MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Švamberová

Dynamika epidemií

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu této práce doc. Mgr. Petru Kaplickému, Ph.D. za mnoho cenných rad, které mi poskytl během tvorby práce, a za veškerý čas, který vedení práce věnoval.

Název práce: Dynamika epidemií

Autor: Lucie Švamberová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Šíření infekčních nemocí v populaci je jeden z mnoha jevů, které lze popisovat pomocí diferenciálních rovnic. V této bakalářské práci se budeme zabývat epidemiologickými modely SEIR, respektive SIR. Nejprve formulujeme modely SEIR a SIR a následně vyšetřujeme vlastnosti jejich řešení - existenci, jednoznačnost, omezenost. Ukážeme, že řešení SEIR lze převést na řešení SIR. Poté se budeme věnovat dynamice modelu SIR - vyšetříme stabilitu a typ stacionárních bodů v závislosti na hodnotách parametrů.

Klíčová slova: SIR, SEIR, stabilita ekvilibrií

Title: Dynamics of epidemics

Author: Lucie Švamberová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Spreading of infectious diseases in population is one of many phenomenons that can be described using differential equations. In this bachelor thesis, we deal with epidemiologic models SEIR, SIR respectively. First, we formulate models SEIR and SIR and then examine the properties of their solutions - existence, uniqueness, boundedness. We show that the solution of SEIR can be converted to the solution of SIR. After that we pursue dynamics of SIR model - we examine the stability and type of the stationary points with respect to values of the parameters.

Keywords: SIR, SEIR, equilibrium stability

Obsah

Úvod

Šíření infekčních nemocí v populaci je jeden z mnoha jevů, které lze popisovat pomocí diferenciálních rovnic. V této bakalářské práci se budeme zabývat epidemiologickými modely SEIR, respektive SIR.

Základem SEIR modelu je rozdělení populace do čtyř skupin. Ve skupině S (zkratka pro „susceptibles“) jsou ti, kteří nemoc neprodělali a mohou se nakazit, E („exposed“) jsou infikovaní, kteří však nákazu ještě nemohou šířit, I („infectives“) jsou infikovaní, kteří chorobu zároveň mohou dále rozšiřovat, a R („recovered“) jsou ti, kteří nemoc již prodělali, vyléčili se a jsou nyní vůči nákaze imunní. SIR model oproti SEIR modelu vynechává kategorii infikovaných, kteří ještě nejsou přenašeči.

V práci nejprve formulujeme modely SEIR a SIR a následně vyšetřujeme vlastnosti jejich řešení - existenci, jednoznačnost, omezenost, a ukážeme, že řešení SEIR lze převést na řešení SIR. Poté se budeme věnovat dynamice modelu SIR - vyšetříme stabilitu stacionárních bodů a určíme jejich typ.

1. Modelování a základní teorie ODR

V této kapitole nejdříve odvodíme modely SEIR a SIR. Při tom budeme předpokládat, že:

- každý jedinec v populaci při narození spadá do skupiny S;
- velikost populace zůstává stále stejná - úmrtí a emigrace jsou vyrovnány nově narozenými jedinci;
- u žádného z jedinců ohrožených nemocí není vyšší pravděpodobnost nákazy než u jiného;
- žádný z infikovaných jedinců nenakazí ostatní s vyšší pravděpodobností než ostatní infikovaní;
- pravděpodobnost setkání jakýchkoli dvou jedinců je stejná (možnost setkání více než dvou jedinců zanedbáme);
- populace je dostatečně velká (celkový počet osob v populaci vždy je nějaké přirozené číslo, což samozřejmě platí také pro počet osob v každé ze skupin S, E, I, R; proto abychom mohli funkce považovat za spojité s dostatečnou přesností, musíme předpokládat dosti velkou populaci).

1.1 Odvození rovnic pro modely SEIR a SIR

Vývoj jmenovaných skupin „susceptibles“, „exposed“, „infectives“ a „recovered“ bude popsán (spojitými) funkcemi S, E, I, R, pro které v každém čase $t \in \mathbb{R}_0^+$ platí $S(t), E(t), I(t), R(t) \in [0,1]$, pomocí soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou nyní odvodíme. Tyto funkce udávají jaký podíl populace tvoří daná skupina v časovém okamžiku (a tedy pro jakýkoli časový okamžik musí být $(S + E + I + R)(t) = 1$, což pro odvozenou soustavu ještě ukážeme v Lemmatu 12).

Budeme odvozovat rovnice modelu SEIR (tak jako v knize Beltrami (2002)). Zaveďme nejprve několik parametrů, které budou v modelu dále vystupovat:

- $r > 0$ značí průměrnou porodnost za jednotku času;
- $b > 0$ je průměrný počet osob, se kterými se infekční jedinec potká za jednotku času;
- $a > 0$ popisuje délku inkubační doby – konkrétně a je průměrný počet nakažených, ale neinfekčních osob, které se za jednotku času stanou přenašeči (neboli průměrný počet jedinců ze skupiny E, kteří za jednotku času přejdou do skupiny I);
- $c > 0$ charakterizuje, jak rychle dochází k vyléčení – jde o průměrný počet nakažených, kteří se za jednotku času uzdraví (tedy průměrný počet jedinců ze skupiny I, kteří za jednotku času přejdou do skupiny R).

Počet osob, které se mohou nakazit, bude tím vyšší, čím vyšší je průměrná porodnost r; naopak snižován je zaprvé úmrtností a emigrací (to lze reprezentovat výrazem $rS(t)$ – parametr zůstává stejný, neboť jsme předpokládali neměnnou velikost populace), zadruhé nákazou některých osob. Výrazem $bI(t)$ můžeme charakterizovat průměrný počet jedinců, kteří se za jednotku času nakazí od všech infekčních. Podíl dosud nenakažených jedinců, kteří se za jednotku času průměrně nakazí, pak můžeme zapsat $bI(t)S(t)$. Z toho dostáváme rovnici:

$$S'(t) = r - rS(t) - bI(t)S(t). \tag{1.1}$$

Nyní se podívejme na odvození rovnice pro skupinu infikovaných, kteří ještě nejsou přenašeči. Předpokládáme-li nenulovou inkubační dobu, pak se všichni nakažení nachází nejprve v této skupině, a tedy jejich nárůst je úměrný výrazu $bI(t)S(t)$. Snižován je zaprvé opět vymíráním a emigrací a zadruhé tím, že po uplynutí inkubační doby se tito lidé stávají přenašeči (reprezentováno výrazy $rE(t)$ a $aE(t)$). Dohromady:

$$E'(t) = bI(t)S(t) - rE(t) - aE(t). \tag{1.2}$$

Podíl přenašečů je zvyšován osobami ze skupiny E, které se dostanou za inkubační dobu, a snižován úmrtími/migrací a vyléčením, tedy:

$$I'(t) = aE(t) - rI(t) - cI(t). \tag{1.3}$$

Podíl vyléčených je úměrný tomu, kolik infekčních se podaří vyléčit, a naopak rychlost, jakou vyléčených ubývá, je úměrná úbytku populace:

$$R'(t) = cI(t) - rR(t). \tag{1.4}$$

Dohromady z (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) máme model SEIR jako soustavu čtyř obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} S'(t) &= r - rS(t) - bI(t)S(t) \\ E'(t) &= bI(t)S(t) - rE(t) - aE(t) \\ I'(t) &= aE(t) - rI(t) - cI(t) \\ R'(t) &= cI(t) - rR(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

s počátečními podmínkami

$$S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, \tag{1.6}$$

kde $S_0, E_0, I_0, R_0 \geq 0$ a $S_0 + E_0 + I_0 + R_0 = 1$.

