

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Miškovský

Parametrizace Kerrova řešení

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11.5.2019

David Miškovský

Rád bych hluboce poděkoval vedoucímu práce RNDr. Robertu Švarcovi, Ph.D., za veškerý čas strávený konzultacemi a nad textem této práce. Za nespočetné množství pečlivých poznámek. Za bezednou trpělivost s vysvětlováním nejasností a s mojí nespolehlivostí. A hlavně za nesmírnou ochotu, podporu a přátelský přístup.

Název práce: Parametrizace Kerrova řešení

Autor: David Miškovský

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V této práci shrnujeme základní vlastnosti Kerrova řešení v několika souřadných systémech. Dále odvozujeme obecný tvar metriky pro prostoročas foliovaný nulovými nadplochami. Pomocí formalizmu optických skalárů ukazujeme, že je geometrie takového prostoročasu netwistující, tedy že připouští existenci netwistující nulové afinně parametrizované geodetické kongruence. Následně se několika způsoby pokoušíme parametrizovat Kerrovo řešení právě v řeči netwistujících souřadnic. Takový tvar by měl následně využití ve formalizmu slabých izolovaných horizontů pro použití v realističtějších astrofyzikálních modelech černých děr.

Klíčová slova: Obecná teorie relativity, Kerrův prostoročas, geodetická kongruence, optické skaláry, netwistující geometrie.

Title: Parametrization of Kerr solution

Author: David Miškovský

Department: Institute of theoretical physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of theoretical physics

Abstract: In this thesis we are exploring basic properties of the Kerr solution using several coordinate systems. Later on, we are deriving general metric form of the spacetime foliated by null hypersurfaces. Employing the formalism of optical scalars we shall see, that geometry of a such a spacetime is non-twisting, that is it admits existence of a non-twisting affinely parametrized null geodesic congruence. Subsequently, we are trying to express the Kerr solution in the form of non-twisting coordinates. This form would have many applications e.g. in formalism of weakly isolated horizons (WHIs) for use in more realistic astrophysical models of black holes.

Keywords: General relativity, Kerr spacetime, geodesic congruence, optical scalars, non-twisting geometries.

Obsah

Úvod	3
1 Kerrovo řešení	7
1.1 Původní tvar	7
1.2 Boyerův–Lindquistův tvar	8
1.3 Horizonty v Kerrově řešení	11
1.4 Ergosféry	14
1.5 Invariantní charakterizace Kerrova řešení	16
2 Netwistující geometrie	19
2.1 Nulová foliace	19
2.2 Optické skaláry	20
2.3 Riemannův tenzor a jeho kontrakce	26
3 Kerrův prostoročas v řeči netwistujících souřadnic	31
3.1 Přejchod od neafinní parametrizace	31
3.1.1 Neafinní parametrizace: obecný tvar	31
3.1.2 Specifikace vhodné transformace souřadnic	32
3.2 Přejchod od obecné netwistující geometrie	33
Závěr	37
A Příloha: Tenzory křivosti pro netwistující geometrie	39
Literatura	43

Úvod

Lidstvo fascinovalo pohyby nebeských těles od nepaměti. „*Of all the creatures who had yet walked on Earth, the man-apes were the first to look steadfastly at the Moon*“ [1]. Ve snaze uniknout cliché poetickému začátku se raději přesuňme do doby, kdy lidé začali tyto pohyby systematicky popisovat a předpovídat.

Ptolemaios nebyl zdaleka první, kdo se zabýval astronomií. Díky pečlivým pozorováním však vytvořil přehledné tabulky pro popis pohybu nebeských těles. Všiml si, že pozorované pohyby planet lze přibližně popsat kruhovou trajektorií okolo Země, na které obíhá střed druhé kruhové trajektorie samotné planety. Tím vzniká ve 2. století našeho letopočtu první použitelný a překvapivě přesný popis pohybu nebeských těles. Zajímavé je, že pro každé těleso je důležitý pouze poměr velikostí poloměrů jeho kružnic, nikoli samotné velikosti poloměrů. Jinými slovy, tato reprezentace je škálově invariantní vůči změně obou poloměrů současně při zachování jejich poměru. Jediné těleso, které má v tomto modelu kruhovou trajektorii, je Slunce. Pokud bychom naškálovali primární kružnice (ty se Zemí ve svém středu) všech planet v tomto modelu tak, aby splynuly s trajektorií Slunce, tak by sekundární kružnice samotných planet měly Slunce ve svém středu a obíhaly by ve správném pořadí. Tak blízko byl Ptolemaios od heliocentrického modelu. Ten však přišel až s Koperníkovou revolucí o přibližně 14 století později.

Model se Zemí ve středu vesmíru byl ale pro církve takřka přímý důkaz božské existence a podpora její autority, jelikož bůh otáčel nebeskou sférou. Proto byl potřeba velmi dobrý důvod, aby se tohoto modelu po nelehkém boji vzdala. Pro ten musíme do Prahy na dvůr Rudolfa II. Díky velmi přesným pozorováním nebeských těles, která učinil dánský astronom Tycho Brahe, přišel vynikající matematik Jan Kepler se svými zákony nebeské mechaniky. S nimi byl heliocentrický model přesnější než modely dosavadní. Nešlo tak jen o změnu pohledu na věc nýbrž o zcela zásadní „převrácení světa“. Zatím jsme však mluvili jen o kinematice. Dynamiku z Keplerových zákonů odvodil až Sir Isaac Newton jehož teorie mechaniky je ve většině běžných případů použitelná i dnes. Již od doby známého pozorování stáčení perihelia Merkuru z roku 1859 jsme ale věděli, že není kompletní [2]. Stáčení perihelia je sice přirozený proces, který zejména vzniká působením ostatních těles ve sluneční soustavě spolu s neseferickým tvarem Slunce. Zvláštní ale bylo, že po odečtení všech těchto vlivů zbývalo ještě 43 úhlových vteřin za století, které se nedařilo vysvětlit. To přivedlo, společně s paradoxy způsobenými klasickými pojmy absolutního prostoru a času a nekonečné rychlosti šíření informace, Alberta Einsteina k formulování speciální (1905) a následně obecné (1915) teorie relativity. Přestože dnes již máme tuto teorii k dispozici, tak je řešení Einsteinových rovnic obecně náročné i pro zdánlivě velmi jednoduché systémy a Newtonovská mechanika se i dnes víceméně úspěšně používá například pro popis oběhu hvězd okolo galaktického centra.

Celá teorie obecné relativity vychází ze tří základních principů. Princip ekvivalence, obecné kovariance a minimální vazby.

- Princip ekvivalence říká, že nemůžeme rozlišit mezi setrvačnou a gravitační hmotností. Jinými slovy, že gravitace je ekvivalentní setrvačnosti.
- Princip obecné kovariance tvrdí, že fyzikální zákony nemohou záviset na

volbě souřadnic. Tedy že se dají zapsat tak, aby se transformovaly tenzorově a byly tak invariantní co do svého tvaru.

- Takto bychom ale mohli napsat libovolný zákon a proto užijeme filozofického nástroje Occamovy břitvy, neboli principu minimální vazby. Myšleno vazby na gravitaci, čili aby zákony závisely co nejméně na metrice.

Obecná teorie relativity přináší zásadní změnu ve způsobu, jak se díváme na celý vesmír. Jedná se o geometrický pohled na gravitaci. Prostor a čas zkombinujeme do deformovatelné lorentzovské variety, kterou nazveme prostoročas (nebo také opačně časoprostor). Její geometrické vlastnosti jsou popsány metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Nejjednodušší forma prostoročasu, se kterým pracuje speciální teorie relativity, je plochá Minkowského metrika $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Koncepčně zásadní byl právě přechod k obecné metrice, protože jsme začali brát časoprostor jako dynamický. Každý objekt ovlivňuje svou přítomností tvar časoprostoru a nehomogenita gravitace je tak samotné zakřivení tohoto prostoru.

Jak však popsat geometricky zakřivený prostoročas? Plujeme v prázdném a neznámém vesmíru a snažíme se zjistit jeho strukturu. Použijeme pro to dvě testovací částice a sledujeme zrychlení mezi nimi. Protože se částice pohybují volně, tak jsou jejich světočarami geodetiky. Geodetiky se dají popsat i pomocí zobecněné představy paralelního přenosu vektoru. Jsou to takové křivky, podél kterých můžeme přenášet vektory tak, aby se jejich skalární součin vzhledem k metrice neměnil. Je to též extrémální spojnice dvou bodů v prostoročasu. Tedy aby variace akce mezi těmito body byla nulová, kde akce je integrál přes prostoročasový interval. Při nulovém vzájemném zrychlení mezi testovacími částicemi je v daném místě prostor plochý. V opačném případě je nějakým způsobem zakřivený. Stejně jako v klasické mechanice, kde potřebujeme druhé derivace gravitačního pole pro popis jeho nehomogenity, tak potřebujeme druhé derivace metriky pro popis zakřivení prostoročasu. Ty obsahuje Riemannův tenzor křivosti $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, který právě popisuje křivost této diferencovatelné variety.

Zdroje gravitačního pole nově popisujeme tenzorem energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$. Zajímá nás, jak tyto zdroje ovlivňují zakřivení prostoročasu. Dáme s ním do rovnosti všechny možné kombinace metrického tenzoru a to včetně jeho prvních i druhých derivací, po vzoru klasické zdrojové rovnice pole. Jelikož je $T_{\mu\nu}$ tenzor druhého řádu, musí být kombinace takové, aby to byl také tenzor druhého řádu. Druhé derivace se tak objeví v kontrakcích Riemannova tenzoru. Vyčíslíme-li konstanty pro takto obecnou rovnici, získáme zlatý klenot tohoto heuristického principu, jež by měly splňovat všechny teorie. Einsteinovy rovnice gravitačního pole (1915)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (1)$$

kde $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ představuje Ricciho tenzor, $R = R^{\lambda}_{\lambda}$ Ricciho skalár a Λ takzvanou kosmologickou konstantu.

Jedná se o mocný nástroj předpovídající existenci a umožňující zkoumání i tak extrémních objektů jako jsou černé díry, či dávající jasnou představu o chování vesmíru jako celku. Matematicky se jedná o silně nelineární systém 10 parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu. Jak se dají takové komplikované rovnice řešit?

- Přesné řešení, nebo také analytické řešení, je samozřejmě ideální, jelikož o systému víme vše, ale i dnes jich existuje jen velmi málo a ve velmi speciálních situacích.
- Perturbativní řešení vychází z přesných řešení, do kterých vložíme drobnou poruchu.
- S dnešním výkonem počítačů a hlubším porozuměním Einsteinově teorii je možné v poslední řadě sáhnout alespoň po jejich numerickém řešení. Jedná se pak jen o aproximaci do určitého řádu.

I když s prvním černoděrovým exaktní řešení Einsteinových rovnic přišel Karl Schwartzschild již pár měsíců po jich zveřejnění, jednalo se o statické sféricky symetrické gravitační pole, tak jeho stacionární rotující zobecnění našel Roy Kerr až 48 let poté (v době, kdy začala vznikat vesmírná odysea).

Přesto, nebo možná právě proto, že obecná relativita popisuje náš svět s dechberoucí přesností, tak jsou výpočty velmi složité a často se dělají numericky, či alespoň s využitím softwaru pro symbolické manipulace. O to více je fascinující Kerrovo řešení, kterým se dá velmi dobře reprezentovat gravitační pole reálných rotujících černých děr. Zdá se, že naprostá většina skutečných černých děr totiž pravděpodobně rotuje, jelikož by si měli zachovávat alespoň část momentu hybnosti původní hvězdy. Jedná se tak o exaktní řešení, kterým se dá popsat prostoročas v okolí netriviálních reálných astrofyzikálních objektů. Odvodit exaktní řešení pro jednu černou díru bylo však tak složité, že už i systém dvou (ne)rotujících černých děr se musí zkoumat numericky.

Právě kvůli složitosti výpočtů jsou aplikační oblasti obecné teorie relativity převážně velmi husté zdroje, nestacionární procesy a nebo kosmologické modely. Například efekt stáčení pericentra u slavného binárního systému pulsarů PSR 1913+16 je 4.2 stupňů za rok! Efekt je tak mnohem větší, než v případě Merkuru [3].

Od zformulování obecné teorie relativity a vysvětlení stáčení perihelia Merkuru se objevují další experimenty, které potvrzují její předpovědi. Zde uvedme alespoň některé:

- Až teoretická předpověď obecné relativity o ohybu světelných paprsků v gravitačním poli Slunce souhlasí s experimenty. Měření provedl již v roce 1919 Sir Arthur Eddington a jeho tým [4].
- Z dat, která v roce 1929 publikoval Edwin Hubble, plyne, že se vesmír rozpíná [5]. Odůvodnění může také poskytnout jen obecná relativita.
- Dle obecné relativity by u fotonů, které unikají z gravitačního pole, mělo dojít k frekvenčnímu posunu. Ten byl v roce 1954 skutečně naměřen Danielem Popperem u hvězdy 40 Eridani B [6].
- K dalšímu otestování obecné teorie relativity došlo díky objevení kosmického mikrovlnného záření. To pozorovali Arno Penzias a Robert Wilson v roce 1965 [7].
- V roce 2015 byly observatoří LIGO poprvé pozorovány gravitační vlny, což je jedna z dalších teoretických předpovědí obecné relativity [8]. Tato událost

byla způsobena splynutím dvojice černých děr a jednalo se tak o jejich první přímé pozorování.

- V roce 2019 byl pořízen první snímek supermasivní černé díry v centru galaxie M87 [9]. Pozorovaný objekt je v souladu s předpovědí obecné relativity.

V 60. letech došlo také k objevům X-zdrojů, kvasarů, pulsarů nebo GRB. Obecná teorie relativity tak úspěšně odolává experimentům, ale bohužel i pokusům o její spojení s kvantovou teorií pole a popisem zbylých elementárních interakcí.

Kerrovo řešení se pravděpodobně blíží popisu skutečných astrofyzikálních objektů, ale už jen samotná rotující černá díra v přítomnosti a v interakci s hmotou a zářením se může deformovat. Formalismus slabých izolovaných horizontů (Weakly isolated horizons - WIHs) je silný nástroj pro studium těchto složitějších případů. Pro použití tohoto formalizmu je třeba přepsat Kerrovo řešení v řeči netwistujících souřadnic. Jinými slovy je třeba časoprostor parametrizovat nulovými nadplochami. Pokusit se o takovou parametrizaci Kerrova řešení bude i cílem této práce.

V první kapitole se podíváme na Kerrovo řešení a jeho vlastnosti. Nejprve řešení zapíšeme v původním tvaru, ve kterém ho Roy Kerr odvodil (1963) a následně ho vhodnou transformací přepíšeme do Boyerova–Lindquistova tvaru. V tomto tvaru lze názorněji popsat klíčové vlastnosti tohoto řešení. Podrobně též rozebereme horizonty událostí a takzvané ergosféry.

V druhé kapitole odvodíme obecný tvar metriky pro prostoročas, který povoluje existenci netwistující nulové a afinně parametrizované geodetické kongruence. Zavedeme optické skaláry a ukážeme, jak je lze použít pro klasifikaci prostoročasů. Shrňme explicitní vyjádření Riemannova tenzoru, Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru obecné metriky ze začátku této kapitoly. V těchto vyjádřeních přepíšeme všechny prostorové derivace pomocí geometričtějšího užití kovariantní derivace na příčném prostoru pro další použití v následující kapitole.

V poslední kapitole zapíšeme Kerrovu metriku pomocí netwistujících souřadnic adaptovaných na kongruenci, která však není afinně parametrizovaná a nezapadá tak do našeho obecného tvaru metriky kapitoly 2. Dále se pokusíme naznačit cesty, jak k afinně parametrizované kongruenci generující prostoročasové souřadnice přejít.

1. Kerrovo řešení

V této kapitole se blíže podíváme na Kerrovo řešení Einsteinových rovnic. Fyzikálně toto řešení popisuje časoprostor okolo axiálně symetrické, rotující černé díry. Právě rotace přináší mnoho intuitivních, ale i zcela nečekaných vlastností, které nerotující Schwarzschildovo řešení nemá. Rotace je zde zadána takzvaným rotačním parametrem a , přičemž Kerrovo řešení v limitě $a \rightarrow 0$ přechází na Schwarzschildovo statické a sféricky symetrické řešení, jak se za chvíli přesvědčíme v Podkapitole 1.1. Právě vliv rotace je zásadní pro geometrii Kerrovy černé díry. Na rozdíl od Schwarzschildova řešení se pro $a \neq 0$ horizont událostí deformuje a dokonce vzniká další horizont uvnitř černé díry. Dále okolo černé díry vzniká oblast takzvané ergosféry, uvnitř které pozorovatel nemůže zůstat v klidu vzhledem k nekonečnu a jeho pohyb musí být strháván rotací černé díry. Schématické znázornění horizontů a ergosféry Kerrovy černé díry ve sférických souřadnicích je na *Obrázku 1.1* a v kartézských souřadnicích na *Obrázku 1.2*.

