MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Mgr. Ivan Krch

Model trhu s náhodnými vstupy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí rigorózní práce:	doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto rigorózní práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu práce doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za jeho rady a připomínky, které mi při psaní práce udělil. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a přítelkyni, že mě po celou dobu podporovali.

Název práce: Model trhu s náhodnými vstupy

Autor: Mgr. Ivan Krch

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí rigorózní práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se věnujeme modelu trhu s náhodnými vstupy reprezentovaného úlohou prodavače novin, kde je náhodná složka promítnuta skrze náhodný počet zákazníků. Práce je členěna do tří kapitol. V první kapitole uvádíme základní problém prodavače novin jako úlohu stochastického programování s kompenzací. V druhé kapitole vyložíme teorii her pro více hráčů uzpůsobenou pro problém prodavačů novin. Dále ve druhé kapitole úlohu rozšiřujeme o druhého prodavače na trhu a ve třetí kapitole úlohu ještě více zobecníme na n prodavačů novin na trhu. Situace vzniklé v kapitole dva a tři řešíme z pohledu teorie her a zkoumáme zde vlastnosti Nashových ekvilibrií. Vyložená teorie je demonstrována na ilustrativních příkladech v závěru dvou posledních kapitol.

Klíčová slova: problém prodavače novin, Nashovo ekvilibrium, hra více hráčů.

Title: Market model with random inputs

Author: Mgr. Ivan Krch

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of probability and mathematical statistics

Abstract: The thesis deals with market models with random inputs represented by the newsvendor problem for which the randomness is given through a random number of customers. Presented work is divided into three chapters. In the first chapter we present the elementar newsvendor problem as stochastic programming problem with a fixed recourse. In the second chapter we present the multiplayer game theory adapted to the newsvendors problem. Moreover, in the second chapter we extend the problem by the second newsvendor on the market and in the third chapter we generalize the problem for n newsvendors on the market. We deal with the situations that arise in the chapters two and three from the game theory point of view and we study characteristics of a Nash equilibrium. Presented theory is demonstrated on illustrative examples in the ends of the two last chapters.

Keywords: newsvendor problem, Nash equilibrium, multiplayer games.

Obsah

Úvod

Rigorózní práce je věnována modelům trhu s náhodnými vstupy. V této práci je důkladně zkoumán problém prodavače novin, kde jsou náhodnými vstupy počty zákazníků. V jednotlivých částech práce je problém prodavače novin postupně rozšiřován od základní úlohy stochastického programování s jedním prodavačem až k úloze s n prodavači. Hlavní důraz je kladen na vysvětlení teorie her pro model trhu s více prodavači. Na takovémto modelu trhu hledáme rovnovážné body, konkrétně se zaměřujeme na hledání a popis Nashových ekvilibrií.

Text práce je členěn do tří kapitol a apendixu. Apendix obsahuje znění vět a definic, které jsou použity při budování teorie v rigorózní práci.

V první kapitole seznamujeme čtenáře s problémem prodavače novin a uvádíme motivaci pro použití stochastického programování k modelování tohoto problému. V této kapitole uvažujeme pouze jednoho prodavače na trhu. V problému s jedním prodavačem novin ukazujeme přístupy k řešení problému při modelování počtu zákazníků spojitou i diskrétní náhodnou veličinou.

Druhá kapitola rozšiřuje problém na trhu novin o druhého prodavače. Tímto přechodem se v práci dostáváme do oblasti teorie her. Teorie her v problematice prodavačů novin je vyložena v úvodu druhé kapitoly. Dále je v této kapitole upřená pozornost zejména na hledání Nashova ekvilibria a zkoumání jeho jednoznačnosti. V závěru druhé kapitoly je teorie demonstrována na příkladu pro dva prodavače novin.

Třetí kapitola je věnována problematice s n prodavači novin. Stejně jako v druhé kapitole je teorie budována za účelem nalezení Nashova ekvilibria a posouzení jeho jednoznačnosti. Hlavní teoretické závěry opět ukazujeme na numerickém příkladu ke konci kapitoly. V tomto příkladu uvažujeme tři prodavače novin a hledáme zde Nashovo ekvilibrium. Za tímto účelem navrhneme vlastní iterační algoritmus, který následně srovnáme s již existující metodou pro nalezení rovnovážného bodu.

1. Problém prodavače novin

V této práci se budeme zabývat úlohami stochastického programování, které obecně budeme uvažovat jako dvoustupňové úlohy stochastického programování s kompenzací a tedy dle (Birge a Louveaux, 1997) budeme řešit úlohu ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y}\ & z = c^T x + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} \left[\min q(\omega)^T y(\omega) \right] \\
s.t.\ \ & Ax = b, \\
& T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega),\ s.j. \\
& y(\omega) \geq 0,\ s.j. \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

V obecném znění úlohy uvažujeme jednotlivé komponenty v dimenzích tak, aby všechny aritmetické operace byly definovány. Tedy x a c jsou reprezentovány vektory $n_1 \times 1$, matice A má rozměry $m_1 \times n_1$, matici $T(\omega)$ uvažujeme o rozměrech $m_2 \times n_1$, matici W $m_2 \times n_2$, $q(\omega)$ a $y(\omega)$ jsou vektory o rozměrech $n_2 \times 1$ a vektor $h(\omega)$ má rozměr $m_2 \times 1$. Náhodná složka je do úlohy vnesena skrze náhodnou veličinu $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$, pro kterou uvažujeme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Uvedenou úlohu stochastického programování lze přepsat pomocí jejího deterministického ekvivalentu na úlohu

$$
\begin{aligned}
\min_{x}\ \ & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\
s.t.\ \ & Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

kde $\mathcal{Q}(x)$ je střední hodnota optimálních řešení druhého stupně úlohy, tj. definujeme $\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} Q(x,\boldsymbol{\omega})$. Optimální řešení druhého stupně úlohy je pro pevnou realizaci ω náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}$ rovné

$$Q(x,\omega) = \min_{y} \{ q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0 \}.$$

Takovýto zápis dobře ilustruje, jaké problémy se pomocí dvoustupňové stochastické úlohy s kompenzací dají řešit. V prvním stupni úlohy je zvoleno x, aniž bychom znali realizaci náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}$, a až po této realizaci zjišťujeme, jakého výsledku jsme volbou x dosáhli. Při volbě x tedy bereme do úvahy budoucí možné vlivy náhodné veličiny, avšak v druhém stupni úlohy již nemáme možnost upravit naše rozhodnotí na základě pozorované realizace.

Jak konstrukce úlohy napovídá, vhodnými problémy k řešení jsou takové úlohy, pro které je nutné učinit rozhodnutí nyní, aniž bychom věděli, jaký bude výsledek v dalším okamžiku. Typickými úlohami stochastického dvoustupňového programování s kompenzací jsou například problém farmáře (Birge a Louveaux, 1997), nákupy finančních derivátů za účelem zisku nebo problém prodavače novin. Právě problémem prodavače novin se v této práci budeme zabývat. Z definice problému tak, jak je popsán dále, je zřejmé, že prodavač novin nezná poptávku, a musí učinit rozhodnutí předtím, než bude poptávka realizována.

Nyní přistoupíme k popisu základní stochastické úlohy, úlohy prodavače novin. V této kapitole budeme uvažovat pouze jednoho prodavače novin s jediným titulem stejně jako v (Birge a Louveaux, 1997) a (Shapiro a kol., 2009). Úloha spočívá v tom, že prodavač novin nakoupí ráno noviny za cenu c, které se následně celý den snaží prodat za cenu p. Pokud prodavači noviny po celém dni prodávání zůstanou, má možnost je za zlomkovou cenu s prodat nazpět vydavateli. Budeme předpokládat, že v cenách platí nerovnosti takové, že prodavač novin prodává za cenu vyšší, než je jeho nákupní cena, a zároveň cena, za kterou posléze vrací noviny zpět, je nižší než cena nákupní, tj. $p > c > s$. Tyto nerovnosti zajistí to, aby se prodavači vůbec vyplatilo noviny prodávat (prodejní cena je vyšší než nákupní) a zároveň, aby při nadhodnocení poptávky a následném vrácení zbylých kusů vydavateli nevydělal více než za noviny sám zaplatil (nákupní cena je vyšší než cena za vrácení).

Prodavač novin obecně nezná, jaká bude daný den poptávka po novinách, ale předpokládáme, že zná její pravděpodobnostní rozdělení. Náhodnou veličinu, která označuje denní poptávku po novinách, označíme $\boldsymbol{\omega}$ s distribuční funkcí F. Obecně budeme předpokládat, že náhodná veličina nabývá pouze nezáporných hodnot. Tento předpoklad zabrání tomu, že bychom uvažovali, že k prodavači přijde záporný počet zákazníků. Prodavač novin se tedy snaží maximalizovat svůj zisk s ohledem na náhodnou poptávku. Navíc budeme předpokládat, že prodavač novin je limitován při nákupu novin shora. Tedy maximální počet novin, které může denně nakoupit, je nejvýše u.

Abychom byli shodní s obecným zápisem stochastické úlohy (1.1), budeme uvažovat úlohu minimalizační. V rámci dvoustupňového stochastického problému s kompenzací lze úlohu zapsat ve tvaru (1.2).

$$\min_{u \geq x \geq 0} cx + \mathcal{Q}(x), \tag{1.2}$$

kde

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} Q(x, \boldsymbol{\omega})$$

a $Q(x, \boldsymbol{\omega})$ je definováno jako

$$\begin{aligned} \min_{y(\boldsymbol{\omega}), w(\boldsymbol{\omega})} \quad & - py(\boldsymbol{\omega}) - sw(\boldsymbol{\omega}) \\ s.t. \quad & y(\boldsymbol{\omega}) \leq \boldsymbol{\omega}, \ s.j. \\ & y(\boldsymbol{\omega}) + w(\boldsymbol{\omega}) \leq x, \ s.j. \\ & y(\boldsymbol{\omega}) \geq 0, w(\boldsymbol{\omega}) \geq 0 \ s.j. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Takto zapsaná úloha minimalizuje ztrátu prodavače novin. Dvoustupňový zápis úlohy prodavače novin dobře reflektuje realitu, neboť je zde vidět, že rozhodnutí o nákupu novin je učiněno ještě před samotnou realizací náhodné poptávky. Naším cílem je tedy najít optimální množství novin x, které máme daný den nakoupit. Toto množství x je nutné nakoupit dříve, než zjistíme, kolik zákazníků k prodavači doopravdy přijde. Později, v druhém stupni úlohy, se dozvíme, jaká je skutečná poptávka po novinách. Tedy víme, kolik novin prodavač daný den prodal za cenu p, čemuž odpovídá veličina y, a případně také kolik novin zbylo, této hodnotě odpovídá veličina w.

Pokud bychom přistoupili pouze k řešení úlohy (1.3), tak bychom pro pevné ω a x získali optimální hodnoty pro $w(\omega)^*$ a $y(\omega)^*$ ve tvaru

$$\begin{aligned} y(\omega)^* &= \min(\omega, x) \\ w(\omega)^* &= \max(x - \omega, 0). \end{aligned}$$

Na základě uvedeného optimálního řešení druhého stupně úlohy lze úlohu (1.2) přepsat do tvaru

$$\min_{u \geq x \geq 0} \qquad cx + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} \left\{ -p \min(\boldsymbol{\omega}, x) - s \max(x - \boldsymbol{\omega}, 0) \right\}.$$

Po drobné aritmetické úpravě dostáváme jednostupňovou úlohu stochastického programování (1.4), se kterou budeme dále pracovat.

$$\begin{aligned} \min_{x} \qquad & (p-s)\mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}(x-\boldsymbol{\omega})^{+} - (p-c)x \\ s.t. \qquad & x \leq u, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde $(x-\boldsymbol{\omega})^{+} = \max(0, x-\boldsymbol{\omega})$. Pokud bychom uvažovali $\boldsymbol{\omega}$ jako náhodnou veličinu se spojitým pravděpodobnostním rozdělením, pak výsledek úlohy (1.4) dostaneme následujícím postupem

$$\begin{aligned} &(p-s)\mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}(x-\omega)^{+} - (p-c)x = (p-s)\int_0^x (x-\omega)dF(\omega) - (p-c)x = \\ &(p-s)xF(x) - (p-s)xF(x) + (p-s)\int_0^x F(\omega)d\omega - (p-c)x = \\ &(p-s)\int_0^x F(\omega)d\omega - (p-c)x, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde jsme dostali druhý řádek pomocí použití per partes, tj.

$$\int_0^x \omega dF(\omega) = [\omega F(\omega)]_0^x - \int_0^x F(\omega)d\omega.$$

Abychom nalezli minimum pro úlohu prodavače novin, je potřeba funkci odvozenou v (1.5) zderivovat a následně derivaci položit rovnou nule. Tato úprava vede na rovnost ve tvaru

$$(p-s)F(x) - (p-c) = 0,$$

jejímž řešením je kvantil náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}$ v bodě $\frac{p-c}{p-s}$. Tedy hledané optimum je ve tvaru

$$x^{*} = \begin{cases} u, \quad \text{pokud} \quad \frac{p-c}{p-s} > F(u) \\ F^{-1}(\frac{p-c}{p-s}), \quad \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Abychom se ověřili, že jsme takto nalezli globální minimum, ukážeme, že účelová funkce problému (1.4) je konvexní. O konvexnosti této funkce se lze přesvědčit dvojitým zderivováním výrazu odvozeného v rovnici (1.5). Druhá derivace tohoto výrazu je rovna

$$(p-s)f(x) \geq 0,$$

kde f je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}$. Navíc předpokládáme, že $p > s$, tedy účelová funkce úlohy je konvexní. Na základě vět A.2 a A.3 jsme našli globální minimum pro úlohu s náhodnou veličinou se spojitým pravděpodobnostním rozdělením.

Nyní se zaměříme na úlohu, kde náhodná veličina nemá spojité pravděpodobnostní rozdělení, neboť poptávka po novinách je z podstaty nemožnosti dělitelnosti jednotlivých výtisků diskrétní. Pravděpodobnostní rozdělení s atomy náležícími do $\mathbb{Z}$ proto lépe vystihuje myšlenku problému prodavače novin. Účelová funkce s diskrétní náhodnou veličinou je ve tvaru

$$z(x) = (p - s) \sum_{\{\omega \in [0,x] \cap \mathbb{Z}\}} P(\boldsymbol{\omega} = \omega)(x - \omega) - (p - c)x.$$

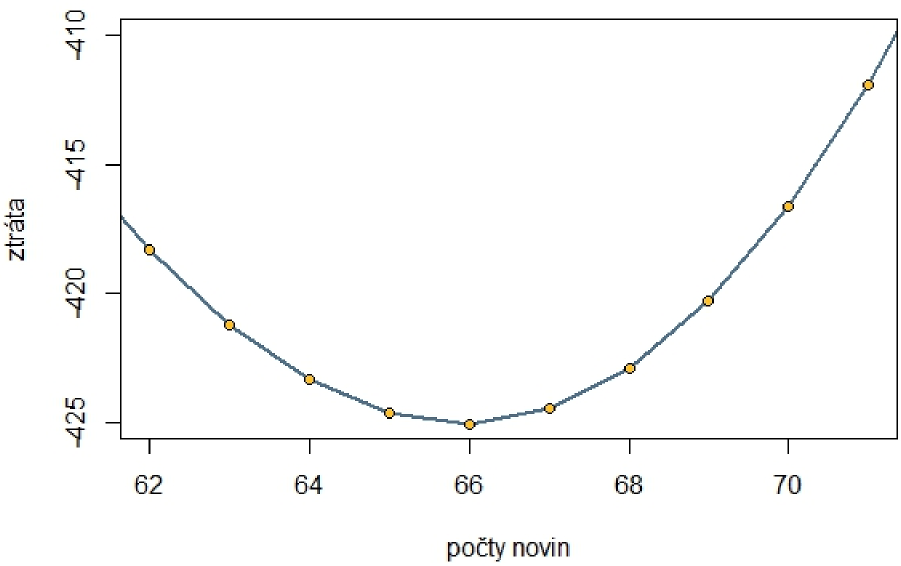
Pro řešení úlohy prodavače novin s touto účelovou funkcí použijeme v této práci subdiferenciály účelové funkce. Zatímto účelem si definujeme konvexní obal D hodnot funkce $z(x)$ v bodech $x \in \mathbb{N}_0$ dle definice A.2, tj.

