Posudek oponenta diplomové práce **Bc. Ondřeje Týbla** s názvem

Kalman-Bucy Filter in Continuous Time

Tématem předložené práce je problém lineární filtrace gaussovského signálu ve spojitém čase. Jedná se o problém nalezení odhadu $(\hat{\theta}_t)_{t\in[0,T]}$ (tzv. filtr) konečněrozměrného gaussovského procesu $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ (tzv. signál) na základě znalosti procesu $(\xi_t)_{t\in[0,T]}$ (tzv. pozorování), který je odvozen ze skutečného signálu s náhodnou chybou.

Odhad $\hat{\theta}$ se hledá jako proces s konečnými druhými momenty, který je adaptovaný na filtraci generovanou procesem ξ, $(\mathcal{F}_t^\xi)_{t\in[0,T]}$, a který minimalizuje střední kvadratickou chybu. Filtr tedy splňuje $\hat{\theta}_t = \mathbb{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^\xi]$ (pro $t \in [0,T]$ $\mathbb{P}$-skoro jistě). Velmi netriviálním problémem je ovšem nalézt metodu, jak filtr určit a případně implementovat v praxi.

V této obecnosti byl problém filtrace gaussovského signálu vyřešen nedávno (Theorem 1.1 v referenci [24]) a Ondřej Týbl se ve své diplomové práci věnuje analýze tohoto řešení. V práci najít důkaz spojité závisloti kovariance chyby filtru na kovarianci signálu (Theorem 12) a dále analýzu vlastností rovnice pro filtr, zejména důkaz existence a jednoznačnosti jejího řešení (Theorem 16) a spojitou závislost filtru na kovarianci signálu (Theorem 17).

Předložená práce je členěna na úvod, pět číslovaných kapitol a dva dodatky. V úvodní části je popsána motivace a vysvětlen rozdíl mezi uvažovaným problémem a již známými výsledky. Dále jsou zde shrnuty hlavní výsledky práce a popsány metody, které k jejich odvození byly použity. Nakonec je zmíněna struktura práce. První kapitola obsahuje zavedení potřebných pojmů a výsledků z teorie gaussovských procesů. Velký prostor je zde věnován frakcionálnímu Brownovu pohybu. Ve druhé kapitole je nejprve zmíněn klasický problém filtrace a zmíněno Kalmanovo-Bucyho řešení a dále popsán problém filtrace, kterému se diplomová práce věnuje. Třetí kapitola je věnována spojité závislosti kovariance chyby filtru na signálu zatímco čtvrtá kapitola obsahuje analýzu vlastností rovnice pro filtr. Poslední kapitola obsahuje tři příklady, na kterých je teorie demonstrována. Závěrečný dodatek A obsahuje Gronwallovu nerovnost a dodatek B shrnuje definici relativní kompaktnosti, Arzelovu-Ascoliho větu a kritérium, na jehož základě lze v případě množiny funkcí dvou proměnných ověřit její stejnou spojitost.

Dle mého názoru je téma této diplomové práce dostatečně náročné a v předložené práci bylo více než naplněno. Práce obsahuje zcela nové netriviální výsledky autora, které rozšiřují současný stav poznání a jejichž důkazy se zdají být v pořádku. Osobně bych ovšem ocenil, kdyby byla věnována větší pozornost formální stránce práce.

Práce obsahuje větší množství překlepů a zvláštních, místy až nejasných, formulací, což citelně snižuje její čitelnost. Místy v práci chybí kvantifikátory (zejména s kvantifikátorem $\mathbb{P}$-skoro jistě je zacházeno poněkud nedbale) a mnohdy je v práci pro jeden objekt použito dvojí značení (např. T a $\mathcal{T}$ pro indexovou množinu náhodného procesu - viz zcela nejasný symbol $\mathcal{R}^T$ v Theorem 1 a A^* a A^T pro transpozici matice). Některé symboly nejsou zavedeny vůbec (např. $\mathcal{B}([0,T])$ v Theorem 1 nebo I v Definition 4) a byť je jejich význam z kontextu jasný, v diplomové práci by, dle mého názoru, zavedeny být měly. Na některých místech v práci chybí některá slova (např. v Definition 1 pravděpodobně chybí „*is a probability space*“) a symboly (např. závorka v posledním výrazu na straně 4). Naopak jinde jsou některá slova dvakrát (např. *of* v Theorem 1). Celkem práce působí dojmem, že na jazykové a typografické korektury již nezbýval čas.

Obecně však z matematického hlediska práci považuji za výbornou a doporučuji ji uznat jako práci diplomovou. Níže lze nalézt několik poznámek a otázek, které mohou posloužit jako základ k diskuzi při obhajobě práce.

Poznámky:

1. Daniellovu-Kolmogorovovu větu se zcela obecnou indexovou množinou lze najít v monografii

   - BILLINGSLEY, Patric. *Convergence of probability measures.* New York: Wiley, 1968. Wiley series in probability and mathematical statistics.

   V citované referenci [9] je formulována pouze pro $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$.

2. V definici filtrace $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ na ř. 21 str. 18 by mělo být Y místo X^{x_0}.

3. V rovnici (2.3) na str. 19 by ve druhém členu na pravé straně rovnice mělo být $K(t)^2$ místo $K(t)$.

4. V matematické formulaci problému filtrace v sekci 2.1 není jasné, jestli výraz (2.9) je definice filtru $\hat{\theta}$ nebo jeho reprezentace. Pokud se jedná o definici filtru, pak by mělo být ukázáno, proč je filtr hledán zrovna v tomto tvaru. Pokud se jedná o reprezentaci, pak by mělo být vysvětleno, v jakém smyslu je filtr „reprezentován“ a problém filtrace by měl být pečlivěji formulován.

Otázky:

1. Co se myslí tím, že frakcionální Brownův pohyb je homogenní proces řádu $2H$ (str. 7, ř. 11)? A jak z toho plyne, že je soběpodobný?

2. V jakém smyslu je chápána rovnost na ř. 8 na str. 16 a rovnost (2.14) na str. 20?

3. V důkazech výsledků v kapitolách 3 a 4 byl použit předpoklad, že funkce A je omezená. Lze tento předpoklad zmírnit?

4. Dalo by se uvažovat lineární pozorování ve tvaru

   $$\mathrm{d}\xi_t = A_t\theta_t \mathrm{d}t + B_t \mathrm{d}W_t, \quad \xi_0 = 0,$$

   kde B je nějaká deterministická funkce?

V Praze, 2. června 2019

(Petr Čoupek)