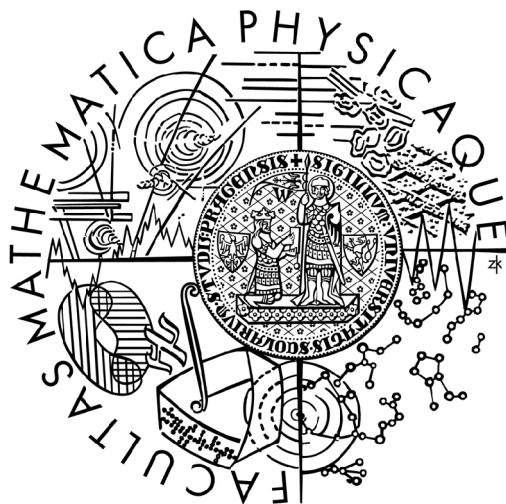


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Staněk

## Rozpoznávání vzorů momentovou metodou

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Bálek

Studijní program: Informatika, správa počítačových  
systémů

2007

Název práce: Rozpoznávání vzorů momentovou metodou

Autor: Jan Staněk

Katedra (ústav): Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Bálek

e-mail vedoucího: balek@kam.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce a příložený program jsou zaměřeny na momentovou metodu používanou při rozpoznávání vzorů. Text obsahuje základní informace o metodě, jejích výhodách, omezeních, úpravách a rozšířeních. Práce je zaměřena především na poslední krok procesu rozpoznávání vzorů, tedy na vlastní výpočet momentů obrázku a tvorbu rozhodovacího stromu momentů z předem předpřipravené skupiny vzorů. Důraz je kladen na variabilitu při tvorbě rozhodovacího stromu a následný rozbor a porovnání výsledků získaných při různých nastavení procesních podmínek. Program je vytvořen v programovacím jazyce Java.

Klíčová slova: Momentová metoda, momenty, rozhodovací strom, rozpoznávání vzorů

Title: Pattern recognition by moments method

Author: Jan Staněk

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: Mgr. Martin Bálek

Supervisor's e-mail address: balek@kam.mff.cuni.cz

Abstract: This bachelor thesis and computer program are focused on the moments method which is used in pattern recognition. The text contains basic information about the method, its advantages, constraints, modifications, and extensions. The thesis focuses mainly on the last step in the process of pattern recognition which is the computation of the moments of an image and construction of a decision tree based on a known set of patterns. The accent is put on the variability of the construction of a decision tree and on the subsequent analysis and comparison of results gained by different settings of process conditions. Program is created in Java programming language.

Keywords: moments method, moments, decision tree, pattern recognition

Rád bych poděkoval především vedoucímu této práce, panu magistru Martinu Bálkovi, který byl v celém tvůrčím procesu tím, kdo mi poskytoval mnohé materiály a neocenitelné rady. Můj dík patří samozřejmě také mým přátelům, členům rodiny a všem, kteří mi umožnili se na práci řádně soustředit a přispěli tak k příjemné pracovní atmosféře, která vedla k jejímu zdárnému dokončení.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2007

Jan Staněk

## Obsah

|  |    |
|--|----|
| 1. Úvod.....   | 5  |
| 2. Momentová metoda.....   | 7  |
| 2.1. Momenty a jejich typy .....                                 | 7  |
| 2.2. Proces porovnání momentovou metodou.....                    | 11 |
| 2.3. Historie.....   | 14 |
| 2.4. Vlastnosti momentů .....                                    | 15 |
| 2.4.1. Normalizace geometrických momentů .....                   | 16 |
| 2.4.2. Odolnost vůči šumu .....                                  | 17 |
| 2.4.3. Rozhodovací postup, rozhodovací strom a jeho stavba ..... | 18 |
| 2.5. Shrnutí.....  | 21 |
| 3. Praktická část – testování na příkladech .....                | 22 |
| Příklad 1. Přímá cesta.....                                      | 23 |
| Příklad 2. Jak na velikost a posunutí.....                       | 28 |
| Příklad 3. Nástup deformací.....                                 | 31 |
| Příklad 4. Sklopení a rotace .....                               | 34 |
| Příklad 5. Hloubka nebo šířka.....                               | 36 |
| Příklad 6. Široký kmen a úzké větve či naopak .....              | 41 |
| Příklad 7. Momenty a jejich řády.....                            | 44 |
| Příklad 8. Abeceda .....   | 47 |
| Příklad 9. Mnoho vzorů .....                                     | 49 |
| 4. Závěr .....   | 53 |
| 5. Literatura .....  | 54 |