Pro získání jednoduššího modelu SIR uvažujeme $a \to +\infty$; vypadne pak skupina E a nárůst přenašečů bude úměrný výrazu $bI(t)S(t)$. Korektnost přechodu od modelu SEIR k modelu SIR pak ověříme v následující kapitole.

Model SIR budeme uvažovat ve tvaru

$$\begin{aligned} S'(t) &= r - rS(t) - bI(t)S(t) \\ I'(t) &= bI(t)S(t) - rI(t) - cI(t) \\ R'(t) &= cI(t) - rR(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

s počátečními podmínkami

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0 + E_0, R(0) = R_0. \tag{1.8}$$

1.2 Použité pojmy a věty

Formulujme nyní základní pojmy a tvrzení, které budeme používat v dalším textu. Budou formulovány podobně jako ve standardních studijních textech, např. Pražák (2018) či Amann a Metzen (1990).

Budeme se věnovat studiu soustav obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce. Obecně budeme mít soustavu

$$x'(t) = f(x(t),t), \tag{1.9}$$

kde $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. S těmito předpoklady budeme pracovat v dalších formulacích definic a vět (neřekneme-li jinak).

Nejprve definujme co znamená řešení a maximální řešení uvedené soustavy diferenciálních rovnic.

Definice 1. *Řešením soustavy* (1.9) *v* Ω nazveme dvojici (x,I), kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $x : I \to \mathbb{R}^n$ a pro všechna $t \in I$ je splněno:

- $(x(t), t) \in \Omega$,
- existuje vlastní $x'(t)$,
- $x'(t) = f(x(t),t)$.

Řešení $(\hat{x},\hat{I})$ nazveme *prodloužení řešení* (x,I), pokud $\hat{I} \supset I$ a pro všechna $t \in I$ je splněno $\hat{x}(t) = x(t)$.
Řešení (x,I) nazveme *maximální řešení*, nemá-li žádné netriviální prodloužení (tj. prodloužení $(\hat{x}, \hat{I})$ splňující $\hat{I} \supset I, \hat{I} \neq I$).

K důkazu existence řešení soustav diferenciálních rovnic budeme používat následující větu.

Věta 1 (Cauchy-Peanova)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $(x_0,t_0) \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkce. Pak existuje* $\delta > 0$ *a* $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$*, které je řešením rovnice* $x'(t) = f(x(t),t)$ *v* Ω *a splňuje* $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Důkaz lze najít např. v (Amann a Metzen, 1990, Kapitola 2, Sekce 7, Věta (7.3.)). □

Další, čím se budeme zabývat, je jednoznačnost řešení.

Definice 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce. Mějme soustavu $x'(t) = f(x(t),t)$. Řekneme, že soustava *má v* Ω *vlastnost globální jednoznačnosti*, pokud pro libovolná řešení $(x,I), (y,J)$, která pro nějaké $t_0 \in I \cap J$ splňují $x(t_0) = y(t_0)$, platí $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J$.

Pro důkaz jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic využíváme tuto větu:

Věta 2 (o globální jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkce. Nechť* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t),t)$ *pro všechna* $i = 1,\dots,n$ *existují a jsou spojité v* Ω. *Pak má rovnice* $x'(t) = f(x(t),t)$ *v* Ω *vlastnost globální jednoznačnosti.*

Důkaz. Důkaz lze najít např. v (Amann a Metzen, 1990, Kapitola 2, Sekce 7, Věta (7.6.))). □

Dále budeme dokazovat omezenost řešení soustav. K tomu budeme potřebovat Větu o opuštění kompaktu.

Věta 3. *[O opuštění kompaktu] Nechť $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je kompaktní množina a (x,I) maximální řešení* (1.9)*, které splňuje $(x(t_0),t_0) \in K$. Pak existují $t_1, t_2 \in I$ splňující $t_1 < t_0 < t_2$ taková, že $(x(t_1),t_1) \notin K$ a $(x(t_2),t_2) \notin K$.*

Důkaz. Důkaz lze najít např. v (Pražák, 2014, Kapitola 3, Věta 9) (ve větší obecnosti). □

Další, čím se v příští kapitole budeme zabývat, bude ověření korektnosti přechodu z modelu SEIR na SIR. Při tom budeme potřebovat Arzelà–Ascoliho větu, Grönwallovo lemma a dvě lemmata, jejichž platnost dokážu.

Věta 4 (Arzelà–Ascoliho)**.** *Mějme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou spojité na $\mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Nechť jsou splněny následující podmínky:*

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta)(\forall n \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ *(stejná stejnoměrná spojitost),*
- $(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : |f_n(x)| < K$ *(stejná omezenost).*

Pak existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz lze najít např. v (Rudin, 1976, Kapitola 7). □

Lemma 5. *Mějme posloupnosti reálných funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde f_n, g_n jsou spojité na $\mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a splňují $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$. Pak*

1. $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$,
2. *pokud navíc existují $K_1, K_2 > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|g(x)| \leq K_1$ a $|f_n(x)| \leq K_2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $f_n g_n \rightrightarrows fg$.*

Důkaz. Platí $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, což znamená

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^1 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^1) : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ &(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^2 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^2) : |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1. V této části chceme ukázat, že

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^3 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^3) : |(f_n+g_n)(x)-(f+g)(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.11}$$

   Volme $\varepsilon > 0$ a $n_0^3 = \max(n_0^1, n_0^2)$. Pak s využitím (1.10) a trojúhelníkové nerovnosti platí pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^3$:

   $$\begin{aligned} |(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| &= |f_n(x) - f(x) + g_n(x) - g(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   Tedy (1.11) je splněno.

2. Nyní potřebujeme dokázat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^4 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^4) : |(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.12}$$

Platí

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^1 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^1) : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{K_1},\\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0^2 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^2) : |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{K_2}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Volme $\varepsilon > 0$ a $n_0^4 = \max(n_0^1, n_0^2)$. Pak s využitím (1.13) a trojúhelníkové nerovnosti platí pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0^4$:

$$\begin{aligned}|(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| = |(f_n g_n)(x) - (f_n g)(x) + (f_n g)(x) - (fg)(x)| \leq\\ \leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (1.12) je splněno.

