduchým prípadom, kedy riešenie neexistuje, je výraz $x \wedge (\neg x)$.

Poznámka. Pri riešení SAT úloh nás nezaujíma samotná hodnota literálov. Jediné, čo je predmetom nášho záujmu, je fakt, či nejaká kombinácia dávajúca kladnú výpovednú hodnotu existuje.

Definícia 5. 3-SAT problémom (z ang. 3-satisfiability) nazývame problém splniteľnosti, ktorý má pevne danú formu. Platí preň, že je tvorený literálmi x_1, \dots, x_n a delí sa do m klauzúl, pričom každá klauzula sa skladá práve z trojice literálov.

Príklad. Úlohou 3-SAT je nasledujúci výraz $(x_1 \vee (\neg x_2) \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_1 \vee x_2)$, obsahujúci štyri literály x_1, \dots, x_4 a dve klauzuly $(x_1 \vee (\neg x_2) \vee x_3)$ a $(x_4 \vee x_1 \vee x_2)$.

Poznámka. Všimnime si, že je jednoduché overiť, či je dané potenciálne riešenie \mathbf{x} naozaj riešením problému 3-SAT. Na druhú stranu to, ako nájsť nejaké riešenie už vôbec nie je očividné. Takáto charakteristika je blízka termínu *NP*. Tejto problematike sa bližšie venuje kniha [3, str. 87-88]. Ukazuje sa, že 3-SAT problém je dokonca *NP-úplným* problémom, a teda preň vo všeobecnosti nepoznáme žiadny efektívny algoritmus ako nájsť jeho riešenie.

V nasledujúcej časti dáme do súvisu výpočetnú zložitosť problému 3-SAT a riešeného problému (RO-DDU).

Definícia 6. Množinu s maticou konštánt \mathbf{D} typu $m \times n$, m rozmerným vektorom konštánt \mathbf{d} a maticou koeficientov rozhodnutia $\mathbf{\Delta}$ typu $m \times n$ danú vzorcom

$$\mathcal{U}^P(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} \leq \mathbf{d} + \mathbf{\Delta}\mathbf{x}\}$$

nazveme polyédricou množinou neistoty s afinnou závislosťou na rozhodnutí.

Matica $\mathbf{\Delta}$ určuje, ako veľký vplyv má vektor rozhodnutia \mathbf{x} na množinu neistoty. Táto matica sa dá odhadnúť na základe dát alebo z podstaty zadanej úlohy.

Predtým než ukážeme, že problém (RO-DDU) je NP-úplný, potrebujeme vysloviť pomocné tvrdenie, ktoré v dôkaze využijeme. Na to je nutné definovať problém, ktorý označíme ako (RO-SAT) s nasledujúcim tvarom.

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, z \geq 0} \{-z \mid z - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{y} \leq 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \leq \mathbf{e}, -\mathbf{y} \leq -\mathbf{e}\}, \quad (\text{RO-SAT})$$

kde množina neistoty $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ má pre tento problém tvar

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_i \geq x_{i_1}, \xi_i \geq x_{i_2}, \xi_i \geq (1 - x_{i_3}), \xi_i \leq 1\}$$

Lemma 1. 3-SAT problém má prípustné riešenie \mathbf{x} práve vtedy, keď optimálna hodnota odpovedajúceho problému (RO-SAT) je najviac $-m$.

Dôkaz. [5, str. 1777-Lemma 3.3] □

Tvrdenie 2. Problém robustnej lineárnej optimalizácie (RO-DDU) s množinou neistoty \mathcal{U}^P je NP-úplný.

Náznak dôkazu. Uvážme 3-SAT problém s literálmi x_1, \dots, x_n a m klauzulami. Hľadáme teda riešenie $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, ktoré uspokojuje

$$x_{i_1} + x_{i_2} + (1 - x_{i_3}) \geq 1 \text{ pre } m \text{ klauzúl a } i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}.$$

Uvažujeme špeciálny prípad (RO-DDU) s tvarom popísaným vyššie a označením (RO-SAT). Všimnime si, že 3-SAT problém je vstavaný do tejto množiny.

Podľa Lemmy 1 je optimálne riešenie (RO-SAT) $-m$ práve vtedy, keď má 3-SAT problém prípustné riešenie. Keďže je problém (RO-SAT) špeciálnym prípadom nášho problému (RO-DDU) s polyédrickou množinou $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ a podľa poznámky vieme, že 3-SAT problém je NP-úplný, spolu dostávame, že taktiež problém (RO-DDU) je NP-úplný. □

Dokázali sme teda, že vo všeobecnosti je problém (RO-DDU) NP-úplný, možno ho však preformulovať ako problém bilineárneho alebo bikonvexného programovania, na ktoré už možno použiť algoritmy globálnej optimalizácie. Problémom však ostáva výpočetná zložitosť, vďaka ktorej sú problémy (RO-DDU) v praxi pre väčšie problémy len ťažko využiteľné. V prípade, kedy pracujeme s binárnym vektorom rozhodnutia \mathbf{x} , ktorý určuje tvar množiny neistoty $\mathcal{U}(\mathbf{x})$, môžeme problém (RO-DDU) preformulovať napríklad na problém zmiešaného lineárneho celočíselného programovania použitím metódy *big-M*, ktorej sa budeme venovať v podkapitole 2.4.

Poznámka. Pojmu *bikonvexnej optimalizácie* sa bližšie venuje článok [1, *Biconvex Sets and Optimization with Biconvex Functions - A Survey and Extensions*] a viac o *bilinéarnom programovaní* nájdeme v článku [2, *Bilinear Programming: An Exact Algorithm*]

2.2 Reformulácia problému

Z hľadiska výpočetných vlastností spomínanej metódy *big-M* je výhodné, ak vektor rozhodnutia \mathbf{x} hrá hlavnú rolu v ovplyvňovaní prvkov množiny neistoty. Ak je tento predpoklad splnený, je možné efekt \mathbf{x} na obmedzeniach množiny neistoty previesť do penalizácie koeficientov účelovej funkcie, a týmto zmenšiť množstvo obmedzení. Zaoberajme sa prípadom, kde \mathbf{x} určuje hornú hranicu vektoru neistoty ξ . Tento problém sa dá popísať množinou

$$\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x}) = \{\xi \mid D\xi \leq \mathbf{d}, \xi \leq \mathbf{v} + \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x}), \xi \geq \mathbf{0}\}, \quad (2.1)$$

kde $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matica koeficientov, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$ je nezáporný vektor a $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ je diagonálna matica s kladnými prvkami na diagonále určujúca v závislosti na vektore \mathbf{x} hornú medzu pre vektor neistoty ξ . Všimnime si, že závislosť množiny $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$ na rozhodnutí určuje jednu z podmienok hornej medze pre každý prvok ξ_i , pričom naše rozhodnutie položiť $x_i = 1$ znižuje túto hranicu z $v_i + w_i$ na v_i .

V nasledujúcej časti rozoberieme, ako sa dá zavedená štruktúra použiť na preformulovanie pôvodného problému (RO-DDU).

Budeme sa zaoberať reformuláciou nasledujúcej podmienky pre vektor \mathbf{y}

$$\mathbf{y}^T \xi \leq b \quad \forall \xi \in \mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

V tejto podmienke uvažujeme vektor \mathbf{x} ako známy a pevne daný vektor rozhodnutí. Aby sme podmienku splnili pre každú hodnotu ξ , potrebujeme, aby nerovnosť platila pre maximum cez množinu $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$. Zvážme teda dva nasledujúce problémy z článku [5, str. 1778].

$$\begin{array}{ll} h(x, \mathbf{y}) = \max_{\xi} \mathbf{y}^T \xi & \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\xi, \zeta} (\mathbf{y} - \bar{\Pi}\mathbf{x})^T \xi + \mathbf{y}^T \zeta \\ \text{(P)} \quad \text{s.t. } D\xi \leq \mathbf{d} & \text{s.t. } D\xi + D\zeta \leq \mathbf{d} \\ \xi \leq \mathbf{v} + \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x}) & \xi \leq \mathbf{W}\mathbf{e} \quad \text{(P')} \\ \xi \geq \mathbf{0} & \zeta \leq \mathbf{v} \\ & \xi, \zeta \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Účelovú funkciu v úlohe (P) maximalizujeme priamo nad $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$. V tomto prípade však štandardná formulácia vedie k reformulácii obsahujúcej bilinéarne obmedzenia, čomu sa chceme kvôli nepriaznivým výpočetným vlastnostiam vzniknutého problému vyhnúť. Z toho dôvodu zavádzame reformuláciu problému (P'), o ktorej v prevzatom tvrdení 3 ukážeme, že jeho optimálna hodnota je rovná

optimálnej hodnote problému (P). Nech $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ označuje duálnu premennú príslušnú k problému (P). Formulácia duálneho problému k (P') si vyžaduje zavedenie matice $\bar{\boldsymbol{\Pi}} = \text{diag}(\bar{\boldsymbol{\pi}})$, kde $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ je horná hranica optimálnej hodnoty pre duálnu premennú $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pre každú dvojicu $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Túto hodnotu môžno odhadnúť spôsobom, ktorému sa budeme venovať v podkapitole 2.3.