Tato kapitola je přehledová a vychází především z pedagogického úvodu do Kerrova časoprostoru od profesora Matta Vissera [10] a z knihy o přesných časoprostorech v Einsteinově obecné relativitě od profesorů Jiřího Podolského a Jerryho Griffithse [11].

1.1 Původní tvar

Roy Kerr ve své práci „Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics“ z roku 1963 [12] odvodil metriku rotující černé díry metodou „*tour de force*“, dle slov Matta Vissera. Ale i s již známým postupem je samotné odvození značně složité. Zde pro zajímavost citujeme ještě jeden komentář Matta Vissera k odvození této metriky: „*The algebraic complexity of the computations is so high that relatively few physicist or mathematicians have the fortitude to carry them through to completion*“.

Původně bylo Kerrovo řešení zformulováno ve tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde m, a jsou konstantní parametry, jejichž význam bude zřejmý níže. Pragmatickým pohledem matematika vidíme přítomnost nediagonálních metrických členů, které znesnadňují veškeré výpočty. Na druhou stranu zde explicitně nevystupují proměnné u ani ϕ , což vypovídá o stacionaritě a axiální symetrii tohoto prostoročasu. Pokud uspořádáme souřadnice jako (u, r, θ, ϕ) , tak můžeme tyto symetrie popsat dvěma Killingovými vektory

$$\xi_{(u)}^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (1.2)$$

Dále vidíme, že pro $m \neq 0$ je v oblasti

$$r = 0 \quad \text{a současně} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

chování metrických funkcí v (1.1) singulární. Zatím ale nevíme, zda se jedná o singularitu časoprostorovou, nebo pouze souřadnicovou.

Pro $a \rightarrow 0$ se časoprostorový interval (1.1) zredukuje na klasický Schwarzschildův časoprostor a pokud dále uvažujeme limitu $m \rightarrow 0$, tak dostaneme plochý Minkowského prostor. Toto nemusí být ani v jednom případě na první pohled zřejmé, neboť Schwarzschildova geometrie je v takzvaném Eddingtonově–Finkelsteinově tvaru, tedy

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.3)$$

Pro Minkowského časoprostor pak dostáváme

$$ds^2 = -du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.4)$$

což lze substitucí

$$u = t + r ,$$

triviálně přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 - 2dt\overline{dr} - dr^2 + 2d\overline{r} + 2dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

a získáváme tak klasický tvar Minkowského metriky ve sférických souřadnicích.

Nyní se vraťme zpět ke Kerrovu řešení (1.1). Spočtením jednoho ze základních invariantů obecné relativity pro klasifikaci singularit v prostoročasech, takzvaného Kretschmannova invariantu¹, dostáváme

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{48m^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} \quad (1.6)$$

a vidíme, že singularita v bodech s $r = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$ je singularitou časoprostorovou. Obecně však tento původní tvar Kerrova řešení není zcela ideální pro jeho názorný popis a fyzikální interpretaci. V následující kapitole přejdeme proto do Boyerových–Lindquistových souřadnic a budeme pokračovat v přehledu vlastností tohoto přesného řešení.

1.2 Boyerův–Lindquistův tvar

Nejprve provedeme v původním Kerrově tvaru metriky (1.1) transformaci

$$u = t + r . \quad (1.7)$$

Takto dostáváme

$$\begin{aligned} ds^2 &= - dt^2 + dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\phi + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &\quad + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹Tento invariant má samozřejmě stejnou hodnotu jako jeho obdoba konstruovaná z Weylova tenzoru, tedy $C_{\mu\nu\kappa\lambda}C^{\mu\nu\kappa\lambda}$, neboť se jedná o vakuové řešení Einsteinových rovnic s nulovou kosmologickou konstantou, tj. $R_{\mu\nu} = 0$ a $R = 0$.

Následně provedeme další substituci závislou na obou parametrech m a a

$$dt = d\tilde{t} + \frac{2mr}{r^2 - 2mr + a^2} dr, \quad \text{a současně} \quad d\phi = -d\tilde{\phi} - \frac{a}{r^2 - 2mr + a^2}, \quad (1.9)$$

čímž dostáváme

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 - 2 \frac{2mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\ & + \left[\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} \right] dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & + \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Toto již je výsledný časoprostorový interval v takzvaných Boyerových–Lingquistových souřadnicích. Pro zjednodušení ještě zavedeme označení

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_r &= r^2 - 2mr + a^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

příčemž rovnici (1.8) tak můžeme jednoduše přepsat do ekvivalentního tvaru

$$ds^2 = - \frac{\Delta_r}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2. \quad (1.12)$$

Pomocí Boyerova–Lindquistova tvaru metriky nyní prozkoumejme další vlastnosti Kerrova časoprostoru. Jak vidíme, metrika má v tomto tvaru pouze jeden mimo diagonální člen, což nám početně pomůže při analýze tohoto řešení.

Pro $a \rightarrow 0$ samozřejmě dostáváme Schwarzschildův prostoročas, nyní již však ve zcela klasickém tvaru

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.13)$$

Jak víme, tak zde představuje parametr m hmotnost. Lze tedy předpokládat, že i pro $a \neq 0$ bude tento parametr určitým způsobem odpovídat hmotnosti. Naopak pro $m \rightarrow 0$ dostáváme

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.14)$$

Lze ukázat, že (1.14) je Minkowského metrika ve zploštělých sférických souřadnicích. Skutečně, transformací souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.15)$$

dostaneme tradiční tvar Minkowského metriky (1.5), nyní vyjádřený v kartézských souřadnicích. Z těchto pozorování usuzujeme, že a je nezávislý rotační parametr. Naivně tedy můžeme říci, že parametry a a m odpovídají požadavkům na prostoročas, který má jako své nezávislé veličiny hmotnost a moment hybnosti.

Tento prostoročas je rotačně symetrický, protože transformace $a \rightarrow -a$ je invariantní, pokud zároveň transformujeme $\phi \rightarrow -\phi$ nebo $t \rightarrow -t$. Fyzikálně tato změna úhlu znamená otáčení v opačném směru, čehož ale můžeme již méně fyzikálně dosáhnout i opačným směrem v toku času. Zároveň si můžeme povšimnout symetrie při zrcadlení okolo roviny $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pokud chceme jakýkoliv prostoročas charakterizovat bez ohledu na konkrétní volbu souřadnic, tak bychom tak zcela přirozeně rádi učinili invariantními skalárními veličinami, abychom mohli mezi sebou porovnávat různé prostoročasy a kategorizovat je. Jedna z možností je vytvořit z bázových vektorů nulovou (světelnou) tetradu $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ a pak promítat na různé kombinace těchto vektorů Weylův tenzor a studovat chování výsledných skalárů při změně tetrady. Tento postup představuje takzvanou algebraickou klasifikaci prostoročasů spojenou se jmény jako Petrov, Penrose, nebo Newman. Weylův tenzor je geometricky bezestopá část Riemannova tenzoru křivosti. V Einsteinově teorii se jedná vlastně o volné gravitační pole, tedy o přirozené zakřivení prostoročasu po odečtení zdrojů svázaných s geometrií skrze polní rovnice. Lze ho získat jako

$$C_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}(R_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu} + R_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu} - R_{\lambda\nu}g_{\kappa\mu} - R_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}) + \frac{1}{6}R(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) . \quad (1.16)$$

Weylův tenzor má v čtyřrozměrném prostoročase celkem 10 nezávislých složek a tak ho lze popsat 5 komplexními skalárními veličinami $\{\Psi_0, \dots, \Psi_4\}$ sestupně s nejvyššími boostovými vahami:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^\kappa m^\lambda k^\mu m^\nu , \\ \Psi_1 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^\kappa l^\lambda k^\mu m^\nu , \\ \Psi_2 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^\kappa m^\lambda \bar{m}^\mu l^\nu , \\ \Psi_3 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa k^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu , \\ \Psi_4 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa \bar{m}^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pak se již jen snažíme užitím Lorentzových transformací volit tetradu tak, abychom vynulovali co nejvíce těchto veličin směrem od nejvyšších boostových vah.

Pro metriku (1.12) lze volbou nulové tetrady $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$, konkrétně [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta_r}, 1, 0, \frac{a}{\Delta_r} \right) , \\ \mathbf{l} &= \left(\frac{r^2 + a^2}{2\rho^2}, -\frac{\Delta_r}{2\rho^2}, 0, \frac{a}{2\rho^2} \right) , \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right) , \\ \bar{\mathbf{m}} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left(-ia \sin \theta, 0, 1, \frac{-i}{\sin \theta} \right) , \end{aligned} \quad (1.18)$$

dosáhnout toho, že jediná nenulová (pro $m \neq 0$) složka tenzoru křivosti je

$$\Psi_2 = -\frac{m}{(r + ia \cos \theta)^3} . \quad (1.19)$$

Nahlédnuto z pohledu volných testovacích částic, tato složka obecně popisuje chování Newtonovského pole. Časoprostory, které mají nenulovou jen tuto komponentu boostové váhy nula vzhledem k tetradě hlavních nulových směrů, jsou algebraického typu D. Jedná se tedy o značně speciální řešení.

Z rovnice (1.19) vidíme, že pro $m \neq 0$ skalár Ψ_2 diverguje pro hodnoty

$$r = 0 \quad \text{a současně} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

To přirozeně odpovídá časoprostorové singularitě původního tvar metriky (1.1). Není tedy překvapující, že metrika (1.12) má tuto singularitu také, což odpovídá $\rho = 0$, ale navíc má ještě jednu singularitu pro $\Delta_r = 0$. V analogii se Schwarzschildovým řešením můžeme tedy očekávat, že se jedná o rovnici plochy, která představuje horizont událostí, ale ne o skutečnou fyzikální singularitu.

1.3 Horizonty v Kerrově řešení

Jak jsme již uvedli, tak singularita pro $\Delta_r = 0$, ve tvaru metriky (1.12), není singularitou křivosti. Popíšme tuto oblast podrobněji. Pro $m^2 > a^2$ má $\Delta_r = 0$ dva kořeny, tedy

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (1.20)$$

Podíváme-li se, co to znamená v limitě $a \rightarrow 0$, tedy pro Schwarzschildovo řešení, tak dostáváme $r_+ \rightarrow 2m$ a $r_- = 0$. Hodnota r_+ tedy odpovídá horizontu událostí (souřadnicové singularitě), zatímco r_- je singularita křivosti ve středu černé díry.

Dále je důležité pozorování chování metrických koeficientů (1.12), tedy že pro $\Delta_r > 0$ je r prostorová souřadnice, ale pro $\Delta_r < 0$ získává význam souřadnice časové. Vidíme tedy, že hodnoty r_{\pm} nejspíše odpovídají dvěma horizontům událostí. Je nutné poznamenat, že toto platí pro nadplochy s fixními hodnotami $m^2 > a^2$. Pro $m^2 = a^2$ dostáváme takzvané extrémní řešení a pro $m^2 < a^2$ hyperextrémní, což je případ nahé singularity. Nyní se omezíme na fyzikálně nejzajímavější a nejreálnější případ $m^2 > a^2$.

Konkrétně se podívejme na to, jak vypadají trojrozměrné plochy s konstantním r . Ze vztahu (1.10) tak získáváme

$$\begin{aligned} ds_{3D}^2 = & - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) dt^2 - 2 \frac{2mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Determinant této trojrozměrné metriky (pro přehlednost ji označme g_{ij} , kde nepoužití řeckých indexů značí právě jen 3 rozměry) snadno spočítáme jako

$$\det(g_{ij}) = - \sin^2 \theta (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) (r^2 - 2mr + a^2), \quad (1.22)$$

přičemž chování znaménka tohoto determinantu vzhledem k hodnotě souřadnice r , je shrnuté v *Tabulce 1.1*.

Determinant této třírozměrné metriky obsahuje hodnotné informace o povaze dané nadplochy, jelikož máme zadanou signaturu celého prostoročasu a to $(-, +, +, +)$. Pro záporný determinant trojplochy víme, že je $(2+1)$ dimenzionální a má tak časovou komponentu. Pro kladný determinant je naopak plocha

Tabulka 1.1: Chování znaménka $\det(g_{ij})$ pro různou volbu konstantního r .

	$r < r_-$	$r = r_-$	$r_- < r < r_+$	$r_+ = r$	$r_+ < r$
$\text{sign}[\det(g_{ij})]$	−	0	+	0	−

prostorového charakteru. Při znalosti Schwarzschildova řešení není překvapivé, že od jisté hodnoty nabývá r významu časové souřadnice a vše co překročí určitou hranici, tak již musí kauzálně směřovat do nitra černé díry. V případě Kerrova prostoročasu však nově pozorujeme existenci další hranice r_- , čímž uvnitř černé díry vzniká prostor, kde je časová souřadnice opět t .

Pokud je determinant metriky (1.21) roven nule, tak je matice jejích komponent singulární a jádro má nenulovou dimenzi. Existuje tak vektor L^i který splňuje

$$g_{ij}^{(r_{\pm})} L^i = 0 \implies g_{ij}^{(r_{\pm})} L^i L^j = 0, \quad (1.23)$$

přičemž druhá rovnost plyne z té první triviálně. Tyto vektory můžeme rozšířit na čtyř-vektory jednoduše tak, že přidáme r -komponentu rovnou nule, tedy

$$L^i \rightarrow L^\mu = (L^t, 0, L^\theta, L^\phi). \quad (1.24)$$

Tento vektor je tedy všude tečný k povrchu $r = r_{\pm}$ a generuje tak na tomto povrchu křivky. Skalární součin takového čtyřvektoru přejde na

$$g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu = 0, \quad (1.25)$$

a vidíme tedy, že je tento vektor nulový (světelný) a křivky jím generované jsou rovněž nulové. To fyzikálně odpovídá trajektoriím fotonů, které se na nadplochách $s = r_{\pm}$ pohybují aniž by spadly dovnitř, nebo odletěly pryč.

Rozvíňme tuto myšlenku ještě o kousek dále. Nejprve zavedeme veličiny Ω_{\pm} jako

$$\Omega_{\pm} = \frac{a}{2mr_{\pm}} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (1.26)$$

a k nim příslušné vektory

$$L_{\pm}^{\mu} = (1, 0, 0, \Omega_{\pm}). \quad (1.27)$$

Zde chceme, aby bylo automaticky splněno

$$g_{\mu\nu}^{(r_{\pm})} L_{\pm}^{\mu} L_{\pm}^{\nu} = 0, \quad (1.28)$$

o čemž se ale snadno přesvědčíme viz (1.24) a (1.25). Důkaz provedeme například pro Ω_+ . Čtyřvektor $L_+^{\mu} = (1, 0, 0, \frac{a}{2mr_+})$ lze vytvořit z vektoru $L_+^i = (2mr_+, 0, a)$ způsobem popsaným výše po vydělení faktorem $2mr_+$. Stačí tedy dokázat, že vektor L_+^i splňuje rovnici (1.23) pro $g_{ij}^{(r_+)}$. Maticově to znamená

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & g_{t\phi} \\ 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\phi t} & 0 & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2mr_+ \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

kde podmínka $\boxed{2}$ je splněna automaticky. Složky metriky, viz (1.21), vynásobíme faktorem $r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta$ a pro podmínku $\boxed{1}$ dostáváme

$$\begin{aligned} & -2mr_+^3 - 2mr_+ a^2 \cos^2 \theta + (2mr_+)^2 - 2mr_+ a^2 \sin^2 \theta \\ & = -2mr_+(r_+^2 + a^2) + (2mr_+)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

kde jsme použili $r_+^2 + a^2 = 2mr_+$. Pro podmínku $\boxed{3}$ získáváme

$$\begin{aligned} & - (2mr_+)^2 a \sin^2 \theta + 2mr_+ a (r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta^2 + 2mr_+ a^3 \sin \theta^4 \\ & = - (2mr_+)^2 a \sin^2 \theta + 2mr_+^3 a \sin \theta^2 + 2mr_+ a^3 \sin \theta^2 \\ & = - (2mr_+)^2 a \sin^2 \theta + 2mr_+ a (r_+^2 + a^2) \sin \theta^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

a vektor L_+^i splňuje rovnici (1.23) a tedy i (1.28).

