Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Božena Bobková

Variační počet s omezujícími podmínkami - Isoperimetrická úloha

Institut ekonomických studií

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John CSc.
Studijní program: Ekonomické teorie

2009

Děkuji Doc. RNDr. Oldřichu Johnovi, CSc. za vedení práce a za řadu cenných rad a připomínek.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 22.5.2009 Božena Bobková

Obsah

1 Úvod a motivace **5**

2 Isoperimetrická úloha **6**
2.1 Formulace úlohy (P) 6
2.2 Nutná podmínka řešitelnosti 6
2.3 Důkaz věty o nutné podmínce řešitelnosti 7

3 Řešení příkladu **12**
3.1 Příklad 1. 12

4 Ekonomická aplikace isoperimetrické úlohy **15**
4.1 Optimální hospodaření s vyčerpatelnými zdroji 15
4.1.1 Optimalizace úlohy vyčerpatelných zdrojů - isoperimetrická úloha 15
4.1.2 Optimalizace úlohy vyčerpatelných zdrojů - úloha s volným koncem 17

5 Závěr **18**

Literatura **19**

Název práce: Variační počet s omezujícími podmínkami - Isoperimetrická úloha
Autor: Božena Bobková
Katedra (ústav): Institut ekonomických studií
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John CSc.
e-mail vedoucího: john@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme isoperimetrickou úlohu variačního počtu. V první a druhé části úlohu formulujeme, vyslovíme nutnou podmínku její řešitelnosti a podáme její důkaz. Třetí část obsahuje řešení konkrétního příkladu dané úlohy. V závěrečné části aplikujeme matematickou teorii na Hotellingův model vyčerpatelných přírodních zdrojů.

Klíčová slova: isoperimetrická úloha, variační počet, Euler-Lagrangeova rovnice, Lagrangeovy multiplikátory, Hotellingův model vyčerpatelných zdrojů

Title: Calculus of Variations - Isoperimetric Constraints
Author: Božena Bobková
Department: Institute of Economic Studies
Supervisor: Doc. RNDr. Oldřich John CSc.
Supervisor's e-mail address: john@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work the isoperimetric problem of the Calculus of Variations was studied. In the first and second part, the motivation and exact formulation of this problem was discussed, followed by the assertion on the necessary condition for its solution (Theorem 1). The proof of this theorem was performed. In the third part, the concrete example of this problem was calculated. In the final section, the isoperimetric problem for mathematical analysis of the economic model- „The Economics of Exhaustible Resources“ was used.

Keywords: isoperimetric problem, Calculus of Variations, Euler-Lagrange equation, Lagrange multiplier, Economics of exhaustible resources

Kapitola 1

Úvod a motivace

V této práci se budeme zabývat isoperimetrickou úlohu variačního počtu. Již ve statické optimalizaci jsme se setkali s problémem optimalizace funkce za určitých omezujících podmínek. Hledali jsme maximum či minimum funkce na dané množině. Za určitých okolností jsme mohli k řešení této úlohy použít metody Langrangeových multiplikátorů.

S podobnou problematikou se setkáváme i v dynamické optimalizaci. Konkrétně u isoperimetrické úlohy je klasická úloha variačního počtu, tj. maximalizace či minimalizace určitého funkcionálu, prováděna za podmínky omezení v podobě integrálu.

Konkrétním příkladem je úloha: Mezi všemi (nezápornými) funkcemi, jejichž grafy procházejí dvěma pevně danými body a mají stejou délkou (perimetr), nalezněte takovou, pro niž je "plocha pod grafem"maximální. Od této úlohy se odvozuje název našeho problému, který však budeme formulovat obecněji.

Kapitola 2

Isoperimetrická úloha

2.1 Formulace úlohy (P)

Jsou dána reálná čísla A, B, l, T; $T > 0$, a funkce $F(t, y, y')$ a $G(t, y, y') \in C^2(< 0, T > \times R \times R)$
Hledáme $z = z(t)$ z množiny

$$M = \{\ y \in C^1(< 0, T >); y(0) = A, y(T) = B, \int_0^T G(t, y(t), y'(t))dt = l\} \tag{2.1}$$

tak, aby hodnota $V(z)$ funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(t, y(t), y'(t))dt \tag{2.2}$$

byla na množině M maximální (minimální).