Zamerajme sa teraz na tvar duálnych problémov k (P) a (P'). Označme k nim príslušné duálne problémy postupne ako (D) a (D'). Uvedieme, ako prejsť od (P) k (D). Problém (P) obsahuje n premenných v účelovej funkcii a obmedzuje ho $n + m$ obmedzení. Duálna úloha (D) bude teda obsahovať $n + m$ premenných a n obmedzení. Duálne premenné označíme ako \boldsymbol{q} a $\boldsymbol{\pi}$. Platí teda, že $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$. Tvar tejto úlohy vidíme v tabuľke 2.1.

			ξ_1	$\dots \xi_j \dots$	ξ_n			
			≥ 0	≥ 0	≥ 0			
\boldsymbol{q}	q_1	≥ 0	$D_{1,1}$	$\dots D_{1,j} \dots$	$D_{1,n}$	\leq	d_1	$\forall i$
	q_i	≥ 0	$D_{i,1}$	$\dots D_{i,j} \dots$	$D_{i,n}$	\leq	d_i	
	q_m	≥ 0	$D_{m,1}$	$\dots D_{m,j} \dots$	$D_{m,n}$	\leq	d_m	
$\boldsymbol{\pi}$	π_1	≥ 0	1	0...0	0	\leq	$v_1 + w_1(1 + x_1)$	$\forall j$
	π_j	≥ 0	0	0...1...0	0	\leq	$v_j + w_j(1 + x_j)$	
	π_n	≥ 0	0	0...0	1	\leq	$v_n + w_n(1 + x_n)$	
			\geq	\geq	\geq		min	
			y_1	$\dots y_j \dots$	y_n	max		

Tabuľka 2.1: Tabuľka popisujúca prechod od (P) k príslušnému duálnemu problému (D)

Z pravého stĺpca tabuľky vidíme tvar účelovej funkcie, ktorá ma tvar

$$\sum_{i=1}^m d_i q_i + \sum_{j=1}^n \pi_j (v_j + w_j(1 - x_j)).$$

K nej príslušné podmienky vidíme v troch najdlhších stĺpcoch dané ako

$$\sum_{i=1}^m \boldsymbol{D}_{ij} q_j + \pi_j \geq y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Spolu z faktom, že $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q} \geq \mathbf{0}$ dostávame úlohu (D). Analógiou k tomuto postupu tak dostávame aj tvar duálneho problému k (P'). Spolu majú tieto úlohy tvar

$$\begin{array}{ll} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = & \bar{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \\ \min_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q}} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{W}(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}) & \min_{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}} \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{d} + \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{e} + \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{v} \\ (D) \quad s.t. \boldsymbol{\pi}^T + \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{D} \geq \boldsymbol{y}^T & s.t. \boldsymbol{s}^T + \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{D} \geq \boldsymbol{y}^T \quad (D') \\ & \boldsymbol{r}^T + \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{D} \geq \boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{x}^T \bar{\boldsymbol{\Pi}} \\ & \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Podľa článku [5, str. 1779-1780] ukážme rovnosť optimálnych riešení týchto dvoch formulácií.

Tvrdenie 3. Ak je \mathbf{x} binárny, množina $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$ je neprázdna a prvky vektoru \mathbf{v} a matice \mathbf{W} sú nezáporné, potom

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x}).$$

Dôkaz. Jedná sa o úlohy lineárneho programovania, teda môžeme využiť silnú dualitu, ktorá zaisťuje rovnosť $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $\bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. V celom dôkaze sa budeme odkazovať na optimálne hodnoty duálnych problémov ako na $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Nech $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q})$ je optimálne riešenie problému (D). Ďalej položíme $(\mathbf{r} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{x}, \mathbf{s} = \boldsymbol{\pi}, \mathbf{t} = \mathbf{q})$ s maticou $\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\boldsymbol{\pi})$ ako potenciálne prípustné riešenie pre (D'). Ukážeme, že toto riešenie je skutočne prípustné pre (D') a dáva nám nerovnosť $\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ktorú potrebujeme dokázať. Pre toto riešenie platí

$$\mathbf{s}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{D} = \boldsymbol{\pi}^T + \mathbf{q}^T \mathbf{D} \geq \mathbf{y}^T$$

a taktiež

$$\mathbf{r}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{D} = \boldsymbol{\pi}^T - \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{q}^T \mathbf{D} \geq \mathbf{y}^T - \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \geq \mathbf{y}^T - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{\Pi}},$$

kde prvú rovnosť dostávame priamo z definície $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$. Nerovnosti sú dôsledkom prvej podmienky z podmienok určených v (D) spolu s faktom, že $\bar{\mathbf{\Pi}}$ je diagonálna matica, ktorej prvky na diagonále sú hornou hranicou optimálnej hodnoty pre $\boldsymbol{\pi}$, a teda platí $\mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \leq \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{\Pi}}$. Keďže platí $\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ a \mathbf{x} je binárny vektor, dostávame $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}$. To znamená, že $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ je prípustné riešenie problému (D'). Odkiaľ vyvodzujeme nerovnosť

$$\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{q}^T \mathbf{d} + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{v} + (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{x})^T \mathbf{W}\mathbf{e} = h(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

z ktorej dostávame požadovaný záver $\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Pre dôkaz opačnej nerovnosti predpokladajme, že $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ je optimálne riešenie (D'). Položíme $(\boldsymbol{\pi} = \mathbf{s}, \mathbf{q} = \mathbf{t})$ ako riešenie (D). Prípustnosť $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ dostaneme priamo z podmienok pre problém (D'), pretože

$$\boldsymbol{\pi}^T + \mathbf{q}^T \mathbf{D} = \mathbf{s}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{D} \geq \mathbf{y}^T \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \mathbf{q} = \mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Teda $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q})$ je prípustné riešenie pre (D), odkiaľ dostávame

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{t}^T \mathbf{d} + \mathbf{s}^T \mathbf{v} + \mathbf{s}^T \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x}) = \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{s} - \mathbf{r})^T \mathbf{W}\mathbf{e} - \mathbf{s}^T \mathbf{W}\mathbf{x},$$

kde prvá nerovnosť vyplýva z podmienok pre (D) spolu s definíciou (\mathbf{s}, \mathbf{t}) a následujúca rovnosť je dôsledok definície a linearity problému (D'). Aby sme dokázali, že platí $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, potrebujeme ukázať, že platí nerovnosť

$$(\mathbf{s} - \mathbf{r})^T \mathbf{W}\mathbf{e} - \mathbf{s}^T \mathbf{W}\mathbf{x} \leq 0. \tag{2.3}$$

Táto podmienka sa dá vyjadriť ako

$$\sum_{i=1}^n w_i (s_i - r_i - s_i x_i) \leq 0.$$

Pre všetky i , pre ktoré platí $x_i = 1$, ale vieme, že platí

$$w_i(s_i - r_i - s_i x_i) = -w_i r_i \leq 0.$$

Zavedme teraz množinu X_0 všetkých i , pre ktoré platí $x_i = 0$. Problém (D') môžeme reformulovať ako dva vnorené minimalizačné problémy, kde vonkajší problém optimalizujeme cez r_j, s_j a \mathbf{t} , kde $j \in (\{1, \dots, n\} \setminus X_0)$ (ďalej ako $j \notin X_0$) a vnútorný problém cez r_i, s_i , kde $i \in X_0$. Takto popísaný problém má tvar

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}, r_j, s_j, j \notin X_0} & \mathbf{t}^T \mathbf{d} + \sum_{j \notin X_0} r_j w_j + \sum_{j \notin X_0} s_j v_j + l(\mathbf{t}) \\ \text{s.t. } & \left. \begin{aligned} s_j + \mathbf{t}^T \mathbf{D}_{.,j} &\geq y_j, \\ r_j + \mathbf{t}^T \mathbf{D}_{.,j} &\geq y_j - \bar{\pi}_j, \\ r_j, s_j &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall j \notin X_0 \end{aligned}$$

