

Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce Matěj Konečný
Název práce Metrické prostory se vzdálenostmi z pologrupy
Rok odevzdání 2019
Studijní program Informatika **Studijní obor** Diskrétní modely a algoritmy

Autor posudku Jan Hubička **Role** vedoucí
Pracoviště Katedra aplikované matematiky

Text posudku:

Řešitel se ve své práci věnuje zobecnění metrických prostorů, kde vzdálenosti jsou voleny z částečně uspořádané pologrupy. Na těchto strukturách se zabývá zejména otázkou dopňování chybících vzdáleností do grafů s ohodnocením hran pomocí dané pologrupy tak, aby ve výsledné struktuře platila trojúhelníková vzdálenost.

Studium těchto struktur bylo motivováno otázkou ze strukturální Ramseyovy teorie — specificky otázkou které amalgamační třídy v binárním symetrickém jazyce jsou ramseyovské pokud se doplní o (speciální) uspořádání vrcholů. Tento problém má dnes již čtyřicetiletou historii. Nejstarším příkladem je třída všech konečných grafů, kterou lze chápat i jako třídu všech metrických prostorů se vzdálenostmi 1 nebo 2. ramseyovskou vlastnot grafů s lineárním uspořádáním vrcholu ukázali v druhé polovině sedmdesátých let Nešetřil a Rödl a nezávisle Abramson a Harington. Nešetřil-Rödllova věta ukazuje i fakt, že pro každé k je třída všech konečných grafů, které neobsahují kliku velikosti k , ramseyovská. Díky souvislosti amalgamačních tříd a ramseyovských tříd a programu klasifikace homogeních struktur byly všechny ramseyovské třídy grafů známé už v roce 1989. (Díky Lachlan-Woodroově větě víme, že amalgamačních tříd grafů je pouze pět typů a všechny jsou ramseyovské pokud se vrcholy vhodně uspořádají případně se vrcholy doplní o konečné množství značek).

V roce 2005 byla ukázána souvislost ramseyovských tříd a topologické dynamiky (tzv. Kechriss-Pestov-Todorčevičova korespondence) a ta se ukázala vitální pro další pokrok v oblasti. Vznikla tak celá nová škola na pomezí několika oborů (kombinatoriky, teorie grup, teorie modelů a topologické dynamiky). Nešetřil o tři roky později ukázal že třída všech metrických prostorů (bez dalších podmínek) s racionálními vzdálenostmi a s volným uspořádáním vrcholů je ramseyovská. Tomuto problému se také věnoval Lionel Nguyen-van-The v rozsáhlé práci publikované v *Memoirs of AMS* kde ukázal několik dalších speciálních případů.

V roce 2016 v rámci Ramsey Doccourse jsme se rozhodli řešit otázku zda všechny známé

třídy metrických prostorů z nového katalogu metricky homogenních struktur (publikovaném G. Cherlinem) mají ramseyovské expanze. Jako milé překvapení se problém během dvou let podařilo plně vyřešit a tomuto výsledku se věnoval Matěj Konečný ve své bakalářské práci. Jeho diplomová práce na ni přímo navazuje a techniky dalekosáhle zobecňuje. Vzniká tak ucelená teorie, kterou lze aplikovat na široké spektrum příkladů.

Podstatné jsou i souvislosti mimo strukturální Ramseyovu teorii. Techniky studované v práci lze aplikovat k důkazu, že daná třída struktur má tzv. rozšiřující vlastnost pro částečné automorfismy (EPPA), což má další aplikace v teorii grup a topologické dynamice. Dále je zajímavým důsledkem existence relace stacionární nezávislosti (SIR), která pak lze aplikovat pro důkaz, že grupa automorfismů Fraïssého limity dané třídy je jednoduchá.

Práce Matěje Konečného tak spojuje hned několik dnes velmi aktivních oblastí, ve které představuje podstatný pokrok. To lze dosvědčit i tím, že řešitel aktivně spolupracuje s předními odborníky v oblasti (Jaroslavem Nešetřilem, Davidem Evansem, Gregory Cherlinem, Norbertem Sauerem, Lionel Nguyen Van Thé, Marcinem Sabokem) a jejich studenty (Yibei Li, Colinem Jahalem, Samuelem Braunfeldem, Rebeccou Coulson). V současné době je (spolu)autorem dvanácti odborných prací týkajících se strukturální Ramseyovy teorie (pro úplnost uvedme, že je také spoluautorem i dalších prací v oblasti diskrétní matematiky).