2.2 Nutná podmínka řešitelnosti

Věta 1. Nechť funkce $z = z(t)$ je řešením úlohy (P). Potom existují dvě reálná čísla λ_0, λ_1 ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$) taková, že funkce $z = z(t)$ splňuje rovnici

$$\lambda_0 F_y(t, z(t), z'(t)) + \lambda_1 G_y(t, z(t), z'(t)) - \frac{d}{dt}(\lambda_0 F_{y'}(t, z(t), z'(t)) + \lambda_1 G_{y'}(t, z(t), z'(t))) = 0 \tag{2.3}$$

pro všechna $t \in < 0, T >$

Poznámka 1. Tvrzení věty lze vyslovit tak, že $z = z(t)$ je řešením Euler-Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$\int_0^T \lambda_0 F(t, y(t), y'(t)) + \lambda_1 G(t, y(t), y'(t)) dt, \tag{2.4}$$

což je analogie k Lagrangeově funkci ze statické optimalizace.

Poznámka 2. Nechť $z = z(t)$ není řešením Euler-Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\int_0^T G(t, y(t), y'(t))dt$. Potom můžeme položit $\lambda_0 = 1$.

2.3 Důkaz věty o nutné podmínce řešitelnosti

Připomeňme nejprve termín lineární závislosti dvou funkcí.

Definice. Funkce $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ z $C(< a, b >)$ se nazývají lineárně závislé na $< a, b >$, jestliže existují reálná čísla λ_0, λ_1 ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$)tak, že $\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t) = 0$ pro všechna $t \in < a, b >$.

K určení lineární závislosti daných funkcí lze použít *Gramovu matici*.

Definice. Nechť funkce $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ jsou z $C(< a, b >)$ a

$$(Q_i | Q_j) = \int_a^b Q_i(t) Q_j(t) \; i, j = 1, 2 \tag{2.5}$$

jsou skalární součiny, pak matici

$$G = \begin{pmatrix} (Q_1|Q_1) & (Q_1|Q_2) \\ (Q_1|Q_2) & (Q_2|Q_2) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

nazýváme Gramovou maticí funkcí $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$.

Lemma 1. Nechť funkce $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ jsou z $C(< a, b >)$. Tyto funkce jsou lineárně závislé právě tehdy, když determinant Gramovy matice je roven nule.

Důkaz Lemmatu 1. Nejprve dokážeme, že jsou-li dané funkce lineárně závislé, pak determinant jejich Gramovy matice je roven nule. Předpokládáme, že funkce $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ jsou lineárně závislé na $< a, b >$, takže pro všechna $t \in< a, b >$ existují taková reálná čísla λ_0, λ_1 ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$, že

$$\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t) = 0. \tag{2.7}$$

Protože to platí pro všechna t, můžeme danou rovnost upravit následujícímí způsoby:

$$\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t) = 0 \mid \cdot Q_1(t), \tag{2.8}$$

$$\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t) = 0 \mid \cdot Q_2(t). \tag{2.9}$$

Takže získáváme soustavu, platnou pro všechna $t \in< a, b >$

$$\lambda_0 Q_1^2(t) + \lambda_1 Q_2(t) Q_1(t) = 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda_0 Q_1(t) Q_2(t) + \lambda_1 Q_2^2(t) = 0. \tag{2.11}$$

Zintegrováním dostáváme

$$\lambda_0 \int_a^b Q_1^2(t)dt + \lambda_1 \int_a^b Q_2(t)Q_1(t)dt = 0 \tag{2.12}$$

$$\lambda_0 \int_a^b Q_1(t)Q_2(t)dt + \lambda_1 \int_a^b Q_2^2(t)dt = 0 \tag{2.13}$$

Podle předpokladů má tato soustava netriviální řešení $[\lambda_0, \lambda_1]$, její matice, což je Gramova matice, je singulární, a tedy její determinant je roven nule

$$det \begin{pmatrix} \int_a^b Q_1^2(t)dt) & \int_a^b Q_2(t)Q_1(t)dt \\ \int_a^b Q_1(t)Q_2(t)dt & \int_a^b Q_2^2(t)dt \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} (Q_1|Q_1) & (Q_1|Q_2) \\ (Q_1|Q_2) & (Q_2|Q_2) \end{pmatrix} = detG = 0 \tag{2.14}$$