Vnútorná minimalizácia je zachytená do funkcie $l(\mathbf{t})$, ktorá je daná ako:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{t}) = \min_{r_i, s_i, i \in X_0} & \sum_{i \in X_0} r_i w_i + \sum_{i \in X_0} s_i v_i \\ \text{s.t. } & \left. \begin{aligned} s_i + \mathbf{t}^T \mathbf{D}_{.,i} &\geq y_i, \\ r_i + \mathbf{t}^T \mathbf{D}_{.,i} &\geq y_i - \bar{\pi}_i, \\ r_i, s_i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall i \in X_0 \end{aligned}$$

Všimnime si, že vnútorný minimalizačný problém má pre s_i a r_i rovnaké obmedzenia. Keďže sú w_i a v_i nezáporné, dostávame, že existuje optimálne riešenie s_i a r_i , ktoré vypočítame priamo vyjadrením s_i a r_i z podmienok tak, že ich položíme rovné ich dolným medziam. Platí teda

$$s_i = r_i = \max\{y_i - \mathbf{t}^T \mathbf{D}_{.,i}, 0\}, \quad \text{čo implikuje} \quad \sum_{i \in X_0} s_i w_i - r_i w_i = 0.$$

To znamená, že sme ukázali platnosť nerovnosti (2.3), odkiaľ plynie nerovnosť $\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ktorú sme chceli ukázať. Spolu sme teda dokázali, že platia obe neostre nerovnosti, čo nám dáva rovnosť $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, čím je tvrdenie dokázané. □

Vieme, že problém (P) je priamou formuláciou podmienky (2.2). Využitím tvrdenia 3 dostávame reformuláciu pre toto obmedzenie vychádzajúcu z faktu, že platí $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Tvar problému (RO-DDU) má pre túto reformuláciu tvar

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t. } & \mathbf{t}^T \mathbf{d} + \mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{e} + \mathbf{s}^T \mathbf{v} \leq b \\ & \mathbf{s}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{D} \geq \mathbf{y}^T \\ & \mathbf{r}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{D} \geq \mathbf{y}^T - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{\Pi}} \\ & \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\bar{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je konvexná v (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , čo nám umožňuje použiť niektoré optimalizačné algoritmy, ktoré nebolo možné použiť na problém s pôvodnou definíciou podmienok. Všimnime si, že táto reformulácia neobsahuje bilinéarne formy. Otázkou však stále zostáva, ako odhadnúť $\bar{\mathbf{\Pi}}$. Táto téma je riešená v nasledujúcej podkapitole.

2.3 Odhadovanie hornej medze

Na to, aby sa nám podarilo odhadnúť diagonálnu maticu $\bar{\Pi}$, ktorá určuje hornú medzu pre optimálne hodnoty duálnej premennej $\boldsymbol{\pi}$, potrebujeme nájsť hornú medzu jej prvkov π_i . K tomu nám posluží nasledujúce prevzaté tvrdenie z článku [5, str.1780-1781].

Tvrdenie 4. *Ak sú všetky prvky matice \mathbf{D} a vektoru \mathbf{y} nezáporné, potom pre každú dvojicu (\mathbf{x}, \mathbf{y}) splňajúcu podmienky dané v (2.2) s množinou neistoty $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$ platí $\pi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq y_i$.*

Dôkaz. Zvážme nasledujúci problém pre nejaký index i :

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \max_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi} & (2.5) \\ \text{s.t. } \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} &\leq \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\xi} &\leq \mathbf{v} + \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x}) + \theta \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\xi} &\geq 0. \end{aligned}$$

Jedná sa o úlohu lineárneho programovania, teda k tomuto problému existuje odpovedajúca duálna úloha. Označme $\boldsymbol{\xi}_0$ optimálne riešenie problému 2.5 pre $\theta = 0$. Analogicky označme optimálne riešenie príslušného duálneho problému ako \mathbf{q}_0 a $\boldsymbol{\pi}_0$. Nech je optimálna báza daná nejakou maticou \mathbf{B} . Vieme, že \mathbf{B} je regulárna matica a ak označíme $\mathbf{b} = [\mathbf{d}^T, \mathbf{v}^T + (\mathbf{e} - \mathbf{x})^T \mathbf{W}]^T$ vektor pravých strán úlohy (2.5), platí $\boldsymbol{\xi}_0^B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$. V prípade degenerovaného riešenia možno \mathbf{b} perturbovať malým ϵ , na získanie nedegenerovaného riešenia, pričom sa optimálna báza nezmení. Ak je riešenie nedegenerované, dostávame nerovnosť $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq 0$. Všimnime si, že pre dostatočne malú zmenu \mathbf{b} sa optimálna báza nemení. Uvážme teda také $\theta \geq 0$, ktoré má práve spomenutú vlastnosť. Platí že, v takomto prípade duálne premenné nezávisia na vektore pravých strán, čo nám dáva rovnosť

$$\begin{aligned} F(\theta) - F(0) &= \boldsymbol{\pi}_0^T (\mathbf{v} + \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x}) + \theta \mathbf{e}_i) + \mathbf{q}_0^T \mathbf{d} - (\boldsymbol{\pi}_0^T (\mathbf{v} + \mathbf{W}(\mathbf{e} - \mathbf{x})) + \mathbf{q}_0^T \mathbf{d}) \\ &= \theta \boldsymbol{\pi}_0^T \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

ktorá reprezentuje zmenu v hodnote účelovej funkcie. Nech je $\boldsymbol{\xi}_0$ optimálne riešenie príslušné pre hodnotu $\theta = 0$ a analogicky označíme $\boldsymbol{\xi}_\theta$ pre $\theta > 0$. Potom očividne platí

$$\theta \boldsymbol{\pi}_0^T \mathbf{e}_i = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_\theta - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_0.$$

Odtiaľ využitím lemy 5 (uvedenej bezprostredne za týmto dôkazom) dostávame

$$\begin{aligned} \theta \boldsymbol{\pi}_0^T \mathbf{e}_i &= \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_\theta - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_0 \\ &\leq \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_0 + \theta \mathbf{y}^T \mathbf{e}_i - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}_0 \\ &= \theta \mathbf{y}^T \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

čo nám dáva pre každé i nerovnosť $\pi_{0,i} \leq y_i$.

□

Lemma 5. Ak sú všetky prvky matice \mathbf{D} kladné, potom ak $\theta \geq 0$, tak pre optimálne ξ_θ riešenie úlohy (2.5) platí $\xi_\theta \leq \xi_0 + \theta \mathbf{e}_i$

Dôkaz. [5, str. 1779-Lemma 4.4] □

Tvrdenie 4 nám teda dovoľuje odhadnúť prvky $\bar{\pi}_i$ diagonálnej matice $\bar{\Pi}$ ako

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i &= \max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T \mathbf{e}_i \\ \text{s.t. } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\in Y, \end{aligned}$$

kde Y označuje množinu ostávajúcich obmedzení z pôvodného problému. Množina Y môže predstavovať napríklad množinu predchodcov a následníkov, ktorá bola definovaná v (1.1). Na odhadnutie prvku $\bar{\pi}_i$ teda stačí, ak ho položíme rovný maximálnej hodnote akú môže prvok y_i nadobudnúť v danom zadaní úlohy. Táto hodnota medze pre y_i sa dá v niektorých prípadoch, akým je napríklad aj problém hľadania najkratšej cesty, odhadnúť priamo z podstaty riešenej úlohy. S takýmto odhadom môžu byť všetky komponenty problému (RO-DDU) s polyédrickou množinou neistoty $\mathcal{U}^{\bar{\Pi}}(\mathbf{x})$ efektívne numericky spočítané pre rozumne veľké zadania úlohy podľa reformulácie (2.4). Pretože sa práve k tejto formulácii úlohy ešte vrátíme v numerickej štúdii, nazveme takto zavedený tvar úlohy *formuláciou* $\bar{\Pi}$. V nasledujúcej podkapitole zavedieme novú metódu riešenia problému (RO-DDU), ktorú možno taktiež použiť pri výpočte praktických úloh pomocou softwarových prostriedkov.

2.4 Metóda big-M

Doteraz sme vždy problém (RO-DDU) uvažovali pre špecifický tvar množiny neistoty $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ a jej tvar sme využili na zmenšenie počtu obmedzení. Metóda big-M však pracuje s reformuláciou, kde nepotrebujeme predom poznať tvar množiny neistoty. Označíme preto znakom $\mathcal{U}^P(\mathbf{x})$ všeobecnú polyédrickú množinu neistoty a v prevzatom tvrdení z článku [5, 1783-1784] zavedieme tvar tejto metódy.

