Posudek oponenta na diplomovou práci Bc. Dominika Šulce
Název práce: *Geometrie v konečněrozměrných normovaných prostorech*

Diplomová práce Dominika Šulce se zabývá studiem některých vlastností různých pojmů vzdálenosti (tj. různých norem) na prostorech $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Kromě klasické eukleidovské vzdálenosti (kterou lze vypočítat pomocí Pýthagorovy věty) lze uvažovat různé jiné způsoby, jak definovat vzdálenost mezi různými body. Zachováme-li definici jednotkové koule (resp. kružnice) jakožto množiny všech bodů, jejichž vzdálenost od počátku je nejvýše rovna (resp. je rovna) jedné, mění se tvar (a tedy často i objem) takové koule v závislosti na použité normě. Protože je diplomová práce zaměřena zejména na výpočet objemu jednotkové koule a studium asymptotického chování takového objemu (vzhledem k pevně zvolenému typu normy) pro dimenzi jdoucí do nekonečna, nemám pochyb o tom, že práce spadá do oboru matematické analýzy. Charakter práce je jednoznačně teoretický, a to ve stylu definice-věta-důkaz; to práci ovšem nikterak neubírá na kvalitě: zkoumané problémy jsou komplikované a velmi zajímavé. Práce navíc přináší některé výsledky, které patrně nebyly dosud publikovány; některé důkazy však obsahují chyby a pravděpodobně by se daly výrazně zkrátit (na zlomek stávající délky) – viz níže.

Diplomová práce je rozdělena na stručný úvod (označený jako Kapitola 1) a kapitoly 2–4. V Kapitole 2 autor stručně probere některá základní fakta o normovaných lineárních prostorech, a to včetně důkazů. Kapitola 3 se zabývá studiem objemu jednotkové koule. Nejprve je (pro různé normy) potřeba vypočítat objem jednotkové koule, což obnáší výpočet vícenásobných integrálů pomocí Fubiniovy věty, Věty o substituci, počítání integrálu dvěma způsoby a práci s funkcí Γ (zobecnění faktoriálu). V druhé části kapitoly se studuje chování objemu jednotkové koule pro dimenzi jdoucí do nekonečna. Například jsou uvedeny všechny složky důkazu tvrzení, že uvažujeme-li v prostorech $\mathbb{R}^n$ klasickou eukleidovskou vzdálenost, největší objem má jednotková koule v dimenzi 5; pro větší dimenze pak objem jednotkové eukleidovské koule monotónně klesá k nule. Tento výsledek je dobře známý, práce však také obsahuje (známý) vzorec pro objem jednotkové koule vzhledem k normám $\|\cdot\|_p$, který je použit k důkazu nového výsledku, že $\lim_{n\to\infty} V_n(1) = 0$, kde $V_n(1)$ značí (n-dimenzionální) objem jednotkové koule v $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Kapitola 3 navíc obsahuje ještě další výsledky, které chování posloupnosti $\{V_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ popisují podrobněji. Konečně Kapitola 4 studuje poněkud odlišný problém v dimenzi 2, tedy v rovině. Opět můžeme uvažovat různé normy a z nich odvozené jednotkové kružnice (jejichž délka může záviset na volbě normy). Zde je potřeba si uvědomit, že zatímco v Kapitole 3 jsme objem měřili standardním způsobem, jenž nesouvisí s volbou normy, v případě délky „kružnice“ musíme vzít v úvahu, že používáme jiný pojem vzdálenosti, a je tedy nejprve potřeba vysvětlit, co vůbec myslíme délkou křivky (tento pojem tedy závisí na volbě normy). Nyní se můžeme ptát na souvislost obvodu ℓ a poloměru r kružnice; je ovšem známo, že v eukleidovském prostoru platí $\ell = 2\pi r$, a tedy $\pi = \ell/2r$. To v prostoru $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ motivuje definici $\pi_{\|\cdot\|} = \ell_{\|\cdot\|}/2r$. Je rozumné se ptát, v jakém rozmezí se musí vyskytovat konstanta $\pi\|\cdot\|$, na což je dána poměrně podrobná odpověď.

