MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Kárníková

Integrální rovnice a aplikace na populační modely

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Mé velké poděkování patří vedoucímu práce doc. RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D. za čas, který mně a mé práci věnoval a za jeho velice vstřícný přístup. Dále bych na tomto místě ráda vyjádřila svou vděčnost spolužákům z fakulty, kteří mi radili při potížích se sazbou v LaTeXu.

Název práce: Integrální rovnice a aplikace na populační modely

Autor: Kateřina Kárníková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Předmětem první části bakalářské práce je seznámit čtenáře se základní teorií integrálních a integrodiferenciálních rovnic, vztahem mezi nimi. Obsahuje také věty týkající se především jádra a resolventy, pojmů, které s tímto druhem rovnic úzce souvisí. Důležitým početním aparátem je zde Laplaceova transformace a konvoluce. Dále se zabývá jednoduchými populačními modely a modely vycházejícími z integrodiferenciálních rovnic a následně se snaží aplikovat získané poznatky při řešení konkrétního zadaného modelu.

Klíčová slova: integrální rovnice, konvoluce, Laplaceova transformace, Paley-Wienerova věta, populační modely

Title: Integral equations and applications to population models

Author: Kateřina Kárníková

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The goal of this bachelor thesis is to inform the readers about an integral and integrodifferential equations theory and the relation between them. It formulates also theorems about a kernel and a resolvent, the terms closely related to these types of equations. The Laplace transform and a convolution are a calculating device which play the important role. The next main topic is population models and models based on the integrodifferential equations and subsequently we try to use gained knowledge to solve the concrete given model.

Keywords: integral equation, convolution, Laplace transform, Paley-Wiener theorem, population models

Obsah

Úvod

Toto téma jsem si z nabídky bakalářských prací vybrala ze dvou důvodů. V předmětu Základy matematického modelování pro 3. ročník finanční matematiky mne oslovila kapitola věnovaná modelům růstu, speciálně domácí úkol zaměřený na porovnávání různých modelů počtu obyvatel USA a skutečných dat. O rok dříve mne stejným způsobem zaujaly integrální transformace v Kalkulu 4. Obě zmíněná témata jsou stěžejní pro mou bakalářskou práci.

Úvodní kapitola obsahuje tradičně seznámení s užívanými pojmy. Mezi nimi jsou nejdůležitější konvoluce a Laplaceova transformace a jejich početní vlastnosti. Následující dvě kapitoly se zaměřují na teorii speciálních typů rovnic. Setkáváme se s pojmy jádro a resolventa a hledáme pomocí nich řešení. Klíčová je 3. kapitola zasvěcující čtenáře do základní teorie integrodiferenciálních rovnic, které vycházejí z o něco jednodušších rovnic integrálních. Těm je proto věnovaná kapitola 2.

V následující části se již dostáváme k samotným populačním modelům. Z diferenciálních modelů zmiňuji pouze dva nejznámější - Malthusův a Verhulstův. Více se věnuji logistickému integrodiferenciálnímu modelu za využití teoretických znalostí z předešlých kapitol. Tento model je zkoumán i v poslední praktické kapitole obsahující hlavní vlastní přínos - výpočet týkající se velikosti populace v časech $t > 0$, při zadané závislosti na předešlých stavech.

Tato práce je určena těm, kteří by se chtěli dozvědět o základech integrálních a integrodiferenciálních rovnic a složitějších populačních modelech, než se probírají na přednáškách bakalářského studia.

Seznam použitých zkratek a značení

$*$	konvoluce
$AC(I)$	množina všech absolutně spojitých funkcí na intervalu I
$B\acute{U}NO$	bez újmy na obecnosti
$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	(první) derivace funkce f podle x
$\hat{f}(t)$	viz $\mathcal{L}[f(x)](t)$
$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$	parciální derivace funkce f podle x
inf	infimum
$\mathcal{L}[f(x)](t)$	Laplaceova transformace funkce $f(x)$ v proměnné t
$\mathcal{L}^{-1}[g(t)](x)$	inverzní Laplaceova transformace funkce $g(t)$ v proměnné x
L^p	prostor funkcí (viz kap. 1)
$\mathbb{N}$	obor přirozených čísel
ODR	obyčejné diferenciální rovnice
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla (interval $(0, \infty)$)
$\mathbb{R}^-$	záporná reálná čísla (interval $(-\infty, 0)$)
sup	supremum
sup ess	esenciální/podstatné supremum
s.v.	skoro všude

1. Používané vzorce a pojmy

Definice 1 (Esenciální (též podstatné) supremum). *Esenciálním supremem funkce f rozumíme ess sup$_X f$ = inf $\{C \in \mathbb{R}; f \leq C$ s.v. na $X\}$.*

Definice 2 (L^p prostory). *Nechť (X,S,μ) je prostor s mírou, u je μ-měřitelná funkce na X. Pro $p \in [1,\infty)$ definujeme*

$$\|u\|_p = \left(\int_X |u|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty = ess\ sup_X\ |u|.$$

Potom

$$L^p(X) = [u; \|u\|_p < \infty],\ p \in [1,\infty].^1$$

L^p_{loc} je prostor funkcí, jejichž restrikce na kompaktní množinu leží v L^p.
L^∞_0 je prostor funkcí v L^∞, které mají v nekonečnu limitu rovnu nule.
L^∞_ℓ je prostor funkcí v L^∞, které mají v nekonečnu limitu.
$L^p(X,Y)$ je prostor funkcí, které leží v L^p a jejichž definičním oborem je množina X a oborem hodnot množina Y.

Definice 3 (Po částech spojitá funkce). *Funkce $f(t)$ se nazývá po částech spojitá v intervalu $[a,b]$, je-li v $[a,b]$ spojitá s výjimkou konečného počtu bodů, v nichž existují jednostranné limity zleva a zprava (v případě krajních bodů intervalu pouze z jedné příslušné strany).*
Funkce $f(t)$ se nazývá po částech spojitá v intervalu $[0,\infty]$, je-li po částech spojitá na každém intervalu $[a,\infty]$ pro $a > 0$.