Jelikož se jedná o vektorové pole tečné k povrchu konstantního r_\pm , tak můžeme křivky tímto polem generované popsat jednoduše jako

$$\frac{dX^\mu(t)}{dt} = L_\pm^\mu. \quad (1.32)$$

Integrací této podmínky získáme explicitní vyjádření křivek, tedy

$$X(t) = (t, r_\pm, \theta_0, \phi_0 + \Omega_\pm t) , \quad (1.33)$$

kteřé jsou, stejně jako vektory L^μ , definované jen na površích s fixním r_\pm . Po vzoru Schwarzschildova řešení pro numericky větší hodnotu r_+ než r_- usuzujeme, že r_+ představuje horizont událostí. Tedy jakési vnější ohraničení této černé díry. Vše co překročí tento horizont již musí kauzálně skončit uvnitř černé díry, viz *Tabulka 1.1*. Na tomto povrchu je Ω_+ konstantní a pokud jsme tedy fotonem na trajektorii $X(t)$, tak s plynoucím časem t se nemění hodnoty našich souřadnic r a θ a souřadnice ϕ se nutně mění s konstantní úhlovou rychlostí, odpovídající právě Ω_+ . Na povrchu r_+ tedy nelze zůstat v klidu a celý horizont tak v jistém smyslu rotuje. To samé platí pro vnitřní horizont na r_- .

Pojďme se nyní podívat na tvar ploch r_\pm v daném okamžiku konstantního t , tedy pro $dt = 0$. Dosadíme-li tuto podmínku do rovnice (1.21), tak dostáváme

$$ds_{2D}^2 = (r_\pm^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(\frac{4m^2 r_\pm^2}{r_\pm^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (1.34)$$

Na první pohled tak vidíme, že plochy dané r_\pm nejsou z geometrického hlediska sférické jako horizont událostí Schwarzschildova řešení. Z rovnice (1.34) lze dále spočítat plochu horizontů, tedy $r = r_\pm$ a $t = \text{konst.}$, pomocí odmocniny z jakobiánu metriky jako

$$\mathcal{A}_H^\pm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = 8\pi m r_\pm = 8\pi \left(m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2 a^2} \right). \quad (1.35)$$

Rozvineme-li odmocninu do prvního řádu v a^2/m^2 , tak dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H^+ & \approx 16\pi m^2 - 4\pi a^2 , \\ \mathcal{A}_H^- & \approx 4\pi a^2 , \end{aligned} \quad (1.36)$$

a pro $a \rightarrow 0$ tak skutečně povrch vnějšího horizontu odpovídá Schwarzschildově řešení kde $r_h = 2m$ a povrch vnitřního horizontu jde do nuly.

Povrch tedy závisí na parametru m a členu $ma \equiv L$, který lze interpretovat jako moment hybnosti. Pro dvojrozměrný povrch horizontů lze spočítat Ricciho skalár a vyjádřit ho jako

$$R_{2D} = \frac{2 \left(r_\pm^2 + a^2 \right) \left(r_\pm^2 - 3a^2 \cos^2 \theta \right)}{\left(r_\pm^2 + a^2 \cos^2 \theta \right)^3}. \quad (1.37)$$

Pro $\theta = \frac{\pi}{2}$, tedy na rovníku horizontu, dostáváme

$$R_{2D}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2(r_{\pm}^2 + a^2)}{r_{\pm}^4} > 0. \quad (1.38)$$

Tato hodnota je vždy kladná a tudíž i zakřivení této plochy v okolí rovníku je kladné. Pro pól, tedy pro $\theta = \{0, \pi\}$, dostáváme

$$R_{2D}\Big|_{\theta=\{0, \pi\}} = \frac{2(r_{\pm}^2 + a^2)(r_{\pm}^2 - 3a^2)}{(r_{\pm}^2 + a^2)^3}. \quad (1.39)$$

Vidíme, že tento výraz může být záporný pro $r_{\pm}^2 < 3a^2$. Podíváme-li se na chování vnějšího horizontu na r_+ , tak je zakřivení záporné pro

$$\begin{aligned} \sqrt{3}|a| &> |r_+| = m + \sqrt{m^2 - a^2} \\ \implies (\sqrt{3}|a| - m)^2 &> m^2 - a^2 \\ \implies 4a^2 &> 2\sqrt{3}am \\ \implies a &> \frac{\sqrt{3}}{2}m, \end{aligned} \quad (1.40)$$

tedy záporné zakřivení může nastat i pro $m > a$ a tedy i pro řešení bez nahých singularit. V takovém případě již nelze geometrii objektu vložit do třírozměrného euklidovského prostoru.

1.4 Ergosféry

Vně horizontu událostí vzniká pro rotující černé díry nová oblast, takzvaná ergosféra. Jedná o oblasti, kde nelze, vzhledem k nekonečnu, zůstat v klidu. Pozorovatel, který je v klidu vzhledem k nekonečnu je popsán světočárou $X(t)$ s příslušným tečným vektorem T^α

$$X(t) = (t, r_0, \theta_0, \phi_0) \quad \rightarrow \quad T(t) = (1, 0, 0, 0). \quad (1.41)$$

Pokud chceme, aby se jednalo o skutečného pozorovatele, musí být navíc vektor, tedy norma vektoru musí být záporná

$$0 > g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu = g_{tt} \stackrel{\text{BL}}{=} - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (1.42)$$

Aby tedy mohl pozorovatel zůstat v klidu, tak musí platit

$$-(r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta) < 0, \quad (1.43)$$

tedy aby byl člen v závorce kladný. Řešení této kvadratické rovnice získáváme další, velmi důležité, radiální hodnoty $r_{e\pm}$, při kterých výraz mění znaménko. Podobně jako s horizonty událostí, vymezují plochy konstantního $r_{e\pm}$ specifické oblasti prostoročasu. Explicitně

$$r_{e\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.44)$$

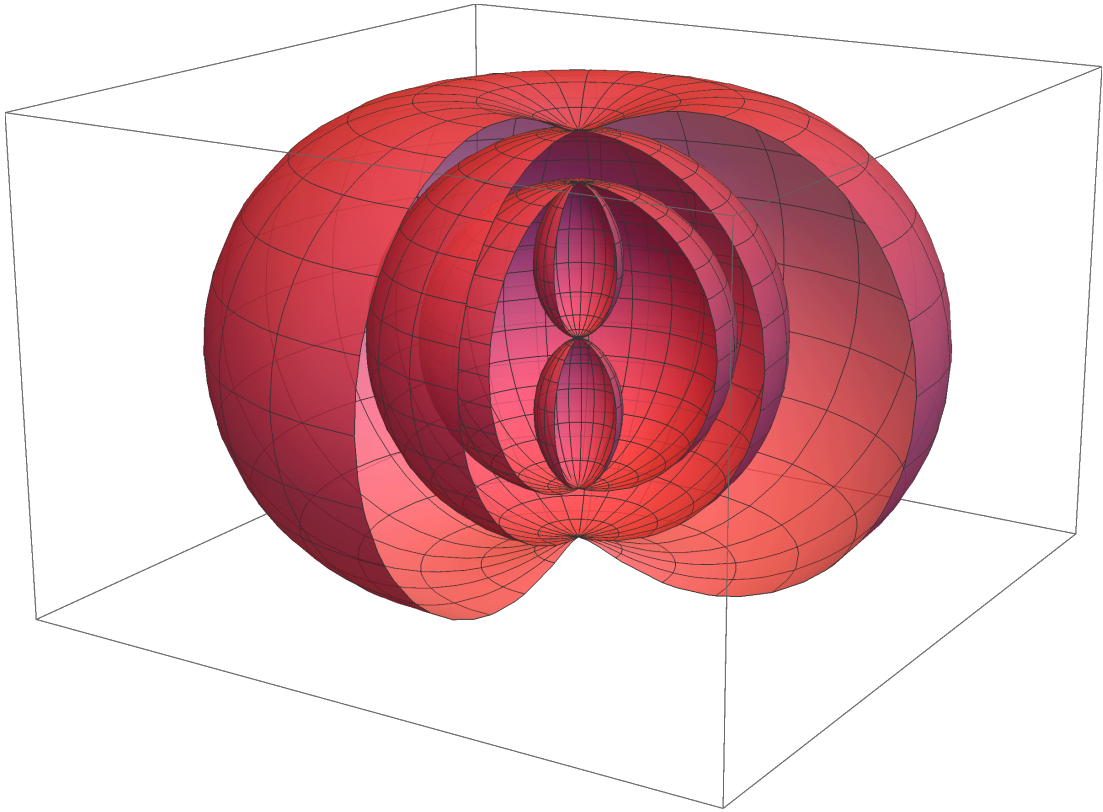
a hned je vidět (například volbou $r = m$), že v oblasti $r_{e+} > r > r_{e-}$ nerovnice (1.43) neplatí a pozorovatel se musí, vzhledem k danému souřadnému systému, pohybovat. Dále vidíme, že platí

$$r_{e+} \geq r_+ \geq r_- \geq r_{e-} , \quad (1.45)$$

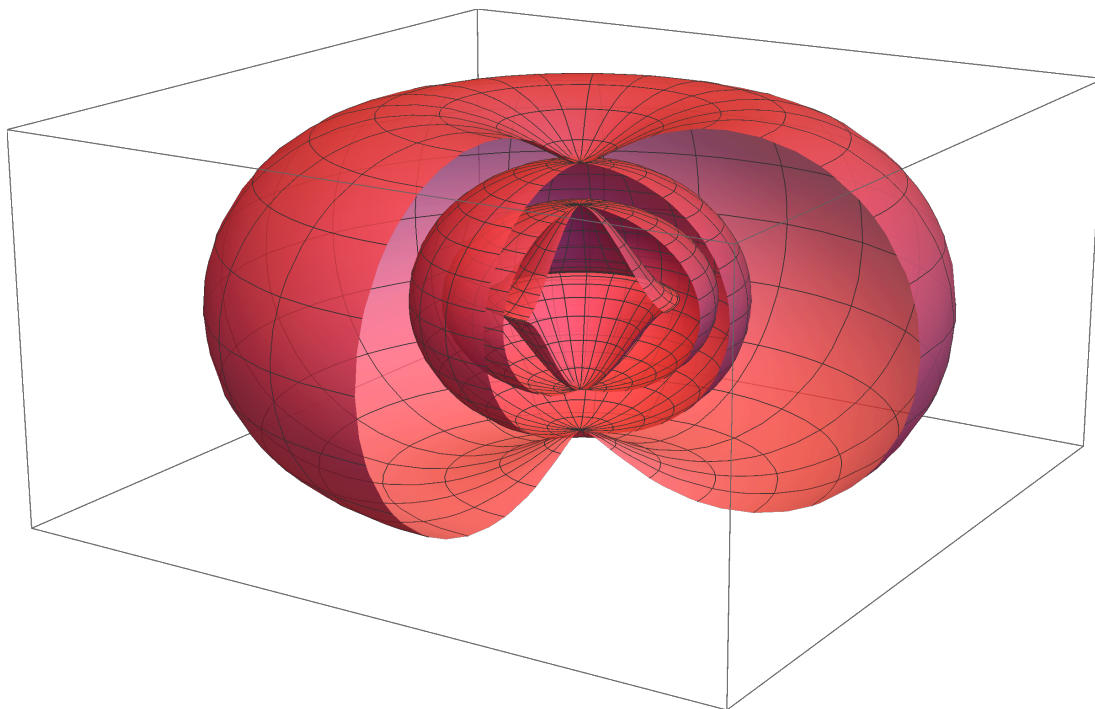
a pro $\theta = \{0, \pi\}$ přejde rovnice (1.44) na rovnici pro horizonty r_{\pm} , tedy na pólech se vnější horizont dotýká s vnější hranicí ergosféry a vnitřní horizont se na pólech dotýká s vnitřní hranicí ergosféry. Také vidíme, že pokud zastavíme rotaci černé díry, tedy $a \rightarrow 0$, tak

$$r_{e+} = r_+ = 2m , r_{e-} = r_- = 0 . \quad (1.46)$$

Vnější ergosféra tedy splyne s vnějším horizontem událostí a vnitřní ergosféra i horizont událostí zaniknou. Vznikne tak jen jeden sféricky symetrický horizont událostí Schwarzschildova řešení.



Obrázek 1.1: Znázornění vnější ergosféry, vnějšího horizontu, vnitřního horizontu a vnitřní ergosféry Kerrový černé díry ve sférických souřadnicích



Obrázek 1.2: Znáornění vnější ergosféry, vnějšího horizontu, vnitřního horizontu a vnitřní ergosféry Kerrovy černé díry v kartézských souřadnicích

1.5 Invariantní charakterizace Kerrova řešení

Nejpřímočařeji lze Kerrovo černoděrové řešení jednoznačně charakterizovat následující sadou na konkrétních souřadnicích nezávislých podmínek: ²

- vakuové řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole,
- axiálně symetrická prostoročasová geometrie,
- geometrie algebraického typu D Weylova tenzoru,
- stacionární řešení,
- asymptoticky plochý prostoročas.

Tyto obecné vlastnosti Kerrova řešení, podrobněji rozebrané v [11] a [10], tak tvoří postačující podmínky pro to, aby obecný prostoročas byl prostoročasem Kerrovým.

Jiný způsob jak lze jednoznačně identifikovat Kerrovo řešení nehledě na souřadný systém, je zavedením jeho charakterizace pomocí invariantů. Ty lze sestavit mnoha způsoby a počet invariantů, které jsou potřeba pro plnou charakterizaci řešení se liší dle způsobu jejich zavedení. My zde uvedeme postup z článku [15] a

²Další z klasických konstrukcí Kerrova prostoročasu odpovídá Carterově práci [14]

zavedeme následujících sedm invariantů

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} , \\
I_2 &\equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta}^*C^{\alpha\beta\gamma\delta} , \\
I_3 &\equiv \nabla_{\mu}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla^{\mu}C^{\alpha\beta\gamma\delta} , \\
I_4 &\equiv \nabla_{\mu}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla^{\mu}C^{*\alpha\beta\gamma\delta} , \\
I_5 &\equiv a_{\mu}a^{\mu} , \\
I_6 &\equiv b_{\mu}b^{\mu} , \\
I_7 &\equiv a_{\mu}b^{\mu} ,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

kde $a \equiv -\nabla_{\mu}I_1$, $b \equiv -\nabla_{\mu}I_2$ a $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ je duál Weylova tenzoru $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Pouze čtyři z těchto sedmi invariantů jsou nezávislé a proto máme tři omezující podmínky dané rovnicemi

$$\begin{aligned}
I_6 - I_5 + \frac{12}{5}(I_1I_3 - I_2I_4) &= 0 , \\
I_7 - \frac{6}{5}(I_1I_4 + I_2I_3) &= 0 , \\
4I_1I_2I_3(I_1^2 - I_2^2)(I_3^2 - 3I_4^2) &= I_4(3I_3^2 - I_4^2)(I_1^4 - 6I_1^2I_2^2 + I_2^4) .
\end{aligned} \tag{1.48}$$

V Kerrově prostoročase musí platit rovnice (1.48) a jsou tak užitečným nástrojem pro hledání Kerrova řešení v obecném tvaru metriky, který odvodíme v následující kapitole, a který by měl být explicitně užít v kapitole poslední.

Kombinací těchto invariantů lze, mimo jiné, vyjádřit hmotnost a spin Kerrový černé díry. Hlavně se ale dají použít i k měření lokální „Kerrovosti“ prostoročasu. Například zavedením bezrozměrného invariantu

$$\chi \equiv \frac{I_6 - I_5 + \frac{12}{5}(I_1I_3 - I_2I_4)}{(I_1^2 + I_2^2)^{5/4}} , \tag{1.49}$$

který je pro Kerrův prostoročas identicky nulový díky (1.48). Pokud nulový není, tak se sice nejedná o Kerrův prostoročas, ale nevíme jak moc se liší. Proto byl v práci [15] z invariantu χ sestaven další invariant

$$K \equiv e^{-s\chi^2} , \tag{1.50}$$

kde s je kladný parametr, který lze také použít pro měření „Kerrovosti“ metriky.