Nyní dokážeme, že je-li determinant Gramovy matice roven nule, pak jsou funkce $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ lineárně závislé. Nechť determinant Gramovy matice funkcí Q_1 a Q_2 je roven nule. Potom je Gramova matice singulární a soustava (2.15) (2.16) má netriviální řešení ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$):

$$\lambda_0(Q_1|Q_1) + \lambda_1(Q_1|Q_2) = 0, \tag{2.15}$$

$$\lambda_0(Q_2|Q_1) + \lambda_1(Q_2|Q_2) = 0. \tag{2.16}$$

Nyní první rovnici soustavy vynásobíme λ_0 a sečteme ji s λ_1-násobkem druhé rovnice. Skalární součiny napíšeme ve tvaru integrálů.

$$0 = \lambda_0^2 \int_a^b Q_1^2(t)dt + 2\lambda_0\lambda_1 \int_a^b Q_2(t)Q_1(t)dt + \lambda_1^2 \int_a^b Q_2^2(t)dt \tag{2.17}$$

$$= \int_a^b \lambda_0^2 Q_1^2(t) + 2\lambda_0 Q_1(t)\lambda_1 Q_2(t) + \lambda_1^2 Q_2^2(t)dt$$

$$= \int_a^b [\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t)]^2 dt$$

To znamená, že určitý integrál ze spojité nezáporné funkce $[\lambda_0 Q_1(t)+\lambda_1 Q_2(t)]^2$ je roven nule v každém bodě intervalu $< a, b >$ a tedy i $\lambda_0 Q_1(t)+\lambda_1 Q_2(t) = 0$ pro všechna $t \in < a, b >$. Tím je důkaz lineární závislosti funkcí $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ na intervalu $< a, b >$ proveden.

Důkaz Věty 1. Nechť $z = z(t)$ je extremálou funkcionálu $\int_0^T F(t, y(t), y'(t))dt$ na množině M (2.1). Definujme funkce

$$Q_1(t) = \int_0^t F_y(t, z(t), z'(t))dt - F_{y'}(t, z(t), z'(t))dt - \delta_1 \tag{2.18}$$

a

$$Q_2(t) = \int_0^t G_y(t, z(t), z'(t))dt - G_{y'}(t, z(t), z'(t))dt - \delta_2, \tag{2.19}$$

kde čísla δ_i jsou volena takovým způsobem, že

$$\int_0^T Q_i(t)dt = 0. \quad i = 1, 2. \tag{2.20}$$

Poznámka 3. Derivace funkce $Q_i(t)$ podle t je

$$\frac{d}{dt}(\int_0^t F_y(t, z(t), z'(t))dt - F_{y'}(t, z(t), z'(t))dt - \delta_1) \tag{2.21}$$

$$= F_y(t, z(t), z'(t)) - \frac{d}{dt} F_{y'}(t, z(t), z'(t)).$$

Tedy $Q_i(t)$ je funkce, jejímž derivováním dle t dostáváme levou stranu Euler-Lagrangeovy rovnice.

Ukážeme, že determinant Gramovy matice funkcí $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ je nulový, a tedy podle Lemmatu 1 jsou tyto funkce lineárně závislé na $< 0, T >$.

Zaveďme funkci

$$y(t;\xi) = z(t) + \xi_1 \cdot \eta_1(t) + \xi_2 \cdot \eta_2(t), \tag{2.22}$$

kde $t \in < 0, T >$, $[\xi_1, \xi_2] \in R \times R$ a $\eta_i(t) = \int_0^t Q_i(t)dt$.
Požadujeme, aby pro každé $\xi \in R \times R$ funkce $y(t;\xi)$ splňovala okrajové podmínky $y(0;\xi) = A$ a $y(T;\xi) = B$. Protože však $\eta_i(0) = 0$ a $\eta_i(T) = 0$ (viz.2.20), pak $y(0;\xi) = z(0) = A$ a $y(T;\xi) = z(T) = B$.