Definice 4 (Exponenciálně omezená funkce). *Funkce f je exponenciálně omezená, jestliže existují kladné konstanty K, c, p takové, že $|f(x)| \leq Ke^{cx}$ na nějakém intervalu (p,∞).*

Definice 5 (Absolutně spojitá funkce). *Funkce f je absolutně spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ takové, že pro každý disjunktní systém intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$, a_j, $b_j \in I$, $j = 1,...,n$, platí*

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu I značíme $AC(I)$. [2]

Definice 6 (Cauchyovská[3] posloupnost). *Posloupnost a_n reálných čísel nazveme cauchyovskou, jestliže*

[1] Znění této definice bylo převzato z materiálů doc. Sobotíkové, viz [Sobotíková].
[2] Tato definice byla přejata z online materiálů k matematické analýze na MFF UK, viz [Zelený (2009)].
[3] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – francouzský matematik, profesor na École Polytechnique a průkopník matematické anylýzy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Lemma 1 (Bolzanova[4]-Cauchyho věta)**.** *Posloupnost je konvergentní* $\Leftrightarrow$ *je cauchyovská.*[5]

Věta 2 (Leibnizovo integrační pravidlo)**.** *Nechť* $h(x,t)$ *je spojitá funkce v obou proměnných, jejíž parciální derivace* $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ *je taktéž spojitá funkce v* x *a* t*, nechť funkce* $f(x)$*,* $g(x)$ *a jejich derivace* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$*,* $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ *jsou spojité v* $x \in [x_0, x_1]$ *a nechť* $f(x) \leq t \leq g(x)$*. Pak pro* $x \in [x_0, x_1]$ *platí:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,t) \,\mathrm{d}t = h(x, g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} - h(x,f(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \,\mathrm{d}t.$$

Leibnizovo pravidlo slouží k derivaci integrálu podle proměnné, která figuruje v jeho mezích.

Definice 7 (Konvoluce)**.** *Nechť f(t), g(t) jsou funkce* L^1_{loc} *na* $\mathbb{R}$*. Konvolucí těchto dvou funkcí (značíme* $*$*) na* $\mathbb{R}$ *rozumíme:*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}s.$$

Konvolucí těchto dvou funkcí na intervalu $[0,T)$*,* $0 < T < \infty$ *rozumíme:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}s, \ t \in [0, T).$$

Věta 3. *Konvoluce je komutativní, asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání.*

Všechny tyto vlastnosti lze jednoduše dokázat přímo z definice konvoluce.

Definice 8 (Vícenásobná konvoluce)**.** $(j-1)$*-násobnou konvolucí funkce* f *(značíme* f^{*j}*) rozumíme* $\underbrace{f * f * \ldots * f}_{j-\text{krát}}$*. (*$f^{*1} = f$*,* $f^{*2} = f * f$ *atd.)*

1.1 Laplaceova transformace

Definice 9 (Laplaceova transformace)**.** *Laplaceova*[6] *transformace exponenciálně omezené funkce* $f(t)$ *z* L^1_{loc}*,* $t \in [0,\infty)$ *(značíme* $\mathcal{L}[f(t)](x)$*) je funkce komplexní proměnné* x *definována:*

$$\mathcal{L}[f(t)](x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} \,\mathrm{d}t.$$

Vzorec má smysl pro ta x*, pro která existuje konečný integrál na pravé straně.*

Laplaceova transformace je integrální transformace, která převádí funkce reálné proměnné na funkce komplexní proměnné a využívá se při řešení ODR[7]. Pro zjednodušení zápisu budeme později značit Laplaceovu transformaci $\hat{f}(x)$, tímto zápisem rozumíme totéž jako $\mathcal{L}[f(t)](x)$.

[4] Bernard Bolzano (1781–1848) – český matematik, filozof a kněz

[5] Definici cauchyovské posloupnosti a Bolzanovu-Cauchyho větu citujeme z učebních materiálů doc. Jany Staré (viz Seznam použité literatury).

[6] Pierre Simon de Laplace (1749–1827) – franc. matematik, fyzik, astronom a politik

[7] ODR – zkr. pro obecné diferenciální rovnice

Věta 4. *Nechť funkce f je na intervalu $(0,\infty)$ po částech spojitá a exponenciálně omezená. Potom*

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{L}[f(t)](x) = 0.$$

Věta 5 (Lerch)**.** *Jsou-li f, g spojité funkce na $[0,\infty)$ a $\mathcal{L}[f(t)](x) = \mathcal{L}[g(t)](x)$, pak $f(t) = g(t)$.*

Věta 6 (Vlastnosti Laplaceovy transformace)**.** *Pro funkce f, g splňující podmínky z definice 9 a pro a, $b \in \mathbb{R}$ platí:*

1. *Laplaceova transformace je lineární (tzn. $\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)](x) = a\ \mathcal{L}[f(t)](x) + b\ \mathcal{L}[f(t)](x)$).*

2. *Laplaceova transformace nezachovává součiny (tzn. $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)](x) \neq \mathcal{L}[f(t)](x) \cdot \mathcal{L}[g(t)](x)$).*

3. *$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](x) = \mathcal{L}[f(t)](x) \cdot \mathcal{L}[g(t)](x)$.*

Všechny body této věty můžeme opět dokázat přímo z definice Laplaceovy transformace.

Věta 7 (Laplaceova transformace a derivace)**.** *Předpokládejme, že funkce $f(t)$ je spojitá, exponenciálně omezená a její derivace $f'(t)$ je po částech spojitá. Pak*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

Důkaz. Platnost vzorce ověříme pomocí definice Laplaceovy transformace integrací per partes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{a\to\infty} \{[e^{-st} f(t)]_0^a + s \int_0^a e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\} = \\
&= \lim_{a\to\infty} [e^{-sa} f(a) - f(0) + s \int_0^a e^{-st} f(t)\mathrm{d}t] = \\
&= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)
\end{aligned}$$

□

Definice 10 (Inverzní Laplaceova transformace)**.** *Inverzní (někdy též nazývána zpětná) Laplaceova transformace (značíme $\mathcal{L}^{-1}[\cdot](t)$) je funkce proměnné t taková, že $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(f(t))(x)](t) = f(t)$.*

[8]

[8] V této podkapitole byly použity věty z materiálů prof. Miroslava Huška k předmětu Kalkulus 4 na MFF UK. [(Hušek, 2017)].

2. Integrální konvoluční rovnice

2.1 Definice integrální rovnice a resolventy

Definice 11. *Integrální rovnicí v konvolučním tvaru rozumíme:*

$$\begin{aligned} f(t) &= x(t) + \int_0^t k(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \\ \textit{resp. } f(t) &= x(t) + x(t) * k(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde x, k, f jsou funkce na $\mathbb{R}^+$ a $t > 0$. Funkci k nazýváme jádro (značení z anglického kernel)[1].