2. Netwistující geometrie

V této kapitole se budeme zabývat netwistujícími geometriemi. Přesněji odvodíme obecný tvar metriky, který povoluje existenci netwistující nulové geodetické kongruence a pomocí optických skalárů dokážeme, že se o netwistující geometrii skutečně jedná. Tato kapitola čerpá především z přehledů [16] a [17].

2.1 Nulová foliace

Vezměme obecný časoprostor generovaný metrikou $g_{\mu\nu}$. V této kapitole také předpokládáme, že dimenze tohoto časoprostoru je $D \geq 4$ obecná, a že je lokálně popsán souřadnicemi x^μ . Foliaci nulovými nadplochami lze provést například tak, že v každém bodě světočáry $\gamma(u)$ s parametrem u „blikneme“ a zkonstruujeme světelný kužel. Každý kužel je tak jednoznačně určený hodnotou parametru u . Takto jsme vytvořili nulové nadplochy $u(x^\mu) = konst.$ Těmito nadplochami lze vyplnit celý prostor. Hodnotu parametru u tak budeme nadále používat jako novou souřadnici v tomto časoprostoru.

Definujeme normálu k těmto nadplochám (která je zároveň tečna) jako

$$k_\mu = -u_{,\mu} = -\delta_\mu^u, \quad (2.1)$$

kde poslední rovnost platí proto, že tento gradient je, vzhledem k bázi kde je u souřadnice, jednoduše 1 při derivování podle u a jinak 0.

Normála ke světelné nadploše musí být také světelná a proto je to zároveň tečna. Musí tedy obecně platit

$$0 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = g^{\mu\nu} \delta_\mu^u \delta_\nu^u = g^{uu}. \quad (2.2)$$

Zdvižením indexu u k_μ získáme nulové vektorové pole $k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu$. Užitím (2.2) dostáváme

$$0 = (g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu)_{;\alpha} = g^{\mu\nu} k_{\mu;\alpha} k_\nu + g^{\mu\nu} k_\mu k_{\nu;\alpha} = 2k_{\mu;\alpha} k^\mu, \quad (2.3)$$

neboť kovariantní derivace je komaptibilní s metrikou a v poslední rovnosti jsme u jednoho členu jen přeznačily indexy. Rozepsáním kovariantní derviace získáváme

$$k_{\mu;\alpha} = k_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu k_\nu = u_{,\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu u_{,\nu} = k_{\alpha;\mu}, \quad (2.4)$$

kde potřžené indexy značí, že je v nich výraz symetrický a lze zaměnit jejich pořadí. Díky tomu lze výraz (2.3) přepsat následovně

$$0 = k_{\mu;\alpha} k^\mu = k_{\alpha;\mu} k^\mu = k^\alpha{}_{;\mu} k^\mu. \quad (2.5)$$

Pokud označíme integrální křivky generované vektorovým polem k^μ jako $x^\mu(r)$, kde r jen parametr podél těchto křivek, tak $k^\mu = \frac{dx^\mu}{dr}$. Rovnici (2.5) lze tak přepsat jako

$$0 = k^\alpha{}_{;\mu} k^\mu = \frac{d^2 x^\alpha}{dr^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}, \quad (2.6)$$

a tedy paralelní přenos je nulový a integrální křivky generované vektorovým polem k^μ jsou nulové afinní geodetiky s afinním parametrem r .

Pokud parametr r použijeme jako druhou souřadnici, tak můžeme pro vektorové pole \mathbf{k} psát $\mathbf{k} = \partial_r$. Neboli

$$k^\mu = \delta_r^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = -g^{\mu\nu} \delta_\nu^u = -g^{\mu u} . \quad (2.7)$$

Dostáváme tak podmínky na kontravariantní komponenty metriky

$$g^{ru} = -1 \quad a \quad g^{au} = 0 , \quad (2.8)$$

kde $a \neq r, u$ díky podmínce (2.2).

Nově zvolené souřadnice jsou tedy (u, r, x^a) , kde latinkou budeme značit indexy právě zbylých $D - 2$ souřadnic x^a . V těchto souřadnicích lze metriku $g^{\mu\nu}$ zapsat jako

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & g^{rr} & g^{r2} & g^{r3} & \dots \\ 0 & g^{2r} & g^{22} & g^{23} & \dots \\ 0 & g^{3r} & g^{32} & g^{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \quad (2.9)$$

Aby mohla platit rovnost $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$, tak musí kovariantní tvar metriky $g_{\mu\nu}$ vypadat následovně

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{uu} & -1 & g_{u2} & g_{u3} & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ g_{2u} & 0 & g_{22} & g_{23} & \dots \\ g_{3u} & 0 & g_{32} & g_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \quad (2.10)$$

Abychom součinem těchto dvou maticových vyjádření metriky získali jednotkovou matici, tak musí platit

$$g_{ua} = g_{ab} g^{br} , \quad g_{uu} = -g^{rr} + g_{ua} g^{ar} , \quad g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c . \quad (2.11)$$

Maticové vyjádření $g_{\mu\nu}$ zapíšeme do podoby časoprostorového intervalu jako

$$ds^2 = g_{uu} du^2 - 2dudr + 2g_{up} dudx^p + g_{pq} dx^p dx^q , \quad (2.12)$$

kde složky g jsou obecné funkce souřadnic $g(u, r, x)$. Získali jsme tak obecný tvar metriky povolující existenci netwistující nulové geodetické kongruence o čemž se přesvědčíme v další podkapitole.

2.2 Optické skaláry

V této podkapitole popíšeme geometrické vlastnosti nulových kongruencí ve směrech $D - 2$ ortogonálních prostorových vektorů. Nejprve na prostoru dimenze D zvolíme dva světelné vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} a dále bázi $D - 2$ prostorových vektorů $\{\mathbf{m}_i\}_{i=2}^{D-1}$ na prostoru kolmém k prostoru generovaném \mathbf{k} a \mathbf{l} tak, aby byly splněny následující vztahy

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1, \quad \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i = 0 . \quad (2.13)$$

Vektory $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i)$ tak generují tento prostor. Nyní ze vztahů (2.13) dovodíme obecný tvar metriky, která to splňuje. Z první podmínky a ortonormality báze $\{\mathbf{m}_i\}_{i=2}^{D-1}$ dostáváme

$$-1 = k_\mu l^\mu = g_{\mu\nu} k^\nu l^\mu \implies g_{\mu\nu} = -k_{(\mu} l_{\nu)} + f_{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

kde jsme museli provést symetrizaci v \mathbf{k} a \mathbf{l} z podmínky symetričnosti metriky. Snadno se přesvědčíme, že je výraz $-k_{(\mu} l_{\nu)}$ nulový v součinu s jakoukoli jinou kombinací báze vektorů než \mathbf{k} a \mathbf{l} . Proto třetí a čtvrtou podmínku (2.13) splňuje automaticky.

Z druhé podmínky dostáváme

$$m_\mu^i m_j^\mu = g_{\mu\nu} m_i^\nu m_j^\mu = f_{\mu\nu} m_i^\nu m_j^\mu = \delta_{ij} \implies f_{\mu\nu} = \sum_i m_\mu^i m_\nu^i + h_{\mu\nu} , \quad (2.15)$$

a výraz $\sum_i m_\mu^i m_\nu^i$ také splňuje třetí i čtvrtou podmínku z (2.13). Pro $h_{\mu\nu}$ tak dostáváme podmínky

$$h_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = 0 \quad \text{pro } \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i) , \quad (2.16)$$

což splňuje jen $h_{\mu\nu} = 0$. Tvar metriky vyhovující podmínkám (2.13) je tedy jednoznačně určen jako

$$g_{\mu\nu} = -2k_{(\mu} l_{\nu)} + \delta_{ij} m_\mu^i m_\nu^j . \quad (2.17)$$

Na cestě za optickými skaláry si dále kovariantní derivaci vektoru \mathbf{k} rozepíšeme jako obecnou lineární kombinaci v bázi $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i)$

$$k_{\mu;\alpha} = K_{11} k_\mu k_\alpha + K_{10} k_\mu l_\alpha + K_{1i} k_\mu m_\alpha^i + K_{i1} m_\mu^i k_\alpha + K_{i0} m_\mu^i l_\alpha + K_{ij} m_\mu^i m_\alpha^j . \quad (2.18)$$

Užitím vztahů (2.13) snadno vyjádříme jednotlivé koeficienty projekcí kovariantní derivace vektoru \mathbf{k} , pro naše účely označené jako $K_{\mu\nu}$, tedy

$$\begin{aligned} K_{11} &= k_{\mu;\alpha} l^\mu l^\alpha, & K_{10} &= k_{\mu;\alpha} l^\mu k^\alpha, & K_{1i} &= -k_{\mu;\alpha} l^\mu m_i^\alpha, \\ K_{i1} &= -k_{\mu;\alpha} m_i^\mu l^\alpha, & K_{i0} &= -k_{\mu;\alpha} m_i^\mu k^\alpha, & K_{ij} &= k_{\mu;\alpha} m_i^\mu m_j^\alpha. \end{aligned} \quad (2.19)$$

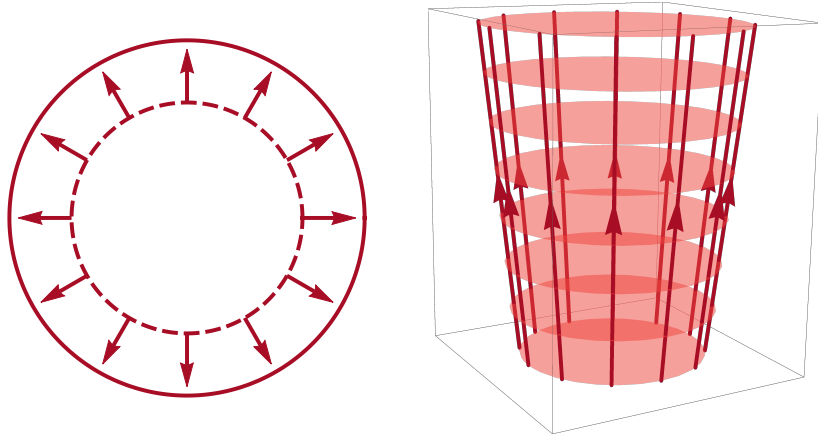
Aby bylo vektorové pole \mathbf{k} generovalo geodetiky, tak musí být výraz $k_{\mu;\alpha} k^\alpha$ úměrný k_μ nebo roven 0 pro afinní geodetiky. Z výrazu (2.19) tak snadno nahlídneme význam některých koeficientů, pokud ho vynásobíme k^α . Dostáváme tak $k_{\mu;\alpha} k^\alpha = -K_{10} k_\mu - K_{i0} m_\mu^i$ a tudíž $K_{i0} = 0$, pokud pole generuje geodetiky a pokud navíc $K_{10} = 0$, tak se jedná o afinní geodetiky.

Nyní se zaměříme na prozkoumání koeficientu K_{ij} , který popisuje geometrické vlastnosti kongruence integrálních křivek generované vektorovým polem \mathbf{k} . Rozložíme si koeficient na jeho stopu, bezstopou symetrickou a antisymetrickou část a pak každou část vyjádříme zvlášť, tedy

$$K_{ij} = \Theta \delta_{ij} + \sigma_{ij} + A_{ij} , \quad (2.20)$$

kde

$$\Theta = \frac{Tr K_{ij}}{D-2}, \quad \sigma_{ij} = K_{(ij)} - \frac{Tr K_{ij}}{D-2} \delta_{ij}, \quad A_{ij} = K_{[ij]} . \quad (2.21)$$



Obrázek 2.1: Schématické znázornění expanze nulové geodetické kongruence

Tyto veličiny se běžně označují jako expanze, shear a twist dle jejich geometrického významu viz níže.

Pro afinní geodetiky lze expanzi přepsat do následujícího tvaru.

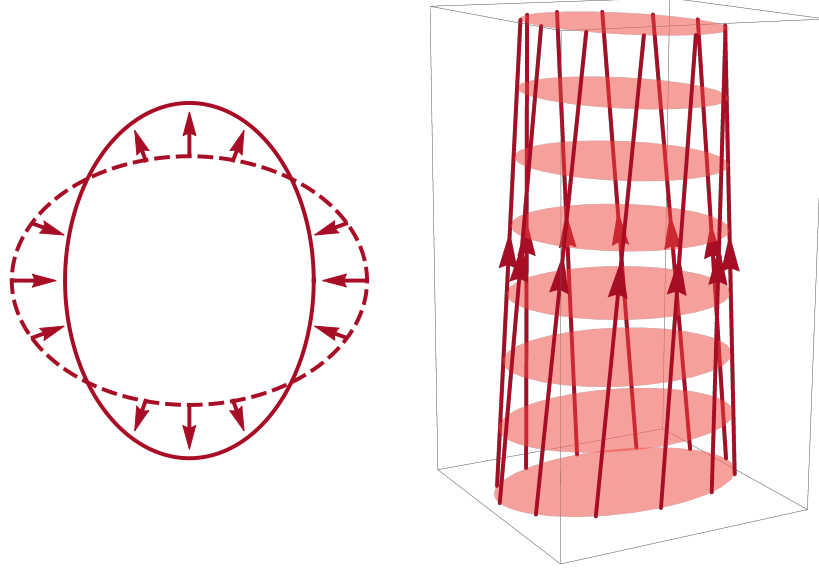
$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{D-2} \sum_{i=2}^{D-1} K_{ii} = \frac{1}{D-2} \sum_{i=2}^{D-1} k^{\mu}{}_{;\alpha} m_{\mu}^i m_i^{\alpha} = \frac{1}{D-2} k^{\mu}{}_{;\alpha} g_{\mu\nu} \sum_{i=2}^{D-1} m_i^{\nu} m_i^{\alpha} \\
&= \frac{1}{D-2} k^{\mu}{}_{;\alpha} g_{\mu\nu} (g^{\nu\alpha} + 2k^{(\nu} l^{\alpha)}) = \frac{1}{D-2} k^{\mu}{}_{;\alpha} \delta_{\mu}^{\alpha} + \frac{2}{D-2} g_{\mu\nu} k^{\mu}{}_{;\alpha} k^{(\nu} l^{\alpha)} \\
&= \frac{1}{D-2} k^{\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{D-2} k_{\nu;\alpha} k^{\nu} l^{\alpha} + \underbrace{\frac{1}{D-2} k_{\nu;\alpha} k^{\alpha} l^{\nu}}_{=0} \\
&= \frac{1}{D-2} k^{\alpha}{}_{;\alpha} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{D-2} (k_{\nu} k^{\nu})_{;\alpha} l^{\alpha}}_{=0} = \frac{1}{D-2} k^{\alpha}{}_{;\alpha} , \tag{2.22}
\end{aligned}$$

kde první člen je roven nule proto, že se jedná o afinní geodetiky a druhý člen je roven nule, neboť jde o derivaci konstanty. Při výpočtu jsme použili definici K_{ij} dle (2.19) a obecný tvar metriky (2.17). Připomeňme, že index i značí o který z $\{\mathbf{m}_i\}_{i=2}^{D-1}$ vektorů se jedná a složky vektorů popisují řecké indexy. Na řecké indexy se navíc vztahuje Einsteinova sumační konvence, ale pro přehlednost se zde přes index i sčítáme sumou.

