MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Sedlák

Čtyřstranné množiny v projektivní geometrii

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělání - Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělání

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval všem, kteří mi s touto prací pomohli. Především děkuji svému vedoucímu Mgr. Lukáši Krumpovi, Ph.D. za pomoc s výběrem tématu, konzultace bez kterých bych práci jen těžko dával dohromady a za jeho ochotu a trpělivost při závěrečných úpravách textu.

Název práce: Čtyřstranné množiny v projektivní geometrii

Autor: Jan Sedlák

Katedra: Didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt:
Bakalářská práce je výkladem osmé kapitoly "Quadrilateral Sets and Liftings " z knihy J.Richter-Gebert: Perspectives on Projective Geometry. Text obsahuje také konstrukci projektivní roviny, která je doplněna názornými ilustracemi vytvořenými v aplikaci Geogebra. Dále se práce zabývá čtyřstrannými množinami a jejich vlastnostmi. Při výkladu látky je počítáno s minimální znalostí z oblasti projektivní geometrie.

Klíčová slova: homogenní souřadnice, projektivní rovina, čtyřstranné množiny

Title: Quadrilateral sets in projective geometry

Author: Jan Sedlák

Department: Didactics of mathematics

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstract:
The bachelor thesis is an intepretation of eighth chapter "Quadrilateral Sets and Liftings " from the book J.Richter-Gebert: Perspectives on Projective Geometry. This text contains also the construction of the projective plane accompanied by ilustrative images, which were created in aplication Geogebra. In additional, it deals with quadrilateral sets and their properties. The work requires minimum knowledge in the field of projective geometry.

Keywords: homogeneous coordinates, projective plane, quadrilateral sets

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce vykládá osmou kapitolu "Quadrilateral sets and Liftings" z knihy J.Richter-Gebert: Perspectives on Projective Geometry[1]. Tyto množiny dosud nebyly zpracovány v českém jazyce, a proto bylo zapotřebí zavést český název. Po konzultaci s Mgr. Lukášem Krumpem, Ph.D. bylo rozhodnuto o českém termínu: čtyřstranné množiny.

Samotný výklad osmé kapitoly knihy výše zmíněné by nebyl příliš dobře stravitelný pro čtenáře, kteří se doposud nezabývali projektivní geometrií. Proto se tato bakalářská práce v první kapitole zabývá homogenními souřadnicemi, konstrukcí projektivní roviny, principem duality a vektorovými identitami, které se hojně využijí při práci s čtyřstrannými množinami v kapitole druhé. Proto k porozumění textu postačuje minimální znalost v oblasti projektivní geometrie.

Po zavedení čtyřstranných množin dospěji několika cestami k jejich charakterizaci. Rozsah práce mi poskytuje prostor pouze pro výklad několika zajímavostí z celé řady pozoruhodných vlastností, jimiž čtyřstranné množiny disponují. Proto se zaměřím především na jejich vztah ke směrnicím přímek mezi body v rovině.

Práci jsem psal v programu TeXstudio s využitím šablony. Obrázky, jež se vyskytují v práci, jsou vytvořeny pomocí aplikace Geogebra. Ilustrují konstrukce související s čtyřstrannými množinami, a zároveň se na jejich základě vyvozují užitečné vektorové identity a vztahy mezi prvky projektivní roviny.

Projektivní geometrie nabízí velmi nezvyklý pohled na eukleidovský prostor a zároveň jej rozšiřuje o nevlastní prvky, na což pozorný čtenář narazí i v této práci. Bude-li se někdo zabývat čtyřstrannými množinami, poslouží mu tato práce mimo jiné jako základ české terminologie. Pro hlubší porozumění čtyřstranným množinám doporučuji čtenáři již zmíněnou osmou kapitolu knihy Perspectives on Projective Geometry.

1. Homogenní souřadnice

Jak již bylo zmíněno v úvodu, tato kapitola se věnuje konstrukci projektivní roviny za pomoci homogenních souřadnic. Nejdříve definujeme několik základních termínů, s jejichž pomocí se pokusíme vytvořit projektivní rovinu. Aby námi budovaný prostor byl skutečně projektivní rovinou, musí splňovat následující axiomy:[2]

1. Každé dva různé body leží na právě jedné přímce.
2. Každé dvě různé přímky se protínají právě v jednom bodě.
3. Existují alespoň čtyři různé body, z nichž žádné tři neleží na přímce.
4. Existují alespoň čtyři různé přímky, z nichž žádné tři se neprotínají v bodě.

V závěru kapitoly si ověříme, zda naše konstrukce projektivní roviny byla správná.

Definice 1. *Projektivní prostor dimenze n definujeme následujícím předpisem:*

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right)\Big/_{\sim} \tag{1.1}$$

kde " $\sim$ " je relace s následující definicí:

Nechť x,$y \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, pak:

$$x \sim y \iff \exists \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \neq 0 : x = \alpha \cdot y \tag{1.2}$$

Platí: " $\sim$ " je relace ekvivalence:

1. *Reflexivita: Plyne triviálně pro volbu $\alpha = 1$.*
2. *Symetrie: Postačí zvolit převrácenou hodnotu α.*
3. *Tranzitivita: Uvažujme x,y,$z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ takové, že $x \sim y$ & $y \sim z$. Musí existovat α_1,$\alpha_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $x = \alpha_1 \cdot y$ a $y = \alpha_2 \cdot z$ a tedy snadno dostáváme vztah $x = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot z$. Tím je ověřena i tranzitivita.*

Poznámka: Prvky (body) $\mathbb{RP}^n$ jsou třídy ekvivalence " $\sim$ " vektorů z $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, každý takový prvek je reprezentovaný lineárním obalem vektoru.

1.1 Prostorová reprezentace

Definice 2. *Homogenními souřadnicemi bodu $x \in \mathbb{RP}^n$ rozumíme uspořádanou $(n+1)-tici$ čísel $x_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{0,1,2,..n\}$, kterou budeme zapisovat ve tvaru:*

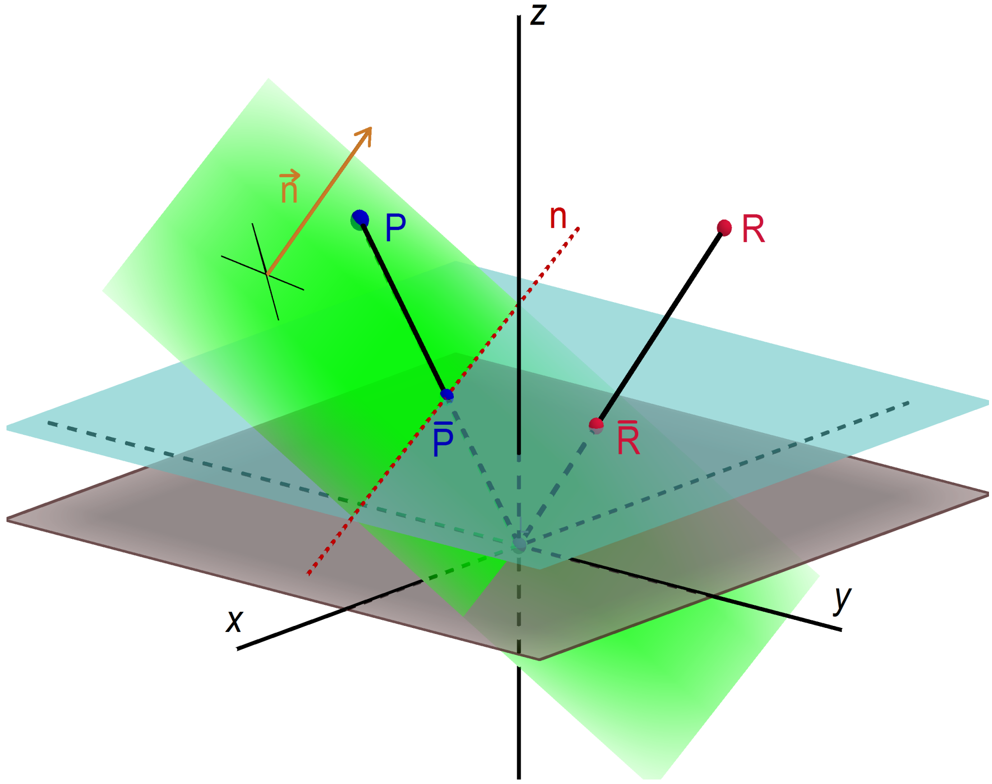
$$x = [x_1 : x_2 : ... : x_n : x_0]. \tag{1.3}$$

Tyto souřadnice jsou zadány jednoznačně až na svůj nenulový násobek.
Pro $\forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ platí:

$$[\alpha x_1 : \alpha x_2 : ... : \alpha x_n : \alpha x_0] = [x_1 : x_2 : ... : x_n : x_0]. \tag{1.4}$$

Poznámka: Dvojtečky mezi souřadnicemi bodů zdůrazňují fakt, že prvek x je zadán poměry $x_i : x_{i+1}$, jelikož je určen až na svůj nenulový násobek.