Jak už jsem uvedl, práce je netriviální, její téma je zajímavé; až na drobné chyby je v pořádku také po jazykové stránce a obsahuje patřičné odkazy na zdroje. Bohužel je však zároveň potřeba přiznat, že práce trpí celou řadou formálních i podstatných nedostatků. Hlavním formálním problémem je nekonzistentní a často podivné značení a způsob zápisu, který se mění kapitolu od kapitoly, někdy i důkaz od důkazu, nejspíše podle toho, z jakého zdroje autor důkazy přebíral. Mnohdy je značení používáno bez předchozího vysvětlení, jindy je zaváděno značení nepotřebné. Některé závažnější problémy následují v seznamu níže.

Protože je připomínek poměrně mnoho a protože tento posudek (i vzhledem k náročnosti jeho sepsání) posílám s velkým zpožděním, nebudu samozřejmě při obhajobě požadovat vyjasnění všech bodů (většinu jsem si ostatně bez větších potíží vyjasnil sám). Autora bych si dovolil poprosit zejména o vyjasnění jeho použití Stirlingovy formule (viz body 3) a 4)).

1) V Kapitole 2 se čtyřikrát opakuje ta samá myšlenka důkazu, přitom by stačila jednou až dvakrát. Jde o Větu 2.2 (d), Poznámku 2.5, Větu 2.8 a Větu 2.9. Ve všech těchto důkazech se vyskytuje stejný trik (ale pokaždé zapsaný trochu jinak, což je pravděpodobně dáno převzetím důkazů z různých zdrojů).

2) V důkazu Věty 2.9 se hovoří o jistém minimu, nikde ale není zmíněno, proč by se minima mělo nabývat. Odstavec 2. téhož důkazu má nedostatečně zdůvodněný argument týkající se hodnoty α, o které se mlčky předpokládá, že je určena jednoznačně. Je tomu tak, ale to je potřeba dokázat. Je proto lepší se vyhnout tomuto krkolomnému geometrickému argumentu a raději argumentovat omezeností K, ze které požadované závěry plynou mnohem jednoduššeji (a bez vznikajících pochyb).

3) Věta 3.8 je dokázána zbytečně složitě, Stirlingova formule vůbec není potřeba. Dokázat, že posloupnost $V_n(r)$ jde k nule, je těžší cvičení na limity prvního semestru (známe-li už Větu 3.6). Kromě toho chci poznamenat, že hned v prvním řádku důkazu je jasné, že jednu z obou implikací o konvergenci uvedené řady budeme dokazovat zbytečně; místo „právě tehdy“ bych psal pouze „pokud“ a jen to také dokázal. Použití Stirlingova vzorce je navíc pochybné (bez dalšího vysvětlení), protože jeho základní verze hovoří o limitě posloupnosti a my zde dosazujeme $n/2$. To by se mělo aspoň stručně ospravedlnit.

4) Pro Větu 3.9 autor nabízí dokonce dva různé důkazy, bohužel oba dva obsahují chyby. S jistou mírou nadsázky se přitom dá říci, že důkaz lze provést na 3 řádky:

   $$V_n(r) = 2^n r^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)} \leqslant \frac{(2r)^n C^n}{(\lfloor n/p \rfloor)!} \leqslant \frac{((2rC)^p)^{n/p}}{(\lfloor n/p \rfloor)!} \leqslant \frac{((2rC)^p)^{\lfloor n/p \rfloor + 1}}{(\lfloor n/p \rfloor)!} = q \cdot \frac{q^{\lfloor n/p \rfloor}}{(\lfloor n/p \rfloor)!},$$

   kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část, $C = \Gamma(1+1/p)$ a $q = (2rC)^p > 1$ (platí pro dost velké r, což nám stačí); výsledek nyní snadno plyne ze známé limity $\lim_{k\to\infty} \frac{q^k}{k!} = 0$ ($q \in \mathbb{R}$).