Pozn.: Integrální rovnici v tomto tvaru nazýváme též Volterrova[2] integrální rovnice 2. typu. (Volterrovu integrální rovnici 1. typu bychom získali vynecháním samostatného členu $x(t)$.)

Předpokládáme, že funkce k a f, které známe, jsou integrovatelné; naším cílem je najít řešení x, pokud existuje.

V této rovnici nelze neznámou x jednoduše osamostatnit. My si ale ukážeme, že ji můžeme vyjádřit v tomto tvaru:

$$x(t) = f(t) - (r * f)(t), \tag{2.2}$$

v němž r je tzv. *resolventou* funkce k neboli řešením resolventní rovnice

$$r = k - k * r.$$

Nejprve si dosazením ověříme, že (2.2) řeší (2.1).

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t) - (r * f)(t) + [f(t) - (r * f)(t)] * k(t) \\ f &= f - r * f + f * k - r * k * f \end{aligned}$$

Z resolventní rovnice víme, že $r * k = k - r$.

$$\begin{aligned} &f = f - r * f + f * k - (k - r) * f \\ &f = f - r * f + f * k - k * f + r * f \\ &0 = 0 \end{aligned}$$

Na závěr se vraťme k resolventní rovnici. Nechť

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} k^{*j} = k - k * k + \ldots + (-1)^{m+1} \underbrace{(k * k * \ldots * k)}_{m-krát} \ldots \tag{2.3}$$

Nekonečný předpis pro resolventu není praktický pro další výpočty. Proto jsme ji na začátku kapitoly definovali jako řešení resolventní rovnice $r = k - r * k$. Aplikací konvoluce k na obě strany rovnosti (2.3) totiž obdržíme

$$r * k = k * k - k * k * k + \ldots \tag{2.4}$$

Porovnáním (2.3) a (2.4) již snadno nahlédneme, že

$$r * k = -(r - k) \ (\text{resp. } k = r + r * k).$$

[1]Tato a následující kapitola shrnují nejdůležitější poznatky 2. a 3. kapitoly knihy Volterra Integral and functional equations (Gripenberg, Londen a Staffans, 1990), z nichž také čerpají.

[2]Vito Volterra (1860–1940) – italský matematik a fyzik

2.2 Shrnutí a řešení pomocí resolventy a Laplaceovy transformace

Vyšli jsme z integrální rovnice v konvolučním tvaru:

$$f(t) = x(t) + k * x.$$

Zavedli jsme resolventu r jako řešení resolventní rovnice

$$k = r + r * k.$$

Díky tomu jsme získali řešení integrální rovnice ve tvaru

$$x(t) = f(t) - (r * f)(t). \tag{2.5}$$

Použitím Laplaceovy transformace můžeme z resolventní rovnice vyjádřit r.

$$\begin{aligned} k &= r + r * k \quad /\mathcal{L} \\ \hat{k} &= \hat{r} + \hat{r}\hat{k} \\ \hat{r} &= \frac{\hat{k}}{1+\hat{k}} \\ r &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\hat{k}}{1+\hat{k}}\right] \end{aligned}$$

Zbývá jen dosadit r do (2.5) (f je dané).

2.3 Věty o integrálních rovnicích

Lemma 8. *Nechť J značí $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, nebo interval $(0,T)$, (může být i uzavřený, či polouzavřený) pro $T \in (0,\infty)$ a nechť a, $b \in L^1(J)$. Potom $a * b \in L^1(J)$ a platí $\|a * b\|_{L^1(J)} \leq \|a\|_{L^1(J)}\|b\|_{L^1(J)}$.*

Věta 9 (Lokální existence a jednoznačnost řešení)**.** *Nechť $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Pak existuje právě jedno řešení $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ resolventní rovnice $r + r * k = k$.*

Důkaz. Nejprve dokažme sporem jednoznačnost řešení. Předpokládejme, že $\exists r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ řešení rovnice $r + r*k = k$ a dále $\exists q \neq r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ řešení rovnice $q + q * k = k$. Potom jednoduchými úpravami dojdeme k tomu, že

$$r = k - r * k = k - r * (q + k * q) = k - (r + r * k) * q = k - k * q = q,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $q \neq r$. Dokázali jsme jedinečnost řešení.

Dále si povšimněme, že díky jednoznačnosti stačí místo důkazu existence jediné resolventy r ukázat, že pro každé $T \in (0,\infty)$ existuje funkce $r_T \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ taková, že

$$r_T + r_T * k = k.$$

Potom totiž pro $\forall j \in \mathbb{N}$ je restrikce r_{j+1} na $[0,j]$ rovna r_j a pokud položíme $r(t) = r_{j+1}(t)$ pro $t \in [j, j+1)$ dostaneme kýžené řešení resolventní rovnice $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

Zaměřme se tedy na důkaz existence r_T. Ve speciálním případě, kdy $\int_0^T |k(t)|\,\mathrm{d}t < 1$ můžeme r_T získat iterační metodou. Nechť

$$r_m = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} k^{*j}.$$

Z lemmatu 8 vyplývá, že $\|k^{*j}\|_{L^1(0,T)} \leq \|k\|^j_{L^1(0,T)}$. Tudíž $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v $L^1([0,T],\mathbb{R})$. Pak existuje $r_T \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ takové, že $r_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} r_T$. Pro r_m, $m \geq 2$ z naší definice platí:

$$r_m + r_{m-1} * k = k.$$

a opět z lemmatu 8 plyne, že $r_{m-1} * k \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} r * k$. Tedy i

$$r + r * k = k.$$

Na závěr ukažme, že lze vždy BÚNO uvažovat $\int_0^T |k(t)|\,\mathrm{d}t < 1$. Označme $e^{-\sigma t}k(t) \equiv a(t)$ pro $t \in [0,T]$. Pro dostatečně velké σ je $\|a(t)\|_{L^1(0,T)} < 1$, protože $e^{-\sigma t}k(t) \xrightarrow{\sigma\to\infty} 0$. Dále předpokládejme, že existuje $q \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ takové, že

$$q + a * q = a.$$

Definujeme-li $r(t) = e^{\sigma t}q(t)$, potom $r \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ a řeší resolventní rovnici.