Máme sepsanou velmi abstraktní definici, která nám neposkytuje žádný rozumný náhled na chování homogenních souřadnic, a proto se nyní podíváme na vyjádření základních geometrických prvků a na jejich prostorovou reprezentaci. Ukáže se, že většinu důležitých vztahů můžeme jednoduše vysledovat z vhodných obrázků. Proto se nyní omezíme pouze na prostor $\mathbb{RP}^2$, který vychází z vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.



Obrázek 1.1: středové promítání do roviny $z = 1$ (modrá)

1.1.1 Body

Podívejme se nejdříve na body v prostoru $\mathbb{R}^3$. Body jsou zadány třemi souřadnicemi, které jednoznačně určují polohu bodu. Pro naše účely bude vhodné, když se na tyto souřadnice budeme dívat jako na polohový vektor. Z definice víme, že aritmetické body jsou určené až na svůj nenulový násobek. To pro nás znamená, že můžeme polohové vektory libovolně prodlužovat či zkracovat. Pro názornost si vybereme vhodné zástupce jednotlivých tříd ekvivalence " $\sim$ ". Pro každý bod $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ zvolíme zástupce z jeho lineárního obalu tak, aby jeho třetí souřadnice byla rovna jedné. Vezmeme-li například bod $A = [4 : 5 : 7]$, stačí jeho souřadnice vynásobit převrácenou hodnotou třetí složky. Bod A přepíšeme do tvaru $\bar{A} = [\frac{4}{7} : \frac{5}{7} : 1]$. Obecně můžeme vybírat zástupce tímto způsobem: Pro bod $B = [b_1 : b_2 : b_0]$ vybereme $\bar{B} = [\frac{b_1}{b_0} : \frac{b_2}{b_0} : 1]$. Pokud bude $b_0 = 0$, rozhodně nemůžeme souřadnice bodu vydělit touto hodnotou. Proto pro další úvahy přidáme podmínku $b_0 \neq 0$. *Tomuto problému se dále věnuji v odstavci věnovanému nevlastním bodům (1.1.3).*

Nyní budeme pracovat s body ve tvaru $\bar{B} = [\bar{b_1} : \bar{b_2} : 1]$. Podívejme se, co taková volba znamená prostorově. V obrázku 1.1 je právě tato volba znázorněna na bodech P,$\bar{P}$,R,$\bar{R}$. Je snadno vidět, že všechny takto zvolené body budou ležet v jedné rovině. V našem případě to bude právě rovina $z = 1$. Řekneme-li to formálněji, body $\bar{X}$ budou reprezentanty jednotlivých tříd ekvivalence " $\sim$ ". Samozřejmě můžeme rovinu volit zcela libovolně, nicméně není důvod, abychom si komplikovali situaci. Shrneme-li naše úvahy, můžeme si projektivní rovinu $\mathbb{RP}^2$ představit tak, že celý prostor $\mathbb{R}^3$ středově promítneme podle počátku do námi zvolené "roviny reprezentantů".

1.1.2 Přímky

Body v projektivní rovině jsou poměrně jednoduše představitelné, jelikož jejich souřadnice nám na první pohled poskytují informace o jejich poloze. Trochu náročnější práce nás čeká s projektivní přímkou. Jistě bychom chtěli mít přímky i body v jedné rovině, a proto navážeme právě na úvahy z odstavce o bodech. Tentokrát na to půjdeme z druhé strany. Sice nevíme, jak takovou projektivní přímku popíšeme, ale určitě ji budeme hledat v rovině $z = 1$. Zvolme tedy v obrázku 1.1 náhodnou přímku n v rovině $z = 1$. Budeme-li postupovat v opačném gardu, napadne nás otázka, jaký objekt jsme středově promítli počátkem souřadnic, je-li výsledkem právě přímka n. Jedna z možností, která se nabízí, je rovina určená počátkem a přímkou n. Podívejme se tedy na to, jestli je tato představa vyhovující. Víme, že roviny procházející počátkem souřadnic jsou zadány jednoznačně pouze svým normálovým vektorem až na jeho násobek. Navíc se snadno přesvědčíme o tom, že existuje bijekce mezi přímkami v rovině $z = 1$ a rovinami procházejícími počátkem. Tento fakt ihned vyplývá z toho, že rovina procházející počátkem je jednoznačně určena přímkou z roviny $z = 1$. Je-li rovina jednoznačně až na násobek určena svým normálovým vektorem a zároveň je jednoznačně určena přímkou z roviny α, potom také platí, že přímka bude jednoznačně, až na násobek, určena normálovým vektorem příslušné roviny.

To jsme očekávali, přímka je množina bodů a každý bod je určen až na svůj násobek. Potom dává smysl, že i výsledná přímka bude určena jednoznačně až na svůj násobek. Proto můžeme každou přímku jednoznačně zadat vektorem $n \in \mathbb{R}^3$ až na jeho násobek.

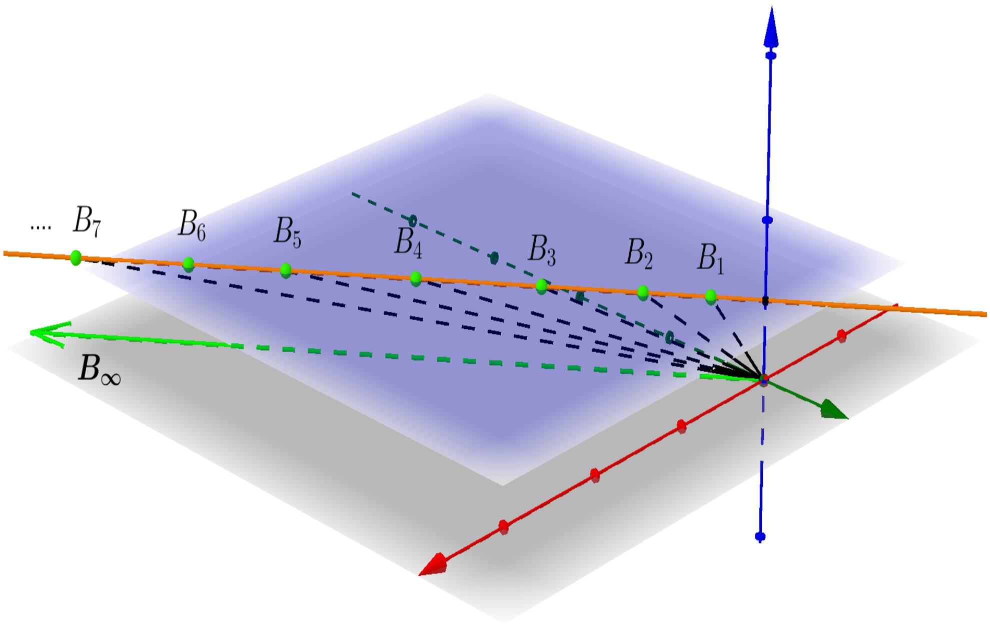
Definice 3. *Homogenními souřadnicemi přímky* $p \in \mathbb{RP}^2$ *rozumíme uspořádanou trojici čísel* x_1,x_2,$x_0 \in \mathbb{R}$, *kterou budeme zapisovat ve tvaru:*

$$p = [x_1 : x_2 : x_0] \neq [0 : 0 : 0]. \tag{1.5}$$

Tato trojice čísel je normálovým vektorem roviny, která přímku p zadává. Homogenní souřadnice přímky jsou zadány jednoznačně až na svůj nenulový násobek.

1.1.3 Nevlastní body

Nyní se vrátíme k problému s body ve tvaru $B = [a_1 : a_2 : 0]$. Abychom si lépe představili, jak takový bod vypadá, pomůžeme si následujícím trikem. Definujme monotónní posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Podívejme se, jak se chovají body $B_n = [a_1 : a_2 : b_n]$. Jednoduchou úpravou se dostaneme k vyjádření $B_n = [\frac{a_1}{b_n} : \frac{a_2}{b_n} : 1]$ a pro $n \longrightarrow \infty$ vidíme, že první dvě souřadnice bodu se blíží plus nebo mínus nekonečnu, pokud jsou $a_{1,2}$ nenulové hodnoty. Pro lepší představu je tato posloupnost bodů znázorněna na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: posloupnost bodů $B_n = [\frac{a_1}{b_n} : \frac{a_2}{b_n} : 1]$

Dává tedy smysl definovat nevlastní body $B_\infty := [b_1 : b_2 : 0]$. Pojďme se podívat na pár jednoduchých výpočtů. Začneme znalostmi z analytické geometrie. Napíšeme obecné vyjádření přímky:

$$0 = ax + by + c$$

Dosadíme homogenní souřadnice:

$$0 = a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c$$
$$0 = ax_1 + bx_2 + cx_0$$

Dostáváme vyjádření přímky pro homogenní souřadnice. Je zřejmé, že pokud dosadíme bod ve tvaru $A = [a_1 : a_2 : 1]$, v zásadě se nic nezmění. Můžeme se zamyslet nad tím, jak v této rovnici budou fungovat nevlastní body. Dosaďme bod $D_\infty = [d_1 : d_2 : 0]$.

$$0 = ad_1 + bd_2 + c \cdot 0$$
$$0 = ad_1 + bd_2$$

Řešením této rovnice bude až na násobek vektor $[-b : a]$. Což znamená, že bod D_∞ leží na přímce právě tehdy, když $[d_1 : d_2] = [-b : a]$. Jinými slovy na každé přímce leží právě jeden nevlastní bod, který odpovídá směrovému vektoru přímky.