## 1. Úvod

Tato práce je zaměřena na rozpoznávání vzorů momentovou metodou. Rozpoznávání vzorů je obor věnující se klasifikaci dat z hlediska jejich vzájemné podobnosti. V obecnosti je tento obor velmi rozsáhlý a proto jsem se rozhodl věnovat pouze jeho specifickému podoboru, kterým je rozpoznávání obrazových vzorů. I toto téma je ovšem značně rozsáhlé, neboť pro rozpoznávání obrazových vzorů existuje mnoho metod. Některé z nich jsou vhodnější pro rozpoznávání např. psaného textu, další zase pro rozpoznávání strojového textu a jiné se hodí třeba pro určování podobnosti obrázků v závislosti na různorodých kritériích. Většina z běžně užívaných programů pro rozpoznávání obrazových vzorů (ať již se jedná o různá OCR, programy pro analýzu vizualizací biologických či chemických sloučenin aj.) používá několik vzájemně provázaných metod, typicky několik statistických a několik strukturálních. Implementovat více takových metod a porovnávat jejich výsledky by jistě také stálo za podrobnější zkoumání, ale já jsem se rozhodl, že spíše než jít po povrchu mnoha metod bude lepší vybrat jednu z nich a více do hloubky probrat její specifika, výhody i nevýhody. Viceméně shodou okolností byla vybrána právě momentová metoda.

Momenty daného obrázku jsou čísla, která obrázek do značné míry charakterizují. Momentová metoda je založena na principu počítání specifických momentů obrázku. Podobnost (shodnost) obrázků se pak určuje podle toho, jak moc se jejich odpovídající momenty liší. Momentů existuje několik typů, přístupů k tomu jak je u obrázku spočítat je také více a problém, jak ze známých vzorových momentů rozhodnout o podobnosti porovnávaného obrázku se vzory je netriviálním problémem sám o sobě. Všechny tyto aspekty momentové metody jsem se pokusil v práci vysvětlit, rozebrat a ozřejmit čtenáři jak se počítají, používají, případně k čemu vlastně slouží.

V druhé části práce jsem se zaměřil na rozbor a popis výsledků momentové metody využitě na konkrétních příkladech, které jsem testoval na přiloženém programu. Tím jsem chtěl mimo jiné také zaplnit mezeru, na niž jsem narazil při procházení většiny informačních pramenů týkajících se momentové metody. V těch se čtenář dočte mnoho zajímavého o momentech, jejich typech, vlastnostech, úpravách a normalizacích aplikovaných pro získání odolnosti vůči tomu či onomu, ale až na výjimky (článek

F.L.Alta [1] obsahuje poměrně pěknou aplikaci na praktickém příkladu, bohužel se příliš nevěnuje automatizaci rozhodovacího mechanismu) nenarazí na žádnou ucelenou praktickou implementaci, na žádný návod, jak metodu implementovat a na co si případně dávat pozor. Právě tato bílá místa se snaží druhá část této práce společně s příloženým programem zaplnit.

## 2. Momentová metoda

### 2.1. Momenty a jejich typy

Momenty jsou čísla, která charakterizují obrázek. Pro každý obrázek lze spočítat nekonečně mnoho momentů, ze kterých postupně stavíme čtvercovou matici. Čím více máme spočítaných momentů, tím je matice větší a tím detailnější informace o obrázku nám poskytuje. U momentů definujeme *řád momentu* jako součet jeho souřadnic v této matici (souřadnice číslujeme od 0). *Řád momentu* charakterizuje, jakou informaci o obrázku daný moment vyjadřuje – nízké hodnoty specifikují hrubý tvar, vysoké hodnoty popisují drobné detaily obrázku.

Na jakýkoliv obrázek můžeme také pohlížet jako na funkci  $f(x, y)$ , kterou nazvěme *funkcí intenzity obrázku*. Mezi *funkcí intenzity* a momenty daného obrázku lze nalézt přímý vztah.

#### Geometrické momenty

Pro funkci  $f(x, y)$  jsou geometrické momenty definovány jako

$$M_{ij} = \iint x^i y^j f(x, y) \quad \text{kde } i, j = 1, 2, 3, \dots$$

a integrujeme přes oblast, na které je definována funkce  $f(x, y)$ , tedy v našem případě přes obdélník v dvojdimenzionálním prostoru, ve kterém se nachází náš obrázek.