   Konkrétněji k oběma důkazům v práci: V prvním důkazu je malý problém ve volbě k, které lze najít pouze pro dosti velká n (dá se snadno spravit). Větší problém (který neumím snadno spravit) je nahoře na straně 19, kde nevidím, proč by uvedená nerovnost měla platit.

Druhý důkaz (pomocí Stirlingovy formule) obsahuje stejný problém, jako už předchozí důkaz tuto formuli využívající: bez zdůvodnění se provádí „substituce“ $n = pk$, což samozřejmě nemusí být přirozené číslo dokonce pro žádné k (když p je iracionální). Stirlingova formule je zde uvedena jako limita posloupnosti (nikoliv funkce), takže tento postup je formálně nekorektní.

5) Kapitola 4 obsahuje nejasnosti ohledně toho, jakou normu uvažujeme v definici kružnice, jakou normu v definici její délky a tak dále. Pochopit se to dá, ale není to snadné. Bylo by lépe explicitně psát například $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ a ℓ_X a podobně. Vágní formulace typu „vzhledem k jakékoliv normě“, vyskytují-li se příliš často, začnou dávat čtenáři příliš velký prostor pro různé interpretace a čtení je nepohodlné. V Definici 4.1 by bylo vhodné odlišit pojem délky podle použité normy.

6) Důkaz Lemmatu 4.3 je problematický. V konci druhého řádku se tvrdí, že rovnoběžník není určen jednoznačně, což není pravda, někdy to tak může být (například když jednotková koule je čtverec); to je samozřejmě jen drobnost. Na druhou stranu ale není vysvětleno, že takový rovnoběžník nutně existuje (je například možno použít kompaktnost na důkaz existence minima jisté funkce více proměnných; jistě by nebylo potřeba to psát podrobně, ale zmínku si to zaslouží). Dále se konstruuje jistá rovnoběžka procházející bodem p' ležícím na jednotkové kružnici. Není ovšem jasné, že na této rovnoběžce neleží žádné body s normou menší než 1, což se v důkazu tvrdí a používá. Také se zde píše, že něco „můžeme“ nahradit, není ovšem vysvětleno, co se tím myslí. A konečně: závěrečný krok důkazu, kdy z jisté série rovností dostaneme nerovnost $\pi_{\|\cdot\|_x} \leqslant \pi_{\|\cdot\|'}$ by bylo lépe vysvětlit o dost podrobněji.

   V důkazu také osciluje značení $\|\cdot\|$ vs. $\|\cdot\|_X$.

7) Ve formulaci Lemmatu 4.7 by bylo vhodné specifikovat, pro která p funkci definujeme. Zdá se mi, že v důkazu možná používáme, že $p > 1/2$.

8) Důkaz Věty 4.10 jsem přes značnou snahu nebyl schopen dešifrovat. Úvodní část o předpokladu bez újmy na obecnosti sice není vysvětlena úplně dobře, ale v podstatě je v pořádku. Od té chvíle jsem už ale pochopil jen velmi málo. Snažil jsem se nakreslit si obrázek, ale zdá se mi, že tam jsou kolize značení a i některé slovní formulace lze chápat různě.

Některé nepodstatné drobnější připomínky, které uvádím pouze jako zpětnou vazbu autorovi:

- Proč chybí indentace odstavců?
- Odkazy na číslované věty, definice atd. je zvykem psát s velkým písmenem, píšeme tedy například „podle Věty 1“ apod.
- V Definici 2.4 by asi bylo dobré definovat i ℓ_∞^n. (Poznamenávám také, že se obvykle používá symbol ℓ.)