1. Aranda, A., Bradley-Williams, D., Hubička, J., Karamanlis, M., Kompatscher, M., Konečný, M., Pawliuk, M. (2017). *Ramsey expansions of metrically homogeneous graphs*. arXiv:1707.02612. Zasláno do European Journal of Combinatorics.
2. Aranda, A., Bradley-Williams, D., Hng, E. K., Hubička, J., Karamanlis, M., Kompatscher, M., Konečný, M., Pawliuk, M. (2017). *Completing graphs to metric spaces*. Vyjde v Contribution to Discrete Mathematic v čísle věnovaném N. Sauerovi. Konferenční verze byla přijata do EUROCOMB 2017.
3. Hubička, J., Konečný, M., Nešetřil, J. (2019). *A combinatorial proof of the extension property for partial isometries*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 60, 39–47.
4. Hubička, J., Konečný, M., Nešetřil, J. (2017). *Conant's generalised metric spaces are Ramsey*. Vyjde v Contribution to Discrete Mathematic v čísle věnovaném N. Sauerovi.
5. Evans, D., Hubička, J., Konečný, M., Nešetřil, J. (2018). *EPPA for two-graphs and antipodal metric spaces*. arXiv:1812.11157. Zasláno do Proceedings of the AMS.
6. Hubička, J., Konečný, M., Nešetřil, J. (2019). *All those EPPA classes (Strengthenings of the Herwig-Lascar theorem)*. arXiv:1902.03855. Zasláno do Transactions of the AMS.
7. Hubička, J., Kompatscher, M., Konečný, M. (2018). *Forbidden cycles in metrically homogeneous graphs*. arXiv:1808.05177. Zasláno do European Journal of Combinatorics.

8. Hubička, J., Jahel, C., Konečný, M., Sabok, M. (2019). *Extending partial automorphisms of n -partite tournaments*. arXiv:1903.07476. Přijato jako rozšířený abstrakt pro konferenci EUROCOMB 2019. Časopisová publikace je před dokončením.
9. Konečný, M. (2019). *Extending partial isometries of antipodal graphs*. arXiv:1901.04426. Zasláno do Discrete Mathematics jako soutěžní příspěvek pro nejlepší studentskou publikaci na konferenci CanaDAM 2019.
10. Balko, M., Chodounský, D., Hubička, J., Konečný, M., Vena, L. (2019) *On big Ramsey degrees of 3-uniform hypergraph*. Přijato jako rozšířený abstrakt pro konferenci EUROCOMB 2019. Časopisová publikace je v přípravě.
11. Hubička, J., Konečný, M., Nešetřil, J. (2019). *Ramsey properties of edge-labelled graphs via completions*. Přijato jako rozšířený abstrakt pro konferenci EUROCOMB 2019.
12. Konečný, M. (2018). *Combinatorial properties of metrically homogeneous graphs*. Bakalářská práce byla v roce 2019 oceněna cenou děkana.

Matěj Konečný také získal za svoji práci ve strukturální Ramseyově teorii několik ocenění:

1. *Cenu Jiřího Matouška* za rok 2018 (spolu s Debarati Das)
2. Cenu časopisu Discrete Mathematic a konference CanaDAM *William T. Tutte Student Paper Award in Discrete Mathematics*
3. 1. cenu Studentské soutěže SVOČ 2019 společně s Janem Mazáčem v sekci M5+M6.

Práce je velmi kvalitně sepsaná. V první části přináší přehledný úvod do všech zmíněných oblastí. Následují původní výsledky. Ty sice vychází ze zmíněných publikací ale všechny základní definice a důkazy jsou nové a obecnější. V této zobecněné podobě se výsledky blíží úplnému řešení Nešetřilova programu pro struktury s binárním symetrickým jazykem a primitivní grupou automorfismů. Autor experimentálně ověřil, že všechny takové struktury v jazyce s maximálně pěti relacemi spadají do prezentovaného frameworku.

Věřím, že práce přesahuje podmínky kladené na práci diplomovou a rozsahem i kvalitou výsledků odpovídá spíše práci disertační.

Práci doporučuji k obhajobě.

Práci navrhuji na zvláštní ocenění.

Věřím, že se jedná o výjimečnou práci, která by si zasloužila i ocenění děkana. Její kvalitu asi nejlépe dokládá množství publikací na ni založených, spolupráce s předními odborníky v oblasti i tři ocenění, které Matěj Konečný za poslední rok získal. Matěj Konečný také prezentoval a nebo bude prezentovat své výsledky na několika prestižních konferencích včetně Eurocomb 2017 (Vídeň), Eurocomb 2019 (Bratislava), Logic Colloquia 2019 (Praha), Unifying Themes in Ramsey Theory (Banff), British Postgraduate Model Theory Conference 2019 (Manchester) a dalších.

V Praze dne 07. 06. 2019

Podpis:

