POSUDEK VEDOUCÍHO BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

William Tatarko: CSP nad orientovanými stromy

Problém splňování omezení (Constraint Satisfaction Problem, CSP) poskytuje společný rámec pro mnoho výpočetních otázek důležitých jak z praktického, tak z teoretického hlediska. Pro daný konečný orientovaný graf $\mathbf{H}$, CSP($\mathbf{H}$) je rozhodovací problém, kde na vstupu dostaneme jiný konečný orientovaný graf $\mathbf{G}$, a cílem je zjistit, zda existuje homomorfismus $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$. Slavná hypotéza o dichotomii CSP Federa a Vardiho z roku 1993 říká, že pro každý orientovaný graf $\mathbf{H}$ je problém CSP($\mathbf{H}$) řešitelný v polynomiálním čase nebo NP-úplný. Tato hypotéza byla před dvěma lety nezávisle vyřešena Bulatovem a Zhukem, důkaz je založen na tzv. algebraickém přístupu, který se opírá o studium polymorfismů, tj. homomorfismů z $\mathbf{H}^n$ do $\mathbf{H}$. Nicméně, mnoho otázek v této oblasti zůstává otevřených. Předchozí částečné výsledky zahrnují dichotomii pro neorientované grafy Hella a Nešetřila z roku 1990, a její zobecnění na hladké grafy (orientované grafy bez zdrojů a stoků) od Barta, Kozika a Nivena z roku 2009.

Tato práce se zabývá složitostí CSP($\mathbf{T}$) kde $\mathbf{T}$ je orientovaný strom, konktrétněji otázkou, jaký je nejmenší strom $\mathbf{T}$, pro který je CSP($\mathbf{T}$) NP-úplné. Tato třída problémů se vyznačuje odolností vůči známým metodám použitým například pro hladké grafy, a značnou kombinatorickou náročností. První známý příklad těžkého stromu, který má 287 vrcholů, byl objeven v roce 1991 Gutjahrem, Welzlem a Woegingerem, Gutjahr následně vylepšil konstrukci na 81 vrcholů. Hell, Nešetřil a Zhu v roce 1996 definovali jistou velmi omezenou třídu stromů, tzv. speciální triády, a našli mezi nimi těžký strom s 45 vrcholy. Barto, Kozik a Niven v roce 2009 s použitím algebraického přístupu sestrojili těžkou speciální triádu s 39 vrcholy, a vyslovili hypotézu, že jde o nejmenší těžký orientovaný strom.

Původní představou vedoucího bylo, že práce bude směřovat k pokusu o alespoň částečné potvrzení této hypotézy, bakulantovi se však podařilo nalézt značně menší protipříklad: orientovaný strom $\mathbf{T}$ s 26 vrcholy pro který je CSP($\mathbf{T}$) stále ještě NP-úplným problémem. Jde o zajímavý výsledek, k jehož důkazu bylo třeba netriviální zobecnění metod vyvinutých pro speciální triády na výrazně komplikovanější triády obecné.

V první kapitole jsou stručně představeny potřebné pojmy a nástroje z teorie složitosti, teorie grafů a algebraického přístupu k CSP. Ve druhé kapitole je ukázáno, že příliš nízké stromy nemohou být těžké, a autor představuje vlastnost nakreslitelnosti stromu, která je postačující podmínkou k existenci polynomiálního algoritmu. Ve třetí kapitole autor čtivě popisuje, jak využil kritérií z předchozí kapitoly při hledání kandidátů, pro které by CSP mohlo být těžké. Zbytek této kapitoly je věnován samotnému důkazu, že nalezený 26-vrcholový strom je těžký. K práci je také přiložen pseudokód, který lze použít k ověření některých kombinatoricky obtížnějších částí důkazu.

Bezpochyby došlo ke splnění zadání a práce splňuje požadavky kladené na vlastní příspěvek autora. Lze vyzdvihnout také to, že bakulant po celou dobu samostatně řídil postup práce, čímž prokázal vyspělost matematického uvažování. Po formální stránce je tato práce, psaná v anglickém jazyce a dosahující horní meze doporučeného rozsahu, na velmi dobré úrovni. Matematické vyjadřování je téměř bezchybné, s důrazem na detaily, a všechny argumenty lze bez problémů sledovat.

Předložená práce splňuje všechny požadavky kladené na bakalářskou práci, a proto ji **doporučuji k obhajobě**.

V Praze dne 14. června 2019

Jakub Bulín