Podobným způsobem přepíšeme i shear do tvaru pro afinní geodetiky. K tomu se nám bude hodit nejprve dokázat následující identitu.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=2}^{D-1} K_{ij} K_{ji} &= k_{\mu;\nu} k_{\alpha;\beta} \left(\sum_{i=2}^{D-1} m_i^{\mu} m_i^{\alpha} \right) \left(\sum_{j=2}^{D-1} m_j^{\nu} m_j^{\beta} \right) \\
&= k_{\mu;\nu} k_{\alpha;\beta} (g^{\mu\alpha} + 2k^{(\mu} l^{\alpha)}) (g^{\nu\beta} + 2k^{(\nu} l^{\beta)}) \\
&= k_{\mu;\nu} k^{\mu;\nu} , \tag{2.23}
\end{aligned}$$

kde jsme použili jen definici metriky (2.17). Kvadrát shearu tak můžeme pro afinní



Obrázek 2.2: Schématické znázornění shearu nulové geodetické kongruence

geodetiky zapsat jako

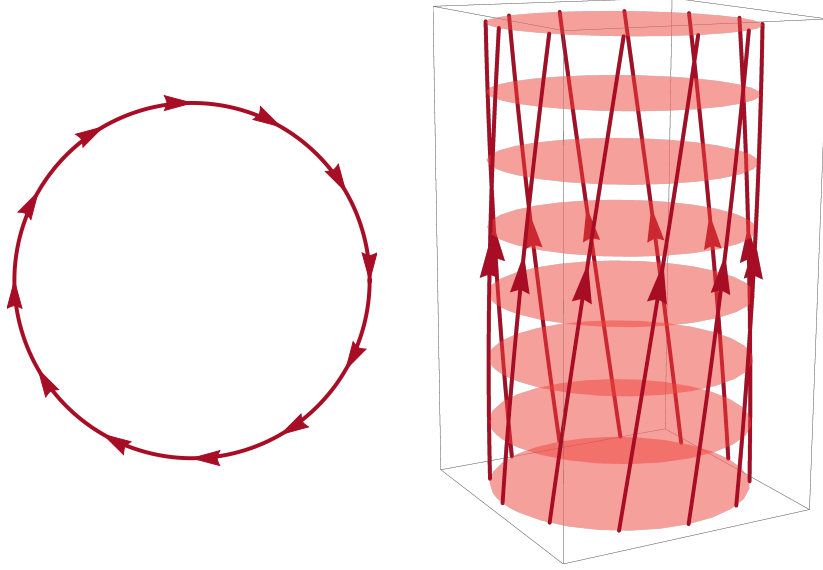
$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{i,j=2}^{D-1} \sigma_{ij} \sigma_{ji} = \sum_{i,j=2}^{D-1} (K_{(ij)} - \Theta \delta_{ij})(K_{(ji)} - \Theta \delta_{ji}) \\
&= \sum_{i,j=2}^{D-1} K_{(ij)} K_{(ji)} - \Theta \sum_{i,j=2}^{D-1} K_{(ij)} \delta_{ji} - \Theta \sum_{i,j=2}^{D-1} K_{(ji)} \delta_{ij} + \Theta^2 \sum_{i,j=2}^{D-1} \delta_{ij} \delta_{ji} \\
&= \frac{1}{2} k_{\mu;\nu} k^{\mu;\nu} + \frac{1}{2} k_{\nu;\mu} k^{\mu;\nu} - \Theta \sum_{i=2}^{D-1} K_{ii} - \Theta \sum_{i=2}^{D-1} K_{ii} + \Theta^2 \sum_{i=2}^{D-1} \delta_{ii} \\
&= k_{(\mu;\nu)} k^{\mu;\nu} - 2(D-2)\Theta^2 + (D-2)\Theta^2 \\
&= k_{(\mu;\nu)} k^{\mu;\nu} - (D-2) \frac{1}{(D-2)^2} (k^\alpha{}_{;\alpha})^2 = k_{(\mu;\nu)} k^{\mu;\nu} - \frac{1}{D-2} (k^\alpha{}_{;\alpha})^2, \quad (2.24)
\end{aligned}$$

kde jsme mimo identity (2.23) použili také definici expanze (2.21) a tvaru expanze pro afinní geodetiky (2.22).

Velmi podobným způsobem lze odvodíme i tvar kvadrátu twistu pro afinní geodetiky jako

$$A^2 = \sum_{i,j=2}^{D-1} A_{ij} A_{ji} = \sum_{i,j=2}^{D-1} K_{[ij]} K_{[ji]} = \frac{1}{2} k_{\mu;\nu} k^{\mu;\nu} - \frac{1}{2} k_{\nu;\mu} k^{\mu;\nu} = k_{[\mu;\nu]} k^{\mu;\nu}, \quad (2.25)$$

kde jsme opět použili identitu (2.23).



Obrázek 2.3: Schématické znázornění twistu nulové geodetické kongruence

Optické skaláry pro netwistující geometrii

Díky (2.1) , (2.7) a tvaru metriky (2.10) lze kovariantní derivaci nulového vektorového pole \mathbf{k} zapsat jako

$$\begin{aligned}
k_{\mu;\alpha} &= k_{\mu,\alpha} - k_{\nu} {}^S \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} \\
&= \underbrace{(-\delta_{\mu}^u)_{,\alpha}}_{=0 \text{ (2.1)}} - \frac{1}{2} \underbrace{k_{\nu} g^{\nu\kappa}}_{=k^{\kappa}} (g_{\kappa\mu,\alpha} + g_{\kappa\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\kappa}) \\
&\stackrel{(2.7)}{=} -\frac{1}{2} \delta_r^{\kappa} (g_{\kappa\mu,\alpha} + g_{\kappa\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\kappa}) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\underbrace{g_{r\mu,\alpha}}_{=0 \text{ (2.10)}} + \underbrace{g_{r\alpha,\mu}}_{=0 \text{ (2.10)}} - g_{\mu\alpha,r} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g_{\mu\alpha,r} .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Užitím (2.26) přepíšeme expanzi a kvadráty shearu a twistu do nového tvaru. K tomu se nám bude hodit následující vlastnost metriky. Dle maticového vyjádření (2.9) a (2.10) vidíme, že

$$\begin{aligned}
g^{u\mu} \neq 0 \quad \text{pro} \quad \mu = r \quad \text{a} \quad g^{ur} g_{ur,r} = -(-1)_{,r} = 0 \implies g^{u\mu} g_{u\mu,r} = 0 \quad \forall \mu , \\
g_{r\mu,r} = 0 \quad \forall \mu \implies g^{r\mu} g_{r\mu,r} = 0 \quad \forall \mu .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Díky tomu platí

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,r} = g^{ij} g_{ij,r} . \tag{2.28}$$

Tento vztah lze přepsat elegantnějším způsobem pomocí logaritmu známé identity pro diagonalizovatelné matice $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$

$$g^{ij} g_{ij,r} = \text{Tr}(g^{kj} g_{ij,r}) = \text{Tr}\left(\frac{g_{ij,r}}{g_{ij}}\right) = \text{Tr}((\ln g_{ij})_{,r}) = (\ln(\det g_{ij}))_{,r} . \tag{2.29}$$

Užitím odvozených identit dostáváme

$$\Theta \stackrel{(2.22)}{=} \frac{1}{D-2} g^{\alpha\mu} k_{\mu;\alpha} \stackrel{(2.26)}{=} \frac{1}{2(D-2)} g^{\alpha\mu} g_{\alpha\mu,r} \stackrel{(2.28)}{=} \frac{1}{2(D-2)} g^{ij} g_{ij,r} \stackrel{(2.29)}{=} \frac{1}{2(D-2)} (\ln \det g_{ij})_{,r} , \quad (2.30)$$

$$\sigma^2 \stackrel{(2.24)}{=} \frac{1}{4} g_{\mu\nu,r} g_{\alpha\beta,r} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \frac{1}{4(D-2)} g_{\mu\nu,r} g_{\alpha\beta,r} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \stackrel{(2.28)}{=} \frac{1}{4} g_{ij,r} g_{kl,r} g^{ki} g^{lj} - (D-2)\Theta^2 , \quad (2.31)$$

$$A^2 \stackrel{(2.25)}{=} \frac{1}{4} \underbrace{g_{[\mu\nu],r}}_{=0} g_{\alpha\beta,r} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} = 0 , \quad (2.32)$$

neboť antisymetrizace symetrické metriky je samozřejmě nulová.

K netwistujícím geometriím lze přistupovat i z druhé strany. Frobeniův teorém stanovuje, za jakých podmínek lze varietu rozdělit nulovými nadplochami, které jsou kolmé na vektorové pole \mathbf{k} . Tuto podmínku lze zapsat v následujícím tvaru

$$k_{[\mu;\alpha} k_{\nu]} = 0 , \quad (2.33)$$

což pro vektorové pole $k_\mu = -u_{,a}$ jistě platí. Podmínku však lze formulovat ekvivalentně jako

$$0 \stackrel{(2.33)}{=} k_{[\mu;\alpha} k_{\nu]} l^\nu = \frac{1}{3} A_{ij} m_{[\mu}^i m_{\alpha]}^j k_{\nu]} l^\nu = -\frac{1}{3} A_{ij} m_\mu^i m_\alpha^j , \quad (2.34)$$

kde jsme provedli projekci na nulový vektor \mathbf{l} a použili definici A_{ij} (2.21). Podmínka (2.33) je tedy ekvivalentní podmínce $A_{ij} = 0$. Díky (2.32) je tedy vektorové pole \mathbf{k} netwistující.

Rozložení prostorové metriky

V následujících kapitolách se budeme zabývat složkami Riemannova a Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru. Obecně se jedná o složité výrazy poskládané ze složek metriky a jejích derivací. Pomocí optických skalárů lze tyto výrazy přepsat do kompaktnějšího a geometricky názornějšího tvaru. Přepis však není snadný a pro výpočty je praktické po vzoru [18] rozložit prostorovou metriku na

$$g_{ij} = p^2 \gamma_{ij} \quad \text{přičemž} \quad \det \gamma_{ij} = 1 . \quad (2.35)$$

Tímto rozkladem lze determinant prostorové metriky přepsat do tvaru

$$\det g_{ij} = \det(\gamma_{ij} p^{-2}) = p^{-2(D-2)} \underbrace{\det \gamma_{ij}}_{=1} = p^{2(2-D)} , \quad (2.36)$$

kde jsme použily vlastnosti determinantu. Užitečná bude také identita (2.29) pro derivaci unimodulární γ_{ij}

$$\gamma^{ij} \gamma_{ij,r} = (\ln(\det \gamma_{ij}))_{,r} = 0 . \quad (2.37)$$

Dosazením vztahu (2.36) do rovnice (2.30) nabývá expanze tvaru

$$\Theta = -\frac{2(D-2)}{2(D-2)}(\ln p)_{,r} = -(\ln p)_{,r} . \quad (2.38)$$

Kvadrát shearu (2.31) po dosazení (2.35) lze upravit následovně

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{4}p^4(p^{-2}\gamma_{ij})_{,r}(p^{-2}\gamma_{kl})_{,r}\gamma^{ki}\gamma^{lj} - (D-2)(\ln p)_{,r}^2 \\ &= \frac{1}{4}\gamma_{ij,r}\gamma_{kl,r}\gamma^{ki}\gamma^{lj} + \frac{1}{4}\underbrace{p^4(p^{-2})_{,r}^2}_{=\left(\frac{(p^{-2})_{,r}}{p^{-2}}\right)^2}\underbrace{\gamma_{ij}\gamma^{ki}}_{=\delta_j^k}\underbrace{\gamma_{kl}\gamma^{lj}}_{=\delta_k^j} \\ &\quad + \frac{1}{4}p^2(p^{-2})_{,r}\underbrace{\gamma_{kl}\gamma^{ki}}_{=\delta_l^i}\gamma^{lj}\gamma_{ij,r} + \frac{1}{4}p^2(p^{-2})_{,r}\underbrace{\gamma_{ij}\gamma^{ki}}_{=\delta_j^k}\gamma^{lj}\gamma_{kl,r} \\ &\quad - (D-2)(\ln p)_{,r}^2 \\ &= \frac{1}{4}\gamma_{ij,r}\gamma_{kl,r}\gamma^{ki}\gamma^{lj} + \frac{1}{4}(\ln p^{-2})_{,r}^2(D-2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\ln p^{-2})_{,r}\underbrace{\gamma^{ij}\gamma_{ij,r}}_{=0(2.37)} + \frac{1}{4}(\ln p^{-2})_{,r}\underbrace{\gamma^{kl}\gamma_{kl,r}}_{=0(2.37)} \\ &\quad - (D-2)(\ln p)_{,r}^2 \\ &= \frac{1}{4}\gamma_{ij,r}\gamma_{kl,r}\gamma^{ki}\gamma^{lj} \\ &\quad + \underbrace{(D-2)(\ln p)_{,r}^2 - (D-2)(\ln p)_{,r}^2}_{=0} \\ &= \frac{1}{4}\gamma_{ij,r}\gamma_{kl,r}\gamma^{ki}\gamma^{lj} \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3 Riemannův tenzor a jeho kontrakce

V první sekci této kapitoly jsme si ukázali obecný tvar metriky povolující existenci nulové foliace (2.12). Pro vypočítání složek Christoffelových symbolů této metriky uijeme standardní definice

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\nu}(g_{\mu,\nu} + g_{\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\nu}) , \quad (2.40)$$

a užitečných vztahů 2.11. Tím, lze explicitně vyjádřit jejich složky viz [16].

Takto získané složky odpovídají Christoffelovým symbolům na celém prostoru. Nyní se zaměříme jen na příčný prostor kolmý na souřadnice u a r . Indexy odpovídající prostorovým souřadnicím budeme značit písmeny latinské abecedy. Pro příčnou metriku g_{ij} zavedeme Christoffelovy symboly obdobně

$${}^S\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{ij}(g_{jk,l} + g_{jl,k} - g_{kl,j}) \quad (2.41)$$

a pomocí nich zavedeme kovariantní derivaci na příčném prostoru jako

$$g_{up||q} = g_{up,q} - g_{um} {}^S\Gamma_{pq}^m . \quad (2.42)$$

Tato derivace se chová netriviálně jen pro složky metriky popsané jedním prostorovým indexem a druhým pomocí u nebo r . Na takovéto složky působí derivace jen jako na 1-formu vzhledem k prostorové souřadnici. Složky metriky popsané jen prostorovými indexy musí být s kovariantní derivací takzvaně kompatibilní $g_{pq||m} = 0$ a na složky popsané jen indexy u a r působí derivace jako na skalár.

Pro vyjádření složek Riemannova tenzoru též uijeme standardní definice

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \Gamma^\lambda_{\mu\kappa,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\kappa} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} \quad (2.43)$$

a snížením prvního indexu dostáváme $R_{\alpha\mu\nu\kappa} = g_{\alpha\lambda}R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$. Pomocí složek Christoffelových symbolů vyjádříme složky Riemannova tenzoru. A následně, kontrakcemi Riemannova tenzoru, vyjádříme Ricciho tenzor a Ricciho skalár. To lze provést přímo, jako již bylo provedeno v článku [16] a rovnice jsou uvedeny v *Příloze*.

Pro účely dalšího použití těchto rovnic je uvedeme do vhodnějšího tvaru. Všechny derivace podle prostorových souřadnic nahradíme kovariantní derivací na příčném prostoru a následně přesuneme derivace podle r co nejvíce před výrazy v rovnicích.

Pro usnadnění počítání si nejprve odvodíme užitečné vztahy pro práci s kovariantní derivací na příčném prostoru. Konkrétně

$$g_{up,r||q} = g_{up,rq} - g_{um,r} S\Gamma_{pq}^m, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} g_{up||q,r} &= g_{up,qr} - \left(g_{um} S\Gamma_{pq}^m\right),r = g_{up,qr} - g_{um,r} S\Gamma_{pq}^m - g_{um} S\Gamma_{pq,r}^m \\ &= g_{up,r||q} - g_{um} S\Gamma_{pq,r}^m, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} g_{u[p,r||q]} &= \frac{1}{2}g_{up,r||q} - \frac{1}{2}g_{uq,r||p} \\ &= \frac{1}{2}g_{up||q,r} - \frac{1}{2}g_{uq||p,r} - \underbrace{\frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{pq,r}^m + \frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{qp,r}^m}_{=0} \\ &= g_{u[p||q],r}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} g_{p[m,u||q]} &= \frac{1}{2}g_{pm,u||q} - \frac{1}{2}g_{pq,u||m} \\ &= \frac{1}{2}g_{pm,uq} - \frac{1}{2}g_{pq,um} + \frac{1}{2}g_{kq,u} S\Gamma_{pm}^k - \frac{1}{2}g_{km,u} S\Gamma_{pq}^k \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}g_{pk,u} S\Gamma_{mq}^k + \frac{1}{2}g_{pk,u} S\Gamma_{mq}^k}_{=0} \\ &= g_{p[m,q],u} + \frac{1}{2} \left(g_{kq,u} S\Gamma_{pm}^k - g_{km,u} S\Gamma_{pq}^k \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} (2g_{u[j||p]} + g_{jp,u}) &= g_{uj,p} - g_{up,j} + g_{jp,u} - \underbrace{g_{um} S\Gamma_{jp}^m + g_{um} S\Gamma_{pj}^m}_{=0} \\ &= (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} g_{u[p||q]} &= \frac{1}{2}g_{up,q} - \frac{1}{2}g_{uq,p} - \underbrace{\frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{pq}^m + \frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{qp}^m}_{=0} \\ &= g_{u[p,q]}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} g_{u(p||q)} &= \frac{1}{2}g_{up,q} + \frac{1}{2}g_{uq,p} - \frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{pq}^m - \frac{1}{2}g_{um} S\Gamma_{qp}^m \\ &= g_{u(p,q)} - g_{um} S\Gamma_{pq}^m, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
g_{u[q,m]||p} &= \frac{1}{2}g_{uq,m||p} - \frac{1}{2}g_{um,q||p} \\
&= \frac{1}{2}g_{uq,mp} - \frac{1}{2}g_{um,qp} - \frac{1}{2}g_{uk,m} \text{S}\Gamma_{qp}^k - \frac{1}{2}g_{uq,k} \text{S}\Gamma_{mp}^k \\
&\quad + \frac{1}{2}g_{uk,q} \text{S}\Gamma_{mp}^k + \frac{1}{2}g_{um,k} \text{S}\Gamma_{qp}^k \\
&= g_{u[q,m],p} - g_{u[k,m]} \text{S}\Gamma_{qp}^k - g_{u[q,k]} \text{S}\Gamma_{mp}^k , \tag{2.51}
\end{aligned}$$

$$g_{uu||p||q} = g_{uu,p||q} = g_{uu,pq} - g_{uu,m} \text{S}\Gamma_{pq}^m . \tag{2.52}$$

Užitím těchto netriviálních vztahů lze rovnice z článku [16], které v jejich původním tvaru uvádíme v *Příloze*, upravit do následující o poznání kompaktnější podoby.