$$D = \mathrm{conv}\{z(x); x \in \mathbb{N}_0\}.$$

Představu o tom jak vypadá množina D lze získat z obrázku 1.1, kde je znázorněna hranice množiny D spolu s hodnotami konkrétní účelové funkce v bodech $x \in \mathbb{N}_0$. Na základě obdobného odvozování, jako bylo provedeno v rovnici (1.5), řešíme úlohu

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{N}_0} \quad & z(x) = (p - s) \sum_{\{\omega \in [0,x] \cap \mathbb{Z}\}} P(\boldsymbol{\omega} = \omega)(x - \omega) - (p - c)x \\ s.t. \quad & x \leq u, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Při řešení úlohy s diskrétní náhodnou veličinou se zaměříme na hledání řešení na množině D. Množina D je z konstrukce konvexní množina s hranicí po částech lineární. Díky tomuto faktu jsme schopni vypočítat směrnici mezi dvěma



Obrázek 1.1: Hranice množiny D znázorňující konvexní obal konkrétní účelové funkce z pro úlohu s diskrétní náhodnou veličinou

sousedními body. Pro body $\{x, x+1\}$ je směrnice rovna

$$(p-s)F(x) - (p-c).$$

Dle věty A.2 hledáme takové x, jehož subdiferenciál obsahuje 0. Označme směrnici mezi body $\{x-1, x\}$ jako b_1 a mezi body $\{x, x+1\}$ jako b_2. Pak subdiferenciál funkce z v bodě x jsou všechny směrnice b procházející bodem x takové, že leží mezi směrnicemi b_1 a b_2. Navíc z konvexity z víme, že $b_1 \le b_2$ tedy subdiferenciál funkce z je ve tvaru

$$\partial z(x) = \{b \in \mathbb{R} : b_1 \le b \le b_2\}.$$

Abychom našli x takové, že $0 \in \partial z(x)$, pak z průběhu konvexní funkce hledáme největší x, pro než platí

$$\begin{aligned} b_1 &= (p-s)F(x-1) - (p-c) \le 0 \\ b_2 &= (p-s)F(x) - (p-c) > 0. \end{aligned}$$

Tedy řešením úlohy je $\inf\{x; F(x) \ge \frac{p-c}{p-s}\}$, což opět odpovídá kvantilu náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}$ v bodě $\frac{p-c}{p-s}$. Pokud vezmeme v úvahu omezení na prodej novin, dostaneme rovnici pro optimální řešení jako v (1.6).

Poznámka. V předchozí části jsme hledali první x takové, že pro něj nastane ve směrnicích ve vedlejších úsecích změna ve znaménku. Avšak může nastat, že pro nějakou distribuční funkci bude platit $F(x) = \frac{p-c}{p-s}$. Pak pro dva body $x-1$ a x platí, že jejich subdiferenciál obsahuje 0. Na základě úvah provedených výše pak vybíráme nejmenší x takové, že $0 \in \partial z(x)$.

Hledaným řešením je kvantil náhodné veličiny, která odpovídá poptávce po novinách. Z obou uvedených postupů dostáváme tedy stejné řešení. Na základě tohoto faktu budeme v následujících částech této práce používat spojitou náhodnou veličinu.

2. Teorie her pro trh prodavačů novin

V této části práce se budeme věnovat problému, kdy místo jednoho prodavače novin uvažujeme obecně n prodavačů. Budeme předpokládat, že prodavači novin nabízejí různé tituly, které jsou si však podobné. Tato podobnost v prodávaných novinách nám umožní rozšířit uvažovaný problém o substituci mezi tituly. Budeme tedy předpokládat, že pokud zákazník přijde k jednomu prodavači novin, který své noviny již v daný den prodal, může se zákazník rozmyslet, jestli přejde k jinému prodavači a zakoupí si obdobné noviny. V celém problému uvažujeme pouze případ, kdy zákazník zkusí maximálně jednoho dalšího prodavače. Pokud by už ani druhý prodavač v tento den neměl žádné zbývající výtisky k prodeji, zákazník odchází s nepořízenou a nezkouší si koupit noviny u dalšího prodavače.

V tomto problému se budeme zabývat jak nalezením optimálního řešení pro všechny prodejce, tak i vlastnostmi tohoto řešení. V této kapitole se zaměříme na koncept Nashova ekvilibria tak, jak je definované v definici A.11. Dále budeme diskutovat převážně existenci a jednoznačnost nalezeného řešení.

Přechodem od jednoho prodavače novin k n prodavačům jsme se dostali do oblasti teorie her. Na základě (Aubin, 1993) a (Nash, 1951) definujeme, jak vypadá uvažovaný problém pro n prodavačů novin z pohledu teorie her. Naším cílem bude nalezení optimální n-tice nakoupených novin $(x_1, \cdots ,x_n) \in \times_{i=1}^{n} X_i$, kde x_i odpovídá počtu nakoupených novin prodavačem i, počet možných nakoupených novin pro prodavače i je reprezentovaný množinou X_i.

Situaci na trhu, jak je naznačená v prvním odstavci, tedy, že na určitém místě máme n prodavačů novin (v obecném smyslu *hráčů*) s různými vzájemně se substituujícími tituly, nazýváme *hrou.* Každému prodavači novin přiřadíme množinu možných *strategií*, kterou značíme X_i pro prodavače i. Kartézský součin množin možných strategií všech prodavačů značíme $X = \times_{i=1}^{n} X_i$. Dále označíme prostor strategií všech prodavačů kromě i-tého $X_{i-} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Každý prodavač i si zvolí strategii $x_i \in X_i$. Z pohledu i-tého prodavače je množina X rozdělena na množinu strategií X_i, ze kterých může volit, a na množinu strategií X_{i-}, nad kterou nemá žádnou kontrolu. Vektor strategií ostatních prodavačů novin označíme $x_{i-} = (x_1, \cdots , x_{i-1},x_{i+1}, \cdots , x_n)$. Celkovou n-tici strategií značíme $x = (x_1, \cdots , x_n)$. V našem případě strategie x_i odpovídá počtu nakoupených novin v daný den. Stejně jako tomu bylo u problému jednoho prodavače novin, i zde uvažujeme počet nakoupených novin jako nezáporné číslo, shora omezené hodnotou u_i pro prodavače i. Tedy množina možných strategií všech prodavačů je rovna $X = \times_{i=1}^{n} [0,u_i]$.

Cílem každého z n prodavačů je vybrat vhodnou strategii tak, aby v jistém smyslu dosáhl optima. K tomuto účelu každý z nich používá množinu rozhodovacích pravidel. Tato pravidla stanoví podmnožinu možných strategií i-tého prodavače novin na základě strategie ostatních prodavačů novin. Tyto množiny, které jsou definovány v definici A.8, označíme jako $C^i(x_{i-})$.

Následně pro každého prodavače i definujeme ztrátovou funkci ℓ_i, která reflektuje zvolenou strategii. Ztrátová funkce je zobrazení $\ell_i : X \to \mathbb{R}$. Hodnota ztrátové funkce ℓ_i závisí také na volbě strategií ostatních prodavačů z prostoru

X_{i-}. V našem případě budeme jako ztrátovou funkci uvažovat funkci ve tvaru pořizovacích nákladů na nákup novin sníženou o tržbu z jejich následného prodeje a také z případného navrácení výtisků vydavateli. Takovouto hru s n prodavači na trhu nazýváme dle definice A.10 hrou v *n-normálním tvaru* s množinami strategií X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro každého prodavače i.

Z uvedených charakteristik hry můžeme definovat jednotlivé množiny rozhodovacích pravidel s využitím ztrátových funkcí následovně konkrétněji

$$\bar{C}^i(x_{i-}) = \left\{ x_i \in X_i : \ell_i(x_i, x_{i-}) = \inf_{y \in X_i} \ell_i(y, x_{i-}) \right\}. \tag{2.1}$$

Je zřejmé, že množiny rozhodovacích pravidel (2.1) odpovídají dle definice A.12 množinám nejlepších odpovědí na zvolenou strategii ostatních prodavačů. Tedy, že při pevně dané volbě strategie $x_{i-} \in X_{i-}$ prodavač i volí takovou strategii x_i, která minimalizuje jeho ztrátovou funkci.

Na základě těchto upravených množin rozhodovacích pravidel pro jednotlivé prodavače definujeme souhrnné zobrazení rozhodovacích pravidel pro všechny hráče. Toto souhrnné zobrazení je dáno předpisem

$$\bar{\mathbf{C}} : X \rightrightarrows X \text{ tak, že } \bar{\mathbf{C}}(x) = (\bar{C}^1(x_{1-}), \cdots, \bar{C}^n(x_{n-})). \tag{2.2}$$

Hlavním cílem této práce je zkoumat Nashova ekvilibria pro trh prodavačů novin. Říkáme, že strategie $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X$ náleží do množiny Nashových ekvilibrií pokud platí

$$\forall i = 1, \cdots, n, \quad \forall y_i \in X_i : \; \ell_i(y_i, x_{i-}) \geq \ell_i(x_i, x_{i-}).$$

Tedy je to taková strategie, že žádný prodavač i při fixní volbě ostatních strategií $x_{i-} \in X_{i-}$ nedosáhne nižší hodnoty ztrátové funkce změnou svojí strategie x_i.

Pokud uvážíme pouze konzistentní strategie v zobrazení $\bar{\mathbf{C}}$, tedy dle definice A.9 takové strategie, že platí

$$\forall i = 1, \cdots, n, \; x_i \in \bar{C}^i(x_{i-}), \tag{2.3}$$

pak pro každého prodavače $i = 1, \cdots, n$ platí, že jeho strategie náleží do množin (2.1), když každý z nich minimalizuje svou ztrátovou funkci při zafixování strategií ostatních hráčů. Tedy strategie splňující (2.3) odpovídají strategiím Nashova ekvilibria.

Uvedením definice pevného bodu zobrazení lze na množinu Nashových ekvilibrií nahlížet jako na množinu pevných bodů zobrazení $\bar{\mathbf{C}}$ z (2.2). Pevným bodem zobrazení $\bar{\mathbf{C}} : X \rightrightarrows X$ rozumíme takový prvek $x \in X$, že platí $x \in \bar{\mathbf{C}}(x)$.

Tento pohled na Nashovy ekvilibria nám umožňuje uvést Kakutaniho větu o pevném bodě.

Věta 2.1 (Kakutani)**.** *Nechť $X \subset \tilde{X}$ je konvexní kompaktní podmnožina, množinové zobrazení $C : X \rightrightarrows X$ je shora polospojité s neprázdnými konvexními uzavřenými obrazy. Pak zde existuje pevný bod $x^* \in X$ zobrazení C.*

Důkaz. Viz Aubin (1993). □

Nyní již můžeme přejít k definici námi zkoumané úlohy. Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, mezi prodávanými výtisky uvažujeme substituci, kterou dále budeme značit $a_{i,j}$. Hodnota $a_{i,j}$ určuje pravděpodobnost, že zákazník, jehož poptávka nebyla uspokojena u prodavače i, přejde k prodavači j. Pokud ani u prodavače j tento zákazník nenakoupí, nepokouší se již přecházet k dalším prodavačům a odchází z trhu s nepořízenou. Dle (Netessine a Rudi, 2003) klademe na substituci následující předpoklady

$$\begin{aligned} &1.\ \ 0 \le a_{i,j} \le 1,\ \text{pro } i,j = 1,\cdots,n,\\ &2.\ \ a_{i,i} = 0,\ \text{pro } i = 1,\cdots,n,\\ &3.\ \ 0 \le \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < 1,\ \text{pro } i = 1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Z třetího předpokladu je patrné, že zákazník se nemusí nutně pokoušet uspokojit vlastní poptávku u žádného dalšího prodejce novin a po prvním neúspěchu může ihned odejít z trhu. Definujeme tento jev jako $a_{i,\infty} = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$. Díky tomuto dodefinování a kombinací s předpokladem 1 můžeme na $a_{i,j}$ nahlížet jako na pravděpodobnosti přechodu zákazníků, kteří primárně chtěli nakoupit u prodavače i.

Obdobně jako v první kapitole uvažujeme pro každého prodavače nákupní cenu novin c_i, prodejní cenu novin p_i a cenu při odkupu novin s_i, pokud prodavači po celém dnu prodávání ještě nějaké výtisky zbydou. Předpokládáme, že pro každého prodavače tyto ceny splňují nerovnosti $p_i > c_i > s_i$.

Poptávka po novinách pro prodavače i je dána náhodnou veličinou $\boldsymbol{\omega}_i$. Předpokládáme, že $\boldsymbol{\omega}_i$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Substituci do úlohy vneseme zjednodušeně tak, že se každému prodavači navýší poptávka o střední počty přecházejících zákazníků, tj. počet zákazníků se navýší o nezáporné číslo rovné $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+$. Navíc budeme předpokládat, že nosič náhodných veličin je nezáporný.

Podíváme se nyní na vyjádření problému pro i-tého hráče pomocí dvoustupňové úlohy s kompenzací. Rozšíříme úlohu (1.2) a (1.3) o substituční koeficienty. Do podmínky v druhém stupni úlohy přidáme zákazníky, kteří přicházejí od jiných prodavačů. Tímto rozšířením dostáváme problém ve tvaru

$$\min_{u_i \ge x_i \ge 0} c_i x_i + \mathcal{Q}(x_i, x_{i-}), \tag{2.5}$$

kde

$$\mathcal{Q}(x_i, x_{i-}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} Q(x, \boldsymbol{\omega})$$

a $Q(x, \boldsymbol{\omega})$ pro $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n)$ je definováno jako

$$\begin{aligned} \min_{y_i(\boldsymbol{\omega}), w_i(\boldsymbol{\omega})} \quad & - p_i y_i(\boldsymbol{\omega}) - s_i w_i(\boldsymbol{\omega}) \\ s.t. \quad & y_i(\boldsymbol{\omega}) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+ \le \boldsymbol{\omega}_i,\ s.j. \\ & y_i(\boldsymbol{\omega}) + w_i(\boldsymbol{\omega}) \le x_i,\ s.j. \\ & y_i(\boldsymbol{\omega}) \ge 0, w_i(\boldsymbol{\omega}) \ge 0,\ s.j. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Abychom zdůraznili závislost deterministického ekvivalentu v prvním stupni úlohy na rozhodnutí zbylých $(n-1)$ prodavačů, používáme zápis $\mathcal{Q}(x_i, x_{i-})$. Podobná závislost se objevuje i pro koeficienty $y_i(\boldsymbol{\omega})$ a $w_i(\boldsymbol{\omega})$, kde nyní uvedená závislost je také na realizaci poptávky po ostatních výtiscích. Proto v jejich zápisu místo $\boldsymbol{\omega}_i$ používáme $\boldsymbol{\omega}$. Obě zmíněné závislosti jsou způsobené zapojením substituce do modelu. Interpretace první podmínky v druhém stupni úlohy, tj. v úloze (2.6), je taková, že počet prodaných výtisků i-tého prodavače nemůže být větší, než je poptávka po i-tém výtisku navýšena o převis poptávky nad nabídkou všech $(n-1)$ ostatních výtisků. Tyto výtisky jsou dále přenásobeny pravděpodobnostmi, že neuspokojení zákazníci přejdou k prodavači i.

Vypočtením optimálního řešení pro úlohu (2.6) při zafixování $\boldsymbol{\omega} = \omega$ a (x_i, x_{i-}) dostaneme obdobné řešení jako v první kapitole s jedním prodavačem. Optimální řešení jsou v následujícím tvaru

$$y_i^*(\omega) = \min\left[\omega_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\omega_j - x_j)^+, x_i\right]$$

a

$$w_i^*(\omega) = \max\left[x_i - \left(\omega_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\omega_j - x_j)^+\right), 0\right].$$

Dále v textu označíme efektivní poptávku po výtisku i-tého prodavače jako $\boldsymbol{\omega}_i^e$, která je definovaná jako

$$\boldsymbol{\omega}_i^e = \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+. \tag{2.7}$$

Poznamenejme, že ačkoli předpokládáme vzájemnou nezávislost $\boldsymbol{\omega}_i$, tak v případě efektivní poptávky již existuje nenulová korelace mezi $\boldsymbol{\omega}_i^e$ a $\boldsymbol{\omega}_j$ pro $\forall j$. S efektivní poptávkou (2.7) se vypočtená optimální řešení úlohy (2.6) zjednoduší na tvary

$$y_i^*(\omega) = \min(\omega_i^e, x_i)$$

a

$$w_i^*(\omega) = \max(x_i - \omega_i^e, 0).$$

Takovéto řešení odpovídá řešení problému jednoho prodavače novin z kapitoly 1, kde používáme efektivní poptávku po novinách prodavače i namísto poptávky $\boldsymbol{\omega}$.