□

Věta 6 (Grönwallovo lemma)**.** *Nechť w, g jsou nezáporné spojité funkce na intervalu I, $t_0 \in I$, $K \geq 0$ a pro každé $t \in I$ je splněn vztah*

$$w(t) \leq K + |\int_{t_0}^{t} w(s)g(s)\ \mathrm{d}s|.$$

Pak pro každé $t \in I$ platí

$$w(t) \leq K \exp(|\int_{t_0}^{t} g(s)\ \mathrm{d}s|).$$

Důkaz. Důkaz lze najít např. v Amann a Metzen (1990)), str. 89-90. □

V Lemmatu 7, budu využívat pojmu L-lipschitzovská funkce, který nyní definuji.

Definice 3. Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (kde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina) takovou, že existuje $L > 0$ takové, že pro všechna $(x,t), (y,t) \in \Omega$ platí $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$. Pak řekneme, že f je *L-lipschitzovská vzhledem k x v Ω*.

Lemma 7. *Uvažujme soustavu* (1.9). *Nechť f je L-lipschitzovská funkce vzhledem k x v Ω. Pak pro libovolná dvě řešení $(x,I), (y,J)$ v Ω a $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \exp(L|t - t_0|). \tag{1.14}$$

Důkaz. Jsou-li libovolná $(x,I), (y,J)$ řešením (1.9) v Ω, platí

$$\begin{aligned}x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\ \mathrm{d}s,\\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s),s)\ \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Tedy

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(x(s),s) - f(y(s),s))\, \mathrm{d}s,$$

a tak dle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| + |\int_{t_0}^{t} (f(x(s),s) - f(y(s),s))\, \mathrm{d}s| \leq \\ \leq |x(t_0) - y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(x(s),s) - f(y(s),s)|\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Z (1.16) a L-lipschitzovskosti funkce f dále dostáváme

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L|(x(s) - y(s))|\, \mathrm{d}s.$$

Nyní stačí aplikovat Větu 6 pro $K = |x(t_0) - y(t_0)| \geq 0, w = |x - y|, g \equiv L$ a $t \in I \cap J$ a dostáváme

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \exp(|\int_{t_0}^{t} L\, \mathrm{d}s|),$$

z čehož už zintegrováním vyplývá požadovaná nerovnost (1.14). $\square$

Dále nás bude zajímat existence stacionárních bodů soustavy a jejich stabilita. Stabilita řešení je důležitá vlastnost - můžeme si ji představovat tak, že pokud „malá“ změna počáteční podmínky $x(t_0) = x_0$ vede k „malé“ změně řešení soustavy pro všechna $t > t_0$, pak je dané řešení stabilní, a nestabilní je v opačném případě.

Nejprve si definujme pojem stacionárního bodu.

Definice 4. Bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nazveme *stacionární bod rovnice* $x'(t) = f(x(t),t)$, je-li pro každé $t \in \mathbb{R}$ splněno $f(x_0, t) = 0$.

Pro zavedení pojmu stability řešení budeme potřebovat definovat ještě řešicí funkci.

Definice 5. Nechť f je spojitá funkce, pro kterou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t),t)$ existují a jsou spojité v Ω pro všechna $i = 1,...,n$. Funkci $\varphi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ definovanou předpisem $\varphi(t,t_0,x_0) = x(t)$ pro $t \in I$, kde (x,I) je (jediné a maximální) řešení rovnice $x'(t) = f(x(t),t)$ v Ω s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, nazveme *řešicí funkce soustavy* (1.9).

Definice 6. Nechť $f = f(x(t),t)$ je spojitá v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t),t)$ existují a jsou spojité v Ω pro všechna $i = 1,...,n$. Nechť $\Omega \supset \{0\} \times (\tau, +\infty)$ pro $\tau \geq 0$ a $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in (\tau, +\infty)$. Řekneme, že stacionární bod x_0 rovnice (1.9) je

- *stabilní*, pokud pro všechna $t_0 \in (\tau, +\infty)$ a všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $|\tilde{x}| < \delta$, pak řešicí funkce $\varphi(t, t_0, \tilde{x})$ je pro všechna $t \geq t_0$ definována a splňuje $|\varphi(t, t_0, \tilde{x})| < \epsilon$,

- *nestabilní*, pokud není stabilní,

- *lokální atraktor*, pokud pro všechna $t_0 \in (\tau, +\infty)$ existuje $\eta > 0$ tak, že pokud $|\tilde{x}| < \eta$, pak řešicí funkce $\varphi(t, t_0, \tilde{x})$ je pro všechna $t \geq t_0$ definována a navíc $\varphi(t, t_0, \tilde{x}) \to 0$ pro $t \to +\infty$,
- *asymptoticky stabilní*, pokud je stabilní a zároveň lokální atraktor.

K dokazování asymptotické stability či nestability stacionárních bodů soustav použijeme větu, která následuje.

Věta 8 (postačující podmínky pro asymptotickou stabilitu a pro nestabilitu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce. Mějme dánu rovnici $x'(t) = f(x(t))$. Nechť $x_0 \in \Omega$ je bod takový, že $f(x_0) = 0$ a f je třídy C^1 na jistém okolí x_0.*

1. *Pokud platí $\operatorname{tr}(\nabla f(x_0)) < 0$ (kde $\operatorname{tr}(A)$ značí stopu matice A, tj. součet prvků na hlavní diagonále) a $\det(\nabla f(x_0)) > 0$, pak bod x_0 je asymptoticky stabilní.*

2. *Platí-li $\det(\nabla f(x_0)) < 0$, pak bod x_0 je nestabilní (nezávisle na znaménku $\operatorname{tr}(\nabla f(x_0))$).*

Provedu vlastní důkaz této věty. Budu v něm využívat větu o linearizované stabilitě a nestabilitě a další lemma, které také dokážu.

Věta 9 (o linearizované stabilitě a nestabilitě)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce. Mějme dánu rovnici $x'(t) = f(x(t))$. Nechť $x_0 \in \Omega$ je bod takový, že $f(x_0) = 0$ a f je třídy C^1 na jistém okolí bodu x_0.*

1. *(O linearizované stabilitě.) Pokud pro všechna $\lambda \in \sigma(\nabla f(x_0))$ platí $Re\lambda < 0$, pak x_0 je asymptoticky stabilní.*

2. *(O linearizované nestabilitě.) Existuje-li $\lambda \in \sigma(\nabla f(x_0))$ takové, že $Re\lambda > 0$, je x_0 nestabilní.*

Lemma 10.

1. *Nechť $B,C > 0$. Pak kořeny rovnice $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ mají zápornou reálnou část.*

2. *Nechť $C < 0$, $B \in \mathbb{R}$. Pak kořeny rovnice $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ jsou reálné a mají opačná znaménka.*

Důkaz. Mějme rovnici $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ s reálnými koeficienty B,C. Pak $\lambda_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4C}}{2}$.

Nejdříve dokážeme první část lemmatu. Pokud $B^2 - 4C \leq 0$, je $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\frac{B}{2}$, což určitě je záporné číslo.