Pro složky Riemannova tenzoru křivosti takto dostáváme

$$R_{rprq} = -\frac{1}{2}g_{pq,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ip,r}g_{jq,r} , \tag{2.53}$$

$$R_{rpru} = -\frac{1}{2}g_{up,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ip,r}g_{uj,r} , \tag{2.54}$$

$$R_{ruru} = -\frac{1}{2}g_{uu,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ui,r}g_{uj,r} , \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
R_{rpkq} &= g_{p[k,r]||q} + \frac{1}{4}(g_{pk,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uk,r}) \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{ri}(g_{pk,r}g_{iq,r} - g_{pq,r}g_{ik,r}) \tag{2.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rpuq} &= \frac{1}{2}g_{up,r||q} - \frac{1}{2}g_{pq,ur} + \frac{1}{4}(g_{up,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uu,r}) \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{ri}(g_{up,r}g_{iq,r} - g_{pq,r}g_{ui,r}) + \frac{1}{4}g^{ij}g_{iq,r}(2g_{u[j]||p} + g_{jp,u}) , \tag{2.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rupq} &= g_{u[p]||q,r} - \frac{1}{4}g^{ri}(g_{up,r}g_{iq,r} - g_{uq,r}g_{ip,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij}[g_{iq,r}(2g_{u[j]||p} + g_{jp,u}) - g_{ip,r}(2g_{u[j]||q} + g_{jq,u})] , \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ruup} &= \frac{1}{2}g_{uu||p,r} - \frac{1}{2}g_{up,ur} - \frac{1}{4}g^{ri}(g_{uu,r}g_{ip,r} - g_{up,r}g_{ui,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij}[g_{ip,r}(2g_{uj,u} - g_{uu||j}) - g_{ui,r}(2g_{u[j]||p} + g_{jp,u})] , \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{kplq} &= {}^S R_{kplq} + \frac{1}{4}g^{rr}(g_{kq,r}g_{pl,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{4}g_{kl,r}[g_{pq,u} - 2g_{u(p||q)}] \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{pq,r}[g_{kl,u} - 2g_{u(k||l)}] - \frac{1}{4}g_{kq,r}[g_{pl,u} - 2g_{u(p||l)}] \\
&\quad - \frac{1}{4}g_{pl,r}[g_{kq,u} - 2g_{u(k||q)}] , \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{upkq} &= g_{p[k,u||q]} - g_{u[k,q||p]} + \frac{1}{4}g^{rr} (g_{uq,r}g_{pk,r} - g_{uk,r}g_{pq,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4} (g_{uu,q}g_{pk,r} - g_{uu,k}g_{pq,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[g_{uk,r} (g_{pq,u} - 2g_{u(p||q)}) - g_{uq,r} (g_{pk,u} - 2g_{u(p||k)}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ri} \left[g_{pq,r}(2g_{u[i||k]} + g_{ik,u}) - g_{pk,r}(2g_{u[i||q]} + g_{iq,u}) \right] , \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{upuq} &= g_{u(p,u||q)} - \frac{1}{2} (g_{pq,uu} + g_{uu||p||q}) + \frac{1}{4}g^{rr} (g_{up,r}g_{uq,r} - g_{uu,r}g_{pq,r}) \\
&\quad - \frac{1}{4}g_{uu,r} \left[2g_{u(p||q)} - g_{pq,u} \right] - \frac{1}{4}g_{pq,r} \left[g_{uu,u} - g^{ri} (2g_{ui,u} - g_{uu||i}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{up,r} \left[g_{uu||q} - g^{ri} (2g_{u[i||q]} + g_{iq,u}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{uq,r} \left[g_{uu||p} - g^{ri} (2g_{u[i||p]} + g_{ip,u}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} (2g_{u[j||p]} + g_{jp,u}) (2g_{u[i||q]} + g_{iq,u}) , \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Ricciho tenzor, který vstoupí do Einsteinových rovnic gravitačního pole, je

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}g^{pq}g_{pq,rr} + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij}g_{ip,r}g_{jq,r} , \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}
R_{ru} &= -\frac{1}{2}g_{uu,rr} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ui,rr} + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r||q} - \frac{1}{2}g^{pq}g_{pq,ur} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r} (g_{uq,r} - g^{ri}g_{iq,r}) - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r} (g_{uu,r} - g^{ri}g_{ui,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij}g_{iq,r}(2g_{u[j||p]} + g_{jp,u}) , \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rk} &= -\frac{1}{2}g_{uk,rr} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ik,rr} + g^{pq}g_{p[k,r||q]} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{pq}g_{pk,r} (g_{uq,r} - g^{ri}g_{iq,r}) - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r} (g_{uk,r} - g^{ri}g_{ik,r}) , \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{uu} &= -\frac{1}{2}g^{rr}g_{uu,rr} - g^{ri}g_{uu||i,r} + g^{ri}g_{ui,ur} + \frac{1}{2}g^{pq} (2g_{up,u||q} - g_{pq,uu} - g_{uu||p||q}) \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{rp}g^{rq} (g_{uu,r}g_{pq,r} - g_{up,r}g_{uq,r}) + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq} (2g_{up,r}g_{uq,r} - g_{uu,r}g_{pq,r}) \\
&\quad - \frac{1}{2}g^{pq}g^{ri} \left[g_{ip,r}(2g_{uq,u} - g_{uu||q}) - g_{up,r}(2g_{u[q||i]} + g_{qi,u}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{pq}g_{uu,r} \left[2g_{up||q} - g_{pq,u} \right] + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r} \left[g_{uu,q} - g^{ri} (2g_{u[i||q]} + g_{iq,u}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r} \left[g_{uu,u} - g^{ri} (2g_{ui,u} - g_{uu,i}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij} (2g_{u[j||p]} + g_{jp,u}) (2g_{u[i||q]} + g_{iq,u}) , \quad (2.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{uk} = & -\frac{1}{2}g^{rr}g_{uk,rr} - \frac{1}{2}g_{uu||k,r} + \frac{1}{2}g_{uk,ur} + g^{ri}(g_{u[i,r||k]} - \frac{1}{2}g_{uk,r||i} + \frac{1}{2}g_{ki,ur}) \\
& + g^{pq}(g_{p[k,u||q]} - g_{u[k,q]||p}) + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq}(2g_{pk,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uk,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{ri}(g_{uu,r}g_{ik,r} - g_{uk,r}g_{ui,r}) + \frac{1}{2}g^{rp}g^{rq}(g_{uk,r}g_{pq,r} - g_{kp,r}g_{uq,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{pq}g^{ri} \left[2g_{pk,r}g_{u[q||i]} - g_{ip,r}(2g_{u[q||k]} + g_{qk,u}) \right] + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ri}g_{pq,r}(2g_{u[i||k]} + g_{ik,u}) \\
& + \frac{1}{4}g^{pq} \left[2g_{pk,r}g_{uu||q} + 2g_{pk,r}g_{uq,u} + 2g_{up,r}g_{uq||k} - g_{uk,r}(2g_{up||q} - g_{pq,u}) \right] \\
& - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r}g_{uu||k} , \tag{2.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{pq} = & {}^S R_{pq} - \frac{1}{2}g^{rr}g_{pq,rr} + g_{pq,ur} - g_{u(p,r||q)} + g^{ri}(g_{i(p,r||q)} - g_{pq,r||i}) \\
& + \frac{1}{4}g^{rr}g^{kl}(2g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{2}(g_{pq,r}g_{uu,r} - g_{up,r}g_{uq,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{ri}(g_{up,r}g_{iq,r} + g_{uq,r}g_{ip,r} - 2g_{pq,r}g_{ui,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{rk}g^{rl}(g_{pq,r}g_{kl,r} - g_{pk,r}g_{ql,r}) - \frac{1}{4}g^{kl}g_{kl,r} \left[2g_{u(p||q)} - g_{pq,u} \right] \\
& - \frac{1}{4}g^{kl}g_{pq,r} \left[2g_{uk||l} - g_{kl,u} \right] - \frac{1}{2}g^{kl}g_{kq,r}(g_{pl,u} - g_{pu||l}) \\
& - \frac{1}{2}g^{kl}g_{kp,r}(g_{ql,u} - g_{qu||l}) . \tag{2.68}
\end{aligned}$$

A konečně Ricciho skalární křivost můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
R = & {}^S R + g_{uu,rr} + (g^{rp}g^{rq} - g^{pq}g^{rr})g_{pq,rr} - 2g^{ri}g_{ui,rr} \\
& + 2g^{pq}(g_{pq,ur} + g_{pu,r||q} + 2g^{ri}g_{p[i,r||q]}) - \frac{1}{2}g^{pq}(3g_{up,r}g_{uq,r} - 2g_{uu,r}g_{pq,r}) \\
& + g^{pq}g^{ri}(3g_{up,r}g_{iq,r} - 2g_{ui,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq}g^{kl}(3g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) \\
& - \frac{1}{2}g^{pq}g^{rk}g^{rl}(3g_{pl,r}g_{kq,r} - 2g_{pq,r}g_{kl,r}) \\
& - \frac{1}{2}g^{pq}g^{kl} \left[g_{kl,r}(2g_{up||q} - g_{pq,u}) + g_{kq,r}(3g_{pl,u} - 2g_{up||l}) \right] . \tag{2.69}
\end{aligned}$$

Tyto výrazy se pokusíme využít v následující kapitole k formulování Einsteinových rovnic gravitačního pole a přímém hledání Kerrovy metriky v netwistující parametrizaci.

3. Kerrův prostoročas v řeči netwistujících souřadnic

Již jsme prozkoumali tvar Kerrova řešení v několika souřadných systémech a také obecný tvar metriky povolující existenci netwistující nulové geodetické kongruence. Nyní bychom rádi zapsali Kerrovo řešení právě v řeči netwistujících souřadnic. Jinými slovy musíme určit obecné koeficienty (2.12) tak, aby se jednalo o Kerrovo řešení. Prozkoumáme několik metod, jak toho lze docílit.

3.1 Přechod od neafinní parametrizace

V článku [19], a dříve ještě v [20, 21], byl nalezen tvar metriky Kerrova řešení v řeči netwistujících souřadnic, avšak jen pro obecnější případ neafinních geodetik. Odvozený tvar metriky v souřadnicích $(\tilde{r}, u, \vartheta, \varphi)$ je následující

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2M\tilde{r}}{|\rho|^2}\right) \left(du - \frac{2a}{\cosh^2 X \cos \vartheta} d\vartheta\right) du \\
 & - 2 \left[\frac{|\rho|^2}{\sqrt{R}} - \frac{2a^2 M \tilde{r}}{|\rho|^2 \sqrt{R}} \left(1 - \frac{a^2}{P + \sqrt{R}}\right) \tanh^2 X \right] dud\tilde{r} \\
 & + \frac{4a}{|\rho|^2} M \tilde{r} \tanh^2 X dud\varphi - \frac{4a^2 M \tilde{r} \tanh^2 X}{|\rho|^2 \cosh^2 X \cos \vartheta} d\vartheta d\varphi \\
 & - \frac{\tilde{r}^4 + a^2 (2M\tilde{r} + \tilde{r}^2) \cosh^{-2} X}{|\rho|^2 \cosh^2 X \cos^2 \vartheta} d\vartheta^2 \\
 & - \frac{\tanh^2 X}{|\rho|^2} (a^2 \tilde{\Delta} \operatorname{sech}^2 X + R) d\varphi^2, \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

kde jednotlivé symboly označují

$$\begin{aligned}
 \rho &= \tilde{r} + ia \operatorname{sech} X = \tilde{r} + \frac{ia}{\cosh X}, \\
 \tilde{\Delta} &= a^2 + \tilde{r}^2 - 2M\tilde{r}, \\
 \tilde{r}_{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \\
 R &= \tilde{r}^4 + a^2 \tilde{r}^2 + 2a^2 M \tilde{r}, \\
 P &= a^2 + \tilde{r}^2 \\
 X &= \alpha(\tilde{r}) + \operatorname{arth} \sin \vartheta = \alpha(\tilde{r}) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta} \right), \\
 \alpha(\tilde{r}) &= \int_{\tilde{r}_+}^{\tilde{r}} \frac{a du}{\sqrt{u^4 + a^2 u^2 + 2a^2 M u}}. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

a konstanty M a a představují dva nezávislé parametry.

3.1.1 Neafinní parametrizace: obecný tvar

V kapitole 2 diskutovaná Rovnice (2.12) popisuje obecný tvar metriky povolující existenci netwistující nulové geodetické kongruence. To jsou velmi silné

požadavky a proto by nás zajímal případ, kdy snížíme nároky na vektorové pole $\mathbf{k} = \partial_r$ a připustíme i geodetiky, které nejsou afinní. Tím je myšleno, že normálu k tečnám zavedeme ještě s obecnou funkcí souřadnic $h(x^\mu)$ jako

$$k_\mu = -h u_{,\mu} = -h \delta_\mu^u, \quad (3.3)$$

a g^{ur} složka metriky (a g_{ur}) tak nebude jednoduše -1 , ale obecná funkce všech souřadnic. Tvar metriky pro neafinní parametrizaci lze najít souřadnicovou transformací

$$r = f(\tilde{r}, u, x), \quad (3.4)$$

kdy r bereme jako obecnou funkci souřadnic. Diferenciál r je tak ve tvaru

$$dr = \frac{\partial f}{\partial \tilde{r}} d\tilde{r} + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial x^p} dx^p. \quad (3.5)$$

Vložení do rovnice (2.12) tak dostáváme tvar metriky

$$\begin{aligned} ds^2 &= (g_{uu} - 2\frac{\partial f}{\partial u}) du^2 - 2\frac{\partial f}{\partial \tilde{r}} du d\tilde{r} + 2(g_{up} - \frac{\partial f}{\partial x^p}) du dx^p + g_{pq} dx^p dx^q \\ &= \tilde{g}_{uu} du^2 - 2\tilde{g}_{u\tilde{r}} du d\tilde{r} + 2\tilde{g}_{up} du dx^p + g_{pq} dx^p dx^q, \end{aligned} \quad (3.6)$$

který již odpovídá známému tvaru Kerrova prostoročasu (3.1).