Konečně se ukazují výhody homogenních souřadnic. Díky nim můžeme například počítat i s nevlastními body.

Důsledek: Body i přímky můžeme zapsat pomocí prvků $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Pozorování: Rozlišování bodů na vlastní a nevlastní jsme dělali pouze na základě volby roviny, do které chceme prostor $\mathbb{R}^3$ promítat. Pokud bychom na místo roviny $z = 1$ zvolili jinou rovinu (různoběžnou se $z = 1$), vše bude fungovat stejně, až na to, že budeme mít nevlastní body v jiném tvaru. Z toho mimo jiné vyplývá, že není třeba rozlišovat mezi vlastními a nevlastními body.

1.1.4 Průsečíky, spojnice a incidence

Značení: *Nechť* $u,v,w \in \mathbb{R}^3$.
Skalární součin u,v *budeme značit* $\langle u,v \rangle$.
Determinant matice vektorů u,v,w *budeme značit* $[u,v,w]$.
Vektorový součin vektorů u,v *budeme značit* $u \times v$.

Incidence: Z obrázku 1.1 je vidět, že body ležící na přímce musí být kolmé na normálový vektor roviny, která přímku zadává. Tento vztah samozřejmě platí i v opačném pořadí. Přímka procházející bodem musí být kolmá na polohový vektor určující bod. Můžeme tedy snadno definovat incidenci.

Definice 4. *Nechť bod a přímka* $P,p \in \mathbb{RP}^2$. *Nechť* $P = (p_1, p_2, p_0)$ *a*
$p = (n_1, n_2, n_o)$, *potom bod* $P \in p \iff \langle P,p \rangle = \langle (p_1, p_2, p_0),(n_1, n_2, n_o) \rangle = 0$.

Průsečíky a spojnice: Průsečík dvou přímek v homogenních souřadnicích je přímým důsledkem výpočtu incidence bodu a přímky. Hledáme takový vektor, který je kolmý na normálové vektory rovin daných přímek. Tedy hledáme vektor, který je kolmý na dva jiné vektory. Stejně tak pro spojnice dvou bodů musí platit, že vektor spojnice bude kolmý na oba polohové vektory bodů.

Definice 5. *Nechť přímky $q, p \in \mathbb{RP}^2$. Potom průsečík těchto přímek je roven $p \times q$.*

Definice 6. *Nechť body $Q, P \in \mathbb{RP}^2$. Potom se spojnice těchto bodů rovná $P \times Q$.*

Poznámka:

1. Jelikož prvky $\mathbb{RP}^2$ jsou určeny až na násobek jednoznačně, není potřeba řešit pořadí prvků ve vektorovém součinu.

2. Vezmeme-li dva libovolné nevlastní body, například $A_\infty = [1 : 0 : 0]$ a $B_\infty = [0 : 1 : 0]$, mohlo by nás zajímat, co bude jejich spojnicí. Víme, že spojnice bude ve tvaru $l = [1 : 0 : 0] \times [0 : 1 : 0] = [0 : 0 : 1]$. Dostáváme vyjádření tzv. *nevlastní přímky* l_∞. Je to množina všech nevlastních bodů, což snadno vyplývá ze skalárního součinu: $\langle [0 : 0 : 1], [a : b : 0] \rangle = 0$.

1.1.5 Princip duality

Shrňme si doposud odvozené poznatky. Víme, že můžeme vyjádřit přímky i body stejným způsobem. Průsečíky přímek a spojnice bodů se také dají vyjádřit shodně a konečně vztah incidence je naprosto symetrický. Potom nám nic nebrání v tom, aby všechny další algebraické výpočty či geometrické konstrukce měly dvojí význam. Dualitu můžeme v rovině charakterizovat následující větou: ”Jak se mají přímky k bodům, tak se mají body k přímkám.”[3] Přesněji řečeno, veškerá tvrzení v projektivní geometrii zůstávají v platnosti, zaměníme-li zároveň pojmy:

Dualita: [1]

1. bod $\iff$ přímka

2. spojnice $\iff$ průsečík

3. bod B leží na přímce p $\iff$ přímka b prochází bodem P

Této symetrické roli bodů a přímek budeme říkat *princip duality.*

Princip duality (dále jen ”dualita”) budeme hojně využívat. Říkejme, že jsou dvě tvrzení *duální*, pokud se liší správnou záměnou slov. Například následující tvrzení jsou duální: ”body ležící na jedné přímce” a ”přímky procházející jedním bodem”.
S dalšími aplikacemi duality se setkáme dále v textu. Nyní máme odvozeno všechno, co potřebujeme k tomu, abychom ukázali, že námi zkonstruovaný prostor bude projektivní rovinou.

Věta 1. *Prostor* $\mathbb{RP}^2$ *je projektivní rovina.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení provedeme ověřením axiomů projektivní roviny.

1. Každé dva různé body leží na právě jedné přímce.
2. Každé dvě různé přímky se protínají právě v jednom bodě.
3. Existují alespoň čtyři různé body, z nichž žádné tři neleží na přímce.
4. Existují alespoň čtyři různé přímky, z nichž žádné tři se neprotínají v bodě.

Různé body odpovídají lineárně nezávislým vektorům. Jejich spojnice je zadána vektorovým součinem. Výsledkem bude až na nenulový násobek jednoznačně zadaný vektor, který odpovídá právě jedné přímce. Tímto je dokázán axiom 1. Druhý axiom je pouze jeho duální verzí a tím pádem je také ověřen.

Existence čtyř různých bodů a přímek je triviálním důsledkem faktu, že pracujeme s vektory, které odpovídají prvkům $\mathbb{R}^3$.

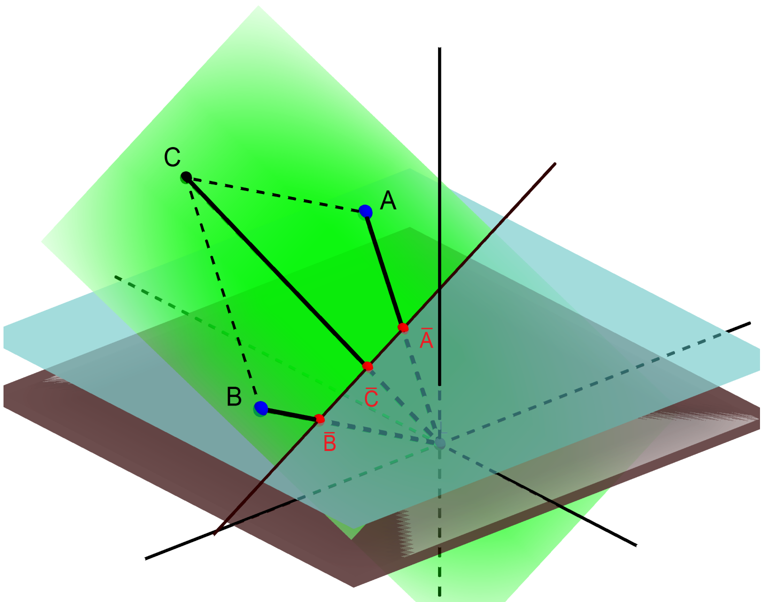
□

Definice 7. *Prostor* $\mathbb{RP}^1$ *budeme nazývat projektivní přímka.*

1.2 Vektorové identity

Lemma 2. *[1] Pro každé tři kolineární body* A,B,C *platí:* $[A,B,C] = 0$.

Lemma vyplývá z toho, že všechny tři vektory leží v jedné rovině. Proto jsou lineárně závislé, tedy mají nulový determinant.



Obrázek 1.3: vztah mezi body z $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{RP}^2$

Důsledek:

1. Díky duální interpretaci tohoto vztahu můžeme tvrdit, že tři přímky jsou konkurentní (prochází jedním bodem) právě tehdy, když platí $[a,b,c] = 0$.

2. Víme, že vektor, který je lineární kombinací dvou vektorů, je s nimi komplanární. Z toho vyplývá, že přímku můžeme interpretovat jako množinu lineárních kombinací bodů $\alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot B$, kde koeficienty $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ a alespoň jeden z koeficientů je nenulový.