- V Důkazu 2.5 se objeví zbytečné značení $\mathbb{R}^* = [0, \infty)$, přitom tento symbol se standardně používá pro rozšířenou reálnou osu. (Navíc je ovšem zbytečné pro ten interval vůbec nějaké značení zavádět.) Když už ovšem zavádím nějaké značení, je vhodné ho používat konzistentně.

- Symbol čtverečku značícího konec důkazu je skoro vždy až pod posledním řádkem důkazu, což nevypadá dobře.

- V úvodu ke Kapitole 3 se píše, že jisté vzorce jsou známy „již velmi dlouho"; když už se o tom hovoří, bylo by pěkné vědět, jak dlouho to je. I formulace o „běžném výskytu v přírodě" je poněkud zvláštní.

- V důkazu Věty 3.6 by asi bylo dobré vysvětlit druhou rovnost na posledním na str. 11. (Rovnost platí, ale v práci jsou mnohdy vysvětlovány jednodušší věci než toto.)

- Část o asteroidách by si zasloužila vlastní nadpis. Při sázení je také vhodné věnovat pozornost umístění obrázků – třeba obrázek 3.1 je umístěn opravdu nešťastně (mohl by být hned po definici asteroidy).

- Některé důkazy (např V3.8 atd.) se špatně čtou, protože chybí číslování (aspoň některých) rovnic a odkazy na ně. Čtenář pak často musí delší dobu hledat, než si uvědomí, ze čeho to či ono plyne.

- Ve Větě 3.10 by bylo asi logičtější hovořit o posloupnosti, nikoliv funkci, $V_n(1)$.

- V Lemmatu 3.13: je lépe oddělit kvantifikátory od zbytku výroku dvojtečkou. V případě druhého výroku je lépe napsat buďto $\forall n \geqslant 2$ nebo lépe $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geqslant 2 \Rightarrow \ldots$.

- Úvodní poznámky z Kapitoly 4 opět působí poněkud zvláštně. Například tvrzení, že „hodnota konstanty π je dávno známá" by asi bylo poměrně obtížné interpretovat tak, aby se dala obhájit jeho pravdivost.

- Symbol $\pi_{\|\cdot\|}$ by si určitě zasloužil vlastní definici místo pouhé zmínky někde v textu.

- Kapitola 4 naráží na nesoulad definice kružnice (jde o křivku) a mnohoúhelníku (počítá se i vnitřek). Tento problém se projevuje například nahoře na straně 31. Bylo by dobré to vyřešit nějakou rozumnou konvencí v úvodu kapitoly.

- Na začátku důkazu Věty 4.4 se tvrdí, že jisté nerovnosti plynou z konvexity; ve skutečnosti plynou z podmínky v Lemmatu 4.3. V důkazu se také najednou začne ztotožňovat $\mathbb{R}^2 a \mathbb{C}$, což by mělo být vysvětleno předem (místo toho je to vysvětleno až na začátku poslední sekce).

- V úvodu sekce 4.2 se mi nelíbí značení $\sqrt[p]{\ldots}$ pro p necelé. Některým integrálům nahoře na str. 32 chybí závorky.

- Sekce 4.3 by si zasloužila více pozornosti, zejména lepší a přehlednější značení spojené s přesným vyjadřováním. Část obsahuje řadu matoucích míst, ve kterých jsem se zorientoval až po vynaloženém úsilí.

- Důkaz Lemmatu 4.9 je velmi pěkný, ale jistě by pomohl jednoduchý obrázek. Na konci důkazu je překlep: v poslední sadě nerovností má být uprostřed S_Y, ne S_X.

- Stálo by za to někde poznamenat, že Věta 4.10 implikuje Větu 4.8.

Závěr: Práce působí jako kvalitní celek, který však při podrobném čtení konzistentně prokazuje i závažnější nedostatky, které mi brání navrhnout nejlepší hodnocení. Vzhledem ke komplikovanému a zábavnému tématu si však práce zaslouží hodnocení *velmi dobře*.

Martin Rmoutil