Tvrdenie 6. Ak je množina neistoty pre každý index i $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$ polyédrická vzhľadom k $\mathcal{U}^P(\mathbf{x})$, platí $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p}$, $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\Delta_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ a \mathbf{x} je binárny vektor, potom je formulácia

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\pi}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{y} \\ &\left. \begin{aligned} \text{s.t. } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{d}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n \Delta_{ijk} w_{ijk} &\leq b_i \\ \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{D}_i &= \mathbf{y}^T \end{aligned} \right\} \forall i, \\ &\left. \begin{aligned} w_{ijk} &\leq M x_k, \quad w_{ijk} \leq \pi_{ij}, \\ w_{ijk} &\geq \pi_{ij} - M(1 - x_k), \\ \pi_{ij} &\geq 0, \quad w_{ijk} \geq 0 \end{aligned} \right\} \forall i, j, k, \\ &\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

kde M je dostatočne vysoká konštanta, reformuláciou úlohy (RO-DDU) pre všeobecnú polyédrickú množinu neistoty $\mathcal{U}^P(\mathbf{x})$.

Náznak dôkazu. Obmedzíme sa na prípad, kedy existuje prípustné riešenie problému (RO-DDU), zbytok dôkazu možno nájsť v článku [5, str. 1784]. Označme toto prípustné riešenie ako (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , vieme potom, že (\mathbf{x}, \mathbf{y}) musí pre každé i spĺňať podmienku $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{y} \leq b_i \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{U}_i(\mathbf{x})$, čo možno prepísať ako

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \max_{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{U}_i(\mathbf{x})} \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{y} \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.6)$$

Ak má úloha prípustné riešenie a jej optimálne riešenie je konečné, tak má ako úloha lineárneho programovania k sebe príslušnú duálnu úlohu, v ktorej silná dualita zaručuje rovnosť optimálnych hodnôt. Problém (2.6) možno potom formulovať ako

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\pi}_i^T \boldsymbol{\Delta}_i \mathbf{x} &\leq b_i, \\ \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{D}_i &= \mathbf{y}^T, \\ \boldsymbol{\pi}_i &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \right\} \quad \forall i \quad (2.7)$$

kde $\boldsymbol{\pi}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ je duálna premenná príslušná k množine neistoty $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$ a m_i značí počet obmedzení v množine $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$ a \mathbf{D}_i je matica typu $m_i \times n$, ktorá určuje ako veľký vplyv má rozhodnutie \mathbf{x} na zmenšenie neistoty. Keďže vieme, že primárny problém má prípustné riešenie a konečnú optimálnu hodnotu, existuje $\boldsymbol{\pi}_i$, ktoré spĺňa podmienky dané v 2.7. Teda problém (RO-DDU) možno formulovať ako

$$\left. \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad &\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad &\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\pi}_i^T \boldsymbol{\Delta}_i \mathbf{x} \leq b_i \\ &\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{D}_i = \mathbf{y}^T \\ &\boldsymbol{\pi}_i \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \right\} \quad \forall i \quad (2.8)$$

kde v prvej podmienke vystupuje bilineárny výraz $\boldsymbol{\pi}_i^T \boldsymbol{\Delta}_i \mathbf{x}$. I-tu podmienku možno prepísať ako

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \sum_{j=1}^{m_i} \pi_{ij} d_{ij} + \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n \Delta_{ijk} w_{ijk} \leq b_i, \text{ kde } w_{ijk} = \pi_{ij} x_k.$$

Fakt, že x_k je binárne nám dovoľuje tento výraz prepísať do tvaru

$$w_{ijk} \leq \pi_{ij}, \quad 0 \leq w_{ijk} \leq M x_k, \quad w_{ijk} \geq \pi_{ij} - M(1 - x_k).$$

Odtiaľ dostávame formuláciu uvedenú v znení odkazovaného tvrdenia. □

Tvrdenie (2.7) nám dovoľuje reformulovať pôvodný problém (RO-DDU) ako problém zmiešaného lineárneho celočíselného programovania, čo sa dá znova využiť pri riešení problémov pomocou výpočetných softwarov. Pre túto formuláciu existuje tiež jej upravená varianta s názvom *modifikovaná big-M formulácia*, ktorá rieši slabú výpočetnú výkonnosť pôvodnej *big-M formulácie*. *Modifikovaná big-M formulácia* nie je súčasťou tejto práce, viac informácií o jej tvare a výpočetných vlastnostiach môžeme nájsť v článku [5, str. 1785-1793].

3. Numerická štúdia

3.1 Problém najkratšej cesty po druhé

Problém hľadania najkratšej cesty v grafe je dobre prebádaný problém, ktorý dokážeme efektívne riešiť. Ako sme však už zistili, takto jednoduché to pre problém hľadania najkratšej cesty s neistou dĺžkou hrán nie je. V tejto kapitole sa zameriame na zovšeobecnenie tohoto problému, ktorý sme už načrtli v podkapitole 1.1. Budeme znova pracovať s grafom $D = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d(\cdot))$, kde \mathcal{V} je množina vrcholov, \mathcal{A} je množina hrán a $d(\cdot) : \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ je funkcia udávajúca dĺžku hrany. Našou úlohou je nájsť najkratšiu cestu z vrcholu $s \in \mathcal{V}$ do vrcholu $t \in \mathcal{V}$. Nominálne ohodnotenie hrany je dané hodnotou \bar{d}_{ij} a skutočná dĺžka hrany d_{ij} je neistá a daná predpisom $d_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = (1 + \frac{1}{2}\xi_{ij})\bar{d}_{ij}$.

Na rozdiel od zjednodušenej formulácie teraz na základe článku [5] zovšeobecníme úlohu pre prípad, kedy naše rozhodnutie zmierniť maximálnu neistotu pre hranu (i,j) prichádza s penalizáciou c_{ij} . O takejto penalizácii sa dá uvažovať ako o cene, ktorú za naše rozhodnutie zmenšiť neistotu zaplatíme. Prirodzene, v prípade, kedy sa rozhodneme neistú dĺžku hrany neovplyvniť žiadnym spôsobom, bude toto rozhodnutie niest nulovú cenu. Príkladom takejto formulácie je oprava cesty za určitý peňažný obnos prinášajúca zlepšenie priechodnosti, a teda zmenšenie maximálnej doby trvania cesty. Takto zavedený problém bude teda zovšeobením problému (1.3) a má tvar

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}^{SP}(\mathbf{x})} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} y_{ij} d_{ij}(\xi_{ij}) \quad (3.1) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in X \subseteq \{0,1\}^{|\mathcal{A}|}, \mathbf{y} \in Y, \end{aligned}$$

kde rovnako ako v prípade (1.3) y_{ij} určuje, či je hrana (i,j) súčasťou najkratšej robustnej cesty, teda tvar množiny Y je popísaný v (1.1). Množina X predstavuje množinu ľubovoľných obmedzení pre vektor rozhodnutí \mathbf{x} . Pracujeme s množinou neistoty s predpisom

$$\mathcal{U}^{SP}(\mathbf{x}) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \mid \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \xi_{ij} \leq \Gamma, \xi_{ij} \leq 1 - \gamma_{ij} x_{ij}, \xi_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in \mathcal{A} \right\},$$

kde Γ určuje hornú medzu pre súčet neistoty hrán v grafe, a teda týmto spôsobom určuje počet hrán, ktoré budú ovplyvnené neistotou. Podobne γ_{ij} určuje, do akej miery naše rozhodnutie zmenšiť neistotu ξ_{ij} pre hranu (i,j) ovplyvní skutočnú robustnú dĺžku hrany d_{ij} . Označme teraz

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \bar{d}_{ij} y_{ij}$$

funkciu určujúcu celkovú cenu redukcie neistoty a nominálnu dĺžku (nejakej) cesty. Podľa článku [5, str. 1788] má úloha najkratšej cesty pre formuláciu Π s množinou neistoty $\mathcal{U}^{SP}(\mathbf{x})$ na základe tvrdenia 3 nasledujúci tvar, kde však autori článku v tomto zdroji uviedli chybný tvar účelovej funkcie. Túto chybu som

objavil pri výpočte úloh, ktoré sú súčasťou tejto numerickej štúdie.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, p} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + p\Gamma + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} q_{ij} \gamma_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} r_{ij} (1 - \gamma_{ij}) \\
& \text{s.t. } p + q_{ij} \geq \frac{y_{ij} \bar{d}_{ij} - \bar{\pi}_{ij} \bar{d}_{ij} x_{ij}}{2} \\
& \quad p + r_{ij} \geq \frac{y_{ij} \bar{d}_{ij}}{2} \\
& \quad p, q_{ij}, r_{ij} \geq 0, \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y,
\end{aligned}$$

pričom podľa tvrdenia 4 pre konštantu $\bar{\pi}_{ij}$ platí $\bar{\pi}_{ij} = 1 \forall (i,j) \in \mathcal{A}$.