Průsečík přímek: [1] Mějme čtyři body A,B,C,D, které nám zadávají dvě přímky AB a CD. Označme P průsečík těchto přímek. Bezpochyby pro bod P musí platit $[A,B,P] = 0$ ($P \in AB$) a zároveň $P = \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot D$ ($P \in CD$). Pokud tyto dva vztahy dosadíme do sebe, získáme vyjádření průsečíku dvou přímek.

$$\begin{aligned}
[A,\, B,\, \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot D] &= 0 && \textit{(linearita determinantu)} \\
[A,\, B,\, \alpha_1 \cdot C] + [A,\, B,\, \alpha_2 \cdot D] &= 0 && \textit{(vytkneme konstanty)} \\
\alpha_1 \cdot [A,\, B,\, C] + \alpha_2 \cdot [A,\, B,\, D] &= 0
\end{aligned}$$

Pokud přímky AB, CD nebyly shodné a zároveň žádný z bodů A,B,C,D nebyl průsečíkem, potom můžeme snadno dopočítat hodnoty konstant α_1,α_2.

$$\alpha_1 = [A,B,D] \qquad \alpha_2 = -[A,B,C]$$

Nyní dostáváme velmi elegantní vyjádření průsečíku P.

$$\begin{aligned}
P &= \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot D \\
P &= [A,B,D] \cdot C - [A,B,C] \cdot D
\end{aligned}$$

Pokud nyní budeme chtít sepsat podmínku pro tři přímky procházející jedním bodem, postačí využít již odvozených formulí. Mějme přímky zadané dvojicemi bodů: AB, CD a EF. Využijeme vyjádření průsečíku P přímek AB, CD a již známé podmínky pro kolinearitu tří bodů.

$$\begin{aligned}
0 &= [E,F,P] \\
0 &= [E,F,[A,B,D] \cdot C - [A,B,C] \cdot D] \\
0 &= [A,B,D] \cdot [E,F,C] - [A,B,C] \cdot [E,F,D]
\end{aligned}$$

Získávám podmínku zaručující konkurenci tří přímek. Tuto rovnost můžeme interpretovat i duálním způsobem. Mějme přímky a,b,c,d,e,f, které zadávají tři body: $a \cap b$, $c \cap d$, $e \cap f$. Průsečíky leží na jedné přímce právě tehdy, když platí:

$$0 = [a,b,d] \cdot [e,f,c] - [a,b,c] \cdot [e,f,d].$$

Důsledek: Důsledkem tohoto vyjádření je věta Pappova.

Věta 3 (Pappova). *[1] Nechť šest přímek a,b,c,d,e,f zadává dvě trojice kolineárních bodů:* $(a \cap b,\ c \cap d,\ e \cap f)$ *a* $(a \cap d,\ c \cap e,\ b \cap f)$. *Potom je trojice bodů* $(d \cap f,\ c \cap b,\ a \cap e)$ *také kolineární.*

Důkaz.

$$[a,b,d] \cdot [e,f,c] - [a,b,c] \cdot [e,f,d] = 0 \qquad \textit{(kolinearita } (a \cap b\ ,\ c \cap d\ ,\ e \cap f))$$
$$[a,d,f] \cdot [c,e,b] - [a,d,b] \cdot [c,e,f] = 0 \qquad \textit{(kolinearita } (a \cap d\ ,\ c \cap e\ ,\ b \cap f))$$

Po úpravě:

$$[a,b,d] \cdot [e,f,c] = [a,b,c] \cdot [e,f,d]$$
$$[a,d,f] \cdot [c,e,b] = [a,d,b] \cdot [c,e,f]$$

Rovnice vynásobíme:

$$[a,b,d] \cdot [e,f,c] \cdot [a,d,f] \cdot [c,e,b] = [a,b,c] \cdot [e,f,d] \cdot [a,d,b] \cdot [c,e,f]$$

Upravíme:

$$[a,b,d] \cdot [e,f,c] \cdot [a,d,f] \cdot [c,e,b] = -[a,b,c] \cdot [e,f,d] \cdot [a,b,d] \cdot [e,f,c]$$

Zkrátíme:

$$[a,d,f] \cdot [c,e,b] = -[a,b,c] \cdot [e,f,d]$$
$$[d,f,a] \cdot [c,b,e] = [c,b,a] \cdot [d,f,e]$$

Čímž dostáváme hledanou podmínku pro kolinearitu $d \cap f$, $c \cap b$, $a \cap e$:

$$[d,f,a] \cdot [c,b,e] - [d,f,e] \cdot [c,b,a] = 0.$$

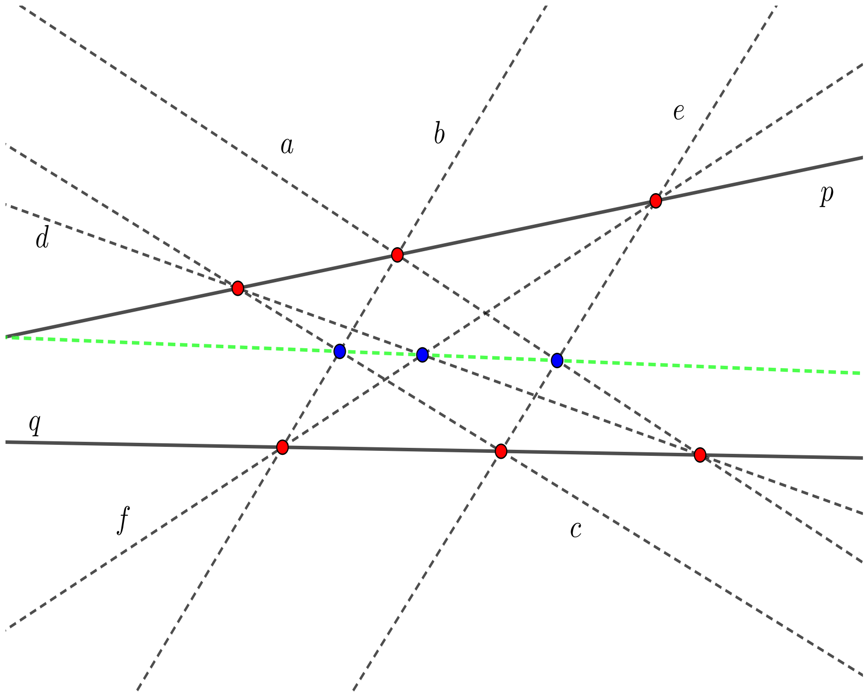
□

Poznámka: Pappova věta platí i duálně. Obě verze jsou zachyceny na obrázcích 1.4 a 1.5.

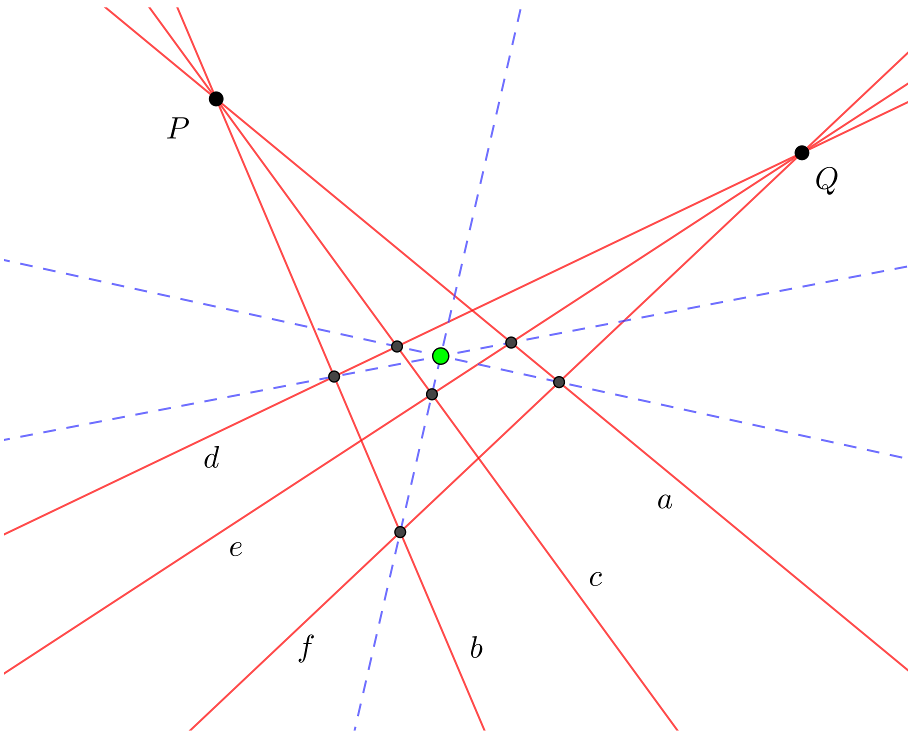
Definice 8. *[4] Nechť* A,B,C,D *jsou čtyři různé body z* $\mathbb{RP}^1$ *potom výraz:*

$$(A,B;C,D) := \frac{[A,C][A,D]}{[B,C][B,D]}. \tag{1.6}$$

nazveme dvojpoměr bodů A,B,C,D.



Obrázek 1.4: věta Pappova



Obrázek 1.5: věta Pappova - duální verze

Tvrzení: [4] Dvojpoměr je invariatní vůči projektivním zobrazením.