Nyní můžeme přeformulovat úlohu v prvním stupni (2.5) s vypočtenými optimálními hodnotami v druhém stupni. V dalších částech práce využíváme jak efektivní poptávku, tak i formulaci se substitucemi, z tohoto důvodu zde uvedeme obě varianty. Formulace prvního stupně v nezkráceném tvaru vypadá následovně

$$\begin{aligned}\min_{u_i \geq x_i \geq 0} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} \Bigg\{ & c_i x_i - p_i \min\left[\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+, x_i\right] \\ & - s_i \max\left[x_i - \left(\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+\right), 0\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.8}$$

s pomocí definované efektivní poptávky docílíme formulace ve tvaru

$$\min_{u_i \geq x_i \geq 0} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}} \left[c_i x_i - p_i \min(\boldsymbol{\omega}_i^e, x_i) - s_i \max(x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e, 0)\right]. \tag{2.9}$$

2.1 Trh 2 prodavačů novin

V předešlé sekci jsme popsali úvod do problematiky více prodavačů novin z obecného pohledu n prodavačů novin. V této části si ukážeme, jak vypadá uvažovaný problém pro konkrétní volbu n. Logickým krokem je přejít od úlohy s jedním prodavačem k úloze, kde vystupují dva prodavači novin.

Je nutné poznamenat, že v celé této sekci 2.1 budeme předpokládat, že

$$a_{2,1} \neq 0$$
$$a_{1,2} \neq 0.$$

Tento předpoklad nám zaručí, že v uvažovaném problému hodnoty nakoupeného množství závisejí na rozhodnutí druhého prodavače. Pokud by například nastalo, že $a_{1,2} = 0$, pak z rovnice pro efektivní poptávku (2.7) vidíme, že

$$\boldsymbol{\omega}_2^e = \boldsymbol{\omega}_2 + a_{1,2}(\boldsymbol{\omega}_1 - x_1)^+ = \boldsymbol{\omega}_2.$$

Z pohledu prodavače 2 by při $a_{1,2} = 0$ úloha zůstala ve stejném tvaru, jako tomu bylo v kapitole 1.

Na úloze dvou prodavačů novin lze analyticky ukázat popsané teoretické základy z předchozí sekce. Jako jeden z prvních popsal tuto problematiku prof. Mahmut Parlar v (Parlar, 1988). Na základě tohoto článku ukážeme způsoby řešení a vlastnosti tohoto řešení v úloze dvou prodavačů.

Vycházíme z vypočtené rovnice dvoustupňové úlohy ve tvaru (2.8). Účelovou funkci můžeme dále upravit za předpokladu spojitosti náhodné veličiny, ke kterému jsme přistoupili na konci první kapitoly. Budeme tedy uvažovat hustotu náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}_1$ jako f a hustotu náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}_2$ jako g. Navíc si rozdělíme pravděpodobnostní prostor generovaný náhodnými veličinami $\boldsymbol{\omega}_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2$ na čtyři disjunktní podmnožiny tak, aby tvořily úplný systém jevů. Tento rozpad jevů je znázorněn v tabulce 2.1.

S tímto rozdělením pravděpodobnostního prostoru a hustotami náhodných veličin vyjádříme, s jakou ztrátou se prodavač 1 potýká v jednotlivých podprostorech znázorněných v tabulce 2.1.

1. $\boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2 > x_2$	3. $\boldsymbol{\omega}_1 > x_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2 > x_2$
2. $\boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2$	4. $\boldsymbol{\omega}_1 > x_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2$

Tabulka 2.1: Rozdělení pravděpodobnostního prostoru na 4 možné podprostory na základě nakoupeného množství pro prodavače 1 a 2

1. $\ell_1^1 = c_1x_1 - p_1\boldsymbol{\omega}_1 - p_1 \min\left[a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2), x_1 - \boldsymbol{\omega}_1\right] - s_1(x_1 - \boldsymbol{\omega}_1 - a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2))^+$
2. $\ell_1^2 = c_1x_1 - s_1(x_1 - \boldsymbol{\omega}_1) - p_1\boldsymbol{\omega}_1$
3. $\ell_1^3 = c_1x_1 - p_1x_1$
4. $\ell_1^4 = c_1x_1 - p_1x_1$

Jev ℓ_1^1 označuje, že prodavač 1 nakoupil více novin, než byla poptávka, avšak jsou zde neuspokojení zákazníci od prodavače 2. Násobek ve výši $a_{2,1}$ těchto zákazníků přechází nakoupit noviny k prodavači 1. Pokud má prodavač 1 noviny pro tyto zákazníky, obslouží je a případný přebytek novin vrací na konci dne za cenu s_1. Ztráta označená ℓ_1^2 značí jev, kdy prodavač nakoupil více novin, než jaká byla poptávka, to samé platí pro prodavače 2. Není zde tedy žádný zákazník, který by od prodavače 2 přecházel k prodavači 1. Navíc přebytek nakoupených novin prodavač 1 vrací za cenu s_1. V situacích 3 a 4 příslušné ztráty reprezentují jevy, kdy prodavač nakoupil méně novin, než jaká byla poptávka, a je tedy schopen prodat všechny noviny.

Střední hodnotu součtu těchto ztrát budeme v dále v textu značit jako

$$\ell_1(x_1, x_2) = \mathbb{E}(\ell_1^1\mathbb{I}_{(\boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1, \boldsymbol{\omega}_2 > x_2)} + \ell_1^2\mathbb{I}_{(\boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1, \boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2)} + \ell_1^3\mathbb{I}_{(\boldsymbol{\omega}_1 > x_1, \boldsymbol{\omega}_2 > x_2)} + \ell_1^4\mathbb{I}_{(\boldsymbol{\omega}_1 > x_1, \boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2)}),$$

kde funkce $\mathbb{I}$ značí indikátor, tj. například pro indikátor v součinu s ℓ_1^1 platí

$$\mathbb{I}_{(\boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1, \boldsymbol{\omega}_2 > x_2)} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \boldsymbol{\omega}_1 \leq x_1 \text{ a zároveň } \boldsymbol{\omega}_2 > x_2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato funkce odpovídá ztrátové funkci představené v úvodu do problematiky prodavačů novin.

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,x_2) = \int_0^{x_1}\int_{x_2}^{\infty} & \left[c_1x_1 - p_1\omega_1 - p_1\min[a_{2,1}(\omega_2 - x_2), x_1 - \omega_1]\right. \\ & \left. - s_1(x_1 - \omega_1 - a_{2,1}(\omega_2 - x_2))^+\right] f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1 \qquad (2.10) \\ + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} & \left[c_1x_1 - s_1(x_1 - \omega_1) - p_1\omega_1\right] f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1 \qquad (2.11) \\ + \int_{x_1}^{\infty}\int_0^{\infty} & \left[c_1x_1 - p_1x_1\right] f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1 \qquad (2.12) \end{aligned}$$

Pro jednodušší vyjádření ztrátové funkce použijeme fakt, že

$$(x_1 - \omega_1 - a_{2,1}(\omega_2 - x_2))^+ = \begin{cases} x_1 - \omega_1 - a_{2,1}(\omega_2 - x_2), & \text{pro } \omega_2 \leq a_2(x_1, \omega_1) \\ 0, & \text{pro } \omega_2 > a_2(x_1, \omega_1) \end{cases}$$

a

$$\min(a_{2,1}(\omega_2 - x_2), x_1 - \omega_1) = \begin{cases} a_{2,1}(\omega_2 - x_2), & \text{pro } \omega_2 \leq a_2(x_1, \omega_1) \\ x_1 - \omega_1, & \text{pro } \omega_2 > a_2(x_1, \omega_1), \end{cases}$$

kde $a_2(x_1, \omega_1) = \frac{x_1 - \omega_1}{a_{2,1}} + x_2$. Využitím tohoto rozpadu minima a maxima podle ω_2 vypočítáme součet (2.11) a (2.10)

$$\int_0^{x_1}\int_0^{\infty} [c_1x_1 - p_1\omega_1]\, f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1 - \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} s_1(x_1-\omega_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1$$
$$- \int_0^{x_1}\int_{x_2}^{a_2(x_1,\omega_1)} s_1(x_1-\omega_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1$$
$$- \int_0^{x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty} p_1(x_1-\omega_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1$$
$$- (p_1 - s_1)\int_0^{x_1}\int_{x_2}^{a_2(x_1,\omega_1)} a_{2,1}(\omega_2 - x_2)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1.$$

K tomuto součtu navíc přičteme a odečteme výraz

$$\int_0^{x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty} s_1(x_1-\omega_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1. \tag{2.13}$$

Dále součet i s přičteným a odečteným výrazem (2.13) upravíme tak, že spojíme výrazy se stejnou integrovanou funkcí, a také využijeme vlastnosti hustoty pravděpodobnosti, že $\int_0^\infty g(\omega_2)d\omega_2 = 1$. Těmito úpravami získáme výraz

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_1} [c_1x_1 - p_1\omega_1]\, f(\omega_1)d\omega_1 - s_1\int_0^{x_1}(x_1-\omega_1)f(\omega_1)d\omega_1 \\ &- (p_1 - s_1)\int_0^{x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty}(x_1-\omega_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1 \\ &- (p_1 - s_1)\int_0^{x_1}\int_{x_2}^{a_2(x_1,\omega_1)} a_{2,1}(\omega_2 - x_2)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_2 d\omega_1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

K vypočtené hodnotě (2.14) přičteme zbývající člen (2.12), který odpovídá střední hodnotě ztráty pro jevy, kdy prodavač nakoupil více novin, než jaká byla poptávka. Tímto součtem získáme finální vyjádření pro celkovou ztrátu $\ell_1(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,x_2) := &- p_1\int_0^{x_1}\omega_1 f(\omega_1)d\omega_1 - p_1x_1\int_{x_1}^{\infty} f(\omega_1)d\omega_1 - \\ &- (p_1 - s_1)\int_0^{x_1}\int_{x_2}^{a_2(x_1,\omega_1)} a_{2,1}(\omega_2 - x_2)g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_1 - \\ &- (p_1 - s_1)\int_0^{x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty}(x_1-\omega_1)g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_1 - \\ &- s_1\int_0^{x_1}(x_1-\omega_1)f(\omega_1)d\omega_1 + c_1x_1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Účelová funkce reflektuje volbu strategie i-tého prodavače, přičemž hodnota pořizovacích nákladů na nákup novin je snížená o následnou tržbu při prodeji novin a případné vratky neprodaných novin. Ztrátová funkce pro druhého prodavače $\ell_2(x_1,x_2)$ má analogický tvar jako pro prvního, tedy

$$\begin{aligned} \ell_2(x_2,x_1) = &- p_2\int_0^{x_2}\omega_2 g(\omega_2)d\omega_2 - p_2x_2\int_{x_2}^{\infty} g(\omega_2)d\omega_2 - \\ &- (p_2 - s_2)\int_0^{x_2}\int_{x_2}^{a_1(x_2,\omega_2)} a_{1,2}(\omega_1 - x_1)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 - \\ &- (p_2 - s_2)\int_0^{x_2}\int_{a_1(x_2,\omega_2)}^{\infty}(x_2-\omega_2)f(\omega_1)g(\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 - \\ &- s_2\int_0^{x_2}(x_2-\omega_2)g(\omega_2)d\omega_2 + c_2x_2, \end{aligned}$$

kde $a_1(x_2,\boldsymbol{\omega}_2) = \frac{x_2-\omega_2}{a_{1,2}} + x_1$.

Nyní lze sestavit množiny rozhodovacích pravidel (2.1) pro oba prodavače. Tyto množiny tvoří nejlepší odpověď ve smyslu minimalizace ztrátové funkce jednoho prodavače při fixních hodnotách druhého prodavače. Dle (Huang a kol., 2011) a (Netessine a Rudi, 2003) zformulujeme větu o tom, jaký tvar a jaké vlastnosti mají množiny nejlepších odpovědí.

Věta 2.2. *Nechť máme dva prodavače novin se ztrátovými funkcemi $\ell_1(x_1,x_2)$ a $\ell_2(x_2,x_1)$. Pak množiny nejlepších odpovědí (2.1) jsou jednoprvkové množiny takové, že nejlepší odpověď x_i^* pro hráče i splňuje rovnost $\mathcal{L}_i(x_i^*,x_j) = 0$ pro $i \neq j$, kde*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(x_i,x_j) = &- p_i \int_{x_i}^{\infty} f(\omega_i) d\omega_i - s_i \int_0^{x_i} f(\omega_i) d\omega_i - \\ &- (p_i - s_i) \int_0^{x_i} \int_{a_j(x_i,\omega_i)}^{\infty} g(\omega_j) f(\omega_i) d\omega_j d\omega_i + c_i. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Důkaz. Pro prodavače $i = 1,2$ tak, že $i \neq j$, kde $j = 1,2$ hledáme množiny

$$\begin{aligned} \bar{C}^i(x_j) &= \left\{ x_i \in X_i : \ell_i(x_i,x_j) = \inf_{y \in X_i} \ell_i(y,x_j) \right\} = \\ &= \left\{ x_i \in [0,u_i] : \ell_i(x_i,x_j) = \min_{0 \leq y \leq u_i} \ell_i(y,x_j) \right\}. \end{aligned}$$

Při fixní hodnotě nakoupených novin druhého prodavače hledáme počet novin takový, že ztrátová funkce bude minimalizována. Z toho důvodu budeme uvažovat derivaci funkce $\ell_i(x_i,x_j)$ a označíme ji

$$\mathcal{L}_i(x_i,x_j) := \frac{\partial \ell_i(x_i,x_j)}{\partial x_i}.$$

Výpočet derivace ukážeme pro ztrátovou funkci z pohledu prvního prodavače. S využitím Leibnizova integrálního pravidla pro derivaci integrálů, věta A.6, budeme derivovat rovnici (2.15). Pro lepší přehlednost rozčleníme tento krok do čtyř částí, každá část odpovídá derivování jednoho řádku uvedené rovnice.

$$\text{1.ř:} \; - p_1 x_1 f(x_1) - p_1 \int_{x_1}^{\infty} f(\omega_1) d\omega_1 + p_1 x_1 f(x_1)$$

$$\begin{aligned} \text{2.ř:} \; &- (p_1 - s_1) \Big[\int_{x_2}^{a_2(x_1,x_1)} a_{2,1}(\omega_2 - x_2) g(\omega_2) f(x_1) d\omega_2 \\ &\qquad + \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_2}^{a_2(x_1,\omega_1)} a_{2,1}(\omega_2 - x_2) g(\omega_2) f(\omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \Big] = \\ &= -(p_1 - s_1) \Big[\int_0^{x_1} a_{2,1}(a_2(x_1,\omega_1) - x_2) g(a_2(x_1,\omega_1)) f(\omega_1) \frac{\partial a_2(x_1,\omega_1)}{\partial x_1} d\omega_1 \Big] = \\ &= -(p_1 - s_1) \frac{1}{a_{2,1}} \int_0^{x_1} (x_1 - \omega_1) g(a_2(x_1,\omega_1)) f(\omega_1) d\omega_1 \end{aligned}$$

$$\text{3.ř:} \; - (p_1 - s_1) \Big[\int_{a_2(x_1,x_1)}^{\infty} (x_1 - x_1) g(\omega_2) f(x_1) d\omega_2$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty}(x_1-\omega_1)g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_1\Big] = \\
-(p_1-s_1)&\int_0^{x_1}\Big[-(x_1-\omega_1)g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)\frac{\partial a_2(x_1,\omega_1)}{\partial x_1}+ \\
&\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty}g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2\Big]d\omega_1
\end{aligned}
$$

4.ř: $-s_1\int_0^{x_1}f(\omega_1)d\omega_1+c_1,$

kde $a_2(x_1,x_1)=x_2$ a $\frac{\partial a_2(x_1,\omega_1)}{\partial x_1}=\frac{1}{a_{2,1}}$. Součtem všech čtyř kroků dostáváme požadovaný tvar $\mathcal{L}_1(x_1,x_2)$. Prvek, který je nejlepší odpovědí na zvolené množství druhého prodavače, musí splňovat $\mathcal{L}_1(x_1,x_2)=0$. Dále ověříme, zda je ztrátová funkce konvexní. O tom se přesvědčíme tak, že vypočteme $\frac{\partial\mathcal{L}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}$. Opětovným použitím Leibnizova integrálního pravidla dostáváme následující výsledek

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}&=p_1f(x_1)-s_1f(x_1)-(p_1-s_1)\Big[\int_{a_2(x_1,x_1)}^{\infty}g(\omega_2)f(x_1)d\omega_2+ \\
&+\int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{a_2(x_1,\omega_1)}^{\infty}g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_1\Big]=p_1f(x_1)-s_1f(x_1)- \\
&-(p_1-s_1)\Big[f(x_1)\int_{x_2}^{\infty}g(\omega_2)d\omega_2-\int_0^{x_1}g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)\frac{1}{a_{2,1}}d\omega_1\Big]= \\
&=(p_1-s_1)G(x_2)f(x_1)+(p_1-s_1)\frac{1}{a_{2,1}}\int_0^{x_1}g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1,
\end{aligned}
$$

kde $G(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega_2}$ v bodě x a platí $\int_x^{\infty}g(\omega_2)d\omega_2=1-G(x)$. Z předpokladů kladených na parametry p_i, c_i a s_i je zřejmé, že výraz $(p_i-s_i)>0$. Dostáváme, že $\frac{\partial\mathcal{L}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}>0$, což znamená, že ztrátová funkce je ryze konvexní. Nejlepší odpověď je taková, že splňuje $\mathcal{L}_1(x_1,x_2)=0$, dle věty A.2 je globální minimum, což dokazuje požadované tvrzení.