Podobne podľa rovnakého článku platí, že formulácia najkratšej cesty pomocou metódy *big-M* s množinou neistoty $\mathcal{U}^{SP}(\mathbf{x})$ má na základe tvrdenia 6 tvar

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, p} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + p\Gamma + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} q_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} r_{ij} \gamma_{ij} \\
& \text{s.t. } p + q_{ij} \geq \frac{y_{ij} \bar{d}_{ij}}{2} \\
& \quad r_{ij} \leq M x_{ij} \\
& \quad q_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq r_{ij} \leq q_{ij} \\
& \quad p, q_{ij}, r_{ij} \geq 0, \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y.
\end{aligned}$$

Vidíme, že účelová funkcia oboch týchto problémov obsahuje $2|\mathcal{A}|$ binárnych a $2|\mathcal{A}| + 1$ spojitých premenných. Obe metódy majú taktiež $2|\mathcal{A}| + 1$ znamienkových obmedzení pre premenné. Tieto metódy sa ale líšia v počte afinných obmedzení. Vidíme, že metóda *big-M* ich obsahuje $|\mathcal{V}| + 4|\mathcal{A}|$, pričom metóda $\bar{\Pi}$ ich obsahuje len $|\mathcal{V}| + 2|\mathcal{A}|$. Práve z toho dôvodu sa v praxi ukazuje metóda $\bar{\Pi}$ numericky rýchlejšia ako klasická metóda *big-M*. Aj preto v praktickej časti tejto numerickej štúdie budeme pracovať práve s metódou $\bar{\Pi}$. Podstatnejším dôvodom, prečo sme sa obmedzili na výpočet len jednou z formulácií je, že grafy s ktorými budeme pracovať nie sú dostatočne veľké na to, aby sa rozdiely v týchto dvoch metódach mohli prejaviť.

3.2 Poplatok za zníženie neistoty

V tejto časti numerickej štúdie sa zameriame na správanie najkratšej robustnej cesty príslušnej k optimálnemu riešeniu pre rôzne hodnoty c_{ij} . Toto správanie budeme pozorovať na grafe z obrázku 1.1, pre ktorý už bola úloha v podkapitole 1.1 pre sprísnené podmienky vyriešená. Budeme teda hľadať najkratšiu cestu z vrcholu A do vrcholu E . V motivačnom príklade sme mali možnosť neistotu rozhodnutím obmedziť najviac pre jednu z hrán a naviac sme predpokladali nulovú cenu za zmenšenie neistoty pre každú z hrán. Tieto obmedzenia teraz postupne zrušíme. Uvažujeme, že konštanta určujúca hornú medzu pre súčet neistoty všetkých hrán, rovnako ako v motivačnej úlohe, spĺňa $\Gamma = 1$. Taktiež podľa vzoru motivačnej úlohy platí $\gamma_{ij} = 0.8 \forall (i,j) \in \mathcal{A}$.

Ako prvú zrušíme podmienku na počet rozhodnutí znížiť neistotu niektorej z hrán, pričom cenu za toto rozhodnutie budeme naďalej uvažovať nulovú. To v praxi znamená, že je výhodné znížiť neistotu pre každú z hrán, keďže takéto

rozhodnutie so sebou nenesie žiadnu penalizáciu účelovej funkcie. V takomto nastavení úlohy už nie je tak atraktívne prechádzať hranou s veľkým nominálnym ohodnotením, ako tomu bolo pre prípad, kedy bolo možné neistotu znížiť najviac pre jednu z hrán. Tento fakt sa v našej úlohe prejaví okrem zníženia hodnoty optimálneho riešenia i na tvare najkratšej cesty. Tvar tohoto riešenia vidíme na obrázku 3.1a.

Zavedieme teraz do úlohy navyše nenulovú kladnú konštantu c_{ij} , ktorá predstavuje penalizáciu za rozhodnutie znížiť neistotu hrany $(i,j) \in \mathcal{A}$. Uvážme tento poplatok pevný a rovný konštantne c pre každú z hrán. Platí teda $c_{ij} = c \forall (i,j) \in \mathcal{A}$.

Položíme najprv $c = 10$ a na obrázku 3.1b môžeme sledovať, pre ktoré hrany má za tento poplatok zmysel upravovať neistotu. Faktom je, že v tomto prípade hrá podstatnú rolu dĺžka jednotlivých hrán ktoré sú súčasťou cesty. Heuristická úvaha nám teda hovorí, že by sa mohlo vyplatíť znižovať neistotu práve pre najdlhšie hrany. Táto úvaha sa ukazuje byť pre túto hodnotu c správna, nakoľko na obrázku 3.1b možno vidieť, že cesta príslušná optimálnemu riešeniu obsahuje zmenšenú neistotu práve pre najdlhšiu hranu, pričom pre zvyšok cesty nebolo výhodné neistotu pre ďalšiu hranu znižovať.

Na porovnanie upravíme cenu za zmenšenie neistoty na $c = 20$ a na obrázku 3.1c sledujeme, že pre túto hodnotu už spomínaná heuristická úvaha neplatí. Vidíme, že tento poplatok za zmenšenie neistoty je tak vysoký, že už viac nie je výhodné znižovať neistotu pre žiadnu z hrán. Ukazuje sa, že cesta príslušná optimálnemu riešeniu je nominálne až tretou najkratšou cestou. Dôvodom prečo má práve takýto tvar, i napriek jej nominálnej dĺžke, je fakt, že neobsahuje hrany s veľkým nominálnym ohodnotením, a teda rozdelenie neistoty má aj v najhoršom prípade menší vplyv na jej výslednú hodnotu. V tomto prípade je podstatná hodnota $\Gamma = 1$, ktorá určuje hornú medzu pre súčet neistoty. Regulovaniu tejto hodnoty sa budeme venovať v druhej časti numerickej štúdie. Platí však, že už pre hodnotu $\Gamma = 1.8$ by sa cesta príslušná optimálnemu riešeniu i vektor rozhodnutia \mathbf{x} zhodoval s riešením pre prípad $c = 10$, $\Gamma = 1$.

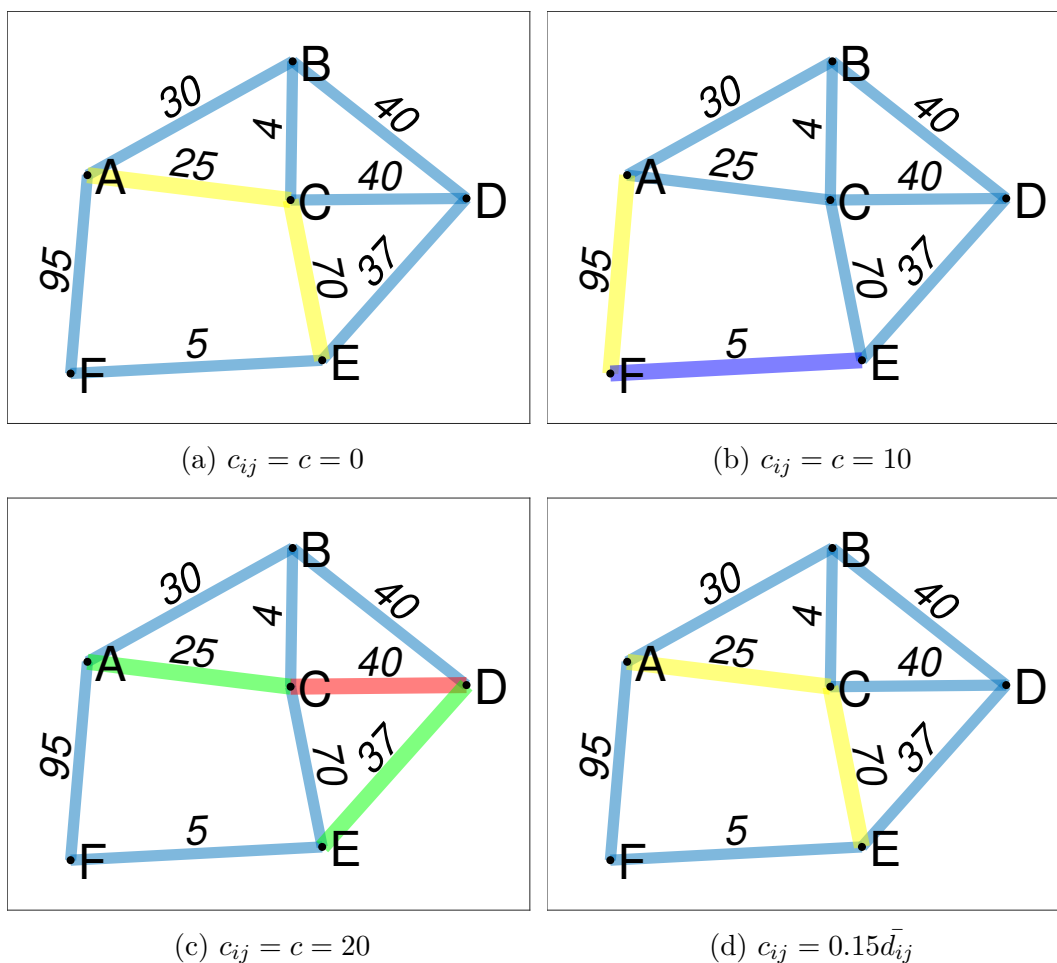
Posledným zadaním ktoré uvážime je prípad, kedy je cena zníženia neistoty lineárnou funkciou jej dĺžky. Položíme $c_{ij} = 0.15\bar{d}_{ij}$ a na obrázku 3.1d vidíme tvar optimálnej cesty. Platí, že ak položíme $c_{ij} = 0.20\bar{d}_{ij}$ tak je táto cena znova príliš vysoká a nie je výhodné znížiť neistotu žiadnej z hrán.