$$\begin{aligned}
q + a * q &= a \\
e^{-\sigma t}r(t) + (e^{-\sigma t}k(t)) * (e^{-\sigma t}r(t)) &= e^{-\sigma t}k(t) \\
e^{-\sigma t}r(t) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}k(t-s)\cdot e^{-\sigma s}r(s)\,\mathrm{d}s &= e^{-\sigma t}k(t) \\
e^{-\sigma t}r(t) + \int_0^t e^{-\sigma t}k(t-s)r(s)\,\mathrm{d}s &= e^{-\sigma t}k(t) \\
e^{-\sigma t}r(t) + e^{-\sigma t}(k * r)(t) &= e^{-\sigma t}k(t) \qquad / \cdot e^{\sigma t} \\
r + k * r &= k
\end{aligned}$$

□

Věta 10 (Paley-Wienerova věta)**.** *Nechť $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Potom resolventa r jádra k, leží v $L^1(\mathbb{R}^+)$ právě tehdy, když $\hat{k}(z) \neq -1$, $z \geq 0$.*

Důkaz celého znění věty je složitější, ukážeme si alespoň implikaci zleva doprava. Nechť $r \in L^1(\mathbb{R}^+)$ a platí $r + k * r = k$. Aplikací Laplaceovy transformace na obě strany rovnice získáme:

$$\hat{r}(z) + \hat{k}(z)\hat{r}(z) = \hat{k}(z),\ z \geq 0.$$

Drobnými úpravami dospějeme ke tvaru

$$[1 + \hat{k}(z)][1 - \hat{r}(z)] = 1,\ z \geq 0.$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že $\hat{k}(z)$ nemůže být rovno minus jedné. Podmínka pro z je nutná pro existenci konečné Laplaceovy transformace.

3. Integrodiferenciální konvoluční rovnice

3.1 Definice a řešení pomocí resolventy a Laplaceovy transformace

Derivací integrální rovnice (2.1) z minulé kapitoly dle Leibnizova pravidla (viz věta 2) obdržíme tzv. rovnici integrodiferenciální.

$$f'(t) = x'(t) + k(0)x(t) + \int_0^t k'(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$x(0) = f(0), t > 0 \text{ a } x, k, f \text{ jsou funkce na } \mathbb{R}.$$

Takto definuje integrodiferenciální rovnici Gripenberg a kol. (1990). Počáteční podmínka $x(0) = f(0)$ vychází taktéž z integrální rovnice.

My však budeme pro naše potřeby za výchozí tvar považovat toto:

$$\begin{aligned} f(t) &= x'(t) + \int_0^t x(t-s)k(s)\,\mathrm{d}s, && t \in \mathbb{R}^+,\ x(0) = x_0 \\ \text{resp. } f(t) &= x'(t) + (x * k)(t), && t \in \mathbb{R}^+,\ x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Zaměřme se na řešení takovéto integrodiferenciální rovnice a tvar resolventy. Na (3.1) aplikujeme Laplaceovu transformaci.

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= z\hat{x}(z) - x_0 + \hat{k}(z)\hat{x}(z) \\ \hat{f}(z) + x_0 &= (z + \hat{k}(z)) \cdot \hat{x}(z) \\ \hat{x}(z) &= \frac{\hat{f}(z) + x_0}{z + \hat{k}(z)} \end{aligned}$$

Předpokládejme, že existuje $r \in L^1$ takové, že

$$\hat{r}(z) = \frac{1}{z + \hat{k}(z)}. \tag{3.2}$$

Potom

$$\hat{x}(z) = \hat{r}(z) \cdot (\hat{f}(z) + x_0).$$

Použijeme vlastnosti Laplaceovy transformace k vyjádření x (výsledného řešení rovnice (3.1)).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(z)] &= \mathcal{L}[r * f](z) + \mathcal{L}[x_0 \cdot r](z) \\ x(t) &= r(t) \cdot x_0 + (r * f)(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ještě by nás mohl zajímat tvar resolventních rovnic. Z našeho předpokladu (3.2) platí:

$$\begin{aligned} \hat{r}(z) \cdot [z + \hat{k}(z)] &= 1 \\ \hat{r}(z) \cdot z - 1 + \hat{r}(z) \cdot \hat{k}(z) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Z rovnice (3.3), kterou pro větší názornost můžeme přepsat do integrální podoby:

$$x(t) = r(t) \cdot x_0 + \int_0^t f(t-s) r(s) \, \mathrm{d}s,$$

triviálně plyne, že $x(0) = r(0)x(0)$, tedy $r(0) = 1$.

Rovnost (3.4) díky tomuto novému poznatku drobně upravíme.

$$\hat{r}(z) \cdot z - r(0) + \hat{r}(z) \cdot \hat{k}(z) = 0$$

Zpětnou Laplaceovou transformací obdržíme resolventní rovnici pro integrální rovnici (3.1).

$$r'(t) + (r * k)(t) = 0,$$

3.2 Věty o integrodiferenciálních rovnicích

Lemma 11. *Nechť $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ a a je lokálně $AC(\mathbb{R}^+)$ taková, že $a(0) = 0$ a $a' \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ pro nějaké $p \in [1,\infty)$. Potom funkce $g*a \in AC(\mathbb{R}^+)$ a $(g*a)' = a'*g$. Navíc $(g*a)' \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$.*

Lemma 12.

1. *Nechť $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $p \in [1,\infty)$ a nechť $b \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ je lokálně absolutně spojitá funkce na $\mathbb{R}^+$. Potom $(a * b)$ je lokálně absolutně spojitá funkce a platí $(a*b)'(t) = a(t)b(0) + (a*b')(t)$ pro s.v. t.*

2. *Nechť a je lokálně $AC(\mathbb{R}^+)$, $p \in [1,\infty)$ a nechť $b \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Potom $a*b$ je lokálně absolutně spojitá funkce a $(a*b)'(t) = a(0)b(t) + (a'*b)(t)$. Navíc $(a*b)' \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ a pokud b je spojitá, potom je spojitá i $(a*b)'$.* [1]

Věta 13. *Nechť $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$, potom existuje právě jedna lokálně absolutně spojitá funkce r na $\mathbb{R}^+$ taková, že řeší rovnice $r'(t) + (k*r)(t) = r'(t) + (r*k)(t) = 0$ pro s.v. $t \in \mathbb{R}^+$.*

Důkaz. Nechť k je primitivní funkcí g. Pak $g(t)$ je lokálně AC funkce. Nechť q je resolventou g, tedy $q + g*q = q + q*g = g$. Definujme $r(t) = 1 - \int_0^t q(s)\,\mathrm{d}s$. Z toho vyplývá, že $r(0) = 1$ a $r'(t) = -q$.
Derivací $(g*r)$ podle lemmat 11 a 12 bod *1* (pravá rovnost) dostáváme:

$$k*r = (g*r)' = g + g*r'.$$

Dále dosadíme do pravé strany $r'(t) = -q$ plynoucí z naší definice $r(t)$ a použijeme vlastnost q jakožto resolventy g.

$$k*r = (g*r)' = g - g*q = q = -r'(t),$$

tudíž rovnost $r'(t) + (k*r)(t) = 0$ je splněna.