□

Optimální počet nakoupených novin prodavačem i na základě volby strategie prodavače j, tj. prvek z množiny nejlepších odpovědí $\bar{C}^i(x_j)$, budeme dále značit $x_i^*(x_j)$ nebo x_i^*, pokud bude volba prodavače j z kontextu zřejmá.

Jak již bylo zmíněno v úvodu do problematiky více prodavačů novin a jak je také patrné z nutné podmínky pro prvky náležící do množiny nejlepších odpovědí, nejlepší odpověď i-tého prodavače závisí na volbě nakoupených výtisků druhého prodavače. Následující věta z článku Huang a kol. (2011) ukazuje, jakým způsobem se vyvíjí nejlepší odpověď při změně nakoupených novin druhým prodavačem.

Věta 2.3. *Nechť $a_{i,j}>0$ pro $i\neq j$, pak optimální hodnota nakoupených novinových výtisků prodavačem i je klesající funkcí nakoupených výtisků prodavačem j pro $i\neq j$. Navíc zobrazení $x_j\to x_i^*(x_j)$ je spojité.*

Důkaz. Uvedené tvrzení ukážeme pro optimální hodnotu prvního prodavače v závislosti na hodnotách nakoupených výtisků druhým prodavačem. Dle věty 2.2 víme, že optimum prvního prodavače splňuje pro fixní hodnotu x_2 rovnost

$$\mathcal{L}_1(x_1^*,x_2)=0.$$

Abychom zjistili, jak se optimální hodnota prvního prodavače vyvíjí, spočteme derivaci implicitní funkce tak, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1\Big(x_1(x_2),x_2\Big)}{\partial x_2} = 0.$$

Pro přehlednost budeme opět postupovat člen po členu rovnice (2.16).

- $$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-p_1 \int_{x_1(x_2)}^{\infty} f(\omega_1)d\omega_1\right) = p_1 f(x_1)\frac{dx_1}{dx_2}$$

- $$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-s_1 \int_{0}^{x_1(x_2)} f(\omega_1)d\omega_1\right) = -s_1 f(x_1)\frac{dx_1}{dx_2}$$

- $$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-(p_1 - s_1)\int_0^{x_1(x_2)}\int_{a_2(x_1(x_2),\boldsymbol{\omega_1})}^{\infty} g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_1\right) = -(p_1 - s_1)$$
$$\Bigg[\int_{a_2(x_1,x_1)}^{\infty} g(\omega_2)f(x_1)d\omega_2\frac{dx_1}{dx_2} + \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{a_2(x_1(x_2),\omega_1)}^{\infty} g(\omega_2)f(\omega_1)d\omega_2 d\omega_2\Bigg] =$$

$$-(p_1 - s_1)\Bigg[f(x_1)\int_{x_2}^{\infty} g(\omega_2)d\omega_2\frac{dx_1}{dx_2} - \int_0^{x_1} g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1\frac{\partial a_2(x_1,\omega_1)}{\partial x_2}\Bigg] =$$

$$-(p_1 - s_1)\Bigg[f(x_1)\left(1 - G(x_2)\right)\frac{dx_1}{dx_2} - \left(\frac{1}{a_{2,1}}\frac{dx_1}{dx_2} + 1\right)\int_0^{x_1} g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1\Bigg],$$

kde $\frac{\partial a_2(x_1,\omega_1)}{\partial x_2} = \frac{1}{a_{2,1}}\frac{dx_1}{dx_2} + 1$. Poslední člen rovnice (2.16) je konstanta c_1, jejímž derivováním dle x_2 dostaneme 0. Po sečtení všech členů derivace $\mathcal{L}_1(x_1(x_2),x_2)$ můžeme vyjádřit závislost optimálního množství x_1^* na x_2 následovně

$$\frac{dx_1^*}{dx_2} = -a_{2,1}\frac{\int_0^{x_1^*} g(a_2(x_1^*,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1}{a_{2,1}f(x_1^*)G(x_2) + \int_0^{x_1^*} g(a_2(x_1^*,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1} < 0. \tag{2.17}$$

Dle předpokladu věty je hodnota $a_{2,1} > 0$. Tím jsme ukázali, že optimální počet nakoupených výtisků prvním prodavačem je klesající funkcí počtu výtisků druhého prodavače.

Spojitost zobrazení $x_j \to x_i^*(x_j)$ plyne z existence vypočtené derivace. □

Nyní je zřejmé, jak se optimální hodnota výtisků vyvíjí v závislosti na volbě strategie druhého prodavače. Každý z prodavačů je nucen vybírat strategii z množiny strategií X_i, která je omezena nezáporností počtu výtisků a horní mezí rovnou u_i. Pokud se zaměříme na množiny nejlepších odpovědí, pak dle Huang a kol. (2011) můžeme tato omezení na základě věty 2.3 ještě dále zpřísnit.

Věta 2.4. *Optimální hodnota nakoupených novin prodavačem i je zdola omezená hodnotou x_i^L, která splňuje rovnost*

$$-p_i\left(1 - F\left(x_i^L\right)\right) - s_i F\left(x_i^L\right) + c_i = 0,$$

a shora omezená hodnotou x_i^U. Omezení shora $x_i^U = \min(u_i, x_i^{U*})$, kde x_i^{U*} splňuje rovnost

$$-p_i + (p_i - s_i)\int_0^{x_i^{U*}} f(\omega_i)G\left(\frac{x_i^{U*} - \omega_i}{a_{j,i}}\right)d\omega_i + c_i = 0.$$

Platí, že $(x_i^L, x_i^U) \subset X_i$, kde X_i je množina možných strategií pro prodavače i.

Důkaz. Abychom nalezli hodnotu x_i^L, zobecníme množinu možných strategií druhého prodavače na $X_j = [0, \infty)$. Dle věty 2.3 víme, že optimální hodnota nakoupených novin je klesající funkce počtu novin druhého prodavače. Tedy pro libovolné $\tilde{x}_j < u_j$ platí, že $x_i^*(u_j) \leq x_i^*(\tilde{x}_j)$. Proto označíme za dolní mez optima takové x_i^L, které splňuje rovnost

$$\lim_{x_j \to \infty} \mathcal{L}_i(x_i^L, x_j) = 0.$$

Levou stranu rovnice dále upravíme a dostaneme konkrétní podmínku na omezení zdola

$$\begin{aligned}\lim_{x_j \to \infty} \mathcal{L}_i(x_i^L, x_j) = \lim_{x_j \to \infty} \Big[&- p_i \int_{x_i^L}^{\infty} f(\omega_i)d\omega_i - s_i \int_0^{x_i^L} f(\omega_i)d\omega_i - \\ &- (p_i - s_i)\int_0^{x_i^L}\int_{a_j(x_i^L, \omega_i)}^{\infty} g(\omega_j)f(\omega_i)d\omega_j d\omega_i + c_i \Big] = \\ &= -p_i\left(1 - F\left(x_i^L\right)\right) - s_i F\left(x_i^L\right) + c_i.\end{aligned}$$

Člen s dvojným integrálem jsme upravili jako

$$\lim_{x_j \to \infty}\int_0^{x_i^L} f(\omega_i)\int_{a_j(x_i^L, \omega_i)}^{\infty} g(\omega_j)d\omega_j d\omega_i = \lim_{x_j \to \infty}\int_0^{x_i^L} f(\omega_i)(1 - G(a_j(x_i^L, \omega_i)))d\omega_i \stackrel{*}{=}$$

$$\int_0^{x_i^L} \lim_{x_j \to \infty}\Big[f(\omega_i)(1 - G(a_j(x_i^L, \omega_i)))\Big]d\omega_i = 0,$$

kde operaci $\stackrel{*}{=}$ jsme mohli provést dle věty A.5. Protože integrand má na intervalu $(0, x_i^L)$ integrovatelnou majorantu, platí $f(\omega_i)\left(1 - G(a_j(x_i^L, \omega_i))\right) \leq f(\omega_i)$ a $\int_0^{x_i^L} f(\omega_i)d\omega_i < \infty$. Omezení zdola optimální hodnoty nakoupených novin je stejné, jako bychom počítali optimální hodnotu v případě jednoho prodavače novin.

Nejvyšší možná teoretická hodnota, které může optimum pro prodavače i nabývat, je v situaci, kdy prodavač j nenakoupí žádné noviny, tj. $x_j = 0$. Pak označíme x_i^{U*} takové x_i, které splňuje rovnost

$$\mathcal{L}_i(x_i, 0) = 0.$$

Tvar na levé straně rovnice můžeme dále upravit

$$\begin{aligned}&- p_i\left[1 - F(x_i)\right] - s_i F(x_i) - (p_i - s_i)\int_0^{x_i} f(\omega_i)\left[1 - G\left(\frac{x_i - \omega_i}{a_{j,i}}\right)\right]d\omega_i + c_i = 0 \\ &- p_i + (p_i - s_i)\int_0^{x_i} f(\omega_i)G\left(\frac{x_i - \omega_i}{a_{j,i}}\right)d\omega_i + c_i = 0.\end{aligned}$$

Z věty A.4 (o konvoluci) označíme integrál v poslední rovnosti jako $F_{\boldsymbol{\omega}_i^{max}}$. Jedná se o distribuční funkci efektivní poptávky v případě, kdy $x_j = 0$. Tuto distribuční funkci označíme jako

$$\boldsymbol{\omega}_i^{max} = \boldsymbol{\omega}_i + a_{j,i}\boldsymbol{\omega}_j.$$

Tedy x_i^{U*} je odpovídající kvantil náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}_i^{max}$. Horní omezení na optimální hodnotu nakoupených novin tak stanovíme jako

$$x_i^U = \min(u_i, x_i^{U*}).$$

□

Poznámka: Z věty 2.4 vidíme, že optimální hodnota výtisků v rozšířeném problému s více prodavači bude pro prodavače i vždy alespoň rovná optimální hodnotě v případě, kdybychom uvažovali prodavače i na trhu samostatně.

V uvedených větách jsme se zabývali optimální hodnotou nebo nejlepší odpovědí vždy jen jednoho prodavače při zafixování strategie druhého. Nyní se zaměříme na případ, kdy nás bude zajímat, jestli v uvedeném problému existuje Nashovo ekvilibrium a případný tvar množiny Nashových ekvilibrií.

Z úvodu do problematiky více prodavačů novin víme, že lze na Nashova ekvilibria nahlížet jako na pevné body zobrazení

$$\bar{\boldsymbol{C}}(x) = (\bar{C}^1(x_2), \bar{C}^2(x_1)). \tag{2.18}$$

Ve větě 2.2 jsme zjistili, že jednotlivé množiny nejlepších odpovědí jsou jednoprvkové, navíc jsme ve větě 2.3 dokázali spojitost zobrazení strategie druhého prodavače vzhledem k nejlepší odpovědi prvního prodavače. Podíváme se na množiny, které jsou dány rovnostmi $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$ a $\mathcal{L}_2(x_2, x_1) = 0$ v rovině (x_2, x_1). Z uvedených vět je patrné, že množiny tvoří křivky v rovině a lze tak přistoupit k řešení problému jako v Huang a kol. (2011).

Pevné body množiny (2.18) jsou průsečíky těchto dvou křivek v rovině. Právě v průsečíku $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ bude platit, že

$$\bar{C}^1(x_2^*) = \{x_1^*\}$$
$$\bar{C}^2(x_1^*) = \{x_2^*\}.$$

V důkazu věty 2.3 jsme přímo ukázali, že $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$ je klesající křivka v rovině (x_2, x_1). Směrnici křivky $\mathcal{L}_2(x_2, x_1) = 0$ v rovině (x_2, x_1) vypočteme podobným způsobem. Derivací implicitní funkce (2.16) podle x_2, tedy

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2(x_2, x_1(x_2))}{\partial x_2} = 0,$$

vyjádříme $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$. Levá strana rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
&p_2 g(x_2) - s_2 g(x_2) - (p_2 - s_2) \int_{a_1(x_2,x_2)}^{\infty} f(\omega_1) g(x_2) d\omega_1 + \\
&\qquad + (p_2 - s_2) \int_0^{x_2} f(a_1(x_2, \omega_2)) g(\omega_2) d\omega_2 \frac{\partial a_1(x_2, \omega_2)}{\partial x_2} = \\
&p_2 g(x_2) - s_2 g(x_2) - (p_2 - s_2) g(x_2) \left[1 - F(x_1)\right] + \\
&\qquad + (p_2 - s_2) \int_0^{x_2} f(a_1(x_2, \omega_2)) g(\omega_2) d\omega_2 \left(\frac{1}{a_{1,2}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right).
\end{aligned}$$

Z tohoto tvaru již můžeme vyjádřit hledaný výraz. Abychom tento výraz odlišili od výrazu (2.17) v důkazu věty 2.3, přidáme horní index $\mathcal{L}_2$, tj. budeme značit $x_1^{\mathcal{L}_2}$.

$$\frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{a_{1,2}} - \frac{g(x_2)F(x_1)}{\int_0^{x_2} f(a_1(x_2,\omega_2))g(\omega_2)d\omega_2}. \tag{2.19}$$

Věta 2.5. *Nechť máme hru dvou prodavačů v 2-normálním tvaru s množinami rozhodovacích pravidel X_1 a X_2 a se ztrátovými funkcemi ℓ_1 a ℓ_2, pak v takovéto hře existuje Nashovo ekvilibrium.*

Důkaz. K důkazu existence použijeme Kakutaniho větu o pevném bodě 2.1.

Množina rozhodovacích pravidel pro oba prodavače, která je rovna

$$X = X_1 \times X_2 = [0, u_1] \times [0, u_2]\,,$$

je konvexní a kompaktní. Množinové zobrazení $\bar{\boldsymbol{C}} : X \rightrightarrows X$ je dle věty 2.2 jednoprvkové s prvkem $(x_1^*(x_2), x_2^*(x_1))^T$ a zároveň zobrazení $x_j \to x_i^*(x_j)$ je spojité, tedy shora (i zdola) polospojité. Pro každou posloupnost $x_{j,n} \to x_{j,0}$ jsme tudíž schopni nalézt konvergující podposloupnost v nejlepších odpovědích prodavače i pro strategie $x_{j,n}$.