V tabuľke 3.1 vidíme optimálnu hodnotu pre každú z variantov, ktoré sme riešili vyššie. Lahko sa čitateľ môže presvedčiť, že sa v každom prípade zhoduje s optimálnou hodnotou počítanou podľa prvotnej formulácie. Overme toto tvrdenie napríklad pre prípad, kedy $c = 10$. Z obrázku 3.1b vidíme, že neistota bola upravená len pre hranu (A-F), a teda optimálna hodnota sa spočíta ako $10+1.1*95+1.4*5=121.5$.

Cena	Cesta	Optimálna hodnota podľa formulácie $\bar{\Pi}$
$c=0$	A-C-E	$0+25+70+\Gamma*0+0+(1-0.8)*(35+12.5)=104.5$
$c=10$	A-F-E	$10*1+95+5+2.5*\Gamma+45*(1-0.8)=121.5$
$c=20$	A-C-D-E	$0+25+40+37+20*\Gamma+0+0=122$
$c_{ij}=0.15\bar{d}_{ij}$	A-C-E	$0.15*(25+70)+(25+70)+(12.5+35)*(1-0.8)=118.75$

Tabuľka 3.1: Tabuľka najkratšej robustnej cesty príslušnej k optimálnemu riešeniu počítanému pomocou formulácie $\bar{\Pi}$ pre rôzne hodnoty ceny zníženia neistoty c_{ij}

Obr. 3.1: Najkratšie cesty v grafoch pre rôzne hodnoty c_{ij}



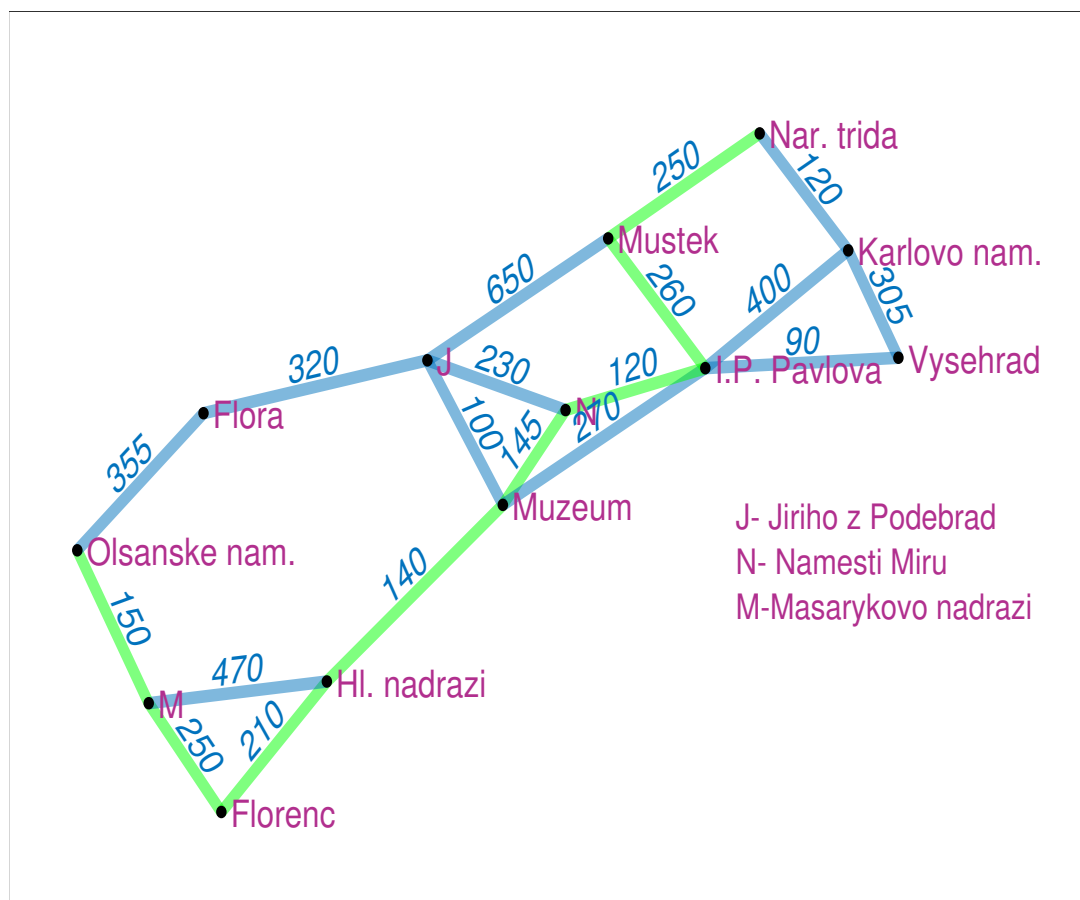
Popis obrázkov. V grafoch hrana svetlomodrej farby **nie je** súčasťou najkratšej cesty. Hrany inej ako svetlomodrej farby **vždy** tvoria súčasť najkratšej cesty. Hrana zelenej farby značí hranu, ktorej dĺžka je rovná jej nominálnej dĺžke a jej neistota **nebola** upravovaná. Hrany žltej farby označujú hrany, ktorých neistota **bola** upravovaná a platí pre ne $d_{ij} = 1.1\bar{d}_{ij}$. Tmavomodrá hrana je hrana, ktorej neistota **nebola** upravovaná, avšak kvôli hodnote $\Gamma = 1$ a úprave neistoty iných hrán tvoriacich najkratšiu cestu platí $d_{ij} = 1.4\bar{d}_{ij}$. Červená hrana je hrana, ktorej neistota **nebola** upravovaná a platí pre ňu rovnosť $d_{ij} = 1.5\bar{d}_{ij}$.

3.3 Najkratšia cesta v pražskom centre

V tejto časti numerickej štúdie sa zmeriame na vplyv konštanty Γ na riešenie úlohy robustnej najkratšej cesty. Použijeme graf niektorých vybraných zastávok pražského centra, pričom dĺžka hrany predstavuje (upravenú) dobu cesty v sekundách. V takomto prípade môže byť neistota reprezentovaná ako hustota premávky v miestach, kde jazdia električky spolu s automobilovou premávkou. Rozhodnutie znížiť neistotu potom reprezentuje napríklad poplatok prepočítaný na jednotlivca za vytvorenie osobitných ciest pre tramvaje, čo by značne znížilo pravdepodobnosť, že cesta medzi dvoma zastávkami bude trvať dlhšie ako podľa

plánu. Uvážime, že poplatok za zníženie neistoty je podobne ako v predošlom prípade rovný konštante $c_{ij} = c = 40$ pre každú hranu a rovnako pre každú hranu platí $\gamma_{ij} = \gamma = 0.8$. Budeme hľadať najkratšiu robustnú cestu medzi zastávkami *Olšanské náměstí* a *Národní třída*.

Ako prvý prípad uvážime $\Gamma = 0$. Nie je ťažké si uvedomiť, že pre takúto hodnotu ide o klasickú úlohu hľadania nominálnej najkratšej cesty. Na obrázku 3.2 môžeme vidieť tvar tejto najkratšej cesty. Všimnime si, že obsahuje až osem hrán, pričom všetky z nich majú pomerne nízke nominálne ohodnotenie. Optimálnu hodnotu môžeme ľahko ručne spočítať priamym výpočtom z obrázku 3.2 ako nominálnu dĺžku zvýraznenej cesty, tá je rovná **1525**.