Definujme nyní funkce

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T F(t, y(t;\xi), y'(t;\xi))dt, \tag{2.23}$$

$$\upsilon(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T G(t, y(t;\xi), y'(t;\xi)dt. \tag{2.24}$$

.

Protože funkcionál $V(y)$ nabývá pro funkci $z = z(t)$ svého extrému na množině M dané vzorcem (2.1), je bod $[\xi_1, \xi_2] = [0, 0]$ bodem maxima (minima) funkce $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ na množině, dané vazební podmínkou $\upsilon(\xi_1, \xi_2) = l$.

Podle Věty o Langrangeových multiplikátorech [1] , jejíž předpoklady jsou splněny, tedy existují taková reálná čísla λ_0, λ_1 ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$), že platí

$$\lambda_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0, 0) + \lambda_1 \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_1}(0, 0) = 0, \tag{2.25}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_2}(0, 0) + \lambda_1 \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_2}(0, 0) = 0. \tag{2.26}$$

Protože tato soustava má netriviální řešení, je

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0,0) & \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_1}(0,0) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_2}(0,0) & \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_2}(0,0) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.27}$$

Spočítejme jednotlivé parciální derivace. Protože jsou splněny předpoklady věty o derivování integrálu podle parametru za integračním znamením, dostáváme

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0, 0) = \int_0^T (\frac{\partial F}{\partial y}(t, z(t), z'(t)) \cdot \eta_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y'}(t, z(t), z'(t)) \cdot \eta_1'(t))dt$$

Metodou per partes dále spočtěme $\int_0^T (\frac{\partial F}{\partial y}(t, z(t), z'(t)) \cdot \eta_1(t)dt$

$$= [\int_0^x (\frac{\partial F}{\partial y}(x, z(x), z'(x))dx \cdot \eta_1(x)]_0^T - \int_0^T [\int_0^x (\frac{\partial F}{\partial y}(x, z(x), z'(x))dx] \cdot \eta_1'(t)dt$$

$$= 0 - \int_0^T [\int_0^x (\frac{\partial F}{\partial y}(x, z(x), z'(x))dx] \cdot \eta_1'(t)dt \tag{2.28}$$

Nula se zde objevuje proto, že v našich předpokladech je $\eta_i(0) = 0$ a $\eta_i(T) = 0$. Celkově tedy platí

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0,0) = \int_0^T [F_{y'}(t, z(t), z'(t)) - \int_0^t F_y(x, z(x), z'(x))dx] \cdot \eta_1'(t)dt \tag{2.29}$$

A protože platí, že $\eta_1(t) = \int_0^t Q_1(x)dx$ a tedy $\eta_1'(t) = Q_1(t)$, potom

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0,0) = \int_0^T Q_1(t) \cdot [F_{y'}(t, z(t), z'(t)) - \int_0^t F_y(x, z(x), z'(x)dx]dt. \tag{2.30}$$

Jestliže k $F_{y'}(t, z(t), z'(t)) - \int_0^t F_y(x, z(x), z'(x))dx$ přičteme δ_1, je tento výraz roven $Q_1(t)$. Konečně je tedy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1}(0,0) = \int_0^T Q_1(t) \cdot Q_1(t)dt = (Q_1|Q_1), \tag{2.31}$$

kdy se přičtením δ_1 výsledná integrace nezmění. Lze snadno nahlédnout, že další parciální derivace by byly podobné a že tedy pro determinant matice soustavy platí

$$det \begin{pmatrix} (Q_1|Q_1) & (Q_1|Q_2) \\ (Q_1|Q_2) & (Q_2|Q_2) \end{pmatrix} = 0. \tag{2.32}$$

Tento determinant je zároveň determinantem Gramovy matice funkcí $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$. A jeho rovnost nule implikuje podle Lemmatu 1 lineární závislost funkcí $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ na intervalu $< 0, T >$. Pro všechna $t \in < O, T >$ tak existují reálná čísla λ_0, λ_1 ($[\lambda_0, \lambda_1] \neq [0, 0]$)taková, že

$$\lambda_0 Q_1(t) + \lambda_1 Q_2(t) = 0. \tag{2.33}$$

Zderivováním této rovnosti dostáváme

$$\lambda_0 Q_1'(t) + \lambda_1 Q_2'(t) = \lambda_0 F_y(t, z(t), z'(t)) + \lambda_1 G_y(t, z(t), z'(t)) \tag{2.34}$$

$$-\frac{d}{dt}(\lambda_0 F_{y'}(t, z(t), z'(t)) + \lambda_1 G_{y'}(t, z(t), z'(t))) = 0$$

Tím je důkaz proveden.