Dále pro toto zobrazení existují dle věty 2.4 dolní a horní meze. Předpoklady Kakutaniho věty o pevném bodě jsou splněny. Tedy ve hře dvou prodavačů novin existuje Nashovo ekvilibrium. □

Z uvedené věty nyní víme, že existuje rovnovážný bod v uvažované hře dvou prodavačů novin. Dle úvah provedených před zněním věty také víme, že se křivky v rovině (x_2, x_1) alespoň jednou protnou. Pokud by se nám navíc povedlo ukázat, že křivky v rovině mají rozdílné směrnice pro všechny možné strategie, pak by byla zajištěna existence jednoznačného Nashova ekvilibria ve hře dvou prodavačů. Podle Parlar (1988) můžeme uvést následující větu o jednoznačnosti.

Věta 2.6. *Nechť $a_{i,j} \in [0,1]$ pro $i \neq j$, pak ve hře v 2-normálním tvaru dvou prodavačů s množinami rozhodovacích pravidel X_1 a X_2 a se ztrátovými funkcemi ℓ_1 a ℓ_2 existuje jednoznačné Nashovo ekvilibrium.*

Důkaz. Existence Nashova ekvilibria byla dokázána ve větě 2.5. Jednoznačnost tohoto ekvilibria ukážeme tak, že odvodíme, že křivky $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$ a $\mathcal{L}_2(x_2, x_1) = 0$ mají v rovině (x_2, x_1) rozdílné směrnice. Tyto směrnice označíme horním indexem dle křivky, kterou popisují, tedy $\frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_1}}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_2}}{\partial x_2}$. Konkrétně ukážeme, že

$$\frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_1}}{\partial x_2} > \frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_2}}{\partial x_2}.$$

Levá strana nerovnice odpovídá odvození v (2.19) a pravá strana je rovna výrazu (2.17). Pro lepší přehlednost přeznačíme výrazy v jednotlivých vyjádřeních derivací

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{x_1} g(a_2(x_1,\omega_1))f(\omega_1)d\omega_1\\
B &= f(x_1)G(x_2)\\
C &= g(x_2)F(x_2)\\
D &= \int_0^{x_2} g(\omega_2)f(a_1(x_2,\omega_2)).
\end{aligned}$$

Všechny tyto výrazy jsou kladné pro volby strategií z intervalů omezených zdola a shora mezemi z věty 2.4. Zkoumanou nerovnost můžeme přepsat za použití nového značení do podoby

$$\frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_1}}{\partial x_2} = -\frac{A}{B + \frac{1}{a_{2,1}}A} > -\frac{1}{a_{1,2}} - \frac{C}{D} = \frac{\partial x_1^{\mathcal{L}_2}}{\partial x_2}.$$

Snadno upravíme do tvaru

$$\frac{1}{a_{1,2}}DB + CB + \frac{1}{a_{2,1}}CA > \frac{a_{1,2}a_{2,1} - 1}{a_{1,2}a_{2,1}}DA.$$

Z předpokladů věty kladené na substituční koeficienty je zřejmé, že

$$\frac{a_{1,2}a_{2,1} - 1}{a_{1,2}a_{2,1}} \leq 0,$$

tedy uvedená nerovnost platí. Tím je dokázáno, že obě křivky mají v rovině (x_1, x_2) rozdílné směrnice tečen v každém bodě a tím je zaručen pouze jednobodový průnik křivek nejlepších odpovědí. □

V této části pro dva prodavače novin jsme ukázali, že za předpokladů

- $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ pro $i,j = 1,2$,
- $a_{i,i} = 0$ pro $i = 1,2$,
- $a_{i,j} \neq 0$ pro $i \neq j$,

existuje právě jedno Nashovo ekvilibrium. Z jednoznačnosti ekvilibria plyne, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby dvojice strategií (x_1, x_2) ležela v Nashově ekvilibriu, je splnění rovnosti ve větě 2.2.

Možnou podobu křivek nejlepších odpovědí v rovině (x_2, x_1) názorně ukážeme na příkladu s pevnou volbou pravděpodobnostních rozdělení a koeficientů.

Příklad 1. V tomto ilustrativním příkladu budeme uvažovat, že poptávka po novinách se pro každého prodavače řídí Gamma rozdělením $\Gamma(\alpha, \theta)$. Hustota Gamma rozdělení s parametry α a θ je ve tvaru

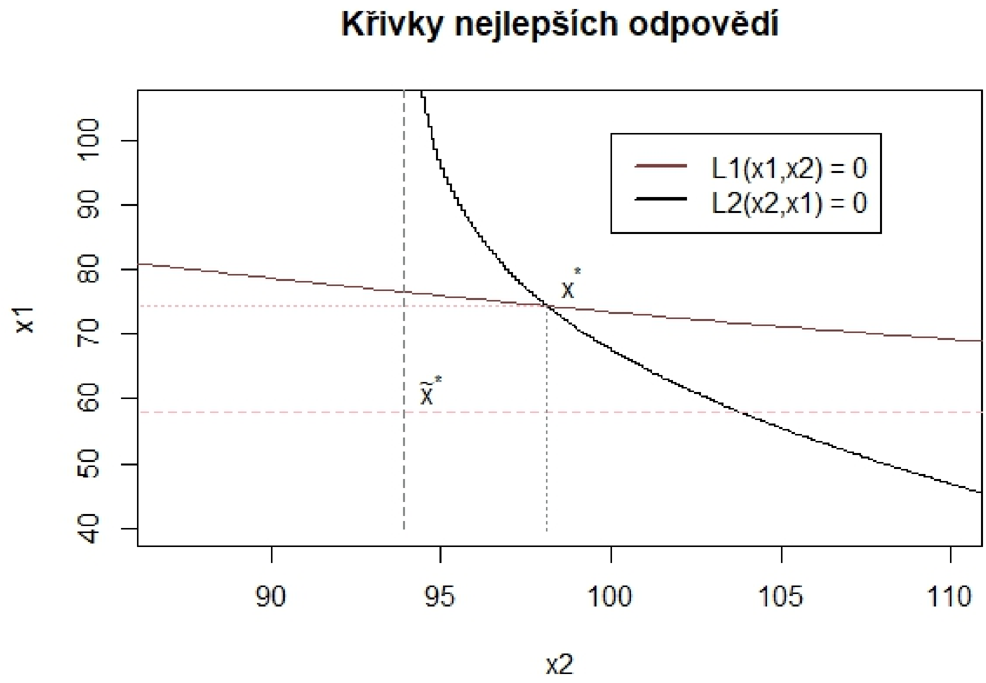
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Toto rozdělení jsme zvolili z toho důvodu, že takováto náhodná veličina má pouze nezáporný nosič, a tak může vhodně reprezentovat náhodnou poptávku po novinách. Dále jsme zvolili parametry α a θ pro oba prodavače následovně

$$\boldsymbol{\omega}_1 \sim \Gamma(10{,}7)$$
$$\boldsymbol{\omega}_2 \sim \Gamma(12.5{,}10).$$

Koeficienty substituce a ceny p_i, c_i a s_i jsme v tomto příkladu stanovili jako

$$\begin{aligned} p_1 &= 30 & p_2 &= 31 \\ c_1 &= 23 & c_2 &= 26 \\ s_1 &= 8 & s_2 &= 5 \\ a_{2,1} &= 0.7 & a_{1,2} &= 0.8. \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Křivky nejlepších odpovědí $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$ a $\mathcal{L}_2(x_2, x_1) = 0$ v rovině (x_2, x_1) pro konkrétní volbu parametrů v příkladu 1. Přerušované čáry značí optimální množství novin pro prodavače bez uvažování substituce.

S těmito hodnotami parametrů můžeme vypočítat křivky nejlepších odpovědí pro oba prodavače. Například pro prodavače 1 tyto křivky získáme tak, že pro všechny možné strategie x_2 prodavače 2 nalezneme odpoveď prodavače 1 tak, aby platilo $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$.

Na grafu 2.1 vidíme, že v tomto konkrétním příkladu jsou obě křivky klesající a derivace křivky $\mathcal{L}_2(x_2, x_1) = 0$ je viditelně menší než u křivky $\mathcal{L}_1(x_1, x_2) = 0$. To odpovídá výsledkům v důkazu věty 2.6, kde jsme výpočet provedli pro obecné parametry problému.

Průsečík křivek nejlepších odpovědí značí Nashovo ekvilibrium, tedy pevný bod zobrazení (2.18), ve kterém oba prodavači dosahují optima společně. V uvažovaném problému je ekvilibrium dosaženo pro dvojici

$$(x_1^*, x_2^*) = (74.3, 98.3).$$

Na grafu 2.1 jsou kromě vypočtených křivek nejlepších odpovědí také zobrazeny hodnoty optimálních strategií při ignorování substituce. Tyto hodnoty jsou zde znázorněny přerušovanými čarami. Hodnoty jsou pro každého prodavače spočteny individuálně dle teorie popsané v kapitole 1. Pro uvažovanou kombinaci parametrů jsou optimální hodnoty z pohledu jednoho prodavače novin rovné

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*) = (57.9, 93.9).$$

Tento bod je na grafu 2.1 označen jako $\tilde{x}$. Z pohledu obou prodavačů se jedná o podhodnocení poptávky po jejich novinách. Jak bylo ukázáno ve větě 2.4, optimální hodnota při uvažování jednoho prodavače na trhu tvoří spodní mez optimální hodnoty v komplexnějším případě se substitucí mezi novinami.

3. Trh n prodavačů novin

V předchozí kapitole jsme se věnovali konkrétnímu případu s dvěma prodavači. Nyní problém rozšíříme a budeme uvažovat n prodavačů novin. Značení, které budeme používat i v tomto rozšířeném problému, zůstává stejné, jako jsme ho vysvětlili na začátku kapitoly 2.

V této části práce vycházíme především z prací Netessine a Rudi (2003), kde je představen základní koncept trhu s n prodavači novin, a dále z článku Huang a kol. (2011), který navazuje na teorii popsanou v práci Netessineho a Rudiho, navíc ukazuje možnosti řešení problému takovéhoto trhu. Způsob hledání řešení, jaký je uveden v Huang a kol. (2011), aplikujeme na ilustrativní příklad v závěru této kapitoly, kde také představíme náš vlastní algoritmus pro hledání ekvilibrií na trhu.

Uvažujeme tedy hru s prodavači $i = 1, \cdots, n$, kde každý volí strategii x_i z množiny strategií X_i tak, aby minimalizovat svou ztrátovou funkci $\ell_i : X \to \mathbb{R}$, kde $X = \times_{i=1}^{n} X_i$. Poptávka po novinách je pro každého prodavače následně určena náhodnou veličinou $\boldsymbol{\omega}_i$ s hustotou f_i. Dále označíme hustotu efektivní poptávky, která byla uvedena ve vzorci (2.7), jako f_i^e.

Jak bylo zmíněno dříve, rozhodnutí každého prodavače závisí na rozhodnutí ostatních prodavačů, proto budeme argumenty ztrátové funkce ℓ_i rozlišovat z pohledu i-tého hráče, tedy $\ell_i(x) = \ell_i(x_i, x_{i-})$. Poněvadž nyní uvažujeme n prodavačů na trhu, není analytické vyjádření ztrátových funkcí kvůli špatné přehlednosti vhodné. Budeme proto používat efektivní poptávku. Z pohledu každého prodavače tak řešíme problém nalezení optimálního počtu výtisků x_i, který je dán rovnicí (2.9), tj.

$$\min_{0 \leq x_i \leq u_i} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}[c_i x_i - p_i \min(\boldsymbol{\omega}_i^e, x_i) - s_i(x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e)^+],$$

kde u_i je maximální počet novin, které může prodavač i denně nakoupit.

Abychom nalezli ekvilibrium na takto definovaném trhu, určíme, obdobně jako tomu bylo u hry dvou prodavačů, množiny nejlepších odpovědí pro každého prodavače.

Věta 3.1. *Nechť máme hru prodavačů novin v n-normálním tvaru s rozhodovacími množinami X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro $\forall i$. Pak množiny nejlepších odpovědí $\bar{C}^i(x_{i-})$ jsou jednoprvkové množiny pro $i = 1, \cdots, n$. Navíc prvek $x_i^* \in \bar{C}^i(x_{i-})$ splňuje rovnost*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

Důkaz. Pro ověření obou částí tvrzení spočítáme opět první dvě derivace ztrátové funkce $\ell_i(x_i, x_{i-})$ dle poptávaného množství x_i prodavačem i. Nejdříve však upravíme vzorec pro ztrátovou funkci analogicky jako v kapitole 1, tj.

$$\begin{aligned}
\ell_i(x_i, x_{i-}) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}[c_i x_i - p_i \min(\boldsymbol{\omega}_i^e, x_i) - s_i(x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e)^+] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}\left[c_i x_i - p_i\left(x_i - (x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e)^+\right) - s_i(x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e)^+\right] \\
&= (c_i - p_i)x_i - (s_i - p_i)\mathbb{E}_{\boldsymbol{\omega}}(x_i - \boldsymbol{\omega}_i^e)^+.
\end{aligned}$$

S takto upravenou ztrátovou funkcí jsou první dvě derivace rovny

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\ell_i(x_i, x_{i-}) &= (c_i - p_i) - (s_i - p_i)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i),\\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\ell_i(x_i, x_{i-}) &= (p_i - s_i)f_i^e(x_i).\end{aligned}$$

Z vypočtených derivací je patrné, že ztrátové funkce jsou pro každého prodavače i konvexní v jeho množství nakoupených novin x_i. Aplikací věty A.2 dostáváme požadované tvrzení i podmínku pro prvek z množiny nejlepších odpovědí. □

Důsledek (Věta 3.1). Na základě toho, že množiny nejlepších odpovědí jsou jednobodové, je nutná podmínka pro splnění Nashova ekvilibria n-ticí $x^* \in X$, $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ rovná

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}, \quad \forall\ i = 1, \cdots, n.$$

Kvůli tomu, že ve větě 3.1 pracujeme s efektivní poptávkou, dostáváme podobné výsledky jako v kapitole 1, kde jsme uvažovali pouze jednoho prodavače na trhu. Tato skutečnost vychází z toho, že jsme strukturu trhu transformovali do náhodné veličiny $\boldsymbol{\omega}_i^e$, která v sobě zachycuje dění trhu. Dle Netessine a Rudi (2003) můžeme zformulovat následující větu, která ukazuje nutnou podmínku pro prvek z množiny nejlepších odpovědí s využitím poptávky $\boldsymbol{\omega}_i$.

Věta 3.2. *Nechť máme hru prodavačů novin v n-normálním tvaru s rozhodovacími množinami X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro $\forall i$. Nakoupené množství novin x_i^* patří do množiny nejlepších odpovědí $\bar{C}^i(x_{i-})$ prodavače i, pokud splňuje rovnost*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*) - \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^* < \boldsymbol{\omega}_i^e) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

Důkaz. Z věty 3.1 víme, že prvek z množiny nejlepších odpovědí splňuje

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

Levou stranu rovnice upravíme následovně

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i^*) &= \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e \leq x_i^* \mid \boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*)\\ &= (1 - \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i^e > x_i^* \mid \boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*))\,\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*)\\ &= \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*) - \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^* < \boldsymbol{\omega}_i^e).\end{aligned}$$

Což dokazuje uvedené tvrzení. □

V uvedené větě je lépe vidět vývoj nakoupených novin prodavačem i při rozšíření problému na n prodavačů se substitucemi. První část $\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^*)$ totiž odpovídá problému jednoho prodavače novin a druhá část $\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_i \leq x_i^* < \boldsymbol{\omega}_i^e)$ upravuje první hodnotu o dodatečný převis poptávky nad nabídkou u ostatních prodavačů.

Stejně jako u dvou prodavačů novin nás i zde bude zajímat, jak se mění nejlepší odpověď i-tého prodavače při změně nakoupeného množství novin ostatními prodavači. Jelikož je efektivní poptávka lineární funkcí výrazů $(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+$, omezíme se na zkoumání změny nejlepší odpovědi i-tého prodavače při změnách nakoupeného množství prodavačem j. Pro tento účel rozdělíme efektivní poptávku na dvě nezávislé náhodné veličiny.

$$\boldsymbol{\omega}_i^e = \underbrace{\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{n} a_{k,i}(\boldsymbol{\omega}_k - x_k)^+}_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}} + \underbrace{a_{j,i}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+}_{\boldsymbol{\omega}_j^+} = \boldsymbol{\omega}_i^{-j} + \boldsymbol{\omega}_j^+$$

Nejlepší odpověď i-tého prodavače dle věty 3.1 splňuje rovnost

$$F_{\boldsymbol{\omega}_i^e}(x_i^*) = F_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}+\boldsymbol{\omega}_j^+}(x_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}, \tag{3.1}$$

kde $F_.(x)$ označuje distribuční funkci příslušné náhodné veličiny v bodě x.