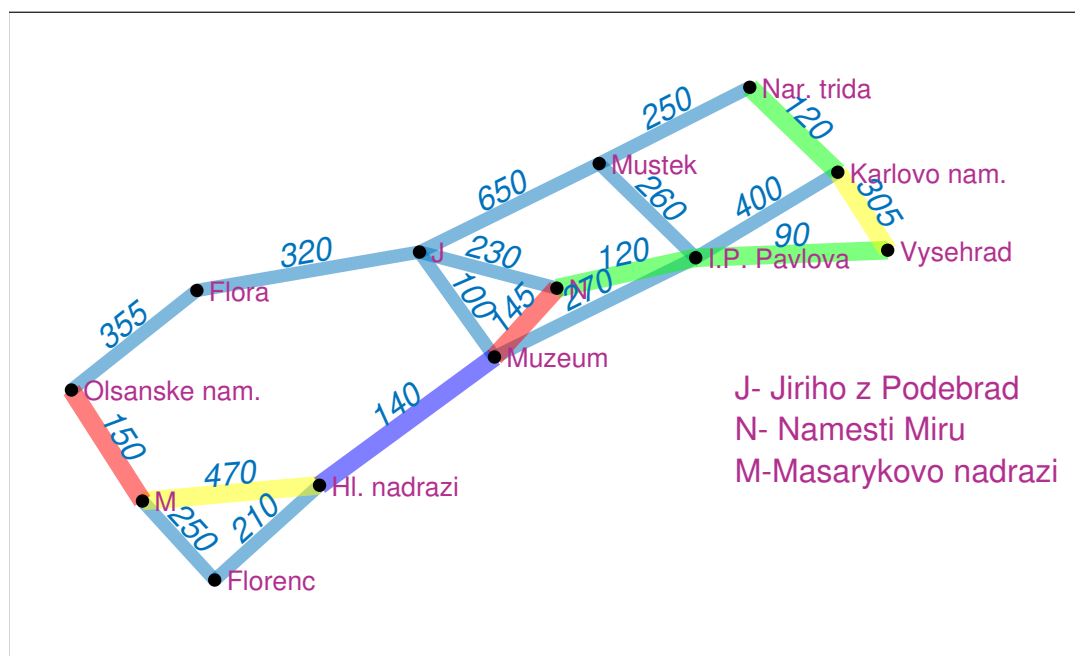


Obr. 3.2: Najkratšia nominálna cesta z *Olšanského náměstí* na *Národní třídu*. Hrany svetlomodrej farby **nie sú** súčasťou najkratšej cesty, hrany zelenej farby **tvoria** najkratšiu cestu a ich dĺžka je rovná ich nominálnej dĺžke.

V druhom prípade položíme $\Gamma = 2$ a $\Gamma = 3$ a porovnáme najkratšie cesty príslušné k týmto konštantám a optimálne hodnoty príslušné k týmto cestám. Platí, že pre hodnotu $\Gamma = 2$ je tvar najkratšej cesty zhodný s najkratšou nominálnou cestou, ktorú môžeme pozorovať na obrázku 3.2. Ukazuje sa, že pre takúto hodnotu Γ ešte nie je výhodné znižovať neistotu pre žiadnu z hrán. Prirodzene je teda najhoršie rozdelenie neistoty pre túto cestu také rozdelenie, ktoré uvažuje dĺžku dvoch najdlhších hrán rovnú 1.5-násobku ich nominálnej dĺžky. Keďže existujú až dve hrany, ktoré sú súčasťou najkratšej cesty a ich nominálna dĺžka je na tejto ceste druhá najdlhšia, existuje nekonečne mnoho možností ako môže byť neistota

medzi týmito dvoma hranami rozdelená. V každom rozdelení však platí, že hrana medzi *I.P. Pavlova* a *Mústkem* je uvažovaná s dĺžkou $1.5 \times 260 = 390$, zbytok neistoty je ľubovoľne rozdelený medzi hranou z *Masarykovho nádraží* na *Florenc* a hranou z *Mústku* na *Národnú triedu*. Vždy teda platí, že súčet dĺžky týchto dvoch hrán je $250 \times 1.5 + 250 = 625$. Teda aj v tomto prípade dokážeme po takejto úvahe spočítať optimálnu hodnotu tejto najkratšej cesty. Tá je rovná **1780**.

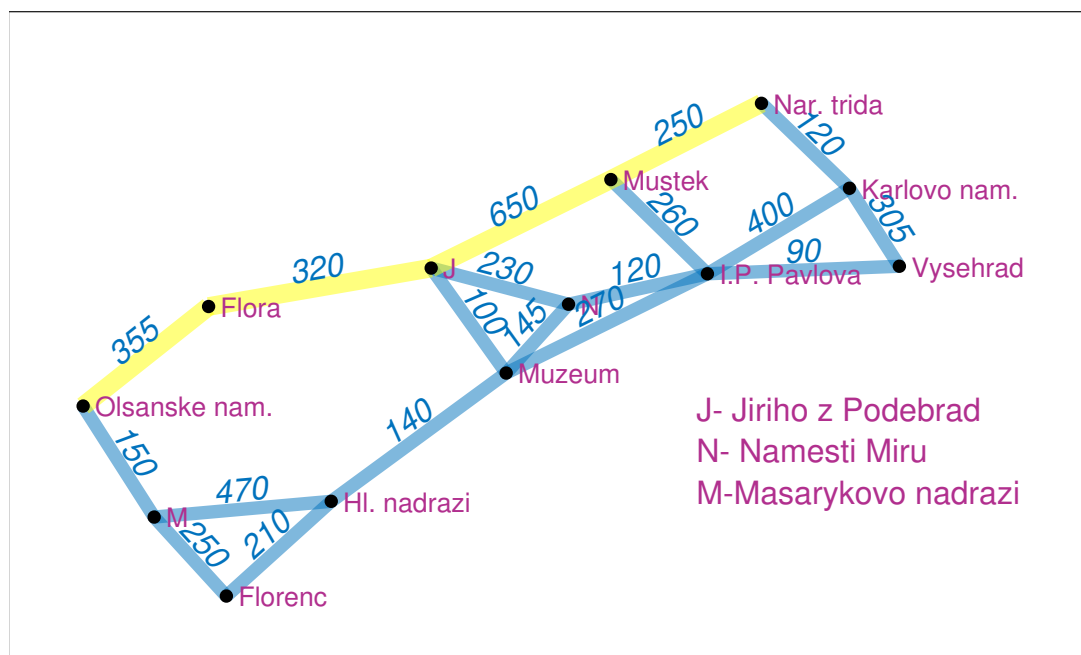
Položíme teraz $\Gamma = 3$ a na obrázku 3.3 pozorujeme tvar najkratšej cesty. Vidíme, že pre túto hodnotu už bola neistota znížená pre niektoré hrany. Sú to práve najdlhšie hrany, ktoré sú súčasťou najkratšej cesty, idúce z *Masarykovho nádraží* na *Hlavné nádraží* a z *Vyšehradu* na *Karlovo námestie*. Ich dĺžka je teda rovná 1.1-násobku ich nominálnej dĺžky. Zbytok neistoty sa rozdelil do ostávajúcich najdlhších hrán, pričom najkratšia hrana, ktorej dĺžka je uvažovaná rôzna od nominálnej dĺžky, je hrana s dĺžkou 140 medzi *Hlavným nádražím* a *Muzeom*. Dôsledkom toho, že sme upravovali neistotu práve pre dve hrany, je jej dĺžka uvažovaná ako 1.3-násobok jej nominálnej dĺžky. Optimálna hodnota je teda rovná $2 \times 40 + 1.5 \times 150 + 1.1 \times 470 + 1.3 \times 140 + 1.5 \times 145 + 120 + 90 + 1.1 \times 305 + 120 = 1887$.



Obr. 3.3: Najkratšia cesta z *Olšanského náměstí* na *Národní třídu* pre $\Gamma = 3$. Hrany svetlomodrej farby **nie sú** súčasťou najkratšej cesty, hrany inej ako svetlomodrej farby **vždy** tvoria súčasť najkratšej cesty. Hrany zelenej farby značia hranu, ktorej dĺžka je rovná jej nominálnej dĺžke a jej neistota **nebola** upravovaná. Hrany žltej farby označujú hrany, ktorých neistota **bola** upravovaná za poplatok $c_{ij} = c$ a platí pre ne $d_{ij} = 1.1\bar{d}_{ij}$. Tmavomodrá hrana je hrana, ktorej neistota **nebola** upravovaná, avšak kvôli hodnote $\Gamma = 3$ a úprave neistoty iných hrán tvoriacich najkratšiu cestu platí $d_{ij} = 1.3\bar{d}_{ij}$. Červená hrana je hrana, ktorej neistota **nebola** upravovaná a platí pre takúto hranu platí rovnosť $d_{ij} = 1.5\bar{d}_{ij}$.