Pokud $B^2 - 4C > 0$, pak $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$. Zbývá ukázat, že také $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$. Jelikož podle předpokladu je $B,C > 0$, platí $\sqrt{B^2 - 4C} < B$, a tedy také λ_1 je záporné.

První část lemmatu je tedy dokázána. Nyní dokažme druhou. Platí $\lambda_{1,2} = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2} = \frac{-B\pm\sqrt{B^2+4|C|}}{2}$, tedy výraz pod odmocninou je určitě kladný, a proto jsou $\lambda_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2+4|C|}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2+4|C|}}{2}$ reálná čísla. Dále z předpokladu vyplývá $\sqrt{B^2 + 4|C|} > |B|$, z čehož dostáváme $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$ nezávisle na znaménku B. Tedy λ_1, λ_2 mají opačná znaménka.

Tím je lemma dokázáno. $\square$

Nyní se přesuňme k důkazu Věty 8.

Důkaz Věty 8. Označme

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \end{bmatrix},$$

charakteristický polynom této matice je

$$p_{x_0}(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\nabla f(x_0))\lambda + \det(\nabla f(x_0)).$$

V prvním případě máme $\operatorname{tr}(\nabla f(x_0)) < 0$ a $\det(\nabla f(x_0)) > 0$. Položme

$$B = -\operatorname{tr}(\nabla f(x_0)), C = \det(\nabla f(x_0)).$$

Podle předpokladů je B,$C > 0$, a aplikací první části Lemmatu 10 dostáváme, že reálné části vlastních čísel jsou záporné. Z toho dle Věty o linearizované stabilitě (Věta 9, 1. část) plyne asymptotická stabilita bodu x_0.

Nyní se podívejme na druhou část Věty 8. Je $\det(\nabla f(x_0)) < 0$, tedy v Lemmatu 10 je $C > 0$. Z druhé části Lemmatu 10 plyne, že vlastní čísla jsou reálná a jedno z nich je kladné. Použitím věty o linearizované nestabilitě (Věta 9, 2. část) tak dostáváme nestabilitu bodu x_0. □

Ke klasifikaci stacionárních bodů zavedeme ještě několik dalších pojmů. Různé typy stacionárních bodů se liší tvarem trajektorie řešení ve svém okolí. Konkrétně lze znázornění trajektorií nalézt např. v Amann a Metzen (1990).

Definice 7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce. Mějme dánu rovnici $x'(t) = f(x(t))$. Nechť $x_0 \in \Omega$ je stacionární bod takový, že f je třídy C^1 na jistém okolí x_0. Označme $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ vlastní čísla matice $\nabla f(x_0)$. Pak stacionární bod x_0 nazveme

- *sedlový bod*, pokud λ_1, λ_2 jsou reálná čísla s opačnými znaménky,
- *uzel*, pokud λ_1, λ_2 jsou reálná čísla se stejnými znaménky,
- *spirální bod*, pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ a $\operatorname{Re}\lambda_1, \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$.

Z Věty 9 vyplývá, že uzel a spirální bod mohou být stabilní i nestabilní v závislosti na znaménku reálné části, zatímco sedlový bod je vždy nestabilní.

2. Analýza modelů

V následující kapitole se budeme věnovat existenci a jednoznačnosti řešení soustavy (1.5) s počátečními podmínkami (1.6) a soustavy (1.7) s počátečními podmínkami (1.8) Dále budeme hledat stacionární body a vyšetřovat jejich stabilitu a klasifikovat je.

Budu se zabývat především modelem SIR; pro model SEIR dokážu pouze existenci a jednoznačnost řešení.

2.1 Základní vlastnosti řešení

Lemma 11. *Pro všechna* $t_0 \in \mathbb{R}$, $(S,E,I,R)_0 \in \mathbb{R}^4$ *existuje* $((S,E,I,R), J)$ *řešení* (1.5) *tak, že* $t_0 \in J$ *a* $(S,E,I,R)(t_0) = (S,E,I,R)_0$. *Obdobně, pro všechna* $t_0 \in \mathbb{R}$, $(S,I,R)_0 \in \mathbb{R}^3$ *existuje* $((S,I,R), J)$ *řešení* (1.7) *tak, že* $t_0 \in J$ *a* $(S,I,R)(t_0) = (S,I,R)_0$. *Dále, rovnice* (1.5) *a* (1.7) *mají vlastnost globální jednoznačnosti.*

Důkaz. Dokažme nejprve existenci a jednoznačnost řešení modelu SEIR.

V soustavě (1.5) jsou r, b, a, c konstanty, $x_1(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t))^\top$, $f_1(x(t)) = (r - rS(t) - bI(t)S(t), bI(t)S(t) - rE(t) - aE(t), aE(t) - rI(t) - cI(t), cI(t) - rR(t))^\top$, označme $f_1(x(t)) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4)^\top$. Tato funkce je evidentně spojitá na celé množině $\mathbb{R}^4$, a tak podle Věty 1 řešení dané soustavy lokálně existuje na celém $\mathbb{R}^5$ (tím pádem i na množině $[0,1]^4 \times \mathbb{R}_0^+$, která nás zajímá v našem modelu).

Podívejme se ještě na jednoznačnost řešení této soustavy. Funkce $f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4$ jsou polynomy s proměnnými S, E, I, R, a tak jsou všechny parciální derivace $\frac{\partial f_1^i}{\partial S}(S,E,I,R)$, $\frac{\partial f_1^i}{\partial E}(S,E,I,R)$, $\frac{\partial f_1^i}{\partial I}(S,E,I,R)$, $\frac{\partial f_1^i}{\partial R}(S,E,I,R)$ spojité pro $i = 1,2,3,4$. Použitím Věty 2 tedy dostáváme, že soustava (1.5) má vlastnost globální jednoznačnosti na $\mathbb{R}^5$ (tedy i na množině $[0,1]^4 \times \mathbb{R}_0^+$, která nás zajímá v našem modelu).

Pro model SIR lze existenci a jednoznačnost řešení ukázat podobně. Je $x_2(t) = (S(t), I(t), R(t))^\top$, $f_2(x(t)) = (f_2^1, f_2^2, f_2^3)^\top = (r - rS(t) - bI(t)S(t), bI(t)S(t) - rI(t) - cI(t), cI(t) - rR(t))^\top$. Funkce $f_2(t)$ je spojitá na celé množině $\mathbb{R}^3$, a proto dle Věty 1 řešení dané soustavy lokálně existuje na celém $\mathbb{R}^4$ (tedy i na množině $[0,1]^3 \times \mathbb{R}_0^+$).

Parciální derivace $\frac{\partial f_2^i}{\partial S}(S,I,R)$, $\frac{\partial f_2^i}{\partial I}(S,I,R)$, $\frac{\partial f_2^i}{\partial R}(S,I,R)$ jsou spojité pro $i = 1,2,3$ opět proto, že f_2^1, f_2^2, f_2^3 jsou polynomiální funkce, čímž z Věty 2 plyne globální jednoznačnost řešení soustavy (1.7) na $\mathbb{R}^4$ (tedy i na množině $[0,1]^3 \times \mathbb{R}_0^+$). $\square$

Podívejme se dále na omezenost řešení těchto soustav.