Z nezávislosti nově uvažovaných náhodných veličin $\boldsymbol{\omega}_i^{-j}$ a $\boldsymbol{\omega}_j^+$ můžeme pro výpočet distribuční funkce jejich součtu použít větu o konvoluci A.4. Distribuční funkci efektivní poptávky pak upravíme následovně

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}+\boldsymbol{\omega}_j^+}(x_i^*) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\boldsymbol{\omega}_j^+}(x_i^* - x) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\frac{x_i^* - x}{a_{j,i}} + x_j)\mathbb{I}_{(x\leq x_i^*)} f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx \\ &= \int_{0}^{x_i^*} F_j(\frac{x_i^* - x}{a_{j,i}} + x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Abychom získali závislost nejlepší odpovědi i-tého prodavače na nakoupených novinách prodavačem j, budeme derivovat obě strany rovnice (3.1) dle x_j s dosazením distribuční funkce odvozené v (3.2). Pravá strana rovnice je konstantní v x_j a její derivace je rovná 0. Derivaci levé strany rovnice upravíme do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_{\boldsymbol{\omega}_i^e}(x_i^*) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_i^*} F_j\left(\frac{x_i^* - x}{a_{j,i}} + x_j\right) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx$$

$$= \frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\left[F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}\right] + \int_0^{x_i^*} f_j\left(\frac{x_i^* - x}{a_{j,i}} + x_j\right) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx \left[\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\frac{1}{a_{j,i}} + 1\right]$$

$$= \frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\left[F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}\right] + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j)\int_0^{x_i^*} f_{\boldsymbol{\omega}_j^+|\boldsymbol{\omega}_j>x}(x_i^* - x) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x)dx \left[\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\frac{1}{a_{j,i}} + 1\right]$$

$$= \frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\left[F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}} + \frac{1}{a_{j,i}}\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)\right] + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*).$$

Položením odvozeného vztahu rovno nule a osamostatněním výrazu $\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}$ získáme hledaný vztah pro nejlepší odpověď i-tého hráče

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j} = -a_{j,i}\frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)}{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)}. \tag{3.3}$$

Právě odvozený vztah shrneme v následující větě.

Věta 3.3. *Nechť máme hru prodavačů novin v n-normálním tvaru s rozhodovacími množinami X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro $\forall i$. Optimální hodnota x_i^* nakoupených novin prodavačem i při hodnotách nakoupených novin ostatními prodavači $x_{i-} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ je nerostoucí funkcí x_j pro $j \neq i$.*

Důkaz. Pravá strana rovnice (3.3) je nekladná, protože odvozený zlomek v rovnici je kladný a substituční koeficient $a_{j,i}$ nabývá dle předpokladů (2.4) pouze nezáporné hodnoty. Tím je důkaz věty hotov. □

Z článku Huang a kol. (2011) stanovíme, jak vypadá minimální hodnota nakoupených novin z pohledu i-tého prodavače, tuto vlastnost uvedeme jako důsledek věty 3.3.

Důsledek (Věta 3.3). Ve hře n prodavačů novin platí, že

$$x_i^* \geq x_i^{*S} \text{ pro } \forall i,$$

kde $x_i^{*S} = F_{\boldsymbol{\omega}_i}^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}\right)$, tj. optimální hodnota prodavače i bez uvažování ostatních prodavačů na trhu.

Důkaz. Provedeme teoretický limitní přechod pro složky vektoru x_{i-}, tedy z rovnice pro efektivní poptávku (2.7) vypočteme limitu

$$\lim_{\substack{x_j \to \infty \\ \forall j \neq i}} \boldsymbol{\omega}_i^e = \boldsymbol{\omega}_i.$$

Pak platí uvedená nerovnost, neboť díky větě 3.3 víme, že optimální počet nakoupených novin je nerostoucí funkcí x_j pro $j \neq i$. □

Nyní již přejdeme ke zkoumání Nashových ekvilibrií ve hře n prodavačů. Stejně jako ve hře dvou prodavačů se zaměříme na zkoumání existence a jednoznačnosti Nashova ekvilibria. S využitím Kakutaniho věty o pevném bodě 2.1 jsme schopni ukázat, že v uvažované hře existuje Nashovo ekvilibrium.

Věta 3.4. *Ve hře prodavačů novin v n-normálním tvaru s rozhodovacími množinami X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro $\forall i$ existuje Nashovo ekvilibrium.*

Důkaz. V úvodu kapitoly 2 jsme ukázali, že množina Nashových ekvilibrií je rovna množině pevných bodů v množinovém zobrazení souhrnných nejlepších odpovědí $\bar{\boldsymbol{C}} : X \rightrightarrows X$, $\bar{\boldsymbol{C}}(x) = (\bar{C}^1(x_{1-}), \cdots, \bar{C}^n(x_{n-}))$. Množina

$$X = \times_{i=1}^n X_i = \times_{i=1}^n [0, u_i]$$

je konvexní a kompaktní.

Ve větě 3.1 jsme ověřili, že množiny $\bar{C}^i(x_{i-})$ jsou jednoprvkové množiny. Tento jediný prvek představuje nejlepší odpověď prodavače i na strategii x_{i-}. Navíc tato nejlepší odpověď je spojitou funkcí nakoupeného množství novin ostatními prodavači. Tato vlastnost je potvrzena existencí derivace odvozené ve vzorci (3.3). Tedy pro ověření polospojitosti shora z definice A.6 uvažujeme $x_m \in X$ a $x_0 \in X$ tak, že $x_m \to x_0$ pro $m \to \infty$. Shodně s touto definicí označíme

$$\begin{aligned} y_m &\in \bar{\boldsymbol{C}}(x_m) = \{x_m^*\} \\ y_m &= x_m^* = (x_1^{*m}, \dots, x_n^{*m}) \\ b_0 &\in \bar{\boldsymbol{C}}(x_0) = \{x_0^*\} \\ b_0 &= x_0^*. \end{aligned}$$

Jelikož jsou složky vektoru y_m spojité, tak zřejmě platí vlastnost

$$\lim_{x_m \to x_0} y_m = b_0.$$

Z toho vyplývá, že množinové zobrazení $\bar{\boldsymbol{C}}$ je shora polospojité.

Tím jsou splněny předpoklady Kakutaniho věty a tedy existuje pevný bod zobrazení $\bar{\boldsymbol{C}}$.

□

Jak již bylo zmíněno, množinové zobrazení souhrnných nejlepších odpovědí zobrazuje bod $x \in X$ na jednoprvkovou množinu $\bar{\boldsymbol{C}}(x)$. Pro zjednodušení zápisu v další části textu budeme místo množinového zobrazení $\bar{\boldsymbol{C}} : X \rightrightarrows X$ uvažovat zobrazení $\bar{\boldsymbol{c}} : X \to X$, které zobrazuje bod $x \in X$ přímo na nejlepší odpověď $x^* \in X$. Stejně jako množinové zobrazení $\bar{\boldsymbol{C}}(x) = (\bar{C}^1(x_{1-}), \cdots, \bar{C}^n(x_{n-}))$, lze psát $\bar{\boldsymbol{c}}(x) = (\bar{c}_1(x_{1-}), \cdots, \bar{c}_n(x_{n-}))$. Zobrazení $\bar{\boldsymbol{c}}$ budeme dále v textu nazývat *zobrazení nejlepších odpovědí*. Touto změnou značení se nijak nemění existence Nashova ekvilibria či závislost jednotlivých složek vektoru ukázané ve větě 3.3.

Z předchozí věty 3.4 víme, že existuje Nashův rovnovážný bod. Důsledek za větou 3.1 nám navíc říká, jaké vlastnosti musí takový bod splňovat. V další části práce se zaměříme na to, jak množina Nashových ekvilibrií vypadá. Ukážeme, že za uvedených předpokladů existuje Nashovo ekvilibrium jednoznačně. Abychom byli schopni ukázat takovou vlastnost, uvedeme Banach-Picardovu větu o pevném bodě, která využívá vlastnost kontrakce (viz definice A.7).

Věta 3.5 (Banach-Picard). *Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a zobrazení $f : X \to X$ je kontrakce, pak zobrazení f má právě jeden pevný bod $x^* \in X$.*

Důkaz. Viz Aubin (1993). □

Dle Banach-Picardovy věty je tedy nutné ukázat, že zobrazení nejlepších odpovědí $\bar{\boldsymbol{c}}$ splňuje kontrakční vlastnost. Za tímto účelem zde uvedeme větu o vztahu Jacobiánu zobrazení a funkčních hodnot daného zobrazení. Jacobiánem obecného zobrazení f rozumíme matici derivací uvedenou v definici A.5.

Věta 3.6. *Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina, zobrazení $f : X \to \mathbb{R}^m$ má spojité parciální derivace a pro Jacobián zobrazení J_f platí*

$$||J_f(x)|| \leq q \ \forall x \in X,$$

pak $||f(x) - f(y)|| \leq q||x - y||$ pro $x, y \in X$.

Důkaz. Viz Hasselblatt a Katok (2003). □

Z uvedené věty je zřejmé, že kontrakční vlastnost zobrazení je splněna, pokud maticová norma Jacobiánu je omezena konstantou, která splňuje $q < 1$. Tento závěr shrneme v následujícím důsledku věty.

Důsledek (Věta 3.6). Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina, zobrazení $f : X \to X$ má spojité parciální derivace a platí, že $||J_f(x)|| \leq q < 1 \ \forall \ x \in X$. Pak zobrazení f je kontrakce.

Ve větě 3.6 a dále v textu používáme pro vektory jako normu $||.||$ euklidovskou normu dle definice A.4.

Na základě této kontrakční vlastnosti nyní již můžeme, obdobně jako tomu je v Netessine a Rudi (2003), ukázat jednoznačnost Nashova ekvilibria ve hře n prodavačů novin.

Věta 3.7. *V uvažované hře prodavačů novin v n-normálním tvaru s rozhodovacími množinami X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro $\forall i$ je zobrazení nejlepších odpovědí $\bar{\mathbf{c}} : X \to X$ kontrakce a v této hře existuje jednoznačné Nashovo ekvilibrium, pokud platí $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ pro každé i.*

Důkaz. K důkazu jednoznačnosti použijeme Banach-Picardovu větu 3.5.

Množina $X = \times_{i=1}^{n} X_i = \times_{i=1}^{n} [0, u_i]$ rozhodovacích pravidel všech prodavačů je konvexní a kompaktní. Pro tuto množinu definujeme otevřenou množinu $\tilde{X}$ tak, že

$$clo(\tilde{X}) = X,$$

kde zobrazení $clo(\cdot)$ značí uzávěr množiny. Tedy $\tilde{X} = \times_{i=1}^{n} (0, u_i)$. Ve vzorci 3.3 jsme ukázali, jak vypadají derivace zobrazení nejlepších odpovědí pro $i \neq j$ na množině $\tilde{X}$. Zobrazení nejlepších odpovědí $\bar{\boldsymbol{c}}$ má dle tohoto vzorce spojité parciální derivace na množině $\tilde{X}$. Dále zřejmě platí, že

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{c}_i(x_{i-})}{\partial x_i} = 0.$$

Jacobián zobrazení nejlepších odpovědí je matice

$$J_{\bar{c}}(x) = (J_{ij}(x))_{n \times n} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}(x) \right)_{n \times n} \quad \text{pro } x \in \tilde{X}.$$

Maticovou normu uvažujeme maximální sloupcovou normu, tato norma pro Jacobián s dosazením derivací z (3.3) se rovná

$$\begin{aligned} ||J_{\bar{c}}(x)||_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j}(x) \right| \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1,\ i \neq j}^{n} \left| - \frac{a_{j,i} \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e | \boldsymbol{\omega}_j > x_j}(x_i^*)}{a_{j,i} F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e | \boldsymbol{\omega}_j > x_j}(x_i^*)} \right|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

V dalším kroku důkazu hledáme horní omezení pro maticovou normu $||J_{\bar{c}}(x)||$, abychom mohli následně s použitím věty 3.6 rozhodnout, zda zobrazení nejlepších odpovědí je kontrakce. Pro $j \neq i$ toto horní omezení odvodíme následovně

$$\left|\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j}(x)\right| = a_{j,i}\frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)}{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)} \leq$$

$$\leq a_{j,i}\frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)}{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)} \quad +$$

$$+ \quad a_{j,i}\frac{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*)}{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)} =$$

$$= a_{j,i}\frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*) + a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*)}{a_{j,i}F_j(x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^{-j}}(x_i^*) + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_j > x_j) f_{\boldsymbol{\omega}_i^e|\boldsymbol{\omega}_j>x_j}(x_i^*)} = a_{j,i}.$$

Dosazením do vztahu (3.4) získáme horní mez pro maticovou normu

$$||J_{\bar{\boldsymbol{c}}}(x)||_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} a_{j,i} \overset{P}{<} 1,$$

kde nerovnost označená "P" vychází z předpokladu věty. Nyní jsme odvodili, že platí

$$||\bar{\boldsymbol{c}}(x) - \bar{\boldsymbol{c}}(y)|| \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} a_{j,i}\right) ||x-y|| \text{ pro } \forall\ x, y \in \tilde{X}$$

a tedy, že zobrazení $\bar{\boldsymbol{c}}$ je kontrakce.

Tím jsou splněny předpoklady Banach-Picardovy věty, čímž jsme dokázali, že v uvažované hře n prodavačů existuje jednoznačné Nashovo ekvilibrium.

□

Tím jsme tedy dokázali, že ve hře n prodavačů, kde každý z nich vybírá vhodnou strategii tak, aby minimalizoval svou ztrátovou funkci ℓ_i, existuje jednoznačně Nashův rovnovážný bod. Navíc jsme ukázali, že zobrazení nejlepších odpovědí je kontrakce, pro které platí

$$||\bar{\boldsymbol{c}}(x) - \bar{\boldsymbol{c}}(y)|| \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\right) ||x-y|| \text{ pro } \forall\ x, y \in \tilde{X}. \tag{3.5}$$

3.1 Výpočet Nashova ekvilibria

Abychom prakticky ukázali dokázaná tvrzení, demonstrujeme teorii na příkladu se třemi prodavači novin. V tomto příkladu také představíme náš algoritmus pro stanovení Nashova ekvilibria. Ukážeme vlastnosti tohoto algoritmu a bodů z něj vypočtených. Vypočtený rovnovážný bod dále srovnáme s výsledkem algoritmu z článku Huang a kol. (2011), který využívá nestranný odhad efektivní poptávky. Kódy výpočtu oběma přístupy pro následující příklad jsou v R souborech odevzdaných spolu s prací.

Příklad 2. Uvažujeme 3 prodavače novin. Pro každého prodavače předpokládáme, že se poptávka po jeho novinách $\boldsymbol{\omega}_i$ řídí Gamma rozdělením. Koeficienty popisující parametry náhodného rozdělení poptávky, ceny novin a substituční koeficienty jsme stanovili následovně

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 = 10 & \alpha_2 = 12.5 & \alpha_3 = 11.5 \\
\theta_1 = 7 & \theta_2 = 10 & \theta_3 = 8 \\
p_1 = 30 & p_2 = 31 & p_3 = 27 \\
c_1 = 23 & c_2 = 26 & c_3 = 20 \\
s_1 = 8 & s_2 = 5 & s_3 = 5 \\
u_1 = 700 & u_2 = 800 & u_3 = 1000 \\
a_{2,1} = 0.4 & a_{1,2} = 0.45 & a_{1,3} = 0.5 \\
a_{3,1} = 0.55 & a_{3,2} = 0.3 & a_{2,3} = 0.4.
\end{array}
$$

Až na substituční koeficienty jsme všechny hodnoty pro první dva prodavače nechali stejné jako v příkladu 1 na konci kapitoly 2. Substituční koeficienty jsme změnili, aby v úloze byl splněn předpoklad

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < 1.$$

Pro výpočet Nashova ekvilibria použijeme iterační algoritmus. Ve větě 3.7 jsme ukázali, že zobrazení nejlepších odpovědí je kontrakce, tedy iterační algoritmus je vhodným nástrojem pro získání Nashova ekvilibria nebo bodu jemu blízkého. Tento algoritmus sestává ze 6 kroků.