Geometrické momenty lze tedy také chápat jako koeficienty nekonečného

polynomiálního rozvoje funkce 
$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{ij} x^i y^j .$$

Předchozí matematické zavedení momentů je pro účely programování nevhodné. Proto se zpravidla využívá aproximace, která je pro automatické zpracování mnohem příhodnější

$$M_{ij} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} x^i y^j f(x, y) \quad \text{kde } i, j = 1, 2, 3, \dots$$

a sčítáme přes všechny x-ové a y-ové souřadnice pixelů<sup>1</sup> obrázku.

Definujme nyní diskrétní *funkci intenzity obrázku*  $g(x, y)$  tak, že  $g(x, y) = 1$ , pokud pixel na daných souřadnicích je černý a  $g(x, y) = 0$ , pokud je bílý<sup>2</sup>. Neznámé  $x$  a  $y$  jsou souřadnice v dvojdimenzionálním prostoru obrázku.

Pro případ kdy  $f(x, y) = g(x, y)$ , tedy  $f(x, y)$  nabývá pouze hodnot 1 a 0, platí  $x^i y^j f(x, y) = 0$  pokud pixel obrázku na souřadnicích  $x, y$  je bílý. Předchozí vzorec tak lze zjednodušit na

$$M_{ij} = \sum_A x^i y^j \text{ kde } i, j = 1, 2, 3, \dots$$

kde sčítáme pouze přes všechny černé pixely obrázku. V tomto případě pak moment  $M_{00}$  vyjadřuje černou plochu obrázku.

### Legendreho momenty

Pro funkci  $f(x, y)$  jsou Legendreho momenty definovány jako

$$\lambda_{ij} = \frac{(2i+1)(2j+1)}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_i(x) P_j(y) f(x, y) dx dy \text{ kde } i, j = 1, 2, 3, \dots$$

Legendreho polynomy  $\{P_i(x)\}$  tvoří úplnou ortogonální bázi na intervalu  $[-1, 1]$ , tedy

$$\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij}.$$

Legendreho polynom n-tého řádu je definován jako

---

<sup>1</sup> Obecně nemusí být adresovatelná část obrázku velikosti právě 1 pixel. Oblast může mít libovolnou velikost. Všechny oblasti, na které je obrázek rozdělen, však musí mít stejnou velikost. V případě, že chceme použít oblast větší velikosti než 1 pixel, určí se hodnota funkce v dané oblasti zpravidla podle poměrného zastoupení barev pixelů zasahujících do oblasti. V opačném případě, kdy je velikost oblasti menší než velikost jednoho pixelu, přebírá oblast barvu pixelu, ve kterém se nachází.

V případě, že bychom používali oblasti jiné velikosti než je velikost 1 pixelu, stačí uvedené vzorce vynásobit konstantou  $k$  rovnou velikosti dané oblasti v pixelech.

Pro jednoduchost však v textu budeme vždy uvažovat oblast velikosti právě 1 pixel.

<sup>2</sup> Potřebujeme-li přesnější rozlišení než černá/bílá, můžeme funkci definovat  $g(x, y) = c$ , kde  $c$  symbolizuje úroveň intenzity šedé, případně konkrétní barvu.



$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{nj} x^j \quad \text{kde } a_{nj} = (-1)^{(n-j)/2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(n+j)!}{\left(\frac{n-j}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n+j}{2}\right)! \cdot j!}$$

Funkce  $f(x, y)$  lze pak vyjádřit jako nekonečný rozvoj Legendreho polynomů nad čtvercem  $[-1 \leq x, y \leq 1]$  tak, že

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} P_i(x) P_j(y)$$

kde Legendreho momenty jsou počítány nad stejným čtvercem  $[-1 \leq x, y \leq 1]$ .

Mezi Legendreho momenty a geometrickými momenty lze nalézt vzájemný vztah

$$\lambda_{ij} = \frac{(2i+1)(2j+1)}{4} \cdot \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n a_{ik} a_{jl} M_{kl}.$$

Jak je vidět, Legendreho momenty lze poměrně snadno získat z geometrických momentů, známe-li všechny geometrické momenty stejného a nižšího řádu.

### Zernikeho momenty

Komplexní Zernikeho momenty řádu  $n$  s opakováním  $l$  jsou definovány jako

$$A_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [V_{nl}(r, \theta)]^* \cdot f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

$l$  nabývá kladných a záporných celočíselných hodnot a jsou splněna pravidla

$n - |l|$  je sudé a  $|l| \leq n$ . Symbol \* značí komplexně sdružené číslo.

