Abstrakt

Funkce kontinua je funkce, která libovolnému nekonečnému kardinálu κ přiřadí hodnotu 2^κ. Řekneme, že regulární nespočetný kardinál κ má stromovou vlastnost, jestliže každý κ-strom má kofinální větev, ekvivalentně, že neexistuje žádný κ-Aronszajnův strom. Obdobně definujeme, že regulární nespočetný kardinál κ má slabou stromovou vlastnost, jestliže neexistuje žádný speciální κ-Aronszajnův strom. Stromová vlastnost a slabá stromová vlastnost mají následující netriviální efekt na funkci kontinua: (*) Jestliže (slabá) stromová vlastnost platí na κ^{++}, pak $2^\kappa \geq \kappa^{++}$. V této práci se věnujeme několika výsledkům, které naznačují, že (*) je jediná restrikce, kterou na funkci kontinua kladou stromová vlastnost a slabá stromová vlastnost kromě obvyklých restrikcí dokazatelných v ZFC (monotonie a tvrzení, že kofinalita 2^κ musí být větší než κ; označme tyto restrikce (**)). Nejprve ukážeme, že stromová vlastnost na $\aleph_{2n}$ pro každé $1 \leq n < \omega$ a slabá stromová vlastnost na $\aleph_n$ pro $2 \leq n < \omega$ neovlivňují funkci kontinua pod $\aleph_\omega$ víc, než je dáno podmínkami (*) a (**), tedy že každé chování funkce kontinua pod $\aleph_\omega$, které splňuje podmínky (*) a (**), je realizovatelné v nějaké generické extenzi. Pro důkaz stromové vlastnosti předpokládáme existenci nekonečně mnoha slabě kompaktních kardinálů a pro důkaz slabé stromové vlastnosti předpokládáme existenci nekonečně mnoha Mahlových kardinálů, což jsou optimální předpoklady vzhledem ke konzistentní síle daných tvrzení. V další části ukážeme, že stromová vlastnost na dvojitém následníku singulárního silně limitního kardinálu κ se spočetnou kofinalitou neovlivňuje hodnotu 2^κ kromě podmínek (*) a (**). Pro tento výsledek používáme předpoklad existence superkompaktního kardinálu κ se slabě kompaktním kardinálem nad κ. Poslední výsledek ukazuje, že stromová vlastnost na $\aleph_{\omega+2}$ s $\aleph_\omega$ silně limitním je konzistentní s tvrzením $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2+n}$ pro libovolné n, $0 \leq n < \omega$. Pro důkaz využíváme předpoklad existence silného kardinálu κ jistého stupně se slabě kompaktním kardinálem nad κ.