1. krok Zvolíme počáteční hodnoty x_i^1, například jako optimální hodnoty pro úlohu prodavače novin bez substitucí, tj.

$$x_i^1 = F_{\boldsymbol{\omega}_i}^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}\right) \ \forall\ i = 1, \cdots, n.$$

Dále zvolíme hodnotu $\delta \geq 0$.

2. krok Spustíme cyklus: $k = 1$.

3. krok V iteraci k spustíme vnitřní cyklus pro prodavače 1, tj. $i = 1$

4. krok Pro prodavače i v iteraci k

- Sestavíme distribuční funkci $F_{\boldsymbol{\omega}_i^e(k)}(z)$ při fixní hodnotě $x_{i-}^k = (x_1^{k+1}, \cdots, x_{i-1}^{k+1}, x_{i+1}^k, \cdots, x_n^k)$, kde pro prodavače $j < i$ používáme množství novin vypočtené v rámci iterace k.
- Nalezneme nejmenší x_i^{k*} splňující

$$F_{\boldsymbol{\omega}_i^e(k)}(x_i^{k*}) \geq \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

- Označíme

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} x_i^{k*}, \text{ pokud } x_i^{k*} \leq u_i \\ u_i, \text{ jinak.} \end{cases}$$

- Pokud jsme vypočetli množství novin pro všechny prodavače v iteraci k, tj. $i = n$, jdeme na **5. krok**, jinak $i = i + 1$ a pokračujeme na **krok 4**.

5. krok Ověříme kritérium pro zastavení algoritmu, tj. pokud platí

$$|x_i^k - x_i^{k+1}| \leq \delta \text{ pro } i = 1, \cdots, n,$$

pokračujeme na **6. krok**, v opačném případě přiřadíme $k = k + 1$ a pokračujeme **krokem 3**.

6. krok Označíme optimální řešení úlohy $x_i^* = x_i^k$ pro každé $i = 1, \cdots, n$.

Pokud bychom v uvedeném algoritmu zvolili $\delta = 0$, pak bychom byli schopni nalézt přesné Nashovo ekvilibrium. Konvergence k Nashovu rovnovážnému bodu je zajištěna díky tomu, že zobrazení nejlepších odpovědí je kontrakce. Dle věty A.7 pro libovolný počáteční bod z množiny možných strategií X lze získat konvergující posloupnost k Nashovu ekvilibriu. Z uvedené věty však vidíme, že konvergence nemusí nastat v konečném čase, neboť pevného bodu zobrazení můžeme dosáhnout až v nekonečnu. Z tohoto důvodu v našem výpočtu nastavíme $\delta = 0.001$. Při volbě kladného δ ukážeme, že počet iterací je shora omezen.

Nechť pro každého prodavače $i = 1, \cdots, n$ platí, že $X_i = [0, u]$, kde $u = \max_i u_i$. Pak největší možná euklidovská norma je mezi body $x^0 = (0, \cdots, 0)$ a $x^1 = (u, \cdots, u)$. Z konvergence kontrakce z věty A.7 dostáváme

$$\begin{aligned} ||x^1 - x^0|| &= u\sqrt{n} \\ ||x^2 - x^1|| &\leq q\ u\sqrt{n} \\ ||x^K - x^{K-1}|| &\leq q^{K-1}\ u\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Dále hledáme K takové, že

$$\begin{aligned} q^{K-1}\ u\sqrt{n} &\leq \delta \\ q^{K-1} &\leq \delta n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{u} \\ K &\leq \frac{\log(\delta) - \frac{1}{2}\log(n) - \log(u)}{\log(q)} + 1. \end{aligned}$$

Pro volby $\delta < 1$ je zlomek v poslední nerovnosti kladný a omezuje počet iterací v uvedeném algoritmu. V našem problému se třemi prodavači novin pro $u = 1000$ je omezení na počet iterací dáno jako

$$K \leq \frac{\log(0.001) - \frac{1}{2}\log(3) - \log(1000)}{\log(0.95)} + 1 \sim 281.$$

Volba $\delta > 0$ obecně nezaručí nalezení přesného Nashova ekvilibria, avšak díky znalosti koeficientu kontrakce q ze vzorce (3.5) můžeme určit největší možnou vzdálenost Nashova ekvilibria a optimálního bodu vypočteného při dané volbě δ.

Nechť x^* označuje Nashovo ekvilibrium a x^K vypočtený bod z algoritmu, kde K značí číslo poslední iterace algoritmu. Pro x^K platí, že $|x_i^K - x_i^{K-1}| \leq \delta$ pro $i = 1, \cdots, n$. Pak lze odvodit, že jsou splněny následující nerovnosti

$$\begin{aligned}
||x^{K+1} - x^K|| &\leq q\ ||x^K - x^{K-1}|| \\
||x^{K+2} - x^K|| = ||x^{K+2} \pm x^{K+1} - x^K|| &\leq ||x^{K+2} - x^{K+1}|| + ||x^{K+1} - x^K|| \\
&\leq q^2||x^K - x^{K-1}|| + q||x^K - x^{K-1}|| \\
&\vdots \\
||x^* - x^K|| \leq \sum_{l=1}^{\infty} q^l ||x^K - x^{K-1}|| = \frac{q}{1-q}||x^K - x^{K-1}|| &\leq \frac{q}{1-q}\delta.
\end{aligned}$$

V uvažovaném příkladu dle vzorce (3.5) určíme $q = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{j,i}\right) = 0.95$ a tedy vypočtený bod nebude v euklidovské normě od Nashova ekvilibria dále než

$$||x^* - x^K|| \leq \frac{q}{1-q}\delta = \frac{0.95}{1-0.95}0.001 = 0.019. \tag{3.6}$$

Vypočtený bod pomocí uvedeného algoritmu se nerovná přesně Nashovu ekvilibriu, avšak volbou δ můžeme ovlivnit jeho vzdálenost od Nashova ekvilibria. Víme tedy, že v příkladu nalezneme bod blízký Nashovu ekvilibriu v konečném čase.

V kroku **4** uvedeného algoritmu odvozujeme distribuční funkci pro náhodnou efektivní poptávku $\boldsymbol{\omega}_i^e$. Toto odvození jsme v příkladu pro tři prodavače provedli například pro prodavače 1 při hodnotách $x_{1-} = (x_2, x_3)$ následovně

$$\begin{aligned}
F_{\boldsymbol{\omega}_1^e}(z) =& \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2)^+ + a_{3,1}(\boldsymbol{\omega}_3 - x_3)^+ \leq z) \\
=& \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2)^+ + a_{3,1}(\boldsymbol{\omega}_3 - x_3) \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 > x_3)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 > x_3) + \\
& + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2)^+ \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3) \\
=& \Big[\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2) + a_{3,1}(\boldsymbol{\omega}_3 - x_3) \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 > x_3, \boldsymbol{\omega}_2 > x_2)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 > x_3) \\
& + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{2,1}(\boldsymbol{\omega}_2 - x_2) \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3, \boldsymbol{\omega}_2 > x_2)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3)\Big]\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_2 > x_2) \\
& + \Big[\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 + a_{3,1}(\boldsymbol{\omega}_3 - x_3) \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 > x_3, \boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 > x_3) \\
& + \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_1 \leq z | \boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3, \boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2)\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_3 \leq x_3)\Big]\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_2 \leq x_2).
\end{aligned}$$

Kvantil takovéto náhodné veličiny hledáme numericky, tj. vyčíslíme distribuční funkci na dostatečně husté síti reálných hodnot a následně jako α-kvantil zvolíme nejmenší reálné číslo x takové, že $F_{\boldsymbol{\omega}_i^e}(x) \geq \alpha$. Abychom byli schopni vyčíslit tuto distribuční funkci, integrujeme náhodné poptávky prodavačů 2 a 3 přes jejich nosič restringovaný na provedené podmiňování. Jelikož uvažujeme nezávislé náhodné poptávky, lze se na tuto operaci dívat jako na složenou konvoluci. Následuje vzorec, na kterém je vidět, jak tato integrace vypadá pro distribuční funkci efektivní poptávky pro prodavače 1.

$$
\begin{aligned}
F_{\boldsymbol{\omega}_1^e}(z) = &\int_{x_2}^{\infty}\int_{x_3}^{\infty} F_{\boldsymbol{\omega}_1}\left(z - a_{2,1}(\omega_2 - x_2) - a_{3,1}(\omega_3 - x_3)\right) f_{\boldsymbol{\omega}_2}(\omega_2) f_{\boldsymbol{\omega}_3}(\omega_3) d\omega_3 d\omega_2 \\
&+ \int_{x_3}^{\infty} F_{\boldsymbol{\omega}_1}(z - a_{3,1}(\omega_3 - x_3)) f_{\boldsymbol{\omega}_3}(\omega_3) d\omega_3 F_{\boldsymbol{\omega}_2}(x_2) \\
&+ \int_{x_2}^{\infty} F_{\boldsymbol{\omega}_2}(z - a_{2,1}(\omega_2 - x_2)) f_{\boldsymbol{\omega}_2}(\omega_2) d\omega_2 F_{\boldsymbol{\omega}_3}(x_3) + F_{\boldsymbol{\omega}_1}(z) F_{\boldsymbol{\omega}_2}(x_2) F_{\boldsymbol{\omega}_3}(x_3).
\end{aligned}
$$

S takto vypočtenou distribuční funkcí pro všechny tři prodavače jsme nalezli optimální množství nakoupených novin. Vývoj nakoupených novin v rámci iteračního algoritmu jsme shrnuli do tabulky 3.1. V algoritmu jsme stanovili $\delta = 0.001$.

k	1	2	3	4	5	6
x_1	57.9	79.0	73.2	73.3	73.4	73.4
x_2	93.9	101.2	99.9	99.8	99.8	99.8
x_3	77.3	89.4	90.5	90.5	90.5	90.5

Tabulka 3.1: Vývoj nejlepších odpovědí v rámci iterativního algoritmu

V tabulce 3.1 sloupec pro $k = 1$ odpovídá optimálním hodnotám v problému prodavače novin bez substitucí. Poslední sloupec v tabulce 3.1 označuje aproximaci Nasha rovnovážného bodu v uvažovaném problému, tj.

$$x^* = (73.4, 99.8, 90.5). \tag{3.7}$$

Dále se podíváme na to, jak vypadá vytvořená efektivní poptávka v první iteraci algoritmu pro prodavače 3. Tato poptávka je vytvořená při zafixování hodnot prodavačů 1 a 2 na hodnotách x_1^2 a x_2^2.

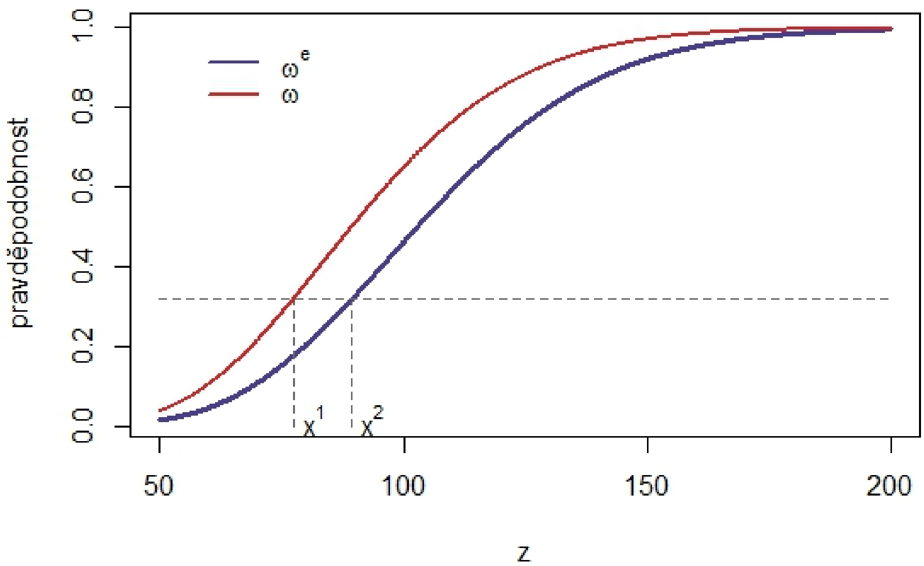
Na grafu 3.1 je patrné, že poptávané množství (na grafu označené jako x^2) na trhu s 3 prodavači a se substitucemi bude větší než poptávané množství samostatného prodavače novin (označené jako x^1). Tento závěr odpovídá důsledku, který jsme provedli za větou 3.3.

V tomto příkladu jsme ukázali, jak je možné najít bod blízký Nashovu rovnovážnému bodu. Toho jsme docílili tak, že jsme distribuční funkci efektivní poptávky pro každého prodavače i rozdělili na úplný systém jevů podle náhodných poptávek a poptávaného množství ostatních prodavačů. Konkrétně jsme rozdělili množinu jevů na dvě disjunktní podmnožiny podle toho, zda $\boldsymbol{\omega}_j \leq x_j$, nebo $\boldsymbol{\omega}_j > x_j$ pro $j \neq i$. S takto vyjádřenou distribuční funkcí efektivní poptávky jsme byli schopni nalézt Nashův rovnovážný bod.

Nevýhodou hledání Nashova ekvilibria touto metodou je možnost rozpadu distribuční funkce efektivní poptávky na velké množství dílčích členů. Označíme-li m_i počet kladných substitucí, které značí přechod neuspokojených zákazníků k prodavači i od všech ostatních prodavačů, tj.

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{(a_{j,i} > 0)},$$

pak při použití algoritmu může dojít k tomu, že počet členů, které tvoří finální distribuční funkci pro prodavače i, bude rovný 2^{m_i}.



Obrázek 3.1: Srovnaní efektivní poptávky $\boldsymbol{\omega}^e$ vytvořené v první iteraci algoritmu s uvažovanou poptávkou $\boldsymbol{\omega}$ pro prodavače 3. Hodnota $x^1 = 77.3$ a $x^2 = 91.5$, přerušovaná horizontální přímka odpovídá zlomku $\frac{p_3 - c_3}{p_3 - s_3}$.

V článku Huang a kol. (2011) je pro nalezení bodu blízkého Nashovu ekvilibriu použitý nestranný odhad efektivní poptávky. Tento odhad je ve tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}_i}^e = \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{j,i} \boldsymbol{\omega}_j \left[1 - \frac{\mathbb{E}[\min(\boldsymbol{\omega}_j, x_j)]}{\mathbb{E}\boldsymbol{\omega}_j} \right]. \tag{3.8}$$

Nestrannost odhadu ověříme na základě následujících rovností

$$\mathbb{E}\left\{ \boldsymbol{\omega}_j \left[1 - \frac{\mathbb{E}[\min(\boldsymbol{\omega}_j, x_j)]}{\mathbb{E}\boldsymbol{\omega}_j} \right] \right\} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\omega}_j - \min(\boldsymbol{\omega}_j, x_j) \right] = \mathbb{E}(\boldsymbol{\omega}_j - x_j)^+.$$

Nyní se můžeme podívat na to, jaký bod bychom získali iteračním algoritmem, pokud bychom v příkladu 2 v **3. kroku** sestavili distribuční funkci pro nestranný odhad efektivní poptávky (3.8).

Použijeme stejné hodnoty koeficientů jako v příkladu 2. Díky tomu, že uvažujeme nezávislé náhodné veličiny s Gamma rozdělením, je možné dvakrát použít konvoluci pro vyjádření distribuční funkce těchto náhodných veličin. Navíc v každé iteraci pro prodavače i použijeme multiplikátor c_j^k pro $j \neq i$. Symbolicky můžeme efektivní poptávku pro prodavače i v iteraci k vyjádřit jako

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}_i}^e(k) \sim \Gamma(\alpha_i, \theta_i) + \Gamma(\alpha_j, c_j^k \theta_j) + \Gamma(\alpha_t, c_t^k \theta_t) \text{ pro } i \neq j \neq t \neq i,$$

kde

$$c_j^k = a_{j,i} \left[1 - \frac{\mathbb{E}[\min(\boldsymbol{\omega}_j, x_j^k)]}{\mathbb{E}\boldsymbol{\omega}_j} \right].$$

S těmito odhady poptávky jsme pomocí iteračního algoritmu nalezli bod

$$\hat{x}^* = (75.6, 100.2, 91.6)\,. \tag{3.9}$$

Výsledné hodnoty jsou blízké bodu (3.7) vypočteného v příkladu 2. Euklidovská norma vzdáleností vypočtených bodů (3.7) a (3.9) je 2.5. Z výpočtu maximální vzdálenosti bodu (3.7) a Nashova ekvilibria je tedy zřejmé, že v přístupu s nestranným odhadem efektivní poptávky jsme dostali méně přesné výsledky. Do tabulky 3.2 jsme shrnuli porovnání výsledků z obou algoritmů na uvažovaném příkladu.

i	x^*	$\hat{x}^*$	Rozdíl	Relativní rozdíl
1	73.4	75.6	2.2	3.0 %
2	99.8	100.2	0.4	0.4 %
3	90.5	91.6	1.1	1.2 %

Tabulka 3.2: Porovnání výsledků z obou uvažovaných algoritmů, x^* odpovídá výsledku algoritmu z příkladu 2 a $\hat{x}^*$ je optimální řešení při použití nestranného odhadu efektivní poptávky

V tabulce 3.2 vidíme, že nakoupené množství novin je pro všechny prodavače větší při použití odhadu efektivní poptávky. Hodnoty pro prodavače 2 jsou si velmi blízké, relativní rozdíl výsledků je zde pouze 0.4 %. Pro zbylé prodavače jsou již rozdíly při použití nestranného odhadu efektivní poptávky větší. Pro prodavače 3 je rozdíl v nakoupených novinách 1.2 % a v případě prvního prodavače 3.0 %. Z vypočtené vzdálenosti bodu (3.7) a Nashova ekvilibria vypočteného v (3.6) můžeme prohlásit, že algoritmus představený v příkladu 2 dává přesnější výsledky pro hodnotu Nashova ekvilibria než použití nestranného odhadu efektivní poptávky. A tedy pro zjištění hodnoty ekvilibria na trhu n prodavačů je zapotřebí použít početně náročnější metody, jako je například námi prezentovaný rozklad distribuční funkce pomocí podmiňování.

Závěr

V rigorózní práci jsme se věnovali zkoumání úlohy prodavačů novin na trhu. Tento problém jsme zkoumali především z pohledu rovnováhy na trhu, kde jsme se zaměřili na hledání Nashova ekvilibria. V první kapitole jsme uvedli základní problém s jedním prodavačem a ukázali sestavení úlohy dvoustupňového programování s kompenzací, kde náhodná veličina reprezentuje poptávku po jeho novinách. Tento problém jsme vyřešili jak pro spojitou, tak i pro diskrétní náhodnou veličinu. Ukázali jsme, že v obou případech je řešením daný kvantil náhodné veličiny.

V druhé kapitole jsme vyložili problematiku teorie her pro více prodavačů na trhu. Představili jsme zde Nashovo ekvilibrium jako pevný bod množinového zobrazení nejlepších odpovědí prodavačů. Druhá kapitola byla věnována úloze se dvěma prodavači novin na trhu. Tento problém jsme zkoumali rozdělením množiny možných jevů na 4 disjunktní podmnožiny. Tyto podmnožiny nám posloužily k detailnímu znázornění dění na trhu, tj. k znázornění přechodů zákazníků mezi prodavači. Na základě tohoto rozpadu množiny možných jevů jsme analyticky odvodili tvary účelových funkcí pro oba prodavače. V této kapitole jsme dále ukázali existenci Nashova ekvilibria ve hře dvou prodavačů pomocí Kakutaniho věty o pevném bodě. Navíc jsme pomocí reakčních křivek prodavačů dokázali, že Nashovo ekvilibrium existuje právě jedno. Postup pro nalezení rovnovážného bodu byl ukázán na konkrétním příkladu se dvěma prodavači. Pro tento příklad jsme znázornili reakční křivky do grafu a viděli jsme, že směrnice tečen křivek v každém bodě odpovídají odvozeným závěrům z teoretické části.

Ve třetí kapitole jsme problém zobecnili na n prodavačů novin. V této části jsme zejména pracovali s efektivní náhodnou poptávkou a popsali jsme chování nejlepších odpovědí. Stejně jako v druhé kapitole jsme pro ověření existence Nashova rovnovážného bodu použili Kakutaniho větu o pevném bodě na množinovém zobrazení nejlepších odpovědí prodavačů. Abychom byli schopni ukázat, že ve zkoumaném problému existuje právě jedno Nashovo ekvilibrium, vyslovili jsme Banach-Picardovu větu o vztahu kontrakce a pevného bodu. Posléze jsme ukázali, že zobrazení nejlepších odpovědí je kontrakce, čímž byla jednoznačnost Nashova ekvilibria v tomto problému dokázána. Nutno podotknout, že jednoznačnost pro problém s n prodavači novin platí pouze za předpokladu, že součet substitučních koeficientů přechodů od ostatních prodavačů je ostře menší než 1 pro každého prodavače. Tento předpoklad je více restriktivní, než je tomu například v práci Huang a kol. (2011), kde autoři dovolují neostrou nerovnost "$\leq$". Jejich předpoklad je však nedostatečný pro dokázání jednoznačnosti Nashova ekvilibria a tato chyba se již promítla do několika dalších článků, které článek Huang a kol. (2011) citovaly.

V další části třetí kapitoly jsme spočítali příklad na nalezení Nashova ekvilibria se třemi prodavači novin s konkrétní volbou parametrů cen novin a pravděpodobnostního rozdělení poptávek. K výpočtu Nashova ekvilibria jsme použili dvě metody. První metodu jsme navrhli tak, aby přesně vyjadřovala distribuční funkce efektivní poptávky pro každého prodavače. Následným použitím iteračního algoritmu jsme nalezli rovnovážný bod. Touto metodou jsme byli schopni nalézt bod blízký Nashovu ekvilibriu. Pro tento navržený algoritmus jsme zde ukázali, že maximální možná vzdálenost vypočteného rovnovážného bodu od Nashova ekvilibria je shora omezená a lze ji skrze volbu parametru kontrolovat. Druhá metoda, popsaná v článku Huang a kol. (2011), spočívala v použití nestranného odhadu efektivní poptávky. Pro uvedený příklad jsme porovnali vypočtené body oběma algoritmy. Rozdíl mezi oběma metodami byl pro jednoho prodavače 1.1 a pro dalšího rozdíl dosahoval 2.2 kusů novin. Námi představený postup pro nalezení Nashova ekvilibria se ukázal jako přesnější. To jsme ukázali vypočtením maximální možné vzdálenosti Nashova ekvilibria a bodu z první metody.

Tato práce byla věnována problému prodavačů novin v takzvaném decentralizovaném modelu, tj. na trhu, kde je více novinových titulů, avšak každý z nich je prodáván samostatným prodavačem. Možným rozšířením práce je takzvaný centralizovaný model trhu, tedy model trhu, kde prodavač sám prodává více novinových titulů.

Seznam použité literatury

AUBIN, J. (1993). *Optima and Equilibria - An Introduction to Nonlinear Analysis.* Springer-Verlag. ISBN 3-540-52121-6.

BIRGE, J. R. a LOUVEAUX, F. (1997). *Introduction to Stochastic Programming.* II. title. Springer. ISBN 0-387-98217-5.

BROOKS, R. M. a SCHMITT, K. (2009). *The Contraction Mapping Principle and Some Applications.* Electronic Journal of Differential Equations. ISSN 1072-6691.

HASSELBLATT, B. a KATOK, A. (2003). *A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments.* Cambridge University Press. ISBN 0 521 58304 7.

HUANG, D., ZHOU, H. a ZHAO, Q. (2011). A competitive multiple-product newsboy problem with partial product substitution. *Omega*, **39**, 302–312.

KULICH, M. (2013). *Souhrn teorie pravděpodobnosti.* pracovní text k přednášce Statistika pro finanční matematiky.

LACHOUT, P. (2015). *Teorie optimalize.* pracovní text k přednášce NMSA403 Teorie Optimalize.

NASH, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, **54**, 286 – 295.

NETESSINE, S. a RUDI, N. (2003). Centralized and competitive inventory models with demand substitution. *Operations Research*, **51**, 329 – 335.

PARLAR, M. (1988). Game theoretic analysis of the substituatble product inventory problem with random demands. *Naval Research Logistics*, **35**, 397 – 409.

PYRIH, P. (2011). *Průvodce matematickou analýzou.* Elektronická pracovní verze http://matematika.cuni.cz/pyrih-pruvodce.html.

SHAPIRO, A., DANTCHEVA, D. a RUSZCZYŃSKI, A. (2009). *Lectures On Stochastic Programming: modeling and theory.* Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics. ISBN 978-0-898716-87-0.

SÜLI, E. a MAYERS, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press. ISBN 0-511-07653-3.

A. Přílohy

Základní věty a definice

V této sekci uvedeme znění definic a vět, které jsou potřebné k vybudování teorie vysvětlované v této práci. Vycházeli jsme zejména z Süli a Mayers (2003), Lachout (2015), Pyrih (2011) a Kulich (2013).

Definice A.1. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je množina a $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f má v bodě $x \in D$ subgradient $a \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí*

$$f(y) - f(x) \geq \langle a, y - x \rangle, \quad \textit{pro} \quad \textit{každé} \quad y \in D.$$

Množinu všech subgradientů v bodě x budeme nazývat subdiferenciál funkce f v bodě x a budeme ji značit $\partial f(x)$.

Definice A.2. *Pro $D \subset \mathbb{R}^n$ definujeme množinu $\texttt{conv}(D)$ označující nejmenší konvexní množinu obsahující množinu D. Množina $\texttt{conv}(D)$ je dána předpisem*

$$\texttt{conv}(D) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s : \lambda(s) \geq 0,\ \forall s \in I,\ \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1,\ I \subset D \textit{ konečná} \right\}.$$

Věta A.1. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f : D \to \mathbb{R}$. Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když $\partial f(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in D$.*

Věta A.2. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, $x^* \in D$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak x^* je bod globálního minima funkce f na množině D právě tehdy, když $0 \in \partial f(x^*)$.*

Věta A.3. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce. Má-li f spojité parciální derivace na celém D, pak*

$$f \quad \textit{je} \quad \textit{konvexní} \Leftrightarrow \forall\ x, y \in D \quad \textit{platí} \quad f(y) - f(x) \geq \langle \nabla_x f(x), y - x \rangle.$$

Věta A.4. *Nechť $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\psi}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, nechť $\boldsymbol{\omega}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{\omega}}$ vzhledem k míře μ_ω a $\boldsymbol{\psi}$ má hustotu f_ψ vzhledem k míře μ_ψ. Pak $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\psi}$ má distribuční funkci*

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{\omega}}(\omega) F_{\boldsymbol{\psi}}(\eta - \omega) d\mu_\omega(\omega).$$

Definice A.3. *Nechť f je funkce definovaná na součinu $D \times E$, kde $E \subset \mathbb{R}$ a D je interval v $\mathbb{R}$. Funkce z na D se nazývá integrovatelná majoranta funkce f, jestliže*

- $|f(x,y)| \leq z(x), \forall\ x \in D, y \in E,$
- $\int_D z(x) dx < \infty.$

Věta A.5. *Nechť $f : D \times E \to \mathbb{R}$, kde D je interval v $\mathbb{R}$ a $E \subset \mathbb{R}$. Má-li f integrovatelnou majorantu na D, pak*

$$\lim_{y \to y_0} \int_D f(x,y) dx = \int_D \lim_{y \to y_0} f(x,y) dx.$$

Věta A.6. *Nechť $z : D \to \mathbb{R}$ a $h : D \to \mathbb{R}$ takové, že $-\infty < z(x) < h(x) < \infty$, pak pro funkci $f : D \times T \to \mathbb{R}$ platí*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{z(x)}^{h(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,h(x))\frac{d}{dx}h(x) - f(x,z(x))\frac{d}{dx}z(x) + \int_{z(x)}^{h(x)} \frac{d}{dx}f(x,t)dt.$$

Věta A.6 se v literatuře také někdy označuje jako Leibnizovo integrální pravidlo.

Definice A.4. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, zobrazení $||.|| : D \to \mathbb{R}$ nazveme norma pokud pro $\forall x,\ y \in D$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ splňuje*

- $||x|| \leq 0, \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $||cx|| = |c|||x||,$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Pro vektor $x = (x_1, \cdots, x_n)$ je jeho ℓ_p-norma rovna

$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

Konkrétně Euklidovská norma je ℓ_2-norma a pro vzdálenost dvou bodů $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Maticová ℓ_p norma se definuje pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jako

$$||A||_p = \max_{\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}} \frac{||Av||_p}{||v||_p}.$$

Konkrétně maximální sloupcová norma je definována pro matici $A = (a_{ij})_{n \times n}$ jako ℓ_1-norma a platí

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Definice A.5. *Mějme $D \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení $f : D \to \mathbb{R}^m$ se spojitými parciálními derivacemi. Pak pro zobrazení $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$, kde $f : D \to \mathbb{R}$ a $x = (x_1, \cdots, x_n)$, definujeme Jacobiho matici parciálních derivací (Jacobián) jako*

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Teorie her

V této části uvedeme základní definice z teorie her, které jsou slovně popsány na začátku kapitoly 2. Uvedené definice vycházejí z Aubin (1993), Brooks a Schmitt (2009), Hasselblatt a Katok (2003) a Nash (1951).

Definice A.6. *Množinové zobrazení $C : D \rightrightarrows E$ nazýváme shora polospojité (angl. upper hemi-continuous) v x_0, pokud $C(x_0)$ je neprázdné a pro každou posloupnost $x_n \to x_0$ v D a každou posloupnost $\{y_n\}$ takovou, že $y_n \in C(x_n)$* a *$\forall n$ existuje podposloupnost $\{y_n\}$ konvergující k $b_0 \in C(x_0)$.*

Definice A.7. *Mějme zobrazení $f : D \to D$ takové, že*

$$\exists\ q \in (0,1) \text{ tak, že } \forall x, y \in D \text{ platí } ||f(x) - f(y)|| \leq q||x - y||,$$

kde $||.||$ je norma. Pak zobrazení f nazýváme kontrakce.

Věta A.7. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a nechť zobrazení $f : D \to D$ je kontrakce, pak pro libovolný bod $x_0 \in D$ posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ taková, že*

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1$$

konverguje k pevnému bodu $x^* \in D$ zobrazení f, tj. $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Definice A.8. *Rozhodovacím pravidlem pro i-tého hráče rozumíme množinové zobrazení $C^i : X_{i-} \rightrightarrows X_i$, které přiřazuje množinu možných strategií $C^i(x_{i-})$ pro hráče i na základě strategie ostatních hráčů x_{i-}.*

Definice A.9. *Ve hře n-hráčů, kde každému hráči náleží rozhodovací pravidlo C^i, říkáme, že souhrnná strategie $x \in X$ je konzistentní v zobrazení $\boldsymbol{C} : X \rightrightarrows X$, kde $\boldsymbol{C}(x) = \times_{i=1}^{n} C^i(x_{i-})$, pokud*

$$x_i \in C^i(x_{i-}), \quad \forall\ i = 1, \cdots, n.$$

Definice A.10. *Hra v normálním (nebo n-normálním) tvaru je hra definovaná množinami strategií X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i pro každého hráče i.*

Definice A.11. *Pro hru v normálním tvaru s množinami strategií X_i a ztrátovými funkcemi ℓ_i řekneme, že $x \in X$ je Nashovo ekvilibrium, pokud platí*

$$\forall\ i = 1, \cdots, n, \quad \forall\ y_i \in X_i : \quad \ell_i(y_i, x_{i-}) \geq \ell_i(x_i, x_{i-}).$$

Definice A.12. *Nejlepší odpovědí i-tého hráče pro smíšenou strategii ostatních hráčů $x_{i-} \in X_{i-}$ je taková strategie $x_i^* \in X_i$, že platí*

$$\forall\ x_i \in X_i : \ell_i(x_i, x_{i-}) \geq \ell_i(x_i^*, x_{i-}).$$

Definice A.13. *Nechť f je zobrazení takové, že $f : D \to D$. Pak bod $x \in D$ nazveme pevným bodem, pokud platí $x = f(x)$.*

Nechť C je množinové zobrazení $C : D \rightrightarrows D$, pak bod $x \in D$ nazýváme pevným bodem množinového zobrazení C, pokud platí $x \in C(x)$.

Seznam obrázků

Seznam tabulek