Jednoznačnost dokážeme opět sporem. Předpokládejme, že $\exists$ dvě lokálně absolutně spojité funkce r a s takové, že $r(0) = s(0) = 1$ a $r' + (k*r) = s' + (k*s) = 0$. Potom derivací $(s*r)$ dle lemmatu 12 bod *2* obdržíme $r + s'*r = (s*r)' = s + r'*s$. Upravíme-li levou a pravou stranu použitím výše uvedeného předpokladu ohledně

[1] Odvození lemat je možné nahlédnout na str. 100 a 101 knižního zdroje Gripenberg a kol. (1990).

řešení konvolučních rovnic, pak $r - (k * s) * r = s - (k * r) * s$. Z komutativity a asociativity konvoluce už je odtud jasné, že $r = s$.

$\square$

Věta 14. *Nechť $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Potom pro $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ existuje právě jedno lokálně absolutně spojité x řešení rovnice (3.1). Toto řešení je dané vzorcem $x(t) = r(t)x_0 + (r * f)(t)$ pro $t \in \mathbb{R}^+$, kde r je resolventa z věty 13. Pokud $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, pak $x' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ a nechť $x(t) = r(t) \cdot x_0 + (r * f)(t)$. Z důkazu předchozí věty víme, že $r(0) = 1$ a z definice konvoluce $[r * f](0) = 0$, tedy $x(0) = x_0$. Dle lemmatu 12 *2* je x lokálně absolutně spojité a

$$\begin{aligned} x' &= r' \cdot x_0 + f + r' * f = \\ &= -(k * r)x_0 - (k * r) * f + f = \\ &= -k * (r \cdot x_0 + r * f) + f = \\ &= -k * x + f. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku výpočtu jsme použili přepis r' plynoucí z vlastnosti r jakožto řešení resolventních rovnic. Dokázali jsme existenci řešení.
Pro důkaz jednoznačnosti naopak předpokládejme, že x je řešením 3.1. Potom je x lokálně absolutně spojité a z lemmat 11 bod *1*, (12) bod *2*

$$x + r' * x = (r * x)' = r \cdot x_0 + r * x'.$$

Odtud

$$\begin{aligned} x &= r \cdot x_0 + r * x' - r' * x = \\ &= r \cdot x_0 + r * (-k * x + f) + r * k * x = \\ &= r \cdot x_0 + r * x. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku výpočtu jsme využili přepis $x'(t)$ pomocí rovnice (3.1), ve třetím kroku pak distributivitu konvoluce. Dokázali jsme jednoznačnost řešení.

$\square$

Věta 15 (Paley-Wienerova věta)**.** *Nechť $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Potom existuje resolventa $r \in L^1(\mathbb{R}^+)$ splňující konvoluční rovnici $r' + (r * k) = 0 \Leftrightarrow z + \hat{k}(z) \neq 0$, $z \geq 0$. Navíc pokud $r \in L^1(\mathbb{R}^+)$, pak i $r' \in L^1(\mathbb{R}^+)$.*

Důkaz. Dokážeme pouze první část tvrzení obdobným způsobem jako u Paley-Wienerovy věty pro integrální rovnice. Aplikací Laplaceovy transformace na resolventní rovnici obdržíme:

$$z\hat{r}(z) - r(0) + \hat{k}(z)\hat{r}(z) = 0,\ z \geq 0.$$

Z této kapitoly již víme, že $r(0) = 1$, tedy rovnici drobně upravíme a vyjádříme Laplaceovu transformaci r

$$\begin{aligned} z\hat{r}(z) + \hat{k}(z)\hat{r}(z) &= 1. \\ (z + \hat{k}(z))\hat{r}(z) &= 1 \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $z + \hat{k}(z)$ nesmí být rovno nule. Podmínka pro z opět vychází z definice Laplaceovy tranformace, je nutná pro existenci konečného integrálu z definice 9.

$\square$

4. Populační modely

4.1 Úvod k populačním modelům

Nejprve uvažujme základní tvar rovnice, z níž vychází většina modelů simulujících vývoj velikosti populace jednoho druhu:

$$\frac{N'}{N} = f. \tag{4.1}$$

Zde $N(t) \geq 0$ značí velikost populace jednoho druhu v závislosti na čase t. Jednotkou nemusí být jen počet jedinců, ale např. hmotnost populace (jedná-li se třeba o kolonie jednobuněčných organismů) apod.

$N'(t) = \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ značí změnu velikosti populace. Záporná derivace znamená úbytek, kladná přírůstek.

Podíl $\dfrac{N'}{N}$ pak vyjadřuje okamžitou změnu velikosti populace vztaženou na jednotku populace, někdy bývá označován jako *specifická míra růstu*. Konkrétní tvar funkce f se odvíjí od zvoleného modelu, tato funkce může, ale nemusí záviset na N. Pokud je f nezávislá na N, znamená to, že velikost populace nijak neovlivňuje její růst.

(Neuvažujeme vnější náhodné vlivy na populaci a rovněž nebereme v úvahu rozdělení podle pohlaví, věku apod.)

Definice 12 (Equilibrium)**.** *Equilibriem rovnice* (4.1) *rozumíme její konstantní řešení* $N(t) = e$, $e \in \mathbb{R}^+$, $t \in (-\infty,\infty)$.

4.2 Jednoduché populační modely

4.2.1 Malthusův model

Označme b koeficient porodnosti *(birth rate)* a d koeficient úmrtnosti *(death rate)*. Změnu velikosti populace nyní vyjádříme takto:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (b - d) \cdot N(t) \cdot \Delta t.$$

Přeznačíme $(b-d)$ na g koeficient růstu *(growth rate)* a přejdeme k tvaru z rovnosti (4.1).