Zernikeho polynomy jsou definovány jako

$$V_{nl}(x, y) = V_{nl}(r \cos \theta, r \sin \theta) = R_{nl}(r) e^{il\theta}$$

a tvoří úplnou množinu komplexních funkcí ortogonálních na jednotkovém disku  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Reálné polynomy  $\{R_{nl}(r)\}$  splňují podmínku  $\int_0^1 R_{nl}(r)R_{ml}(r)r dr = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \delta_{mn}$  a jsou definovány jako

$$R_{nl}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|l|)/2} (-1)^s \cdot \frac{(n-s)!}{s! \cdot \left(\frac{n+|l|}{2} - s\right)! \cdot \left(\frac{n-|l|}{2} - s\right)!} \cdot r^{n-2s} = \sum_{\substack{k=|l| \\ n-k \text{ sudé}}}^n B_{n|l|k} r^k$$

Funkce  $f(x, y)$  lze pak vyjádřit pomocí Zernikeho polynomů nad jednotkovým diskem jako

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ n-|l| \text{ sudé} \\ |l| \leq n}}^{\infty} A_{nl} V_{nl}(x, y).$$

Mezi Zernikeho momenty a geometrickými momenty lze nalézt vzájemný vztah

$$A_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \cdot \sum_{\substack{k=|l| \\ n-k \text{ sudé}}}^n \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^{|l|} w^m \cdot \binom{q}{j} \cdot \binom{|l|}{m} \cdot B_{n|l|k} M_{k-2j-m, 2j+m} \quad \text{kde } w = -i \text{ pro}$$

$$l > 0, w = i \text{ pro } l \leq 0, q = \frac{1}{2} \cdot (k - |l|).$$

### Rotační momenty

Rotační momenty řádu  $n$  s opakováním  $l$  jsou definovány jako

$$D_{nl} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^n e^{-il\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots \text{ a } l \text{ nabývá celočíselných nenulových hodnot.}$$

Mezi rotačními a Zernikeho momenty existuje vztah

$$A_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \cdot \sum_{\substack{k=|l| \\ n-k \text{ sudé}}}^n B_{n|l|k} D_{kl}.$$

## Komplexní momenty

Komplexní momenty řádu  $p+q$  jsou definovány jako

$$C_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)^p \cdot (x-iy)^q \cdot f(x,y) dx dy \quad \text{kde } p, q = 1, 2, 3, \dots$$

Mezi komplexními a Zernikeho momenty existuje vztah

$$A_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \cdot \sum_{\substack{k=|l| \\ n-k \text{ sudé}}}^n B_{n|l|k} C_{1/2(k-l), 1/2(k+l)}.$$

## Shrnutí

Z předchozích definic je patrné, že Legendreho momenty jsou vlastně jen jakousi normalizací geometrických momentů na čtverec, Zernikeho momenty pak na jednotkový disk. Zernikeho i Legendreho momenty lze odvodit z geometrických momentů (i opačně), komplexní i rotační momenty lze pak odvodit ze Zernikeho momentů (i opačně). Tím je mimo jiné dáno, že lze nalézt vztahy mezi všemi typy momentů a přecházet tak od jednoho typu k jinému bez nutnosti vše přepočítávat dle základních definic jednotlivých typů. Tento přehled je částečně převzat z článku [2], v němž lze nalézt mnoho dalších informací o vlastnostech a vztazích jednotlivých typů.

## 2.2. Proces porovnání momentovou metodou

Jak již bylo uvedeno v úvodu, momentová metoda se používá pro rozhodnutí, kterému z množiny vzorů odpovídá porovnávaný obrázek. Na otázku jak k takovému porovnávání dochází se pokusím odpovědět jednoduchým popisem těla momentové metody, která je obdobně implementována i v přiloženém programu. Jako rozhodovací mechanismus metody jsem použil rozhodovací strom a z typů momentů jsem zvolil geometrické momenty. Pro zjednodušení předpokládejme, že máme k dispozici předzpracovaná data o vzorech i porovnávaných obrázcích ve formě černobílých obrázků se shodnými rozměry. Takový předpoklad zjevně není založen na praktické situaci, neboť v praxi budeme mít spíše tištěný či psaný text. Takový text lze ovšem na námi předpokládaný vstup snadno převést jeho naskenováním, rozdělením na jednotlivá

písmena a úpravou velikosti. Pakliže má vstupem být barevný obrázek, potřebujeme ho nejdříve převést na stupně šedi. Takový obrázek už bychom teoreticky mohli použít jako vstup pro momentovou metodu, místo hodnot 1 a 0 pro bílou a černou bychom použili více hodnot, pro každý odstín šedé jinou. Takový přístup by zřejmě fungoval, ovšem mohlo by dojít k nežádoucím záměnám méně černých za více šedých pixelů, což by v praxi mohlo vést k tomu, že metoda určí k obrázku vzor, který mu vůbec podobný není<sup>3</sup>. Proto je doporučeno obrázek stupňů šedi ještě upravit na čistě černobílý. Tyto kroky spadají do přípravné fáze a dále v rámci práce již nejsou řešeny, neboť s vlastní podstatou metody nemají mnoho společného. Celou momentovou metodu pak lze rozdělit na několik fází:

## 1. Zpracování vzorů

Vzory jsou brány postupně, každý je nejprve načten a poté jsou spočítány a zaznamenány jeho momenty. Takto je potřeba probrat a analyzovat všechny vzory.

### 1.a Načtení vzoru

U zpracovávaného vzoru je určena „pixelová matice“. Tato matice rozměry odpovídá rozměrům obrázku, místo pixelů však obsahuje jedničky na místě černých pixelů a nuly na místě bílých.

### 1.b Spočítání momentů

Vezmeme pixelovou matici a pomocí vzorce pro výpočet momentu spočteme potřebný počet momentů. Kolik momentů počítáme a jaký vzorec použijeme závisí na tom, jaký typ momentů jsme se rozhodli používat a kolik máme řádově vzorů (viz. kapitoly 2.1 a 3).

## 2. Tvorba rozhodovacího stromu

Rozhodovací strom je stupňovitá struktura složená z uzlů, které jsou uspořádány do stromu začínajícího v jediném kořeni. Každý uzel kromě kořene a listů obsahuje

---

<sup>3</sup> Představme si například situaci, kdy máme dva obrázky 5x5 pixelů. Necht' připouštíme 6 stupňů šedi (0 zastupuje bílou, 5 černou). První obrázek obsahuje jediný, zcela černý pixel na souřadnicích [2,2], druhý obsahuje dva šedé pixely stupně 3 na souřadnicích [1,3] a [3,1]. Použijeme-li geometrické momenty, zjistíme, že pro oba obrázky jsou momenty  $M_{00}$ ,  $M_{01}$ ,  $M_{10}$  zcela stejné, i když obrázky si opticky vůbec podobné nejsou.

souřadnice  $i, j$  pro něj rozhodujícího momentu  $M_{ij}$  a interval hodnot rozhodujícího momentu svého rodiče. Kořen obsahuje pouze souřadnice rozhodujícího momentu. Listy obsahují pouze jméno jednoho ze vzorů. Vytvořit vhodný rozhodovací strom lze nepřehledným množstvím metod, z nichž některé budou probrány později. Principiálně se snažíme, aby v každém uzlu byl vybrán takový rozhodovací moment jehož hodnoty u všech potomků jsou od sebe navzájem co nejvíce vzdálené.

### 3. Zpracování porovnávaných obrázků

Zpracování probíhá zcela obdobně jako u zpracování vzorů. Opět je potřeba u všech obrázků určit potřebný počet momentů a ty si uložit pro další využití.

### 4. Klasifikace porovnávaných obrázků

Nyní již máme k dispozici rozhodovací strom i momenty jednotlivých obrázků a můžeme zjistit, kterým vzorům odpovídají které porovnávané obrázky. Pro každý z porovnávaných obrázků provedeme následující algoritmus:

- 1) Za aktuálně zpracovávaný uzel označíme kořen rozhodovacího stromu.
- 2) Načteme souřadnice rozhodujícího momentu aktuálně zpracovávaného uzlu (nazvěme je  $i$  a  $j$ ).
- 3) Podíváme se na hodnotu momentu se stejnými souřadnicemi porovnávaného obrázku (tedy na  $M_{ij}$ ), kterou jsme si u něj při zpracovávání uložili.
- 4) Pokud je uzel listem, vrátíme název vzoru, který je v něm uložený. Jinak projdeme potomky aktuálně zpracovávaného uzlu a sestoupíme do toho, pro který platí, že hodnota  $M_{ij}$  je elementem jeho intervalu hodnot. Tento uzel se pro nás stává aktuálně zpracovávaným uzlem a pokračujeme krokem 2)

Algoritmus vždy skončí vydáním názvu vzoru. O tomto vzoru pak prohlásíme, že je ze všech známých vzorů z pohledu momentové metody porovnávanému obrázku nejpodobnější.