Kapitola 3

Řešení příkladu

3.1 Příklad 1.

Zadání. Nalezněte funkce $y(t)$ podezdřelé z toho, že na nich funkcionál

$$V(y) = \int_1^2 [(y')^2 + t^2]dt \tag{3.1}$$

nabývá extrému za podmínek

$$\int_1^2 [(y)^2]dt = 5 \tag{3.2}$$

a $y(1) = 0$ a $y(2) = 0$
Řešení.

Ve shodě s teorií z kapitoly 1 a 2 jsou funkce $F(t, y, y') = [(y')^2 + t^2]$ a $G(t, y, y') = y^2$. Protože $y = 0$ je jediným řešením rovnice

$$0 = G_y - \frac{d}{dt} G_{y'} = 2y, \tag{3.3}$$

existuje pro každou podezdřelou funkci $y = y(t)$ reálné číslo λ tak, že splňuje Euler-Lagrangeovu rovnici

$$2\lambda y - \frac{d}{dt} 2y' = 0. \tag{3.4}$$

Charakteristický polynom této rovnice má tvar

$$\omega^2 - \lambda = 0. \tag{3.5}$$

Pro zjištění kořenů této rovnice a následného vyjádření obecného řešení E.-L. rovnice, veďme diskusi o λ.

1. $\underline{\lambda > 0}$

Kořeny charakteristického polynomou jsou tedy

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda} \quad \omega_2 = -\sqrt{\lambda}. \tag{3.6}$$

Takže obecné řešení E.-L. rovnice má tvar

$$y(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda} t}. \tag{3.7}$$

Dosazením do počátečních podmínek pak dostaneme

$$y(1) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}} = 0 \tag{3.8}$$

$$y(2) = C_1 e^{-2\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{2\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{3.9}$$

Jestliže první rovnici vynásobíme $e^{-\sqrt{\lambda}}$-násobkem a odečteme od ní druhou rovnici, dostáváme

$$C_2(1 - e^{2\sqrt{\lambda}}) = 0 \tag{3.10}$$

což platí pro $\lambda = 0$. To je ovšem spor s naším předpokladem, takže pro $\lambda > 0$, nemá úloha řešení.

2. $\underline{\lambda = 0}$

Charakteristický polynom E.-L.rovnice má dvojnásobný kořen rovný nule. Takže obecné řešení má tvar.

$$y(t) = C_1 + C_2 t. \tag{3.11}$$

Pro počáteční podmínky platí

$$y(1) = C_1 + C_2 = 0 \tag{3.12}$$

$$y(2) = C_1 + 2C_2 = 0 \tag{3.13}$$

Obě rovnice jsou zřejmě splněny pro $C_1 = C_2 = 0$. Takže řešením E.-L. rovnice je $y(t) = 0$, které opět vyloučíme. Tím tedy pro $\lambda = 0$ úloha nemá řešení.

3. $\underline{\lambda < 0}$

Kořeny charakteristického polynomou jsou tedy

$$\omega_1 = i\sqrt{-\lambda} \quad \omega_2 = -i\sqrt{-\lambda}. \tag{3.14}$$

Takže obecné řešení E.-L. rovnice má tvar

$$y(t) = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}t. \tag{3.15}$$

Dosazením za počáteční podmínky získáváme

$$y(1) = C_1 \sin\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos\sqrt{-\lambda} = 0 \tag{3.16}$$

$$y(2) = C_1 \sin 2\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos 2\sqrt{-\lambda} = 0. \tag{3.17}$$