Lemma 12. *Řešení soustavy* (1.5), *resp.* (1.7), *s počátečními podmínkami* (1.6), *resp.* (1.8), *jsou omezená na* $[0, +\infty)$. *Konkrétněji,* $0 \leq S(t), E(t), I(t), R(t) \leq 1$ *je splněno v každém čase* $t \in [0, +\infty)$. *Navíc řešení soustavy* (1.5) *s počátečními podmínkami* (1.6) *splňuje vztah* $(S + E + I + R)(t) = 1$, *a podobně řešení* (1.7) *s počátečními podmínkami* (1.8) *vztah* $(S + I + R)(t) = 1$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.

Z toho také plyne, že maximální řešení (1.5), *resp.* (1.7), *s počátečními podmínkami* (1.6), *resp.* (1.8), *je definované na intervalu obsahujícím* $[0, +\infty)$.

Důkaz. Ve Větě 11 jsme již ukázali, že řešení obou soustav existují a jsou jednoznačná, čehož budeme dále využívat v tomto důkazu.

Začněme s modelem SEIR. Ze soustavy (1.5) platí

$$((S+E+I+R)(t))' = r-rS(t)-rE(t)-rI(t)-rR(t) = r(1-(S+E+I+R)(t)). \tag{2.1}$$

Tedy $S+E+I+R=1$ je stacionární bod rovnice (2.1), pro počáteční podmínku (1.6) dostáváme $(S+E+I+R)(0)=1$, a jak jsme již ukázali, řešení je jednoznačné. Proto platí $((S+E+I+R)(t))=1$ pro všechna $t \in [0,+\infty)$.

Nyní se podívejme na model SIR. Ze soustavy (1.7) platí

$$((S+I+R)(t))' = r(1-(S+I+R)(t)). \tag{2.2}$$

Tedy $S+I+R=1$ je stacionární bod rovnice (2.2), pro počáteční podmínku (1.8) dostáváme $(S+I+R)(0)=1$, a jak jsme již ukázali, řešení je jednoznačné. Proto platí $((S+I+R)(t))=1$ pro všechna $t \in [0,+\infty)$.

Omezenost na $[0,+\infty)$ by plynula z nerovností $S(t), E(t), I(t), R(t) \geq 0$, které na $[0,+\infty)$ platí, ale v této práci je nebudeme dokazovat.

To, že maximální řešení rovnice (1.5) s počátečními podmínkami (1.6) je definováno na $\mathbb{R}$, plyne z věty o opuštění kompaktu následovně. Již víme, že řešení existují lokálně. Mějme tedy maximální řešení $((S,E,I,R), J)$ soustavy (1.5). Pak pro $t \in J$ platí $(S,E,I,R)(t)) \in [0,1]^4$. Označme $\mathscr{K} = [0,K] \times [0,1]^4$ pro libovolné pevné $K > 0$. Pak $\mathscr{K}$ je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^5$, tedy je kompaktní. Aplikací Věty 3 dostáváme, že

$$\exists (t_1, t_2 \in I), t_1 < 0 < t_2 : (S,E,I,R)(t_1) \notin \mathscr{K}, (S,E,I,R)(t_2) \notin \mathscr{K}. \tag{2.3}$$

Z (2.3) plyne, že $t_1 < 0$ a $t_2 > K$, a tedy $[0,K] \subset J$. Protože $K > 0$ bylo libovolné, dostáváme $J \supset [0,+\infty)$, což jsme chtěli dokázat.

Analogicky lze dokázat, že také maximální řešení soustavy (1.7) s počáteční podmínkou (1.8) je definováno na $[0,+\infty)$. □

V 1. kapitole jsme již uvedli model SIR. Lze ho odvodit z modelu SEIR, uvažujeme-li $a \to +\infty$, což nyní dokážeme.

Věta 13. *Nechť* (S_a, E_a, I_a, R_a) *je jednoznačné maximální řešení soustavy* (1.5) *s počátečními podmínkami* (1.6) *na intervalu* J_a. *Nechť* $(S,I,R) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *je jednoznačné maximální řešení* (1.7) *s počátečními podmínkami* (1.8) *na intervalu* J. *Pak pro* $a \to +\infty$ *platí, že* $S_a \rightrightarrows S, R_a \rightrightarrows R, E_a + I_a \rightrightarrows I$ *na* $[0,+\infty)$ *a* $E_a \rightrightarrows 0, I_a \rightrightarrows I$ *na* $[\varepsilon,+\infty)$ *pro každé* $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Z Lemmatu 12 již víme, že pro řešení soustavy (1.5) v $[0,+\infty)$ platí v každém $t \in [0,+\infty)$ a pro každé $a \in (0,+\infty)$, že $(S_a, E_a, I_a, R_a)(t) \in [0,1]^4$. Řešení $\{(S_a, E_a, I_a, R_a)\}_{a \in \mathbb{R}}$ jsou na $[0,+\infty)$ stejně omezená (konstantou $K > 1$). Je

$$(E_a + I_a)'(t) = bI_a(t)S_a(t) - rE_a(t) - rI_a(t) - cI_a(t),$$

a tak také $\{(S_a, E_a+I_a, R_a)'\}_{a \in \mathbb{R}}$ je stejně omezená na $[0,+\infty)$ (plyne z předešlého a z rovnice (1.5)). Tím pádem je $\{(S_a, E_a+I_a, R_a)\}_{a \in \mathbb{R}}$ stejně stejnoměrně spojitá na $[0,+\infty)$ (z Lagrangeovy věty o střední hodnotě). Jsou tedy splněny předpoklady Arzelà–Ascoliho věty (Věta 4), a tak existuje posloupnost $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ taková, že $a_k \to +\infty$ a $\{(S_{a_k}, (E+I)_{a_k}, R_{a_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ je lokálně stejnoměrně konvergentní na $[0, +\infty)$ pro $k \to +\infty$. Označme $\lim_{k\to\infty}(S_{a_k}, (E+I)_{a_k}, R_{a_k}) = (\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$.

Z (1.2) máme $E_a'(t) + (a+r)E_a(t) = bI_a(t)S_a(t)$. Tuto rovnici budeme dále řešit metodou integračního faktoru. Platí:

$$\begin{aligned} E_a'(t) + (a+r)E_a(t) &= bI_a(t)S_a(t) \\ (E_a(t)e^{(a+r)t})' &= bI_a(t)S_a(t)e^{(a+r)t} \\ E_a(t)e^{(a+r)t} &= E_0 + \int_0^t bI_a(s)S_a(s)e^{(a+r)s}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy rovnici

$$E_a(t) = E_0e^{-(a+r)t} + \int_0^t bI_a(s)S_a(s)e^{(a+r)(s-t)}\,\mathrm{d}s.$$

Nyní uvažujme $a \to +\infty$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Pak

$$E_0e^{-(a+r)t} \rightrightarrows 0 \tag{2.4}$$

na intervalu $[\varepsilon, +\infty)$.