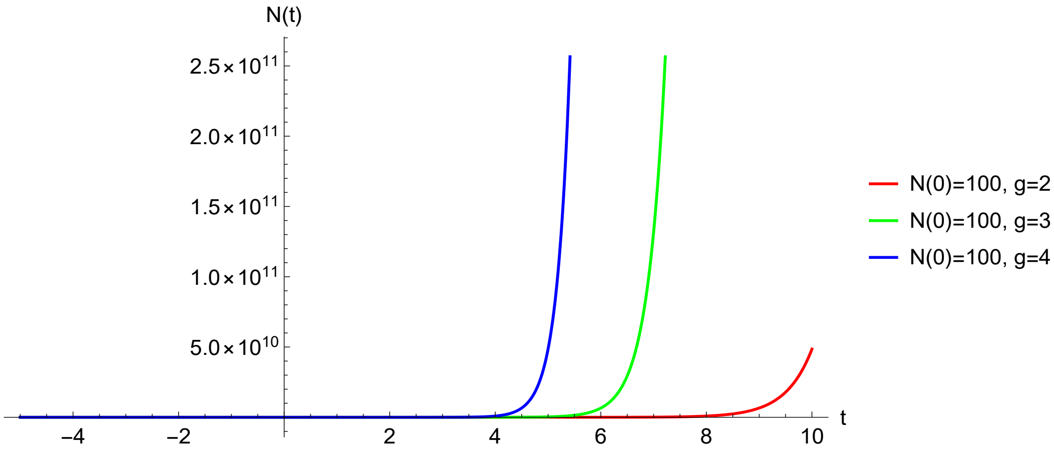
$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = g\,N(t)$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = g \tag{4.2}$$

Je-li g konstantní, vede rovnice (4.2) k řešení jednoduché ODR. Za podmínky $N(0) = N_0$ je řešením Malthusova[1] modelu $N(t) = N_0 e^{gt}$.

Pokud je $g > 0$, populace neomezeně (exponenciálně) roste, pokud je $g < 0$, populace vymírá. Tento model je pro praxi příliš jednoduchý a exponenciální růst neodpovídá skutečnosti. Proto je použitelný pouze pro krátké časové intervaly.

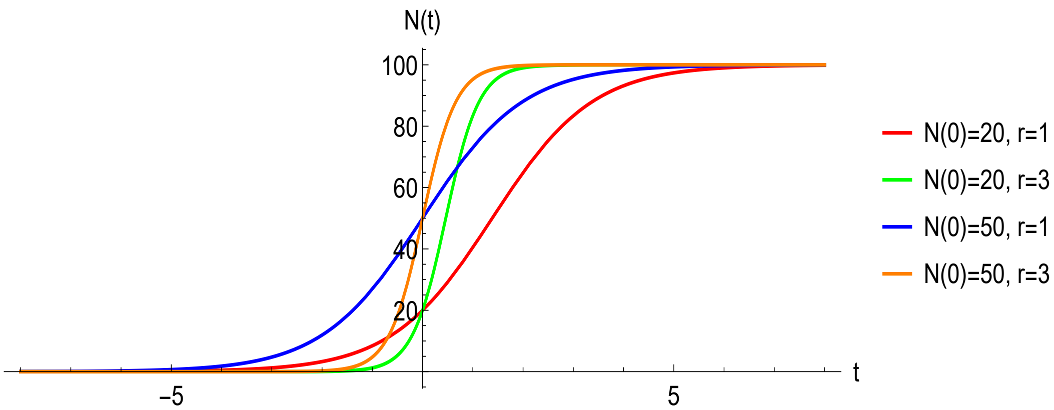
[1] Thomas Robert Malthus (1766–1834) – anglický ekonom a anglikánský pastor



Obrázek 4.1: Exponenciální křivky Malthusova modelu.

4.2.2 Verhulstův model

Problém neomezeného růstu odstraňuje tzv. Verhulstův[2] model z roku 1838[3]. Za funkci g z (4.2) dosazuje $r \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)$, kde r je vnitřním koeficientem růstu a k tzv. kapacitou (nebo saturační mezí), tedy horní hranicí, přes kterou populační křivka nepřekročí. Kapacita k je zároveň equilibriem Verhulstovy rovnice. Takto definovaný růstový koeficient g je klesající funkcí $N(t)$ - předpokládáme, že s rostoucí velikostí populace klesá porodnost a vzrůstá úmrtnost z důvodů omezených zdrojů potravy, životního prostoru atd.



Obrázek 4.2: Logistické křivky Verhulstova modelu pro k=100.

Řešením Verhulstova modelu

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)$$

za předpokladu $N(0) = N_0$, je

$$N(t) = N_0 \frac{k}{N_0 + (k - N_0)e^{-rt}}.$$

[2]Pierre François Verhulst (1804–1849) – belgický matematik a profesor bruselské univerzity
[3]zdroj Gomes (2014)

Takto popsanou křivku nazýváme logistická nebo také sigmoida kvůli tvaru písmene S. Můžeme si taktéž povšimnout, že pokud je populace N zanedbatelně malá oproti kapacitě k, odpovídá Verhulstův model $\dfrac{N'(t)}{N(t)} \simeq r$ přibližně modelu Malthusovu. Verhulstova logistická rovnice se stala základem pro mnoho dalších populačních modelů.

4.3 Integrální populační modely

Předpokládejme, že funkce f v modelech typu (4.1) obsahují podobu Volterrovy integrální rovnice

$$\int_{-\infty}^{t} g[N(s)]k(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty} g[N(t-s)]k(s)\,\mathrm{d}s.$$

To znamená, že změna velikosti populace určena tvarem funkce g závisí na hodnotách zaznamenaných v minulosti v časech $s \leq t$, jimž přidělujeme různou váhu vyjádřenou jádrem k. Odteď po zbytek kapitoly předpokládejme, že k je po částech spojitá funkce a $\int_{0}^{\infty} |k(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$.

Nyní si představíme model, jenž se nazývá logistický. Vychází z rovnice (4.1).
[4]

Definice 13 (Logistický populační model)**.** *Logistický populační model je vyjádřen takto:*

$$\frac{N'}{N} = b - aN - d\int_{-\infty}^{t} N(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s \tag{4.3}$$

pro konstanty a, b, d*;* $b > 0$*,* $d \geq 0$*,* $a + d \neq 0$*,* $k \in L^1_+$*,* $\int_{0}^{\infty} |k(s)|\,\mathrm{d}s = 1.$

Konstanta b zde zastupuje koeficient porodnosti, $-aN$ značí úbytek populace závisející pouze na stavu populace v čase t a poslední člen rovnice interpretujeme jako úbytek populace závisející na stavech v minulosti (časech $s < t$), jimž přisuzujeme váhy k.