Položme nyní $\sqrt{-\lambda} = \beta$. Determinant této soustavy je rovem potom

$$det \begin{pmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} = \sin\beta \cdot \cos 2\beta - \cos\beta \cdot \sin 2\beta \tag{3.18}$$

$$= \sin(\beta - 2\beta) = \sin(-\beta). \tag{3.19}$$

Má-li mít soustava netriviální řešení, pak musí být tento determinant roven nule, což platí pro $\beta = l\pi$, kde $l \in N$. To znamená, že $C_2 = 0$.
Nyní použijeme podmínku v podobě integrálu a dosadíme za $y(t)$

$$\int_1^2 C_1^2 \sin^2 l\pi t dt = \frac{1}{2} C_1^2 \int_1^2 (1 - \cos 2l\pi t) dt = \frac{1}{2} C_1^2 = 5 \tag{3.20}$$

Takže $C_1 =^+_- \sqrt{10}$ a tím konečně řešením E.-L. rovnice jsou funkce

$$y(t) = \sqrt{10} \cdot \sin l\pi t \tag{3.21}$$

$$y(t) = -\sqrt{10} \cdot \sin l\pi t \tag{3.22}$$

pro $l \in N$. Pro zjištění skutečné extremály bychom dané funkce dosadili do funkcionálu a určili konkrétní l. Pro obě podezdřelé funkce je hodnota funkcionálu stejná a to

$$V(y) = 10l^2\pi^2 \int_1^2 \cos^2 l\pi t dt = \frac{10l^2\pi^2}{2}. \tag{3.23}$$

$\frac{10l^2\pi^2}{2}$ je kvadratická funkce, která je konvexní a tedy podle věty o nabývání extrému konvexních funkcí na množině nabývá i tato funkce svého minima na množině přirozených čísel. Je zřejmé, že nejnižší hodnoty nabyde pro $l = 1$.

Úloha má tedy dvě řešení a to

$$y(t) = \sqrt{10} \cdot \sin\pi t \tag{3.24}$$

a

$$y(t) = -\sqrt{10} \cdot \sin\pi t. \tag{3.25}$$

Kapitola 4

Ekonomická aplikace isoperimetrické úlohy

4.1 Optimální hospodaření s vyčerpatelnými zdroji

Mnohé ekonomické modely si kladou za předpoklad neomezené použití svých vstupů. Tento předpoklad je často nerealistický a vyčerpatelnost zdroje musí být brána v úvahu. V tom případě si klademe otázku, jaký způsob čerpání bude optimální pro dosažení určitého cíle.

Hledáním optimálního hospodaření s vyčerpatelnými zdroji se zabýval například Harold Hotelling, který již v roce 1931 publikoval v odborném časopise The Journal of the Political Economics[3] svůj článek na toto téma.

Na danou problematiku lze nahlížet dvěma způsoby. Buď jako na isoperimetrickou úlohu variačního počtu s vazebními podmínkami nebo jako na úlohu variačního počtu s volným koncem - the horizontal line.

4.1.1 Optimalizace úlohy vyčerpatelných zdrojů - isoperimetrická úloha

Optimální průběh hospodaření s daným zdrojem bude popsán funkcí $q(t) = f(p,t)$, která určuje množství těženého zdroje v závislosti na ceně v daném čase. Ve shodě s Hotellingem budeme maximalizovat integrál

$$\int_0^\infty SV(q)e^{-\gamma t}dt, \tag{4.1}$$

přičemž přípustné průběhy funkce q(t) jsou vázány podmínkou

$$\int_0^\infty q dt = S, \tag{4.2}$$

kde S je mohutnost zdroje (t.j. celkové vyčerpatelné množství zdroje)

Veličina $SV(q)$, zavedená Hotellingem, je tak zvaná social value, tedy společenská hodnota zdroje a je dána vzorcem

$$SV = \int_0^q P(s)ds - C(q); \tag{4.3}$$

kde P je inverzní poptávková funkce ($P' < 0$), C je nákladová funkce. (Obě tyto funkce, jakož i diskontní faktor $\gamma > 0$ jsou dány.)

Poznamenejme, že užití nekonečného časového horizontu má zde podle Hotellinga své opodstatnění. Jestliže je zdroj vyčerpatelný v konkrétním čase T, pak $q(t) = 0$ pro $t > T$.

Matematická formulace úlohy tedy zní:
Nalezněte mezi všemi funkcemi $q = q(t)$, které splňují podmínku (4.2) a dané počáteční podmínky takovou, pro níž integrál (4.1) nabývá své největší hodnoty.