Dále platí

$$0 \le \int_0^t bI_a(s)S_a(s)e^{(a+r)(s-t)}\,\mathrm{d}s \le b\frac{e^{(a+r)(s-t)}}{a+r}\bigg|_0^t = \frac{b}{a+r}(1-e^{-(a+r)t}) \le \frac{b}{a+r} \rightrightarrows 0 \tag{2.5}$$

pro $a \to +\infty$ a $t \in [0, +\infty)$.

První nerovnost v (2.5) vyplývá z toho, že člen $bI_a(s)E_a(s)$ je omezený pro všechna $s \ge 0$ (je $0 \le bI_a(s)E_a(s) \le b$ - používáme Lemma 12) a druhá nerovnost z toho, že $(r+a)t > 0$ pro všechna $t \ge 0$, a proto musí platit

$$0 < e^{-(a+r)t} \le 1.$$

Z (2.4) a (2.5) plyne $E_a \rightrightarrows 0$ na $[\varepsilon, +\infty)$ pro všechna $\varepsilon > 0$ (a také lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$). Tedy $I_a \rightrightarrows \widetilde{I}$ na $[\varepsilon, +\infty)$ pro všechna $\varepsilon > 0$.

Pro $k \to \infty$ je splněno

$$S_{a_k} \rightrightarrows \widetilde{S}, \quad E_{a_k} \rightrightarrows 0, \quad I_{a_k} \rightrightarrows \widetilde{I}, \quad R_{a_k} \rightrightarrows \widetilde{R}$$

lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$, a z (1.5) plyne dle Lemmatu 5, že také

$$\begin{aligned} S_{a_k}' &\rightrightarrows S_1 = r - r\widetilde{S} - b\widetilde{I}\widetilde{S}, \\ (E+I)_{a_k}' &\rightrightarrows I_1 = b\widetilde{I}\widetilde{S} - r\widetilde{I} - c\widetilde{I}, \\ R_{a_k}' &\rightrightarrows R_1 = c\widetilde{I} - r\widetilde{R} \end{aligned}$$

lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$.

Jelikož $(S_{a_k}, (E+I)_{a_k}, R_{a_k})$ jsou diferencovatelné pro všechna k na $(0, +\infty)$, konvergují bodově a jejich derivace konvergují lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$, lze provést záměnu limity a derivace, a tedy dostáváme

$$S_1 = \widetilde{S}', \quad I_1 = \widetilde{I}', \quad R_1 = \widetilde{R}'$$

na $(0,+\infty)$. Tedy $(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})$ řeší (1.7) na $(0,+\infty)$ - zatím však bez počátečních podmínek. Dále platí

$$\begin{aligned} S_0 = S_{a_k}(0) &\to \widetilde{S}(0), \\ E_0 + I_0 = (E+I)_{a_k}(0) &\to \widetilde{I}(0), \\ R_0 = R_{a_k}(0) = &\to \widetilde{R}(0) \end{aligned}$$

pro $k \to +\infty$.

K dokončení důkazu stačí už pouze ukázat jednoznačnost limity, neboli že $(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R}) = (S,I,R)$ na $[0,+\infty)$, k čemuž využijeme Lemma 7. Stačí zvolit $x = (S,I,R), y = (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})$. Pro pevné $t > 0$ uvažujme $t_0 \in (0,t)$. Pak

$$\begin{aligned} 0 \leq |(S,I,R)(t) - (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})(t)| &\leq |(S,I,R)(t_0) - (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})(t_0)| \exp(L|t-t_0|) \leq \\ &\leq |(S,I,R)(t_0) - (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})(t_0)| \exp(Lt), \end{aligned}$$

kde L je konstanta lipschitzovskosti vzhledem k (S,I,R) v množině $\{0 \leq S,I,R \leq 1, S+I+R=1\}$.

Protože (S,I,R) a $(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})$ jsou v 0 spojité a v 0 se rovnají, provedeme limitní přechod pro $t_0 \to 0_+$ a dostaneme $(S,I,R)(t) = (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})(t)$ pro $t > 0$. Ze spojitosti v 0 dále dostáváme $(S,I,R) = (\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{R})$ na $[0,+\infty)$.

Ukázali jsme, že z každé posloupnosti $\{(S_{\tilde{a}_l},(E+I)_{\tilde{a}_l},R_{\tilde{a}_l})\}_{k\in\mathbb{N}}$ (kde $\tilde{a}_l \to +\infty$ pro $l \to +\infty$) lze vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost a navíc limita je určena jednoznačně. Proto je splněno dokonce

$$(S_a,(E+I)_a,R_a) \rightrightarrows (S,I,R)$$

pro $a \to +\infty$ lokálně stejnoměrně na $(0,+\infty)$. □

2.2 Dynamika modelu SIR

Dále budeme uvažovat pouze model SIR (tj. soustavu (1.7)).Protože první dvě rovnice v soustavě (1.7) nezávisí na $R(t)$, můžeme ponechat pouze tyto dvě rovnice a řešení $R(t)$ můžeme kdykoli získat z faktu, že v jakémkoli časovém okamžiku platí $(S+I+R)(t) = 1$ (jak jsme již ukázali v Lemmatu 12). V dalším textu tedy stačí se zabývat soustavou dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} &S'(t) = r(1-S(t)) - bI(t)S(t) \\ &I'(t) = I(t)(bS(t)-(r+c)) \\ &S(0) = S_0, I(0) = I_0 + E_0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dále se podívejme na stacionární body soustavy (2.6) a jejich stabilitu.

2.2.1 Výpočet stacionárních bodů

V našem případě máme funkci $f(x(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t)))^\top = (r(1-S(t)) - bI(t)S(t), I(t)(bS(t)-(r+c)))^\top$ pro $x(t) = (S(t),I(t))^\top$. Aby bod byl stacionárním bodem, musí být splněno

$$r(1-S(t)) - bI(t)S(t) = 0, \quad I(t)(bS(t)-(r+c)) = 0 \tag{2.7}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Z (2.7) získáváme stacionární body

$$x_0 = (S_{x_0}, I_{x_0})^\top = (\frac{r+c}{b}, \frac{r(b-r-c)}{b(r+c)})^\top, \quad \hat{x}_0 = (1,0)^\top.$$

2.2.2 Vyšetřování stability stacionárních bodů

Funkce f nezávisí explicitně na čase a je třídy C^∞ (tím spíš třídy C^1) na $\mathbb{R}^2$, tedy i v jistém okolí bodů x_0 a $\hat{x}_0$. Můžeme tedy používat Větu 8.