### 2.3. Historie

Hlavní idea momentů, kterou je v základě popis tvaru křivky s pomocí matematického vyjádření, je známa už několik století. Touto problematikou se zabývá především integrální geometrie, která se snaží křivku popsat pomocí očekávaného počtu jejích průniků s náhodně zvolenou přímkou. Není proto překvapením, že jednu z prvních zmínek o momentech můžeme nalézt právě v Novikoffově pojednání o rozpoznávání vzorů s pomocí integrální geometrie z roku 1962 [3].

Ve stejném roce pak publikoval M.K.Hu první práci zaměřenou přímo na momenty [4]. Hu se zajímal o různé metody popisu dvojdimenzionálních obrazců a v rámci svého výzkumu popsal mimo jiné právě i regulární invariantní momenty. Jednalo se o použití nelineárních kombinací regulárních momentů (které jsou dnes spíše označovány jako momenty geometrické), které se ukázaly jako velmi vhodné díky své odolnosti vůči případné změně velikosti vzorů či jejich deformaci sklopením, rotací, či protažením. Tato raná klasifikace momentů se stala základem pozdější momentové metody a to i přesto, že po ní následovala další vylepšení. Každé vylepšení s sebou ovšem kromě odstranění některého z neduhů geometrických momentů přineslo i nezanedbatelnou komplikaci výpočtu momentů. Mnohé z těchto nových typů momentů jsou popsány později v této práci.

Další významnou práci o momentech publikoval o pár měsíců později F.L.Alt [1]. Ta už je zaměřena na konkrétní praktický úkol – rozpoznání všech písmen abecedy a číslic s využitím momentové metody. Jedná se o první popsané využití momentové metody v praxi. Poměrně uspokojivé výsledky tohoto experimentu zajistily, že se na momentovou metodu nezapomnělo a jistou měrou tak podpořily její další rozvoj.

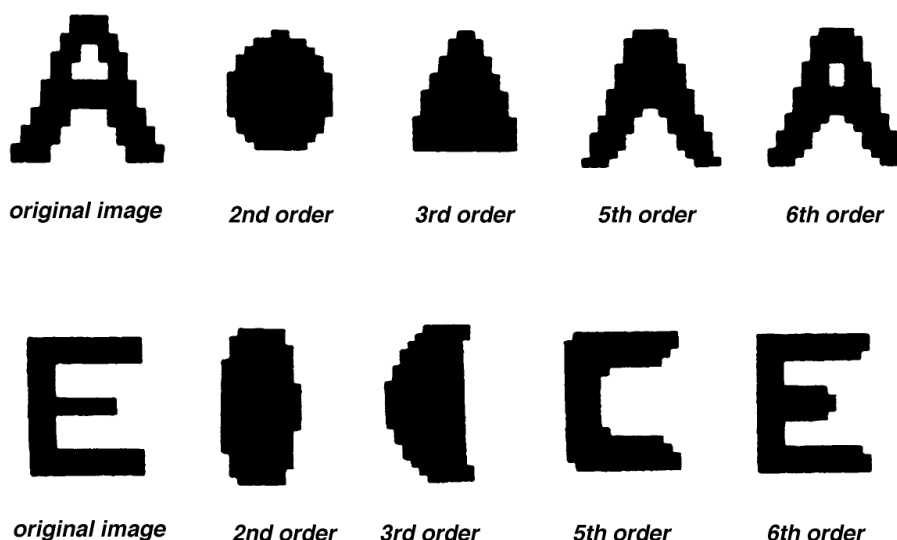
Od doby Huovy práce již uběhlo mnoho času a v průběhu bylo vydáno mnoho publikací více či méně se zabývajících o momenty a momentovou metodu. Mnoho z nich již však není v dnešní době možné dohledat nebo se v nich vyskytují informace se značnou redundancí. Z těch, které jsou k sehnání bych jmenoval práci Ch-H.Teha a R.T.China [2], která se zabývá především různými typy momentů.

Přestože jsou momenty i momentová metoda známy už více jak 40 let, stále nezmizely z povědomí odborné veřejnosti a i dnes můžeme narazit na práce, které se zabývají

zejména konkrétními typy momentů a jejich případnými dalšími vylepšeními. Za všechny jmenujme např. práce Invariance image analysis using modified Zernike moments [6] a Recognition of the blurred image by complex moment invariants [7].

## 2.4. Vlastnosti momentů

Momenty nižších řádů obsahují informace o základních tvarech obrázku, momenty vyšších řádů pak v sobě nesou informace o detailech obrázku. Pokud máme momentů dostatek, je možné pouze z momentů rekonstruovat tvar původního obrázku (Obr 1).