Ve shodě s teorií isoperimetrické úlohy (viz. kapitola 1,2) víme, že pokud řešení naší úlohy existuje, pak buďto $G(t, q, q') = q$ splňuje Euler-Lagrangeovu rovnici (což evidentně splněno není), nebo pro každou podezdřelou funkci $q = q(t)$ existuje reálné číslo λ tak, že splňuje Euler-Lagrangeovu rovnici

$$SV'(q)e^{-\gamma t} - \lambda = (P(q) - C'(q))e^{-\gamma t} - \lambda = 0. \tag{4.4}$$

A tedy platí

$$(P(q) - C'(q)) = e^{\gamma t}\lambda. \tag{4.5}$$

Takto zapsaná nutná podmínka optimalizace má i svou mikroekonomickou interpretaci. Ruší se zde stacionární podmínka optimality o tom, že cena P je rovna mezním nákladům MC u dokonalé konkurence a příjmová funkce monopolisty je rovna jeho mezním nákladům, naopak při optimalizování se v čase rozdíl mezi nimi prohlubuje s narůstající úrokovou mírou γ, na níž je závislá diskontní exponenciální funkce.

4.1.2 Optimalizace úlohy vyčerpatelných zdrojů - úloha s volným koncem

Na optimalizaci úlohy vyčerpatelných zdrojů lze nahlížet i jiným způsobem. Díky své struktuře lze isoperimetrickou úlohu konvertovat na úlohu variačního počtu s volným koncovým bodem.

Nechť $q(t)$ je souhrnné a $q'(t)$ je stávající množství zdroje těženého v daném čase a $p(q') \in C^2(< 0, T >)$ je funkcí čisté ceny $(p'(q')) < 0)$. Dále nechť T je čas vytěžení zdroje ve svém celkovém množství S.
Potom matematická formulace této úlohy zní:
Nalezněte mezi všemi přípustnými funkcemi $q = q(t)$ takovou, že funkcionál

$$\int_0^T e^{-\gamma t} p(q') \cdot q' dt \tag{4.6}$$

nabývá své největší hodnoty za podmínek $q(0) = 0$ a $q(T) = S$.

Jestliže existuje řešení, potom pro každou podezdřelou funkci $q = q(t)$ platí, že splňuje Euler-Lagrangeovu rovnici

$$-\frac{d}{dt} e^{-\gamma t}(p'(q') \cdot q' + p(q')) = 0 \tag{4.7}$$

$$e^{-\gamma t}(p'(q') \cdot q' + p(q')) = C \quad C \in R$$

$$p'(q') \cdot q' + p(q') = Ce^{\gamma t}.$$

Dále hledaná funkce splňuje tzv.*Legengrovu* podmínku, tj.$F_{q'q'} \leq 0$;

$$e^{-\gamma t}(p''(q') \cdot q' + 2p'(q')) \leq 0. \tag{4.8}$$

A také hledaná funkce musí splňovat okrajové podmínky a pro $t = T$ podmínku transversality, tedy, že $F - q'F_{q'} = 0$;

$$e^{-\gamma T} p'(q') \cdot q' - q'(e^{-\gamma T}(p'(q') \cdot q' + p(q'))) = 0 \tag{4.9}$$

$$p'(q') \cdot q' \cdot q' = 0$$

a díky předpokladům

$$q'(T) = 0.$$

Takto nastavené podmínky zároveň odpovídají ekonomické logice daného problému.

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsme přesně zavedli isoperimetrickou úlohu variačního počtu, nutnou podmínku její řešitelnosti, jejíž platnost jsme dokázali. Na příkladě jsme ilustrovali, jak se řeší daná úloha konkrétně. Na závěr jsme aplikovali matematickou teorii na Hotellingův model vyčerpatelných zdrojů, přičemž jsme podali i alternativní náhled na řešení tohoto modelu v podobě metody variačního počtu s volným koncem.

Literatura

[1] Hadley G., Kemp M. C.: *Variational Methods in Economics* , North-Holland Publishing Company, 1971.

[2] Kamien I. M., Schwartz N. L.: *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland Publishing Company, 1991.

[3] Hotelling H.: *The Journal of the Political Economics 1931*

[4] Chiang A. C.: *Elements of Dynamic Optimization* , McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, 1992.