Lemma 4. *[1] Uvažujme 2n vlastních kolineárních bodů* $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n \in \mathbb{RP}^2$*, n libovolných vlastních bodů* $x_1,x_2..,x_n \in \mathbb{RP}^2$ *a permutaci* π*. Potom platí:*

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i,x_i] = \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i,x_{\pi(i)}] \tag{1.7}$$

Důkaz. Projektivní body jsou určeny až na nenulový násobek, můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že třetí souřadnice všech bodů je rovna jedné.

$$[a_i,b_i,x_i] = det\begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & 1 \\ b_1^i & b_2^i & 1 \\ x_1^i & x_2^i & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1^i - x_1^i & a_2^i - x_2^i & 0 \\ b_1^i - x_1^i & b_2^i - x_2^i & 0 \\ x_1^i & x_2^i & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^i - x_1^i & a_2^i - x_2^i \\ b_1^i - x_1^i & b_2^i - x_2^i \end{vmatrix}$$

Víme, že determinant 2x2 umíme spočítat jako obsah rovnoběžníku, který je vykreslen příslušnými vektory. Ten můžeme také vyjádřit jako $S = \|(b^i - a^i)\| \cdot v_i$, kde v_i bude vzdálenost bodu x_i od přímky určené body a_ib_i. Můžeme psát:

$$\prod_{i=1}^{n}\|(b^i - a^i)\| \cdot v_i = \prod_{i=1}^{n}\|(b^i - a^i)\| \cdot v_{\pi(i)} \tag{1.8}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

□

Toto pomocné lemma využijeme při charakterizaci čtyřstranných množin.

2. Čtyřstranné množiny

Tato kapitola je věnována čtyřstranným množinám. Jedná se o šestibodové množiny na RP^1. Jak název napovídá, čtyřstranná množina je odvozena ze čtyřstranu. Proto začneme jeho definicí.

Definice 9. *[4] Čtyři přímky v jedné rovině, z nichž žádné tři neprocházejí jedním bodem, nazýváme úplný čtyřstran, tyto přímky jeho stranami a průečíky těchto přímek jeho vrcholy (modrý útvar na obrázku 2.1).*

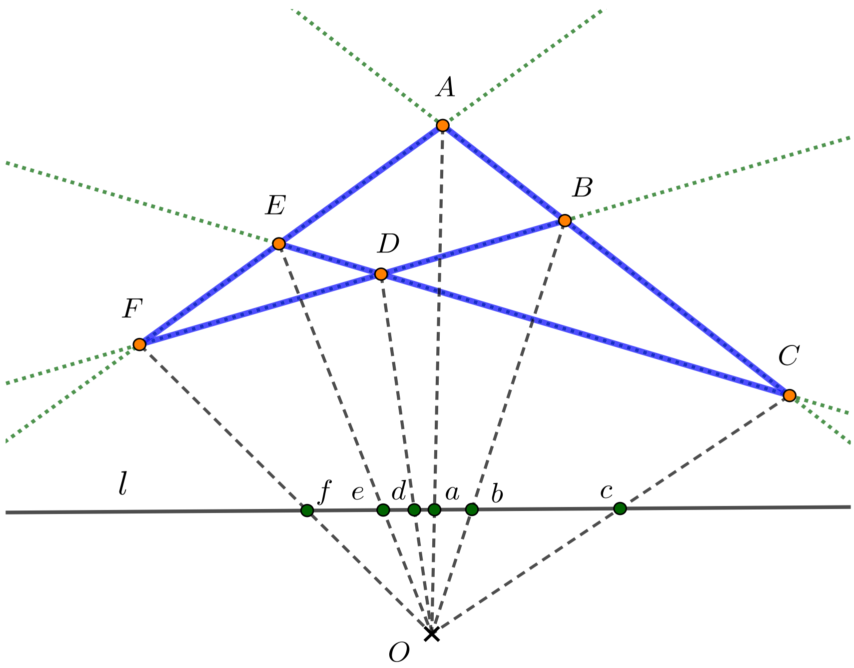
Na čtyřstrannou množinu můžeme pohlížet jako na množinu bodů v RP^1, která vznikla promítnutím vrcholů čtyřstranu na libovolnou přímku, jako je tomu na obrázku 2.1.

Definice 10. *Nechť body $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{RP}^2$ tvoří čtyřstran. Pro libovolnou přímku l a libovolný bod O různý od bodů A,B,C,D,E,F z $\mathbb{RP}^2$ označme průsečíky $OA \cap l$, $OB \cap l$, ..., $OF \cap l$ po řadě a,b,c,d,e,f. Tuto množinu průsečíků nazveme čtystrannou množinou (obrázek 2.1).*

Věta 5. *Nechť body $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{RP}^1$ tvoří čtyřstrannou množinu. Potom platí následující rovnost:*

$$[a,e][b,f][c,d] = [a,f][b,d][c,e].$$

Tomuto vztahu budeme říkat charakterizace čtyřstranné množiny.



Obrázek 2.1: projekce vrcholů čtyřstranu na $\mathbb{RP}^1$

2.1 Charakterizace čtyřstranných množin

V této části odvodíme charakterizaci čtyřstranných množin třemi různými způsoby. Využijeme lemma 4, aplikujeme vlastnosti dvojpoměru a na závěr vytáhneme body z $\mathbb{RP}^1$ do $\mathbb{RP}^2$.

Odvození charakterizace na základě lemmatu 4 [1] Podívejme se nyní na to, jak charakterizaci čtyřstranných množin odvodit. Pracujeme stále s obrázkem 2.1. Na základě lemmatu 4 můžeme odvodit následující rovnosti.

1. $[A,B,C] = 0 \Rightarrow [A,B,E][B,C,F][C,A,D] = [A,B,F][B,C,D][C,A,E]$
2. $[A,E,F] = 0 \Rightarrow [A,E,O][A,F,B] = [A,E,B][A,F,O]$
3. $[B,F,D] = 0 \Rightarrow [B,F,O][B,D,C] = [B,F,C][B,D,O]$
4. $[C,D,E] = 0 \Rightarrow [C,D,O][C,E,A] = [C,D,A][C,E,O]$

Pokud výše uvedené rovnosti mezi sebou vynásobíme a zkrátíme, dostaneme následující vyjádření: $[A,E,O][B,F,O][C,D,O] = [A,F,O][B,D,O][C,E,O]$. Pokud zvolíme bod $O = [0 : 0 : 1]$, snadno se dostaneme k vyjádření charakterizace čtyřstranné množiny v $\mathbb{RP}^1$:

$$[a,e][b,f][c,d] = [a,f][b,d][c,e].$$

Odvození charakterizace vlastnostmi dvojpoměru [1] Podívejme se na obrázek 2.2. Dvojpoměr $(A,K;M,L)$ bude roven dvojpoměru $(A,F;B,D)$ a zároveň dvojpoměru $(A,C;E,D)$, jelikož body K,M,L se po řadě zobrazí na body F,B,D při projekci z bodu P na přímku l a stejně tak se zobrazí na body C,E,D při projekci bodem Q na přímku l. Dvojpoměr je invariantní vůči projektivním zobrazením, a proto můžeme psát:

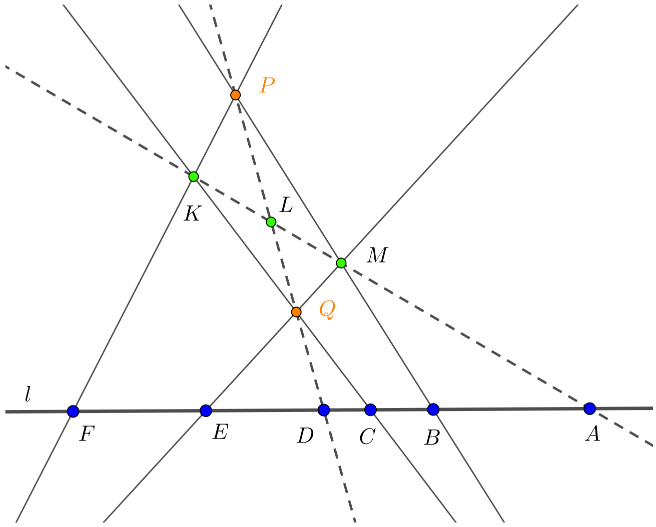
$$(A,K;M,L) = (A,F;B,D) = (A,C;E,D) \qquad \textit{(projekce dvojpoměru (A,K;M,L))}$$

$$\frac{[A,B][F,D]}{[A,D][F,B]} = \frac{[A,E][C,D]}{[A,D][C,E]} \qquad \textit{(lemma o 4 determinantech (1.3))}$$

$$[A,B][F,D][C,E] = [A,E][C,D][F,B]$$

Čímž dostáváme opět charakterizaci čtyřstranné množiny.