Obr. 1 Rekonstrukce vzoru z momentů<sup>4</sup>

K tomuto účelu tedy lze momenty také použít, ale zpravidla se to nedělá, protože režije na zjištění a zaznamenání většího množství momentů pro každý obrázek je poměrně velká a výsledný rekonstruovaný obrázek je vždy pouze přibližný. To už je lepší obětovat trochu více paměti a použít některý ze standardních formátů uložení obrázku.

Na druhou stranu pro rozhodování, kterému vzoru se porovnáváný obrázek nejvíce blíží, jsou momenty jako stvořené, protože nejenže platí, že podobné obrázky mají velmi

<sup>4</sup> Obrázek převzat z [8].

Úplně vlevo jsou původní vzory, směrem doprava pak rekonstrukce podle všech momentů zmíněného řádu (úplně vpravo jsou tedy rekonstrukce vzoru za použití všech momentů až do šestého řádu, tedy celkem 28 momentů)

podobné momenty, ale za určitých okolností jsou momenty také velmi odolné vůči změnám velikosti a pozice obrázku, zkosení, roztažení či sklopení.

### 2.4.1. Normalizace geometrických momentů

Geometrické momenty samy o sobě jsou, tak jak jsou definovány, přímo použitelné v momentové metodě pro porovnávání obrázků. Pokud ovšem chceme, aby bylo naše porovnávání co nejméně ovlivnitelné již zmiňovanými nepříznivými vlivy jako jsou změna velikosti atd. je dobré momenty normalizovat.

Začneme úpravou, která nám zajistí, že momenty budou invariantní vůči translaci, tedy, že se nezmění, pokud obrázek posuneme. *Gravitačním centrem* obrázku nazveme bod dvojdimenzionálního prostoru určený souřadnicemi  $X = M_{10} / M_{00}$  a  $Y = M_{01} / M_{00}$ . Pokud vezmeme tento bod jako střed naší souřadnicové soustavy, změní se vzorec pro výpočet jednotlivých momentů na  $\bar{M}_{ij} = \sum (x - X)^i \cdot (y - Y)^j$ . Po této úpravě se momenty staly invariantními vůči translaci. Pro vzor  $A$  tedy platí, že  $M_{ij}(A) = M_{ij}(A + \vec{x})$ , kde  $i, j = 2, 3, \dots$  a  $\vec{x} = (a, b)$  je vektor posunutí. Platnost tvrzení ukážeme.

Pro libovolný černý pixel vzoru  $A$  platí, že do  $\bar{M}_{ij}$  přispívá hodnotou  $(x - X)^i \cdot (y - Y)^j$ , kde  $x, y$  jsou souřadnice pixelu a  $X, Y$  jsou souřadnice *gravitačního centra* vzoru. Při posunutí vzoru o vektor  $\vec{x} = (a, b)$  dojde k posunu všech jeho černých pixelů  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$  a zároveň k posunu jeho gravitačního centra  $X' = X + a$ ,  $Y' = Y + b$ . Posunutý vzor  $A + \vec{x}$  pak přispívá do  $\bar{M}_{ij}$  hodnotou  $(x' - X')^i \cdot (y' - Y')^j = (x + a - (X + a))^i \cdot (y + b - (Y + b))^j = (x - X)^i \cdot (y - Y)^j$ , která je shodná s původní, neposunutou hodnotou, tedy hodnota  $\bar{M}_{ij}$  se posunutím nezmění.

Další úprava zajistí, že budou momenty obrázku invariantní vůči změně jeho velikosti a vůči částečné deformaci stlačením či roztažením. Pro momenty druhého řádu upravené dle předchozího pravidla platí  $\bar{M}_{20} = \sum (x - X)^2 = M_{20} - M_{10}^2 / M_{00}$  a obdobně  $\bar{M}_{02} = M_{02} - M_{01}^2 / M_{00}$ . Definujme nyní pomocné rozptyly ve směru x-ové a y-ové osy



jako  $\sigma_x = \sqrt{\bar{M}_{20} / M_{00}}$  a  $\sigma_y = \sqrt{\bar{M}_{02} / M_{00}}$ . Pokud s jejich pomocí normalizujeme souřadnice, získáme  $\tilde{x} = (x - X) / \sigma_x$  a  $\tilde{y} = (y - Y) / \sigma_y$ . Pro momenty vypočtené s použitím nových souřadnic  $\tilde{M}_{ij} = \sum \tilde{x}^i \tilde{y}^j$  pak zřejmě platí, že jsou invariantní vzhledem k částečným deformacím. Pokud navíc ještě vydělíme nově vzniklé momenty základním momentem  $M_{00}$ , získáme i neměnnost vůči změně velikosti obrázku. Momenty vypočtené podle vzorce  $\tilde{M}_{ij} = \sum \tilde{x}^i \tilde{y}^j / M_{00}$  jsou tedy invariantní vůči translaci, změně velikosti a částečné deformaci.