Definice 14. *Nechť* $t_0 \in (-\infty,\ \infty)$ *je pevně daný čas. Řešením rovnice* (4.3) *na intervalu* $(t_0, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$ *rozumíme funkci* $N(t)$ *po částech spojitou na* $(-\infty, t_0 + \delta)$ *a diferencovatelnou na* $(t_0, t_0 + \delta)$*.*

Věta 16. *Equilibriem pro logistický model z definice 13 je* $e = \dfrac{b}{a+d}$.

Důkaz. Ověřme toto tvrzení dosazením equilibria do rovnice z příslušné definice.

$$N' = bN - aN^2 - dN\int_{-\infty}^{t} N(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s \quad /N \equiv \frac{b}{a+d}$$
$$0 = \frac{b^2}{a+d} - \frac{ab^2}{(a+d)^2} - \frac{db^2}{(a+d)^2}\int_{-\infty}^{t} k(t-s)\,\mathrm{d}s$$

Nyní provedeme v integrálu substituci $(t-s) = u$. Sečteme první dva zlomky.

[4] Následující definice a věty jsou převzaty. Viz (Cushing, 1977).

$$0 = \frac{db^2}{(a+d)^2} - \frac{db^2}{(a+d)^2}\int_0^\infty k(u)\,\mathrm{d}u$$

Zde je již rovnost jasná, jelikož z předpokladů $\displaystyle\int_0^\infty k(u)\,\mathrm{d}u = 1$.

□

Označme e konstantní řešení logistické rovnice a zkoumejme rovnici na okolí tohoto equilibria. Dále definujme $x = N - e$. Dosadíme $N = x + e$ do rovnice logistického modelu z definice 13. Obdržíme tím integrodiferenciální rovnici pro x.

$$\begin{aligned} x' &= bx + be - ax^2 - 2axe - ae^2 - \\ &- d(x+e)\left[\int_{-\infty}^t x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + e\int_{-\infty}^t k(t-s)\,\mathrm{d}s\right] \end{aligned}$$

Zde odečteme dva členy: $be - ae^2 = de^2$, první integrál rozdělíme do dvou částí a v druhém integrálu substituujeme $(t-s) = u$.

$$\begin{aligned} x' &= bx + de^2 - ax^2 - 2axe - d(x+e)[\int_{-\infty}^0 x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + \\ &+ \int_0^t x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + e\int_0^\infty k(u)\,\mathrm{d}u] \end{aligned}$$

Třetí integrál je dle předpokladu roven jedné, tedy:

$$\begin{aligned} x' &= bx + de^2 - ax^2 - 2axe - dxe - de^2 - \\ &- d(x+e)\left[\int_{-\infty}^0 x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

Odečteme členy de^2 a dále $bx - 2axe - dxe = -axe$.

$$x' = -axe - ax^2 - d(x+e)\left[\int_{-\infty}^0 x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s\right]$$

Tuto rovnici nyní linearizujeme, tedy vypustíme všechny nelineární členy. Hledáme totiž x blízké nule, tudíž předpokládáme, že jeho vyšší mocniny jsou pro náš výpočet zanedbatelné. Vycházíme z toho, že řešení nelineární rovnice se na okolí ekvilibria chovají podobně jako řešení lineární rovnice. (Důkaz tohoto tvrzení je nad rámec bakalářské práce.)

Dále nahradíme člen $-de\displaystyle\int_{-\infty}^0 x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s$ jednodušším zápisem $f(t)$, jelikož je funkcí času t a vyjadřuje stavy minulé, které již známe.

Dospěli jsme k finálnímu tvaru integrodiferenciální rovnice pro x:

$$x' = -axe - de\int_0^t x(s)k(t-s)\,\mathrm{d}s + f(t). \tag{4.4}$$

5. Praktické řešení logistického modelu

Ve druhé a třetí kapitole jsme se zabývali postupem řešení integrálních a integrodiferenciálních rovnic v konvolučním tvaru, nyní obdobný postup odvodíme pro logistický model z předcházející podkapitoly. Zjednodušíme jeho tvar přeznačením násobených konstant.

$$\begin{aligned} x'(t) &= A\,x(t) - B\,(x * k)(t) + f(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aplikujeme Laplaceovu transformaci a vyjádříme $\hat{x}$.

$$z\,\hat{x}(z) - x_0 = A\,\hat{x}(z) - B\,\hat{k}(z)\,\hat{x}(z) + \hat{f}(z)$$
$$\hat{x}(z) = \frac{x_0 + \hat{f}(z)}{z - A + B\hat{k}(z)}$$

Zadefinováním $\hat{r}(z) = \dfrac{1}{z - A + B\hat{k}(z)}$ získáváme $\hat{x}(z) = (x_0 + \hat{f}(z))\,\hat{r}(z)$, tudíž $x(t) = x_0 \cdot r(t) + (f * r)(t)$.

Lemma 17. *Pro konstantu $a \in \mathbb{R}$ a proměnné t, $z \in \mathbb{R}$, $z > a$ platí:* $\mathcal{L}[e^{at}](z) = \dfrac{1}{z-a}$.

Důkaz. Dle definice Laplaceovy transformace $\mathcal{L}[e^{at}(z)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{(a-z)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z-a}$, $z > a$.

□

Ukážeme si odvozený postup na konkrétním příkladu.
Zvolíme si $k(t) = Ce^{-Ct}$, $C \in \mathbb{R}^+$ a budeme řešit rovnici (5.1).

$$\hat{k}(z) = \frac{C}{z+C}$$

Zvolené $k(t)$ náleží L^1 a $\hat{k}(z) + z \neq 0$, tudíž z Paley-Wienerovy věty (věta 15) musí existovat $r(t)$ taktéž v L^1. (Resolventní rovnice z věty 15 zde ovšem neplatí. Pracujeme s jiným tvarem integrodiferenciální rovnice a obdobné jednoduché vyjádření příslušné resolventní rovnice není možné.)

$$\hat{r}(z) = \frac{1}{z - A + B\hat{k}(z)} = \frac{1}{z - A + \dfrac{BC}{z+C}} = \frac{z + C}{z^2 + (C-A)z + BC - AC}$$

Rozložíme $\hat{r}(z)$ na parciální zlomky. (Hledáme U a V.)

$$\frac{U}{z-\dfrac{A-C+\sqrt{(A+C)^2-4BC}}{2}}+\frac{V}{z-\dfrac{A-C-\sqrt{(A+C)^2-4BC}}{2}}=$$
$$=\frac{z+C}{(z-\dfrac{A-C+\sqrt{(A+C)^2-4BC}}{2})(z-\dfrac{A-C-\sqrt{(A+C)^2-4BC}}{2})}$$