3.1.2 Specifikace vhodné transformace souřadnic

Vyjdeme z obecného tvaru metriky pro neafinní geodetiky (3.6) a na příčném prostoru zavedeme souřadný systém popsany (ϑ, φ) . Metrika tedy nabývá tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{g}_{uu} du^2 - 2\tilde{g}_{u\tilde{r}} du d\tilde{r} + 2\tilde{g}_{u\vartheta} du d\vartheta + 2\tilde{g}_{u\varphi} du d\varphi + 2g_{\vartheta\varphi} d\vartheta d\varphi \\ &\quad + g_{\vartheta\vartheta} d\vartheta d\vartheta + g_{\varphi\varphi} d\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nenulové maticové elementy (3.1) vyjádříme explicitně a dáme je do rovnosti s obecnými koeficienty z (3.7)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{u\tilde{r}} &= \frac{\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}}{\sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}}} \\ &\quad - \frac{2a^2M\tilde{r} \tanh^2 X (\tilde{r}^2 + \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}})}{\left(\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}\right) \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}} (a^2 + \tilde{r}^2 + \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}})} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tilde{r}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\tilde{g}_{uu} = 1 - \frac{2M\tilde{r}}{|\rho|^2} = 1 - \frac{2M\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}} = g_{uu} - 2\frac{\partial f}{\partial u}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{g}_{u\vartheta} = - \left(1 - \frac{2M\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}}\right) \frac{a}{\cosh^2 X \cos \vartheta} = g_{u\vartheta} - \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{g}_{u\varphi} = \tanh^2 X \frac{2M\tilde{r}a}{\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}} = g_{u\varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (3.11)$$

$$g_{\vartheta\varphi} = - \frac{2M\tilde{r}a^2}{\cos \theta \left(\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}\right) \cosh^4 X}, \quad (3.12)$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = - \frac{\tilde{r}^4 + a^2(2M\tilde{r} + \tilde{r}^2)}{\cos^2 \vartheta \cosh^4 X \left(\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X} \right)}, \quad (3.13)$$

$$g_{\varphi\varphi} = - \frac{\tanh X^2}{\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X}} \left(\frac{a^2}{\cosh^2 X} (a^2 + \tilde{r}^2 - 2M\tilde{r}) + \tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r} \right). \quad (3.14)$$

Kerrův prostoročas v řeči netwistujících souřadnic pro afinní geodetiky bychom mohli získat vyřešením těchto rovnic. Po nalezení tvaru funkce f bychom mohli vyjádřit \tilde{r} dle definice (3.4) jako funkci $\tilde{r} = \tilde{r}(r, \vartheta, \varphi)$. Maticové elementy (2.12) bychom tak našli derivováním funkce f a následným dosazením za \tilde{r} .

Již při pokusu o výpočet prvního integrálu však narazíme na neřešitelný problém. Z první rovnice (3.14) dostáváme

$$\begin{aligned} f + w(u, \vartheta, \varphi) = & \int \frac{\tilde{r}^2 d\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}}} + \int \frac{a^2 d\tilde{r}}{\cosh^2 X \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}}} \\ & - \int \frac{2a^2M\tilde{r} \tanh^2 X (\tilde{r}^2 + \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}}) d\tilde{r}}{\left(\tilde{r}^2 + \frac{a^2}{\cosh^2 X} \right) \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}} (a^2 + \tilde{r}^2 + \sqrt{\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + 2a^2M\tilde{r}})}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pokud dosadíme za definici X z (3.2), tedy

$$X = \int_{\tilde{r}_+}^{\tilde{r}} \frac{a du}{\sqrt{u^4 + a^2u^2 + 2a^2Mu}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta} \right), \quad (3.16)$$

tak vidíme, že výpočet integrálů by byl značně obtížný. Zarazit nás však může již první, jednoduše vypadající, integrál z (3.15), který nemá analytické řešení. Touto cestou tak můžeme dospět k požadovanému výsledku, ale například numericky. Pokud chceme analytické řešení, musíme zvolit jinou cestu.

3.2 Přechod od obecné netwistující geometrie

Druhý způsob jak nalézt Kerrovo řešení v řeči netwistující geometrie s afinně parametrizovanými geodetikami je použít obecné vyjádření složek Ricciho tenzoru a skaláru pro metriku povolující existenci netwistující geodetické kongruence z minulé kapitoly. Vidíme, že žádný metrický koeficient metriky v neafinním tvaru neobsahuje u . Do afinního tvaru metriky se může u dostat jen skrze derivace funkce f . Jelikož však hledáme Kerrovo řešení, tak chceme, aby byla metrika stacionární a proto budeme pokračovat za předpokladu

$$g_{\mu\nu,u} = 0. \quad (3.17)$$

Díky tomu nabývají složky Ricciho tenzoru tvaru

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}g^{pq}g_{pq,rr} + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij}g_{ip,r}g_{jq,r} , \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} R_{ru} = & -\frac{1}{2}g_{uu,rr} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ui,rr} + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r||q} \\ & + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r} (g_{uq,r} - g^{ri}g_{iq,r}) - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r} (g_{uu,r} - g^{ri}g_{ui,r}) \\ & + \frac{1}{2}g^{pq}g^{ij}g_{iq,r}g_{u[j||p]} , \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} R_{rk} = & -\frac{1}{2}g_{uk,rr} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ik,rr} + g^{pq}g_{p[k,r||q]} \\ & + \frac{1}{2}g^{pq}g_{pk,r} (g_{uq,r} - g^{ri}g_{iq,r}) - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r} (g_{uk,r} - g^{ri}g_{ik,r}) , \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} R_{uu} = & -\frac{1}{2}g^{rr}g_{uu,rr} - g^{ri}g_{uu||i,r} - \frac{1}{2}g^{pq}g_{uu||p||q} + \frac{1}{2}g^{rp}g^{rq} (g_{uu,r}g_{pq,r} - g_{up,r}g_{uq,r}) \\ & + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq} (2g_{up,r}g_{uq,r} - g_{uu,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{2}g^{pq}g^{ri} (g_{ip,r}g_{uu||q} + 2g_{up,r}g_{u[q||i]}) \\ & - \frac{1}{2}g^{pq}g_{uu,r}g_{up||q} + \frac{1}{2}g^{pq}g_{up,r} (g_{uu,q} - 2g^{ri}g_{u[i||q]}) - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r}g^{ri}g_{uu,i} \\ & + g^{pq}g^{ij}g_{u[j||p]}g_{u[i||q]} , \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} R_{uk} = & -\frac{1}{2}g^{rr}g_{uk,rr} - \frac{1}{2}g_{uu||k,r} + g^{ri}(g_{u[i,r||k]} - \frac{1}{2}g_{uk,r||i}) - g^{pq}(g_{u[k,q||p]}) \\ & + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq} (2g_{pk,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uk,r}) + \frac{1}{2}g^{ri}(g_{uu,r}g_{ik,r} - g_{uk,r}g_{ui,r}) \\ & + \frac{1}{2}g^{rp}g^{rq} (g_{uk,r}g_{pq,r} - g_{kp,r}g_{uq,r}) + g^{pq}g^{ri} (g_{pk,r}g_{u[q||i]} - g_{ip,r}g_{u[q||k]}) \\ & + \frac{1}{2}g^{pq}g^{ri}g_{pq,r}g_{u[i||k]} + \frac{1}{2}g^{pq} (g_{pk,r}g_{uu||q} + g_{up,r}g_{uq||k} - g_{uk,r}g_{up||q}) \\ & - \frac{1}{4}g^{pq}g_{pq,r}g_{uu||k} , \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} R_{pq} = & {}^S R_{pq} - \frac{1}{2}g^{rr}g_{pq,rr} - g_{u(p,r||q)} + g^{ri}(g_{i(p,r||q)} - g_{pq,r||i}) \\ & + \frac{1}{4}g^{rr}g^{kl} (2g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{2} (g_{pq,r}g_{uu,r} - g_{up,r}g_{uq,r}) \\ & + \frac{1}{2}g^{ri} (g_{up,r}g_{iq,r} + g_{uq,r}g_{ip,r} - 2g_{pq,r}g_{ui,r}) + \frac{1}{2}g^{rk}g^{rl} (g_{pq,r}g_{kl,r} - g_{pk,r}g_{ql,r}) \\ & - \frac{1}{2}g^{kl} (g_{kl,r}g_{u(p||q)} + g_{pq,r}g_{uk||l} - g_{kq,r}g_{pu||l} - g_{kp,r}g_{qu||l}) . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pro Ricciho skalár pak dostáváme

$$\begin{aligned} R = & {}^S R + g_{uu,rr} + (g^{rp}g^{rq} - g^{pq}g^{rr})g_{pq,rr} - 2g^{ri}g_{ui,rr} + 2g^{pq}(g_{pu,r||q} + 2g^{ri}g_{p[i,r||q]}) \\ & - \frac{1}{2}g^{pq} (3g_{up,r}g_{uq,r} - 2g_{uu,r}g_{pq,r}) + g^{pq}g^{ri} (3g_{up,r}g_{iq,r} - 2g_{ui,r}g_{pq,r}) \\ & + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq}g^{kl} (3g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) - \frac{1}{2}g^{pq}g^{rk}g^{rl} (3g_{pl,r}g_{kq,r} - 2g_{pq,r}g_{kl,r}) \\ & - g^{pq}g^{kl} (g_{kl,r}g_{up||q} - g_{kq,r}g_{up||l}) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Zabýváme se zde vakuovým řešením Einsteinových rovnic (1) bez kosmologické konstanty, které tedy nabývají tvaru

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.25)$$

Kontrakcí této rovnice získáváme podmínku na nulovost Ricciho skaláru a tedy, zpětným dosazením do rovnice, také podmínku na nulovost Ricciho tenzoru

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{a} \quad R = 0 . \quad (3.26)$$

Aby se tedy mohlo jednat o Kerrovo řešení, tak musí být splněny rovnice (3.26). Podívejme se nejprve na rovnici $R_{rr} = 0$ a přepišme ji pomocí optických skalárů. K tomu se nám bude hodit následující identita

$$\begin{aligned} g^{pq}{}_{,r}g_{pq,r} &= (g^{pi}g^{qj}g_{ij})_{,r}g_{pq,r} = g^{pi}g^{qj}g_{ij,r}g_{pq,r} + \underbrace{g^{pi}g_{ij}}_{=\delta_j^p}g^{qj}{}_{,r}g_{pq,r} + \underbrace{g^{qj}g_{ij}}_{=\delta_i^q}g^{pi}{}_{,r}g_{pq,r} \\ &= g^{pi}g^{qj}g_{ij,r}g_{pq,r} + g^{pq}{}_{,r}g_{pq,r} + g^{pq}{}_{,r}g_{pq,r} , \end{aligned} \quad (3.27)$$

z čehož plyne

$$g^{pq}{}_{,r}g_{pq,r} = -g^{pi}g^{qj}g_{ij,r}g_{pq,r} \stackrel{(2.31)}{=} -4\sigma^2 - 4(D-2)\Theta^2 . \quad (3.28)$$

Složka R_{rr} lze tak přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{1}{2}g^{pq}g_{pq,rr} + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij}g_{ip,r}g_{jq,r} \\ &= -\frac{1}{2}(g^{pq}g_{pq,r})_{,r} + \frac{1}{2}g^{pq}{}_{,r}g_{pq,r} + \sigma^2 + (D-2)\Theta^2 \\ &\stackrel{(3.28)}{=} -\frac{1}{2}(g^{pq}g_{pq,r})_{,r} - \sigma^2 - (D-2)\Theta^2 \\ &= -\frac{1}{2}(2(2-D)(\ln p)_{,r})_{,r} - \sigma^2 - (D-2)\Theta^2 \\ &\stackrel{(2.38)}{=} - (D-2)\Theta_{,r} - \sigma^2 - (D-2)\Theta^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde jsme v třetí rovnosti využili (2.29) a (2.36). Rovnice $R_{rr} = 0$ nám tedy dává podmínku svazující expanzi a shear výsledného prostoročasu

$$(D-2)(\Theta^2 + \Theta_{,r}) + \sigma^2 = 0 \quad (3.30)$$

Tento výsledek lze také dostat z obecné Sachsovi rovnice, která plyne z definice Riemannova tenzoru aplikovaného na libovolný geodetický nulový vektor k^α s afiním parametrem [22].

Již z této rovnice je zřejmá kvalitativní odlišnost a vyšší početní komplikovanost obecného netwistujícího problému oproti Robinsonově–Trautmanově a Kundtově třídě netwistujících, bezshearových a (ne)expandujících geometrií. Nulový shear totiž neumožňuje z této podmínky přímo určit závislost expanze, potažmo celé příčné metriky g_{pq} , na souřadnici r . Tato skutečnost je klíčová pro určení r -závislosti i zbývajících metrických funkcí, tedy g_{up} a g_{uu} , a následného zjednodušení dalších podmínek plynoucích Einsteinovy teorie.

V tomto kroku by tedy bylo vhodné doplnit sadu rovnic pole, omezenou tvarem netwistující metriky spolu s (3.17), o dodatečné podmínky Kerrovosti prostoročasu plynoucí například z invariantů uvedených na konci první kapitoly. Můžeme doufat, že právě tyto podmínky přinesou další vazbu mezi shearem a expanzí nulové kongruence $\mathbf{k} = \partial_r$ a umožní tak zafixovat jejich závislost na souřadnici r .

Následně je možné z komponenty rk rovnic pole, viz (3.20), určit tvar mimo-diagonálních metrických členů g_{up} . Poté lze využít vztahu (3.20), tj. ru -rovnice, k dospecifikování funkce g_{uu} . Alespoň formálně lze omezení plynoucí z těchto ještě relativně jednoduchých rovnic použít již v předchozím kroku při konstrukci Kerrových invariantů. I přes přípravné výpočty zůstává finální realizace tohoto programu z důvodu časový omezení této práce nedokončena.

Závěr

V rešeršní části této práce jsme shrnuli základní vlastnosti Kerrova černoděrového řešení v několika standardních souřadných systémech. Díky tomu jsme se dozvěděli, jaké vlastnosti musí prostoročas splňovat, aby se jednalo právě o Kerrův prostoročas. Seznámili jsme se se strukturou horizontů a singularit této rovnoměrně rotující axiálně symetrické černé díry. Rovněž jsme popsali některé z možností její invariantní identifikace.

Ve druhé kapitole jsme zrekapitulovali konstrukci prostoročasu adaptovanou na nulovou foliaci. Ve stejné kapitole byl také zaveden formalismus optických skalárů, pomocí kterých bylo ukázáno, že je geometrie popsána obecným tvarem metriky s nulovou foliací netwistující a že jsme tak ve skutečnosti našli tvar metriky dovolující existenci netwistující afinně parametrizované nulové geodetické kongruence. Následně jsme pro tento obecný tvar metriky přepsali známé (viz *Příloha*) explicitní vyjádření Riemannova a Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru do nového geometričtějšího tvaru pomocí kovariantní derivace na příčném prostoru pro jejich výrazně kompaktnější a přehledný zápis.

V závěrečné kapitole jsou popsány dvě z jistě více možných cest jak parametrizovat Kerrovo řešení právě v řeči nulové foliace adaptovanou na afinní geodetickou kongruenci. První cestou, kterou je odvození afinního tvaru z již známého neafinního tvaru Kerrova řešení v řeči netwistujících souřadnic, jsme se nevydali vzhledem ke složitosti integrálních rovnic určujících nový afinní parametr. Je to však jedna z možných cest, která by se jistě dala využít pro numerické řešení. Druhý postup spočíval v úpravě složek Ricciho tenzoru a skaláru pro obecnou metriku s nulovou foliací. Jelikož hledáme vakuové řešení Einsteinových rovnic s nulovou kosmologickou konstantou, tak dostáváme podmínku na nulovost složek Ricciho tenzoru a jako jejich důsledek i Ricciho skaláru. Nejprve jsme složky přepsali s podmínkou na stacionaritu řešení. Následně jsme první složku přepsali v řeči optických skalárů a díky podmínce na nulovost této složky dostáváme vztah mezi expanzí a shearem, který lze rovněž odvodit ze známé Sachsovi rovnice. Tímto způsobem by se dalo postupovat dále při úpravě dalších složek, což se však bohužel ukázalo příliš ambiciózní a přesahující časové možnosti této práce.

Za netriviální výsledek této práce lze tedy považovat ucelenou formulaci problému v jednotné notaci a poskytnutí všech nezbytných ingrediencí k dalším pokusům o jeho řešení. Otázka výsledného úspěchu či neúspěchu námi zvoleného postupu však vzhledem ke značné početní náročnosti, kterou je evidentně možné očekávat, zůstává otevřená.

A. Příloha: Tenzory křivosti pro netwistující geometrie

V článku [16] byly pro obecnou metriku povolující existenci nulové geodetické kongruence (2.12) odvozeny tvary příslušných Christoffelových symbolů, Riemannova tenzoru, Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru.