Odvození charakterizace vytažením z $\mathbb{RP}^1$ do $\mathbb{RP}^2$: [1] Uvažujme čtyřstrannou šestici bodů $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{RP}^1$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit vlastní body ve tvaru $A = (x_a,1)$. Jelikož budeme body vytahovat do prostoru vyšší dimenze, musíme je opatřit třetí souřadnicí. Třetí souřadnici každého bodu označme h s příslušným indexem bodu. Zvolíme je takovým způsobem, abychom



Obrázek 2.2: promítání bodů K,L,M body P,Q na přímku l

vytvořili čtyřstran s kolineárními trojicemi bodů ABC, AEF, BDF a CDE. Již víme, že pro každé tři kolineární body platí: $[A,B,C] = 0$.

$$0 = det(A,B,C) = det \begin{pmatrix} x_a & 1 & h_a \\ x_b & 1 & h_b \\ x_c & 1 & h_c \end{pmatrix} = h_a[B,C] - h_b[A,C] + h_c[A,B]$$

Obdobným způsobem rozepíšeme i zbylé kolineární trojice. Z toho plynou vztahy:

$$\begin{aligned} 0 &= h_a[E,F] - h_e[A,F] + h_f[A,E] && \textit{(kolinearita (A,E,F))} \\ 0 &= h_b[D,F] - h_d[B,F] + h_f[B,D] && \textit{(kolinearita (B,D,F))} \\ 0 &= h_c[D,E] - h_d[C,E] + h_e[C,D] && \textit{(kolinearita (C,D,E))} \end{aligned}$$

Nyní přejdeme k maticovému zápisu těchto lineárních rovnic. S je matice soustavy a vektor $(h_a,h_b,h_c,h_d,h_e,h_f)^T$ označíme jako $\vec{h}$.

$$S\vec{h} = \begin{pmatrix} [B,C] & -[A,C] & [A,B] & 0 & 0 & 0 \\ [E,F] & 0 & 0 & 0 & -[A,F] & [A,E] \\ 0 & [D,F] & 0 & -[B,F] & 0 & [B,D] \\ 0 & 0 & [D,E] & -[C,E] & [C,D] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_a \\ h_b \\ h_c \\ h_d \\ h_e \\ h_f \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Matice S má jádro minimálně dimenze dva, které je tvořené triviálními případy, kdy všech šest bodů zůstane i po vytažení do $\mathbb{RP}^2$ na jedné přímce. Chceme-li se těmto případům vyhnout, musí být jádro matice dimenze alespoň tři. Potom platí, že každý 4×4 subdeterminant matice S bude nulový.

$$0 = det \begin{pmatrix} [A,B] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[A,F] & [A,E] \\ 0 & -[B,F] & 0 & [B,D] \\ [D,E] & -[C,E] & [C,D] & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = [A,B]([C,E][A,F][B,D] - [B,F][C,D][A,E])$$

$$0 = [C,E][A,F][B,D] - [B,F][C,D][A,E]$$

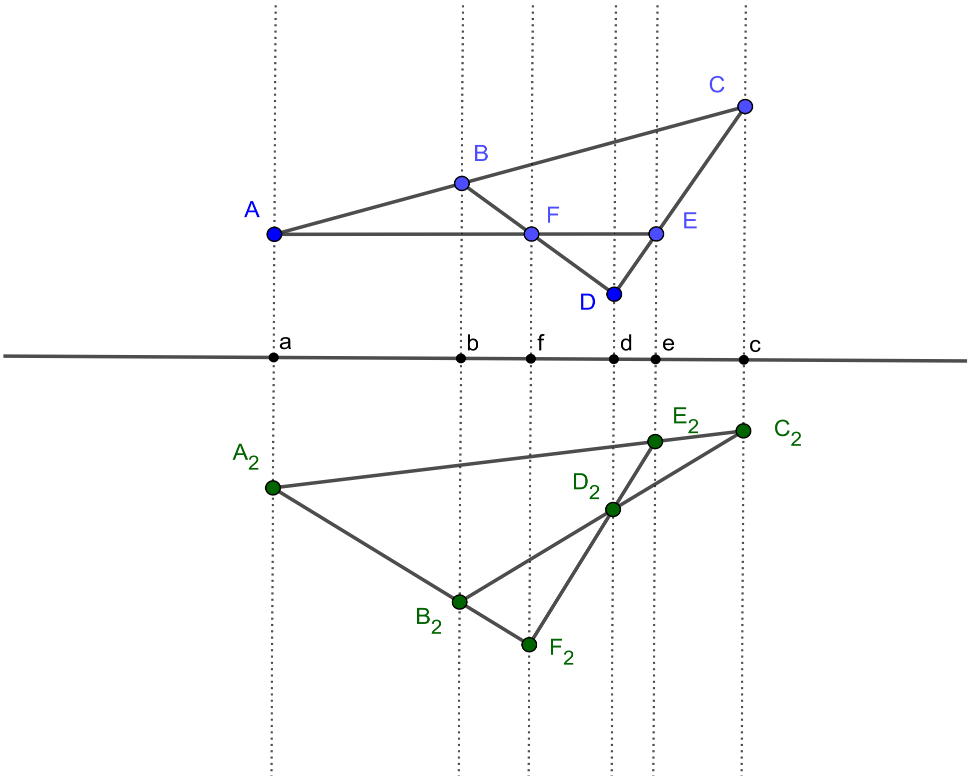
Tím se dostáváme k nám již známé charakterizaci čtyřstranné množiny.

$$[C,E][A,F][B,D] = [B,F][C,D][A,E] \tag{2.1}$$

Poznámka: *Mohlo by se zdát, že pokud zvolíme jiný 4×4 subdeterminant matice S, dostaneme jiný vztah. Nicméně výsledkem bude pouze kombinatoricky odlišný zápis.*

2.2 Zobecnění, symetrie a dualita čtyřstranných množin

2.2.1 Asociovaný čtyřstran



Obrázek 2.3: asociovaná čtyřstranná množina

Uvažujme čtyřstran A,B,C,D,E,F *(značení viz obrázek 2.3 - modrý čtyřstran)* a podívejme se na charakterizaci čtyřstranné množiny a,b,c,d,e,f:

$$[c,e][a,f][b,d] = [b,f][c,d][a,e].$$

Můžeme si povšimnout, že se jedná o velmi symetrický zápis. Vezmeme-li například první tři determinanty, tak zjistíme, že body A,B,C leží na přímce, zatímco body E,F,D na přímce neleží. Bez obrázku nemůžeme určit, která z těchto trojic je kolineární, a která není. To nás vede k domněnce, že musí existovat obě verze. Pokusíme se tedy zkonstruovat alternativní verzi čtyřstranu, body budeme značit s indexem 2 (v obrázku 2.3 se jedná o zelený čtyřstran).

V původním modrém čtyřstranu máme tři páry bodů, které neleží na straně čtyřstranu: (F,C), (A,D) a (B,E). Kolineární trojice bodů čtyřstranu jsou vytvořeny tak, že se vybere z každého páru právě jeden bod. Takových trojic existuje osm *(tři body, z nichž každý vybíráme ze dvou, tedy* $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$), avšak pouze čtyři z nich jsou ve čtyřstranu kolineární. Zbylá čtveřice trojic (D,E,F), (A,B,F), (B,C,D) a (A,C,E) tvoří trojúhelníky. Můžeme zaměnit jejich role s původními kolinerními trojicemi bodů a tím získat tzv. *asociovaný čtyřstran*[1].

Konstrukce se provede velmi snadno. Pět bodů se zvolí tak, aby splňovaly požadovanou kolinearitu a zároveň odpovídaly zvolené čtyřstranné množině. Tím je jednoznačně určen i šestý bod asociovaného čtyřstranu.

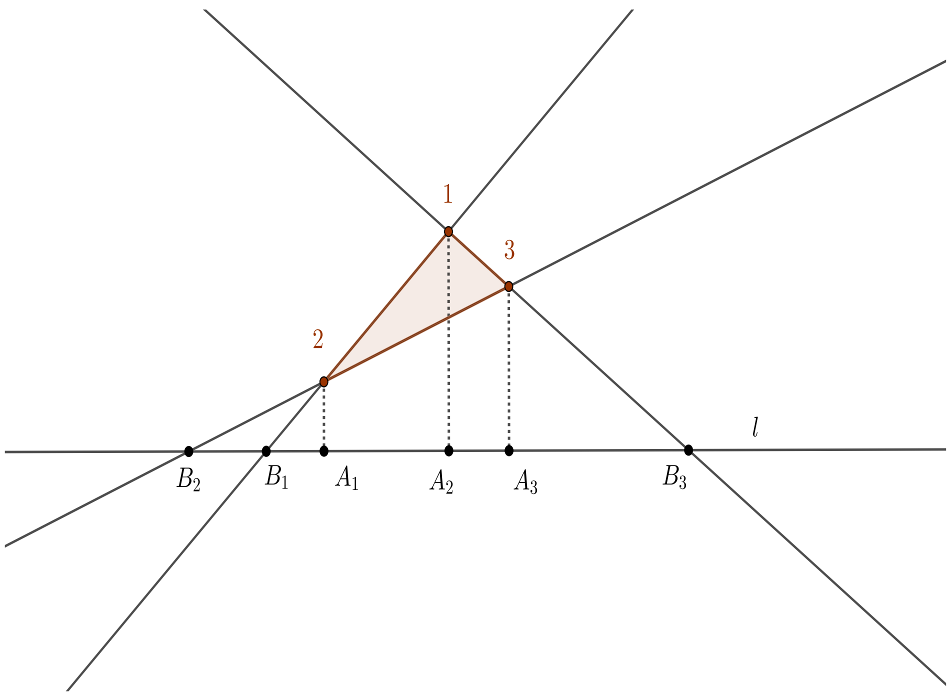
2.2.2 Zobecnění čtyřstranných množin

Pro šest bodů máme charakterizaci čtyřstranné množiny ve tvaru:

$$[C,E][A,F][B,D] = [B,F][C,D][A,E]$$

Body čtyřstranu vhodně přeznačíme a následně je promítneme na jednu ze stran čtyřstranu. To odpovídá obrázku 2.1, pokud zvolíme přímku l jako stranu čtyřstranu, a pro speciální polohu bodu O, který je zde nevlastním bodem přímky kolmé k l. Dostaneme následující přepis charakterizace:

$$[A_1,B_1][A_2,B_2][A_3,C_3] = [A_1,B_3][A_2,B_1][A_3,C_2] \tag{2.2}$$



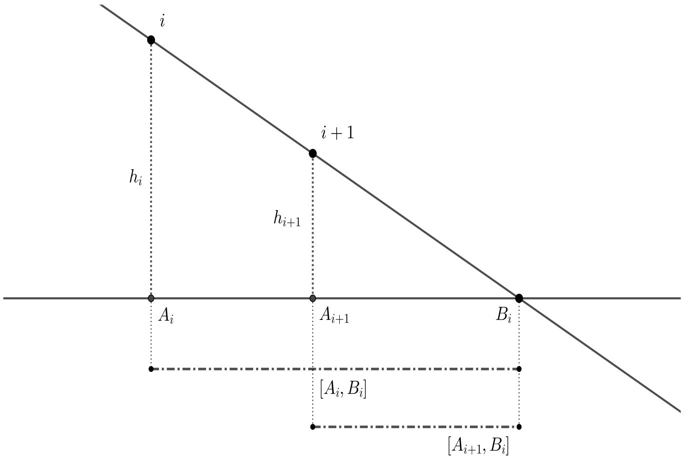
Obrázek 2.4: přeznačený čtyřstran pro rovnost (2.2)

Pokusíme se tento vztah zobecnit pro n bodů.[1] Uvažujme obecný n-úhelník s vrcholy $1,2,..n$, průměty vrcholů na přímku l nazveme A_i a body $B_i = l \cap (i,i+1)$ s indexy v $mod(n)$.

Nejprve si uvědomíme, že determinanty $[A_i,B_i]$ odpovídají při Euklidovském pohledu vzdálenosti bodů na projektivní přímce. Z toho snadno odvodíme, že z podobnosti trojúhelníků na obrázku 2.5 musí platit:

$$\frac{[A_i,B_i]}{[A_{i+1},B_i]} = \frac{h_i}{h_{i+1}} \tag{2.3}$$

kde h_i je vzdálenost bodu i od přímky l.



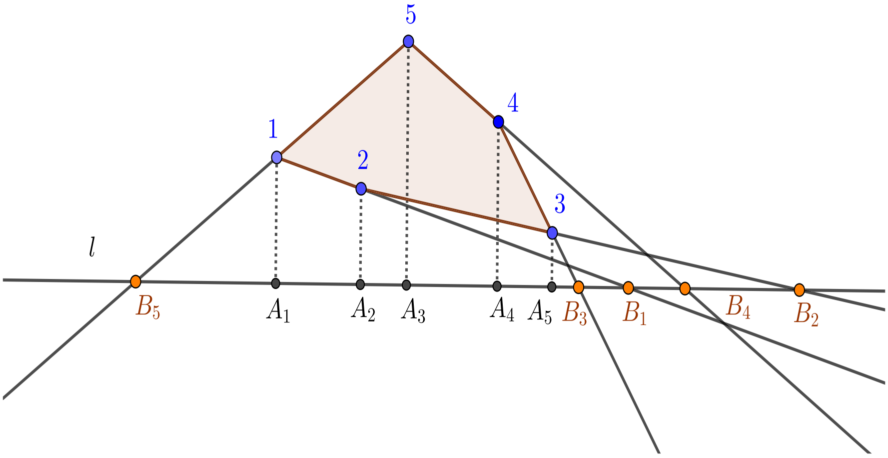
Obrázek 2.5: znázornění vztahu (2.3)

Ze vztahu (2.5) pro indexy v mod(n) jednoduše plyne:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{[A_i,B_i]}{[A_{i+1},B_i]} = \prod_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h_{i+1}} = 1 \tag{2.4}$$

čímž získáváme následující vztah, kterému budeme říkat *charakterizace zobecněné čtyřstranné množiny.*

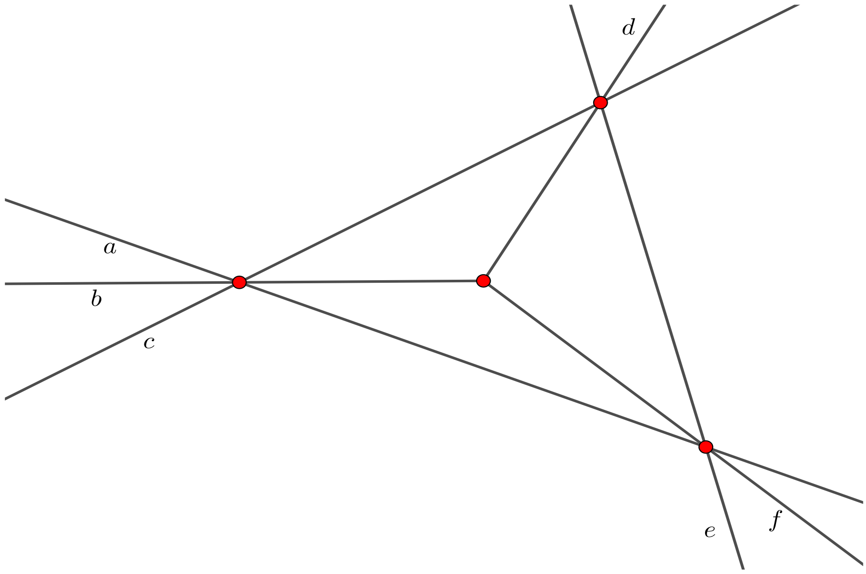
$$\prod_{i=1}^{n} [A_i,B_i] = \prod_{i=1}^{n} [A_{i+1},B_i] \tag{2.5}$$



Obrázek 2.6: zobecnění čtyřstranné množiny pro $n = 5$

2.2.3 Dualita

Zatím jsme pracovali pouze s šesticí bodů, které po trojicích ležely na čtyřech přímkách, jako na obrázku 2.1. Pokud provedeme stejnou konstrukci duálně, dostaneme šestici přímek, které po trojicích prochází jedním ze čtveřice bodů. Na tuto skutečnost jsme již narazili při odvozování charakterizace čtyřstranné množiny na základě věty o čtyřech determinantech uvedenou na obrázku 2.2, kde jsme našli průsečíky šesti přímek s přímkou l.



Obrázek 2.7: dualita

Pokud nalezneme průsečíky přímek a,b,c,d,e,f s libovolnou další přímkou, bude platit opět stejná charakterizace:

$$[c,e][a,f][b,d] = [b,f][c,d][a,e].$$

2.3 Čtyřstranné množiny a směrnice přímek

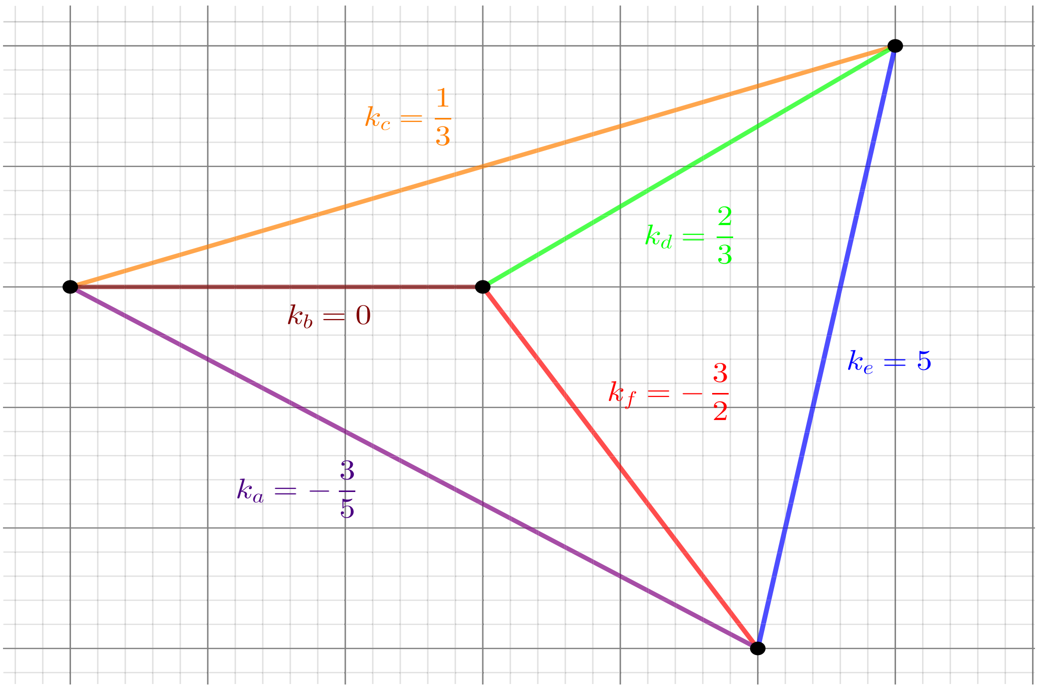
Konstruujeme-li čtyřstrannou množinu pomocí šestice přímek a,b,c,d,e,f, můžeme nalézt průsečíky s libovolnou další přímkou l a tím získat čtyřstrannou množinu. Přímku l můžeme zvolit i nevlastní, z pohledu projektivní geometrie to není nikterak výjimečný případ. Pokud tak učiníme, stačí si vzpomenout na zavedení nevlastních bodů v kapitole 1.1.3. Tam jsme mimo jiné odvodili, že C, průsečík přímky c s nevlastní přímkou l_∞, bude odpovídat směrovému vektoru přímky c. Průsečíky přímek a,b,c,d,e,f s nevlastní přímkou l_∞ zapíšeme ve tvaru $C = [b_c : -a_c : 0]$, což můžeme také zapsat ve tvaru $C = [1 : -\frac{a_c}{b_c} : 0] = [1 : k_c : 0]$, kde k_c je směrnice přímky c. Pokud budeme nahlížet na přímku l_∞ jako na $\mathbb{RP}^1$, můžeme příslušné souřadnice bodů zapsat ve tvaru: $C = [1 : k_c]$.[1]