Pro větší přehlednost označme $\sqrt{(A+C)^2-4BC}\equiv D$.

$$\frac{U}{z-\dfrac{A-C+D}{2}}+\frac{V}{z-\dfrac{A-C-D}{2}}=\frac{z+C}{(z-\dfrac{A-C+D}{2})(z-\dfrac{A-C-D}{2})}$$

Po přenásobení jmenovateli:

$$Uz-U\frac{A-C-D}{2}+Vz-V\frac{A-C+D}{2}=z+C.$$

Porovnáním koeficientů lineárních a konstantních členů levé a pravé strany rovnice obdržíme soustavu dvou rovnic pro neznámé U a V.

$$\begin{aligned}U+V&=1\\-U\frac{A-C-D}{2}-V\frac{A-C+D}{2}&=C\end{aligned}$$

Celou druhou rovnici vynásobíme dvěma a dosadíme do ní $V=1-U$ vyjádřené z první rovnice.

$$\begin{aligned}-U(A-C-D)-(1-U)(A-C-D)&=2C\\2UD-A+C-D&=2C\\U&=\frac{A+C+D}{2D}\end{aligned}$$

Dopočtěme V.

$$V=1-U=\frac{-A-C+D}{2D}$$

Našli jsme parciální rozklad $\hat{r}(z)$.

$$\hat{r}(z)=\frac{\dfrac{A+C+D}{2D}}{z-\dfrac{A-C+D}{2}}-\frac{\dfrac{A+C-D}{2D}}{z-\dfrac{A-C-D}{2}}$$

Aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci, využijeme k tomu lemma 17.

$$r(t)=\frac{A+C+D}{2D}\cdot\exp\left(\frac{A-C+D}{2}t\right)-\frac{A+C-D}{2D}\cdot\exp\left(\frac{A-C-D}{2}t\right)\quad(5.2)$$

Jak jsme odvodili na začátku této kapitoly, x dopočteme jednoduše:

$$x(t) = x_0 \cdot r(t) + (f * r)(t).$$

Funkci $N(t)$ vyjadřující počet jedinců v dané populaci bychom získali z $x(t)$ přičtením equilibria původní logistické rovnice, jehož výpočet byl jedním z předmětů předcházející kapitoly.

Dále nás zajímá, zda naše velikost populace $N(t)$ konverguje k ekvilibriu e (konstatnímu stavu). Ekvivalentně si klademe otázku, kdy platí $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, neboli kdy $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$.

K posledně zmíněnému dojde (viz (5.2)) právě tehdy, když

$$A - C + D < 0 \quad \wedge \quad A - C - D < 0.$$

Řešíme tudíž nerovnici.

$$\begin{aligned} A - C < D &< C - A \\ |D| &< C - A \end{aligned}$$

Víme, že obě strany jsou kladné.

$$\begin{aligned} D^2 &< (C - A)^2 \\ (A + C)^2 - 4BC &< (C - A)^2 \\ 4AC &< 4BC \end{aligned}$$

Používáme zde po celou dobu přeznačení konstant z (4.4) na (5.1). A odpovídá $-ae$, B odpovídá de. Všechny konstanty a, d, e jsou z podmínek definice 13 kladné. A je tedy vždy záporné a B kladné. Z poslední úpravy nerovnice pak vidíme, že C musí být větší než 0, což jsme předpokládali již na počátku kvůli integrovatelnosti jádra. Za těchto podmínek bude velikost populace vždy konvergovat k ekvilibriu.

Pokud bychom podmínky zmírnili a uvažovali i B (resp. d) záporná, dospějeme týmž výpočtem k závěru, že $|A| > |B|$, což znamená, že rovnovážného stavu dosáhneme, pokud minulé stavy mají na budoucí velikost populace menší vliv než stav současný.

Závěr

V práci jsme se seznámili s teorií integrálních a integrodiferenciálních rovnic, kterou jsme posléze uplatnili při řešení složitějších populačních modelů. Hlavními zdroji informací byly knihy G. Gripenberga a kol. (teoretická část o rovnicích) a J. M. Cushinga (integrodiferenciální populační model). První část práce má podobu rešerše, vlastním přínosem autorky byly výpočty ve čtvrté kapitole a celá pátá kapitola.

Původně jsem chtěla praktických příkladů uvést více, narazila jsem však na neřešitelnost pomocí popsaných metod. Jelikož účelem práce nebylo prezentovat výsledky matematického softwaru, upustila jsem od dalších výpočtů. Rovněž by bylo možné sepsat k daným tématům ještě mnohem více vět a důkazů, které by ovšem byly nad rámec bakalářské práce jak složitostí, tak délkou textu.

Seznam použité literatury

CUSHING, C. M. (1977). *Integro-Differential Equations and Delay Models in Population Dynamics (Lecture Notes in Biomathematics : 20)*. Springer Verlag. ISBN 0387084495.

GOMES, M. (2014). A Short History of Mathematical Population Dynamics. Online PDF. URL http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod13/Verhulst.pdf.

GRIPENBERG, G., LONDEN, S. O. a STAFFANS, O. (1990). *Volterra Integral and Functional Equations*. CAMBRIDGE UNIV PR. ISBN 0521372895.

HUŠEK, M. (2017). Kalkulus 4: Laplaceova transformace. Učební text k přednášce.

LÁNSKÝ, P. a POKORA, O. (2015). Matematická biologie: e-learningová učebnice: Vybrané kapitoly z matematického modelování. Elektronická verze online. URL http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-modelovani-dynamickych-biologickych-dat--vybrane-\kapitoly-z-matematickeho-modelovani. ISBN 978-80-210-8095-9.

POSPÍŠIL, Z. (2018). Matematické modelování dynamiky populací. Online prezentace. URL https://www.math.muni.cz/~pospisil/Habilitace/Pedagogicka.pdf. Masarykova univerzita, 2006.

SOBOTÍKOVÁ, V. Kapitola 3: Prostory L^p. Online PDF. URL ftp://math.feld.cvut.cz/pub/veronika/pan/pan16/PAN_prednasky_k3_v1.pdf.

STARÁ, J. Kapitola 2. Posloupnosti. Online PDF. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stara/posloupn.pdf.

WEISSTEIN, E. W. (2018). MathWorld: A Wolfram Web Resource: Laplace transform. Online. URL http://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html.

ZELENÝ, M. (2009). Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací. Online PDF. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA2B/MA2b_Kap_16_tisk.pdf.