Matice $\nabla f(x(t))$ je rovna

$$\nabla f(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S}(x(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial I}(x(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial S}(x(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial I}(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - bI(t) & -bS(t) \\ bI(t) & bS(t) - (r+c) \end{bmatrix}.$$

Po dosazení bodu x_0 dostáváme

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -\frac{rb}{r+c} & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & 0 \end{bmatrix}.$$

Platí $\mathrm{tr}(\nabla f(x_0)) = -\frac{rb}{r+c}$. Víme, že $r,b,c > 0$, a tedy celý tento výraz je záporný, čímž je splněno $\mathrm{tr}(\nabla f(x_0)) < 0$. Dále platí $\det(\nabla f(x_0)) = r(b-r-c)$; pro stabilitu vyžadujeme, aby $r(b-r-c) > 0$. Je $r > 0$, čímž se tento požadavek redukuje na $b - r - c > 0$. To, zda bod x_0 je stabilní či nestabilní, tedy bude záviset na znaménku výrazu $b - r - c$.

Nyní se podívejme na bod $\hat{x}_0 = (1,0)^\top$. Je

$$\nabla f(\hat{x}_0) = \begin{bmatrix} -r & -b \\ 0 & b-r-c \end{bmatrix},$$

a tedy $\mathrm{tr}(\nabla f(\hat{x}_0)) = b - 2r - c$, $\det(\nabla f(\hat{x}_0)) = -r(b-r-c)$, tedy i zde bude stabilita záviset na znaménku výrazu $b-r-c$ (ale opačně než jak je tomu u bodu x_0).

Závěr tedy je, že pro $b-r-c > 0$ je x_0 stabilní a $\hat{x}_0$ nestabilní a pro $b-r-c < 0$ je naopak x_0 nestabilní a $\hat{x}_0$ stabilní.

Vlastní čísla a vlastní vektory $\nabla f(x_0)$ a $\nabla f(\hat{x}_0)$.

Nyní budeme hledat vlastní čísla a vlastní vektory matic $\nabla f(x_0)$ a $\nabla f(\hat{x}_0)$. Vlastní čísla nám dají informaci o klasifikaci stacionárních bodů x_0 a $\hat{x}_0$, vlastní vektory určí jejich stabilní a nestabilní podprostory pro linearizovaný systém. Lze očekávat, že původní (nelineární) systém bude mít podobné chování v okolí stacionárního bodu jako systém linearizovaný; touto problematikou se podrobněji zabývá např. (Amann a Metzen, 1990, Kapitola 4, Sekce 19). Dále se budeme zabývat pouze systémem linearizovaným.

Platí

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -\frac{rb}{r+c} & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & 0 \end{bmatrix},$$

a tedy

$$\nabla f(x_0) - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -\frac{rb}{r+c} - \lambda & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & -\lambda \end{bmatrix},$$

a charakteristický polynom matice $\nabla f(x_0)$ je $p_{x_0}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{rb}{r+c}\lambda + r(b-r-c)$. Tento polynom má kořeny

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\frac{rb}{r+c} + \sqrt{(\frac{rb}{r+c})^2 - 4r(b-r-c)}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{-\frac{rb}{r+c} - \sqrt{(\frac{rb}{r+c})^2 - 4r(b-r-c)}}{2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

To, zda vlastní čísla jsou reálná nebo komplexní, ovlivňuje chování řešení v okolí stacionárního bodu - v případě reálných budeme mít uzel, zatímco v případě komplexních spirální bod. Vyšetřeme tedy nyní, za jakých podmínek tyto případy nastávají.

Vlastní čísla z (2.8) budou reálná, pokud bude platit

$$(\frac{rb}{r+c})^2 - 4r(b-r-c) \geq 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$(\frac{r}{r+c})^2 b^2 - 4rb + 4r(r+c) \geq 0,$$

která bude splněna pro taková b, pro která platí buď $b \leq \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} - \sqrt{c})$, nebo $b \geq \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} + \sqrt{c})$.

Komplexní budou vlastní čísla z (2.8) tehdy, když bude splněno

$$(\frac{rb}{r+c})^2 - 4r(b-r-c) < 0,$$

tedy

$$(\frac{r}{r+c})^2 b^2 - 4rb + 4r(r+c) < 0,$$

což nastane pro $b \in (\frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} - \sqrt{c}), \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} + \sqrt{c}))$.

Nyní najdeme vlastní vektory pro případ nezáporného diskriminantu. Označme

$$D = (\frac{rb}{r+c})^2 - 4r(b-r-c)$$

a počítejme vlastní vektory příslušné vlastním číslům λ_1, λ_2 z (2.8).

Je

$$\nabla f(x_0) - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{rb}{r+c} - \sqrt{D}}{2} & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & \frac{\frac{rb}{r+c} - \sqrt{D}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & -\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Řádky matice $\nabla f(x_0) - \lambda_1 I_2$ jsou lineárně závislé. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 je libovolný prvek jádra matice $\nabla f(x_0) - \lambda_1 I_2$, tedy například

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{r(b-r-c)}{\lambda_1(r+c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2r(b-r-c)}{rb - \sqrt{D}(r+c)} \end{bmatrix}.$$

Nalezněme ještě vlastní vektor příslušný λ_2. Je

$$\nabla f(x_0) - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{rb}{r+c} + \sqrt{D}}{2} & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & \frac{\frac{rb}{r+c} + \sqrt{D}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -r-c \\ \frac{r(b-r-c)}{r+c} & -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Podobně jako v předchozím případě, i řádky matice $\nabla f(x_0) - \lambda_2 I_2$ jsou lineárně závislé, a stejným způsobem dostaneme, že vlastní vektor příslušný λ_2 je například

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{r(b-r-c)}{\lambda_2(r+c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2r(b-r-c)}{rb+\sqrt{D}(r+c)} \end{bmatrix}.$$

Nyní budeme hledat vlastní čísla a vlastní vektory matice $\nabla f(\hat{x}_0)$ (kde $\hat{x}_0 = (1{,}0)^\top$). Je

$$\nabla f(\hat{x}_0) = \begin{bmatrix} -r & -b \\ 0 & b-r-c \end{bmatrix},$$

a tedy

$$\nabla f(\hat{x}_0) - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -r-\lambda & -b \\ 0 & b-r-c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $p_{\hat{x}_0}(\lambda) = (\lambda + r)(\lambda - (b-r-c))$, tedy vlastní čísla jsou

$$\hat{\lambda}_1 = -r,$$
$$\hat{\lambda}_2 = b - r - c.$$

Je tedy jasné, že vlastní čísla matice $\nabla f(\hat{x}_0)$ jsou vždy reálná. Jelikož $r > 0$, je vždy $\hat{\lambda}_1 < 0$, ale $\hat{\lambda}_2$ může být záporné, kladné i nulové, od čehož se dále odvíjí stabilita či nestabilita $\hat{x}_0$.

Je

$$\nabla f(\hat{x}_0) - \hat{\lambda}_1 I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & b-c \end{bmatrix},$$

z čehož dostaneme, že vlastní vektor příslušný $\hat{\lambda}_1$ je třeba

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dále platí

$$\nabla f(\hat{x}_0) - \hat{\lambda}_2 I_2 = \begin{bmatrix} -b+c & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a z toho máme vlastní vektor příslušný $\hat{\lambda}_2$; je jím například

$$\hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{c}{b} - 1 \end{bmatrix}.$$

Klasifikace stacionárních bodů pro $b > r + c$.

Dle Věty 8 je stacionární bod x_0 splňující $b > r + c$, tedy ležící uvnitř oblasti $\mathscr{M}$, asymptoticky stabilní.

Dále v tomto případě platí $\hat{\lambda}_2 > 0$, a tedy dle věty o linearizované nestabilitě bude bod $\hat{x}_0$ nestabilní (Věta 9, 2. část). Kromě toho je $\hat{\lambda}_1 < 0$, a tak $\hat{x}_0$ je pro $b > r + c$ sedlový bod.

To, zda je bod x_0 uzel nebo spirální bod, bude záviset na znaménku diskriminantu v (2.8). Podmínky, kdy jsou λ_1, λ_2 komplexní a kdy reálné, jsme odvodili v podsekci 2.2.2 v části o vlastních číslech. Dohromady vychází, že x_0 je stabilní uzel pro $b \in (r+c, \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c}-\sqrt{c}))$ a pro $b \in (\frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c}+\sqrt{c}), +\infty)$. Stabilním spirálním bodem x_0 je pro $b \in (\frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c}-\sqrt{c}), \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c}+\sqrt{c}))$.

Kromě toho z $b > r+c$ a $r,c,b > 0$ vyplývá, že $c < b$. Tedy pro druhou složku vlastního vektoru $\hat{v}_2$ bude platit:

$$\frac{c}{b} - 1 \in (-1{,}0). \tag{2.9}$$

Klasifikace stacionárních bodů pro $b < r + c$.

Pokud $b < r+c$ (což odpovídá případu $x_0 \notin \overline{\mathscr{M}}$, kde $\overline{\mathscr{M}}$ značí uzávěr množiny $\mathscr{M}$), bude platit $\det(\nabla f(x_0)) = r(b-r-c) < 0$. Tedy dle druhé části Věty 8 bude bod x_0 nestabilní.

Dále, obě vlastní čísla příslušná matici $\nabla f(\hat{x}_0)$ budou reálná záporná, a tedy dle věty o linearizované stabilitě bude bod $\hat{x}_0$ stabilní - konkrétně stabilní uzel.

Bod x_0 je pro $b < r + c$ nestabilní sedlový bod, protože $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$.

Rozdělíme-li tento případ ještě na několik „podpřípadů“, můžeme specifikovat také vztah vlastních čísel $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ a hodnoty druhé složky vlastního vektoru $\hat{v}_2$:

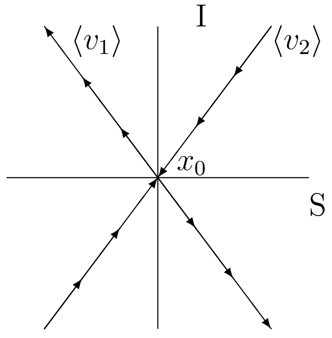
(a) pro $c < b$ bude splněno $\hat{\lambda}_2 > \hat{\lambda}_1$ a pro druhou složku vlastního vektoru $\hat{v}_2$ bude platit (2.9)

(b) pro $c > b$ bude platit $\hat{\lambda}_2 < \hat{\lambda}_1$ a pro druhou složku vlastního vektoru

$$\frac{c}{b} - 1 \in (0, +\infty);$$

(c) pro $c = b$ bude splněno $\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_1$; tedy máme jedno vlastní číslo algebraické násobnosti 2 a jeden vlastní vektor.

Na schématu, které následuje, znázorníme význam vlastních vektorů na případu bodu x_0 pro $b < r + c$.



Situace pro $b = r + c$.

Pokud $b = r + c$, bude $x_0 = (1{,}0)^\top = \hat{x}_0$. Je

$$\nabla f(\hat{x}_0) = \begin{bmatrix} -r & -b \\ 0 & b-r-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tedy $\det(\nabla f(\hat{x}_0)) = 0$ a o stabilitě nelze rozhodnout pomocí Věty 8. Dále stabilitu pro tento případ nebudeme řešit.

Shrnutí klasifikace stacionárních bodů

Označme $B_1 = \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} - \sqrt{c}), B_2 = \frac{2(r+c)^{3/2}}{r}(\sqrt{r+c} + \sqrt{c})$. Klasifikaci stacionárních bodů znázorníme ještě v tabulce 2.1.

	$b \in (0, r+c)$	$b \in (r+c, B_1)$	$b \in (B_1, B_2)$	$b \in (B_2, +\infty)$
x_0	nestabilní sedlo	stabilní uzel	stabilní spirální	stabilní uzel
$\hat{x}_0$	stabilní uzel	nestabilní sedlo	nestabilní sedlo	nestabilní sedlo

Tabulka 2.1: Klasifikace stacionárních bodů modelu SIR.

Závěr

V práci jsme se zabývali vlastnostmi řešení epidemiologických modelů SEIR a SIR. Dospěli jsme k tomu, že řešení obou modelů existují, jsou jednoznačná a omezená a provedli limitní přechod pro $a \to +\infty$, čímž jsme z řešení modelu SEIR přešli k řešení modelu SIR.

Dále jsme vyšetřili stacionární body modelu SIR v závislosti na parametru b. Ve vyšetřených případech jsme zjistili, že jakmile je stacionární bod x_0 stabilní, je druhý stacionární bod $\hat{x}_0$ nestabilní a naopak. Jelikož vlastní čísla příslušná $\nabla f(\hat{x}_0)$ jsou pro všechny vyšetřené hodnoty parametru b reálná nenulová, nemůže nikdy jít o spirální bod - konkrétně je $\hat{x}_0$ nejprve stabilní uzel a pak už pro všechna b sedlový bod. Oproti tomu to, zda vlastní čísla matice $\nabla f(x_0)$ jsou reálná nebo komplexní komplexně sdružená, závisí dále na hodnotách b. Konkrétně vyšlo, že pro hodnoty b, pro něž je $\hat{x}_0$ stabilní uzel, je x_0 sedlový bod, a poté pro zvětšující se b jde o stabilní uzel, následně o stabilní spirální bod a poté opět o stabilní uzel.

Seznam použité literatury

AMANN, H. a METZEN, G. (1990). *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*. De Gruyter studies in mathematics. de Gruyter. ISBN 9780899255521. URL https://books.google.cz/books?id=DTZ5bVAsyvEC.

BELTRAMI, E. (2002). *Mathematical Models for Society and Biology*. Elsevier Science. ISBN 9780120855612. URL https://books.google.cz/books?id=TVUEQtKf2bAC.

PRAŽÁK, D. (2014). *Carathéodoryho teorie ODR*. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/Odr2/Skripta/acODR.pdf.

PRAŽÁK, D. (2018). *ODR I*. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/Odr1/Prednaska/NMAA333.pdf.

RUDIN, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill. ISBN 9780070856134. URL https://books.google.cz/books?id=kwqzPAAACAAJ.