Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Kubická a bikvadratická reciprocita
Autor: Samuel Staško

Shrnutí obsahu práce

Práce se věnuje důkazu zákonů kubické a bikvadratické reciprocity podle kapitoly 9 v knize A Classical Introduction to Modern Number Theory od K. Irelanda a M. Rosena.

Celkové hodnocení práce

Zvolené téma je poměrně náročné a zadání práce bylo kompletně splněno. Student kromě přeložení příslušné kapitoly vhodně doplnil jednak potřebné definice a pomocná tvrzení z předešlých kapitol knihy či jiných zdrojů, jednak některé vynechané kroky v důkazech a především důkazy dalších tvrzení, která byla v knize ponechána jako cvičení. Tím vznikl ucelený a čtivý text vhodný pro české bakalářské studenty k nastudování dané problematiky, což oceňuji. Přirozeným završením celé práce je zaprvé návod, jak pomocí zákonů reciprocity a doplňkových tvrzení spočítat $\chi_\alpha(\beta)$ pro dva zadané prvky $\mathbb{Z}[\omega]$ či $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, a zadruhé vysvětlení, jak rozhodnout řešitelnost celočíselných kongruencí $x^3 \equiv a$ resp. $x^4 \equiv a$; tyto pasáže by si v obou kapitolách zasloužily samostatnou sekci a měly být sepsány pozorněji a podrobněji (viz otázky).

Formální stránka práce je velmi dobrá, prezentované důkazy jsou zformulované kvalitním a srozumitelným matematickým jazykem jen s malým množstvím drobných chyb. Ve zněních lemmat 2.12 a 2.13 chybí informace, že $N(\pi)$ má být prvočíslo, ale ve z nich odvozené větě 2.14 už tento předpoklad naštěstí uveden je. Poslední odstavec důkazu věty 1.15 nefunguje, neboť jistě neplatí $\pi' \equiv 0 \pmod{p}$. Tato chybná argumentace vznikla nepozorným smícháním kongruencí se dvěma různými moduly; pozornější čtenář ovšem dokáže chybu snadno napravit. Frekvence překlepů, gramatických chyb a typografických nedostatků je dosti nízká, takže je text příjemně čitelný – stinnou výjimkou je nedůsledné značení kongruencí někdy jako $a \equiv b \pmod{\pi}$ a jindy jen $a \equiv b\,(\pi)$.

Připomínky a otázky

1. Upřesněte, jak funguje algoritmus na určování $\chi_\alpha(\beta)$ uvedený v závěru sekce 1.5, a zdůvodněte, proč po jistém čase skončí.
2. Vysvětlete, jak přesně z izomorfismu $\mathbb{Z}[\omega]/\pi\mathbb{Z}[\omega] \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (kde $p = \pi\overline{\pi}$) plyne, že kongruence $x^3 \equiv a \pmod{p}$ má řešení v $\mathbb{Z}$ právě tehdy, když má v $\mathbb{Z}[\omega]$ řešení kongruence $x^3 \equiv a \pmod{\pi}$.

Závěr

Práci považuji za dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Jakub Krásenský
Katedra algebry MFF UK
12. června 2019