Poslednou hodnotu, pre ktorú správanie najkratšej cesty vyšetříme, je hodnota $\Gamma = 5$. Táto hodnota sa ukazuje byť tak vysoká, že je výhodné znižovať neistotu pre každú z hrán, ktoré sú súčasťou najkratšej cesty. Tvar najkratšej cesty môžeme sledovať na obrázku 3.4. Vidíme, že táto cesta dokonca vedie úplne inými vrcholmi ako v predošlých troch prípadoch. Dôvodov, prečo je práve táto cesta najkratšia, je hneď niekoľko. Jedným z nich je fakt, že pre takto vysokú hodnotu Γ je výhodné znižovať neistotu pre množstvo hrán, pretože neistota môže ovplyvniť väčší počet hrán ako tomu bolo v predošlých prípadoch. Je teda vhodné voliť cestu s menším počtom hrán. Druhým hlavným dôvodom je, že hrany, ktoré sú súčasťou tejto najkratšej cesty majú vysoké nominálne ohodnotenie, a teda rozhodnutie znížiť neistotu práve pre niektorú z nich znižuje hodnotu účelovej funkcie výrazne viac ako tomu je pre hrany s malou nominálnou dĺžkou, pretože pomer dĺžky k cene za zníženie neistoty je v prípade nominálne krátkych hrán nepriaznivý.

Posledným faktorom ktorý, je nutné si uvedomiť je, že v prípade kedy neistota príslušná k hranám nedosahuje hodnotu Γ , zvýšenie tejto hodnoty už nemá vplyv na optimálne riešenie úlohy. Našli sme teda optimálnu hodnotu a najkratšiu cestu k tomuto riešeniu pre každé $\Gamma \geq 5$. Optimálna hodnota sa teda pre každú hodnotu $\Gamma \geq 5$ spočíta ako $4 \times 40 + 1.1 \times (355 + 320 + 650 + 250) = 1892.5$.



Obr. 3.4: Najkratšia cesta z *Olšanského náměstí* na *Národní třídu* pre $\Gamma \geq 5$. Hrany svetlomodrej farby **nie sú** súčasťou najkratšej cesty, hrany žltej farby **sú súčasťou** najkratšej cesty a označujú hrany, ktorých neistota **bola** upravovaná za poplatok c a platí pre ne $d_{ij} = 1.1\bar{d}_{ij}$.

3.4 Zhrnutie

V numerickej štúdii sme sa zamerali na správanie najkratšej robustnej cesty pre rôzne hodnoty ceny c_{ij} za zníženie neistoty a pre rôzne hodnoty konštanty Γ , ktorá určuje ako silný vplyv neistoty môže (nejakú) cestu postihnúť.

V prípade kedy sme menili hodnotu konštanty $c = c_{ij}$ sme overili fakt, že s rastúcou hodnotou c pre fixné Γ a γ_{ij} rastie aj hodnota optimálneho riešenia. Hodnota optimálneho riešenia sa však zvyšuje len do momentu, kým nie je poplatok za zníženie neistoty pre každú z hrán tak vysoký, že už viac nie je výhodné znižovať neistotu pre žiadnu z hrán. Poznamenali sme, že v prípade konštantného poplatku za zníženie neistoty môže byť výhodné znižovať neistotu práve pre hrany s dlhším nominálnym ohodnotením.

V druhom prípade sme riešili vplyv konštanty Γ na správanie najkratšej cesty. Ukázali sme, ako túto úlohu reprezentovať v prípade, kedy chceme nájsť najkratšiu cestu bez akéhokoľvek výskytu neistoty a poznamenali sme, že v takom nastavení je úloha zhodná s hľadaním najkratšej nominálnej cesty. Podobne ako v predošlom prípade platí, že s rastúcou hodnotou Γ rastie aj optimálna hodnota riešenia. Na rozdiel od predošlého prípadu však nárast hodnoty Γ motivuje k znižovaniu neistoty pre viac a viac hrán (pre rozumné hodnoty c_{ij}) až do momentu, kedy je hodnota Γ tak vysoká, že je výhodné neistotu znižovať pre každú z hrán. Poznamenali sme, že ak takáto situácia nastane, optimálna hodnota sa už s rastúcou Γ nebude meniť.

Na čo však v tejto numerickej štúdii už nebol priestor, bolo vyšetrenie správania najkratšej cesty pre rôzne hodnoty konštanty γ_{ij} . Nie je však ťažké si uvedomiť, že pre hodnotu $\gamma_{ij} = \gamma = 0$ táto úloha prestane byť závislá na rozhodnutí, keďže rozhodnutia pre takéto nastavenie γ nemajú žiadny efekt na ovplyvnenie neistoty. Pre fixné Γ a c_{ij} by teda táto úloha dosahovala zo všetkých prípustných hodnôt pre γ najväčšie hodnoty účelovej funkcie. Naopak pre hodnotu $\gamma_{ij} = \gamma = 1$ dostávame možnosť za poplatok c_{ij} absolútne eliminovať neistotu pre hranu (i,j) , čo by viedlo k najmenším hodnotám účelovej funkcie. Touto úvahou si dokážeme približne predstaviť efekt konštanty γ na správanie najkratšej cesty. Platí, že s rastúcou hodnotou γ bude pre fixné (a rozumné) hodnoty Γ a c_{ij} optimálna hodnota klesať.

Záver

V práci sme predstavili problém robustnej lineárnej optimalizácie s neistou závislou na rozhodnutí. Jeho zjednodušenú podstatu sme vysvetlili na probléme hľadania najkratšej cesty s neistou dĺžkou hrán závislej na rozhodnutí. Naznačili sme, že úlohy robustnej optimalizácie závislej na rozhodnutí sú vo všeobecnosti NP-úplne, a teda v praxi pre veľké problémy len ťažko riešiteľné. Pre klasický tvar týchto problémov sme s pomocou článku [5] zaviedli dve reformulácie tejto úlohy. Tieto reformulácie sme následne aplikovali na problém hľadania najkratšej cesty v grafe s neistou dĺžkou hrán. Získali sme tak dve formulácie úlohy hľadania najkratšej robustnej cesty v grafe, ktoré možno použiť pri riešení takýchto úloh pomocou výpočetných softwarov. V numerickej štúdii sme sa obmedzili na použitie jednej z týchto metód a pri riešení praktických úloh sme použili software s názvom AMPL určený na riešenie optimalizačných úloh. Pri riešení praktických úloh sme našli chybu v tvare účelovej funkcie nami použitej formulácie a predviedli sme jej upravený tvar. Pre dva rôzne grafy sme sa zamerali na správanie príslušných robustných najkratších ciest závislých na rozhodnutí. Jeden z týchto dvoch grafov predstavoval graf pražskej mestskej hromadnej dopravy, čím sme lepšie priblížili ako aplikovať riešenie problematiky do reálneho sveta. Pri hľadaní najkratších robustných ciest pre tieto grafy sme sa zamerali na vplyv zmeny hodnôt konštánt v počiatočných nastaveniach úlohy. Ukázalo sa, že nastavenie týchto počiatočných hodnôt hrá kľúčovú rolu v tvare optimálneho riešenia a optimálnej hodnoty. Zistili sme, že už malá zmena v ich hodnotách môže celkom zmeniť tvar rozhodnutí vedúcich k optimálnemu riešeniu a dokonca aj celý tvar najkratšej cesty.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Jochen Gorski, Frank Pfeuffer, Kathrin Klamroth (2007) *Biconvex Sets and Optimization with Biconvex Functions - A Survey and Extensions*. Institute for Applied Mathematics Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg, May 2007.
- [2] Giorgio Gallo Aydin Ülkücü (1977) *Bilinear Programming: An Exact Algorithm*. Mathematical Programming Journal, 173-194, December 1977.
- [3] L.A. Wolsey (1998) *Integer programming. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization*. J. Wiley & sons, New York (N.Y.), Chichester, Weinheim, 1998.
- [4] E. Mendelson (1997) *Introduction to Mathematical Logic*. London: Chapman & Hall, p. 30, 1997.
- [5] O. Nohadani, K. Sharma *Optimization under Decision-Dependent Uncertainty*. SIAM Journal on Optimization, 28(2), p. 1773-1795, 2018.