Christoffelovy symboly

Christoffelovy symboly mají pro obecnou netwistující foliaci složky ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^r &= 0, & \Gamma_{ru}^r &= -\frac{1}{2}g_{uu,r} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ui,r}, & \Gamma_{rj}^r &= -\frac{1}{2}g_{uj,r} + \frac{1}{2}g^{ri}g_{ij,r}, \\
 \Gamma_{uu}^r &= \frac{1}{2} \left[-g^{rr}g_{uu,r} - g_{uu,u} + g^{ri}(2g_{ui,u} - g_{uu,i}) \right], \\
 \Gamma_{uj}^r &= \frac{1}{2} \left[-g^{rr}g_{uj,r} - g_{uu,j} + g^{ri}(2g_{i(u,j)} - g_{uj,i}) \right], \\
 \Gamma_{jk}^r &= \frac{1}{2} \left[-g^{rr}g_{jk,r} - 2g_{u(j,k)} + g_{jk,u} + g^{ri}(2g_{i(j,k)} - g_{jk,i}) \right], \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^u &= 0, & \Gamma_{ru}^u &= 0, & \Gamma_{ri}^u &= 0, \\
 \Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{2}g_{uu,r}, & \Gamma_{ui}^u &= \frac{1}{2}g_{ui,r}, & \Gamma_{ij}^u &= \frac{1}{2}g_{ij,r}, \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^i &= 0, & \Gamma_{ru}^i &= \frac{1}{2}g^{ij}g_{uj,r}, & \Gamma_{rk}^i &= \frac{1}{2}g^{ij}g_{jk,r}, \\
 \Gamma_{uu}^i &= \frac{1}{2} \left[-g^{ri}g_{uu,r} + g^{ij}(2g_{uj,u} - g_{uu,j}) \right], \\
 \Gamma_{uk}^i &= \frac{1}{2} \left[-g^{ri}g_{uk,r} + g^{ij}(2g_{j(u,k)} - g_{uk,j}) \right], \\
 \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2} \left[-g^{ri}g_{kl,r} + g^{ij}(2g_{j(k,l)} - g_{kl,j}) \right], \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Riemannův tenzor

Použitím definice (2.43) a vztahu $R_{abcd} = g_{ae}R^e_{bcd}$ z nich získáváme složky Riemannova tenzoru ve tvaru

$$R_{rprq} = -\frac{1}{2}g_{pq,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ip,r}g_{jq,r}, \tag{A.4}$$

$$R_{rpru} = -\frac{1}{2}g_{up,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ip,r}g_{uj,r}, \tag{A.5}$$

$$R_{ruru} = -\frac{1}{2}g_{uu,rr} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ui,r}g_{uj,r}, \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
R_{rpkq} &= g_{p[k,q],r} + \frac{1}{4} (g_{pk,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uk,r}) - \frac{1}{4}g^{ri} (g_{pk,r}g_{iq,r} - g_{pq,r}g_{ik,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} \left[g_{iq,r} (2g_{j(p,k)} - g_{pk,j}) - g_{ik,r} (2g_{j(p,q)} - g_{pq,j}) \right] , \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rpuq} &= g_{p[u,q],r} + \frac{1}{4} (g_{up,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uu,r}) - \frac{1}{4}g^{ri} (g_{up,r}g_{iq,r} - g_{pq,r}g_{ui,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} \left[g_{iq,r} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) - g_{ui,r} (2g_{j(p,q)} - g_{pq,j}) \right] , \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rupq} &= g_{u[p,q],r} - \frac{1}{4}g^{ri} (g_{up,r}g_{iq,r} - g_{uq,r}g_{ip,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} \left[g_{iq,r} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) - g_{ip,r} (2g_{j(u,q)} - g_{uq,j}) \right] , \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ruup} &= g_{u[u,p],r} - \frac{1}{4}g^{ri} (g_{uu,r}g_{ip,r} - g_{up,r}g_{ui,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} \left[g_{ip,r} (2g_{u,j} - g_{uu,j}) - g_{ui,r} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) \right] , \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{kplq} &= {}^S R_{kplq} + \frac{1}{4}g^{rr} (g_{kq,r}g_{pl,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{kl,r} \left[g_{pq,u} - 2g_{u(p,q)} + g^{ri} (2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{pq,r} \left[g_{kl,u} - 2g_{u(k,l)} + g^{ri} (2g_{i(k,l)} - g_{kl,i}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}g_{kq,r} \left[g_{pl,u} - 2g_{u(p,l)} + g^{ri} (2g_{i(p,l)} - g_{pl,i}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}g_{pl,r} \left[g_{kq,u} - 2g_{u(k,q)} + g^{ri} (2g_{i(k,q)} - g_{kq,i}) \right] , \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{upkq} &= g_{p[k,q],u} - g_{u[k,q],p} + \frac{1}{4}g^{rr} (g_{uq,r}g_{pk,r} - g_{uk,r}g_{pq,r}) + \frac{1}{4} (g_{uu,q}g_{pk,r} - g_{uu,k}g_{pq,r}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[g_{uk,r} (g_{pq,u} - 2g_{u(p,q)}) - g_{uq,r} (g_{pk,u} - 2g_{u(p,k)}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ri} \left[g_{uk,r} (2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) - g_{pk,r} (2g_{i(u,q)} - g_{uq,i}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{ri} \left[g_{uq,r} (2g_{i(p,k)} - g_{pk,i}) - g_{pq,r} (2g_{i(u,k)} - g_{uk,i}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}g^{ij} (2g_{j(u,q)} - g_{uq,j}) (2g_{i(p,k)} - g_{pk,i}) \\
&\quad - \frac{1}{4}g^{ij} (2g_{j(u,k)} - g_{uk,j}) (2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) , \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{upuq} = & g_{u(p,q),u} - \frac{1}{2} (g_{pq,uu} + g_{uu,pq}) + \frac{1}{4} g^{rr} (g_{up,r} g_{uq,r} - g_{uu,r} g_{pq,r}) \\
& - \frac{1}{4} g_{uu,r} [2g_{u(p,q)} - g_{pq,u} - g^{ri} (2g_{i(p,q)} - g_{pq,i})] \\
& - \frac{1}{4} g_{pq,r} [g_{uu,u} - g^{ri} (2g_{ui,u} - g_{uu,i})] \\
& + \frac{1}{4} g_{up,r} [g_{uu,q} - g^{ri} (2g_{i(u,q)} - g_{uq,i})] \\
& + \frac{1}{4} g_{uq,r} [g_{uu,p} - g^{ri} (2g_{i(u,p)} - g_{up,i})] \\
& + \frac{1}{4} g^{ij} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) (2g_{i(u,q)} - g_{uq,i}) \\
& - \frac{1}{4} g^{ij} (2g_{uj,u} - g_{uu,j}) (2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) , \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Ricciho tenzor

Ricciho tenzor získáme kontrakcí $R_{ab} = g^{cd} R_{cadb} = R^c_{acb}$ a složky mají následující tvar

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} g^{pq} g_{pq,rr} + \frac{1}{4} g^{pq} g^{ij} g_{ip,r} g_{jq,r} , \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
R_{ru} = & -\frac{1}{2} g_{uu,rr} + \frac{1}{2} g^{ri} g_{ui,rr} + g^{pq} g_{p[u,q],r} \\
& + \frac{1}{2} g^{pq} g_{up,r} (g_{uq,r} - g^{ri} g_{iq,r}) - \frac{1}{4} g^{pq} g_{pq,r} (g_{uu,r} - g^{ri} g_{ui,r}) \\
& + \frac{1}{4} g^{pq} g^{ij} [g_{iq,r} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) - g_{ui,r} (2g_{jp,q} - g_{pq,j})] , \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rk} = & -\frac{1}{2} g_{uk,rr} + \frac{1}{2} g^{ri} g_{ik,rr} + g^{pq} g_{p[k,q],r} \\
& + \frac{1}{2} g^{pq} g_{pk,r} (g_{uq,r} - g^{ri} g_{iq,r}) - \frac{1}{4} g^{pq} g_{pq,r} (g_{uk,r} - g^{ri} g_{ik,r}) \\
& + \frac{1}{4} g^{pq} g^{ij} [g_{iq,r} (2g_{j(p,k)} - g_{pk,j}) - g_{ik,r} (2g_{jp,q} - g_{pq,j})] , \tag{A.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{uu} = & -\frac{1}{2} g^{rr} g_{uu,rr} - 2g^{ri} g_{u[u,i],r} + \frac{1}{2} g^{pq} (2g_{up,uq} - g_{pq,uu} - g_{uu,pq}) \\
& + \frac{1}{2} g^{rp} g^{rq} (g_{uu,r} g_{pq,r} - g_{up,r} g_{uq,r}) + \frac{1}{4} g^{rr} g^{pq} (2g_{up,r} g_{uq,r} - g_{uu,r} g_{pq,r}) \\
& - \frac{1}{2} g^{pq} g^{ri} [g_{ip,r} (2g_{uq,u} - g_{uu,q}) - g_{up,r} (2g_{q(u,i)} - g_{ui,q})] \\
& - \frac{1}{4} g^{pq} g_{uu,r} [2g_{up,q} - g_{pq,u} - g^{ri} (2g_{ip,q} - g_{pq,i})] \\
& + \frac{1}{2} g^{pq} g_{up,r} [g_{uu,q} - g^{ri} (2g_{i(u,q)} - g_{uq,i})] \\
& - \frac{1}{4} g^{pq} g_{pq,r} [g_{uu,u} - g^{ri} (2g_{ui,u} - g_{uu,i})] \\
& + \frac{1}{4} g^{pq} g^{ij} (2g_{j(u,p)} - g_{up,j}) (2g_{i(u,q)} - g_{uq,i}) \\
& - \frac{1}{4} g^{pq} g^{ij} (2g_{uj,u} - g_{uu,j}) (2g_{ip,q} - g_{pq,i}) , \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{uk} = & -\frac{1}{2}g^{rr}g_{uk,rr} - g_{u[u,k],r} + g^{ri}(g_{u[i,k],r} - g_{k[u,i],r}) + g^{pq}(g_{p[k,q],u} - g_{u[k,q],p}) \\
& + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq}(2g_{pk,r}g_{uq,r} - g_{pq,r}g_{uk,r}) + \frac{1}{2}g^{ri}(g_{uu,r}g_{ik,r} - g_{uk,r}g_{ui,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{rp}g^{rq}(g_{uk,r}g_{pq,r} - g_{kp,r}g_{uq,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{pq}g^{ri} \left[2g_{uq,r}g_{k[p,i]} + 2g_{pk,r}g_{u[q,i]} - g_{ip,r}(2g_{q(u,k)} - g_{uk,q}) \right] \\
& + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ri} \left[g_{uk,r}(2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) + g_{pq,r}(2g_{i(u,k)} - g_{uk,i}) \right] \\
& + \frac{1}{4}g^{pq} \left[4g_{pk,r}g_{u[q,i]} + 2g_{up,r}g_{uq,k} - g_{uk,r}(2g_{up,q} - g_{pq,u}) - g_{pq,r}g_{uu,k} \right] \\
& + \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij} \left(2g_{j(u,q)} - g_{uq,j} \right) \left(2g_{i(p,k)} - g_{pk,i} \right) \\
& - \frac{1}{4}g^{pq}g^{ij} \left(2g_{j(u,k)} - g_{uk,j} \right) \left(2g_{ip,q} - g_{pq,i} \right) , \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{pq} = & {}^S R_{pq} - \frac{1}{2}g^{rr}g_{pq,rr} + g_{pq,ur} - g_{u(p,q),r} + g^{ri}(g_{i(p,q),r} - g_{pq,ir}) \\
& + \frac{1}{4}g^{rr}g^{kl}(2g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) \\
& + \frac{1}{2}(g_{pq,r}g_{uu,r} - g_{up,r}g_{uq,r}) + \frac{1}{2}g^{ri}(g_{up,r}g_{iq,r} + g_{uq,r}g_{ip,r} - 2g_{pq,r}g_{ui,r}) \\
& + \frac{1}{2}g^{rk}g^{rl}(g_{pq,r}g_{kl,r} - g_{pk,r}g_{ql,r}) + \frac{1}{2}g^{kl}(g_{uk,r} - g^{ri}g_{ik,r}) \left(2g_{l(p,q)} - g_{pq,l} \right) \\
& - \frac{1}{4}g^{kl}g_{kl,r} \left[2g_{u(p,q)} - g_{pq,u} - g^{ri}(2g_{i(p,q)} - g_{pq,i}) \right] \\
& - \frac{1}{4}g^{kl}g_{pq,r} \left[2g_{uk,l} - g_{kl,u} - g^{ri}(2g_{ik,l} - g_{kl,i}) \right] \\
& - g^{kl}g_{kq,r} \left(g_{p[l,u]} + g^{ri}g_{p[i,l]} \right) - g^{kl}g_{kp,r} \left(g_{q[l,u]} + g^{ri}g_{q[i,l]} \right) . \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Ricciho skalár

Kontraktí $R = g^{ab}R_{ab}$ získáváme Ricciho skalár ve tvaru

$$\begin{aligned}
R = & {}^S R + g_{uu,rr} + (g^{rp}g^{rq} - g^{pq}g^{rr})g_{pq,rr} - 2g^{ri}g_{ui,rr} + 4g^{pq}(g_{p[q,u],r} + g^{ri}g_{p[i,q],r}) \\
& - \frac{1}{2}g^{pq}(3g_{up,r}g_{uq,r} - 2g_{uu,r}g_{pq,r}) + g^{pq}g^{ri}(3g_{up,r}g_{iq,r} - 2g_{ui,r}g_{pq,r}) \\
& + \frac{1}{4}g^{rr}g^{pq}g^{kl}(3g_{kp,r}g_{lq,r} - g_{kl,r}g_{pq,r}) - \frac{1}{2}g^{pq}g^{rk}g^{rl}(3g_{pl,r}g_{kq,r} - 2g_{pq,r}g_{kl,r}) \\
& - \frac{1}{2}g^{pq}g^{kl} \left[g_{kl,r}(2g_{up,q} - g_{pq,u}) + g_{kq,r}(3g_{pl,u} - 2g_{up,l}) - 2g_{uk,r}(2g_{lp,q} - g_{pq,l}) \right] \\
& + \frac{1}{2}g^{pq}g^{kl}g^{ri} \left[g_{kl,r}(2g_{ip,q} - g_{pq,i}) + g_{kq,r}(3g_{pl,i} - 2g_{ip,l}) - 2g_{ik,r}(2g_{lp,q} - g_{pq,l}) \right] . \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Literatura

- [1] A. C. Clarke. *2001, a space odyssey*. ROC, 1968.
- [2] U. Le Verrier. Lettre de m. le verrier à m. faye sur la théorie de mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1859.
- [3] R. A. Hulse and J. H. Taylor. A High-Sensitivity Pulsar Survey. *Astrophysical Journal Letters*, 191:L59, 1974.
- [4] A. S. Eddington, F. W. Dyson, and C. Davidson. IX. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [5] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, 1929.
- [6] D. M. Popper. Red Shift in the Spectrum of 40 Eridani B. *Astrophysical Journal Letters*, 120:316, 1954.
- [7] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal Letters*, 142:419–421, 1965.
- [8] B. P. Abbott et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119:161101, 2017.
- [9] The EHT Collaboration et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *Astrophysical Journal Letters*, 875:4, 2019.
- [10] M. Visser. The Kerr spacetime: A brief introduction. *arXiv: 0706.0622*, 2008.
- [11] J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [12] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11:237–238, 1963.
- [13] R. L. Znajek. Black hole electrodynamics and the carter tetrad. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179(3):457–472, 1977.
- [14] B. Carter. Hamilton-jacobi and schrodinger separable solutions of einstein's equations. *Communications in Mathematical Physics*, 10(4):280–310, 1968.
- [15] M. Abdelqader and K. Lake. Invariant characterization of the kerr spacetime: Locating the horizon and measuring the mass and spin of rotating black holes using curvature invariants. *Physical Review D*, 91(8), 2015.

- [16] R. Svarc. *Study of exact spacetimes*. PhD thesis, Charles University, 2012.
- [17] M. Karamazov. Exact spacetimes in modified theories of gravity. Master's thesis, Charles University, 2017.
- [18] J. Podolský and M. Ortaggio. Robinson–trautman spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 23(20):5785–5797, 2006.
- [19] M. Scholtz, A. Flandera, and N. Gürlebeck. Kerr-newman black hole in the formalism of isolated horizons. *Physical Review D*, 96:064024, 2017.
- [20] N. T. Bishop and L. R. Venter. Kerr metric in bondi-sachs form. *Physical Review D*, 73(8), 2006.
- [21] S. J. Fletcher and A. W. C. Lun. The kerr spacetime in generalized bondi–sachs coordinates. *Classical and Quantum Gravity*, 20(19):4153–4167, 2003.
- [22] V. Pravda, A. Pravdová, A. Coley, and R. Milson. Bianchi identities in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 21(12):2873–2897, 2004.