Charakterizace takto vytvořené čtyřstranné množiny nám poskytne velmi zajímavou podmínku pro směrnice přímek mezi čtyřmi body:

$$[c,e][a,f][b,d] = [b,f][c,d][a,e]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k_c \\ 1 & k_e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k_a \\ 1 & k_f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k_b \\ 1 & k_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k_b \\ 1 & k_f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k_c \\ 1 & k_d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k_a \\ 1 & k_e \end{vmatrix}$$

$$(k_e - k_c)(k_f - k_a)(k_d - k_b) = (k_f - k_b)(k_d - k_c)(k_e - k_a) \tag{2.6}$$



Obrázek 2.8: podmínka pro směrnice přímek

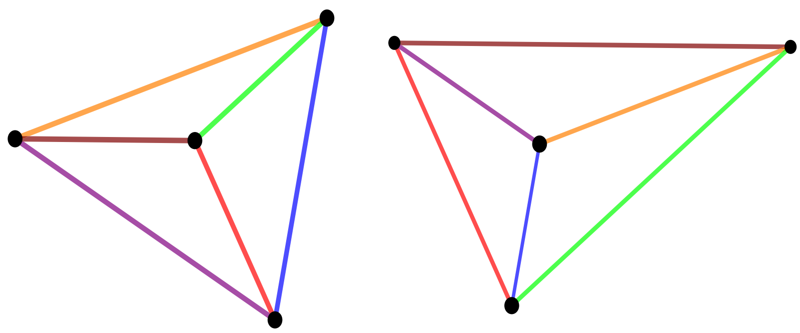
Příklad:

$$\left(5 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 0\right) = \left(-\frac{3}{2} - 0\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(5 - \left(-\frac{3}{5}\right)\right)$$

$$\left(\frac{14}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{28}{5}\right)$$

$$\left(-\frac{14}{10}\right) = \left(-\frac{14}{10}\right)$$

Shrneme-li poznatky o asociovaném čtyřstranu s podmínkou pro směrnice mezi čtyřmi body, můžeme narýsovat asociovanou verzi obrázku 2.8 s rovnoběžnými stranami.[1]



Obrázek 2.9: asociované konstrukce stejné čtyřstranné množiny na nevl. přímce

Pokud použijeme zobecněnou verzi čtyřstranných množin z kapitoly 2.2.2 (vztah 2.5), můžeme rozšířit také podmínku pro směrnice mezi body libovolného n-úhelníku:

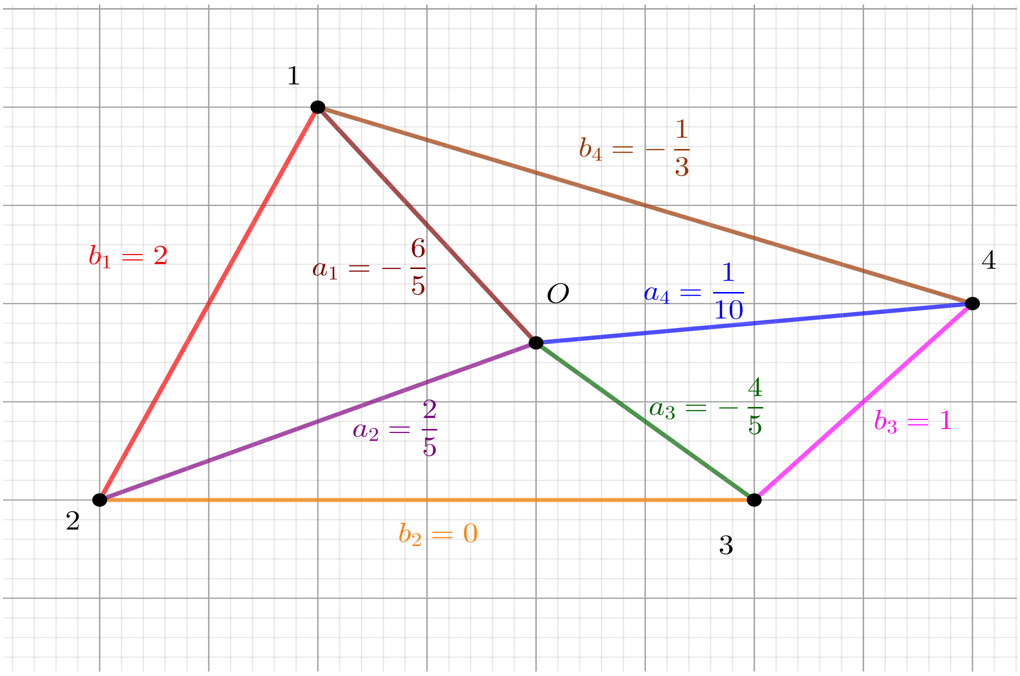
$$\prod_{i=1}^{n}[A_i,B_i] = \prod_{i=1}^{n}[A_{i+1},B_i]$$

$$\prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}1 & a_i\\ 1 & b_i\end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}1 & a_{i+1}\\ 1 & b_i\end{vmatrix} \tag{2.7}$$

V rovnosti (2.7) vystupují hodnoty a_i,b_i opět jako směrnice příslušných přímek s indexy v $mod(n)$.

Konstrukce zobecněného vztahu pro směrnice přímek: V sekci 2.2.2 jsme při odvozování charakterizace zobecněné čtyřstranné množiny promítli vrcholy n-úhelníku kolmo na přímku l (obrázek 2.4 a 2.6). Jinými slovy jsme body spojili s nevlastním bodem. Namísto nevlastního bodu si zvolíme libovolný vlastní bod O a následně s ním spojíme vrcholy n-úhelníku, které jsou označeny čísly 1,2..,n. Naopak přímku l zvolíme jako nevlastní přímku l_∞. Průsečíky přímek n-úhelníku s přímkou l označíme $b_i = l \cap (i,i+1)$ a průsečíky $Oi \cap l$ označíme a_i.

Nyní už máme připravené všechno, co potřebujeme, a můžeme se podívat na příklad, kde budeme počítat se směrnicemi přímek mezi pěti body ($n = 4$).



Obrázek 2.10: zobecněná podmínka pro směrnice mezi body

Příklad:

$$\prod_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} 1 & a_i \\ 1 & b_i \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} 1 & a_{i+1} \\ 1 & b_i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ 1 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ 1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\left(2 + \frac{6}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(1 + \frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = \left(2 - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{6}{5}\right)$$

$$0.9984 = 0{,}9984$$

Závěr

V této bakalářské práci jsme zavedli čtyřstranné množiny, se kterými se při běžném studiu matematiky nejspíše nesetkáte. Nicméně doufám, že jsem čtenáře podnítil ke zkoumání těchto množin, nebo alespoň k zájmu o projektivní geometrii obecně. V první části jsme zavedli homogenní souřadnice, projektivní rovinu a princip duality, který je jedním ze základních pilířů tohoto oboru. A proto není divu, že byl tento poznatek hojně využíván po zbytek práce. Podrobně jsme u čtyřstranných množin rozebrali charakterizaci a dualitu, a posléze je zobecnili na libovolný počet bodů. Touto prací není problematika čtyřstranných množin ani zdaleka vyčerpána. Při hlubším studiu jistě naleznete celou řadu zajímavých vlastností, které by postačily na několik dalších kapitol.

Seznam použité literatury

[1] J. Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour Through Real and Complex Geometry.* Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[2] J. N. Cedenberg. *A course in modern geometries.* Springer, 2001.

[3] O. Whicher. *Projective Geometry: Creative Polarities in Space and Time.* Rudolf Steiner Press, 2013.

[4] V. Hlavatý. *Projektivní geometrie I.* Melantrich, Praha, 1943.

Seznam obrázků