Abychom získali poslední vlastnost, o které jsme se zmínili, tedy neměnnost vůči částečné rotaci, musíme souřadnice ještě dále normalizovat s použitím  $\rho = \sum \tilde{x} \tilde{y} / \sum \tilde{y}^2$ . Souřadnice pak budou  $x = \frac{\tilde{x} - \rho \tilde{y}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$  a  $y = \tilde{y}$ . Ve finálním tvaru jsou

tedy momenty spočítané podle upraveného vzorce  $m_{ij} = \sum x^i y^j / M_{00}$  invariantní vůči translaci, změně velikosti, částečné rotaci i částečné deformaci. Kromě tohoto zisku jsme ovšem také něco ztratili – momenty  $m_{00}, m_{10}, m_{01}, m_{11}, m_{20}, m_{02}$  se staly nadále nepoužitelnými, neboť proces normalizace způsobil, že  $m_{10} = m_{01} = m_{11} = 0$  a  $m_{00} = m_{20} = m_{02} = 1$ .

## 2.4.2. Odolnost vůči šumu

Nedostatečná odolnost vůči šumu tvoří jeden ze zásadních nedostatků použití momentové metody při rozpoznávání vzorů. Neexistuje asi žádná jednoduchá cesta, jak ochránit momenty před vlivem šumu, neboť náhodnost jeho výskytu se dá jen velmi obtížně postihnout. Pokud používáme normalizované momenty, při jejichž počítání byl souřadnicový střed umístěn do středu obrázku, jsou hodnoty jednotlivých momentů velmi nepříznivě ovlivněny především šumem v rohových oblastech. To plyne ze vzorce pro počítání momentů  $m_{ij} = \sum x^i y^j / M_{00}$ , neboť hodnoty souřadnic budou právě v těchto oblastech nejvyšší. Pokud chceme tedy použít momentovou metodu na obrázky obsahující náhodný šum, jeví se jako nejlepší řešení je nejdříve pročistit nějakým „odšumovacím“ filtrem a až poté spočítat jejich momenty.

Taková příprava přitom nemusí být nijak složitá. Pokud jsou obrázky postiženy klasickým náhodným šumem (tedy nahodile je u některých pixelů prohozena bílá/černá), bohatě stačí, když obrázek pixel po pixelu načteme a lokální ložiska inverzních pixelů vyčistíme (tedy procházíme obrázek po částech a pokud je bílý pixel obklopen skoro samými černými, eventuelně černý skoro samými bílými, změním jeho barvu). Touto jednoduchou úpravou se zbavíme rozhozených „špatných“ pixelů především v souvislých bílých či černých oblastech obrázku. Pokud byla hladina šumu přiměřeně nízká, budou momenty spočítané z upraveného obrázku jen málo odlišné od vzoru, na kterém se šum nevyskytoval. Bez tohoto přípravného kroku jsou výsledky použití momentové metody prakticky nepoužitelné, jak ukazují výsledky praktického testování uvedené v kapitole 3.

Pokud bychom přesto chtěli využít momentovou metodu pro obrázky potenciálně ovlivněné šumem bez použití přípravné „odšumovací“ fáze, které momenty bude nejlepší použít? Kvůli odpovědi na tuto otázku byly již v minulosti provedeny experimentální testy a výsledky jsou vcelku zajímavé. Pokud bychom volili z jednotlivých typů momentů, jsou nejodolnější komplexní momenty, hned po nich geometrické momenty, které jsou následovány Zernikeho a rotačními momenty. Nejhuře ve srovnání dopadly Legendreho momenty, jejichž odolnost vůči šumu je opravdu velmi špatná. Celkem nepřekvapivě jsou vůči šumu více odolné momenty nižších řádů, v nichž je uložena informace především o hrubém tvaru obrázku. Čím vyšší je řád momentů, tím více na ně má šum vliv, neboť vyšší momenty v sobě nesou informace hlavně o detailech obrázku, které jsou pochopitelně náhodným šumem ovlivněny mnohem více než jeho základní tvar.

### **2.4.3. Rozhodovací postup, rozhodovací strom a jeho stavba**

Vezměme si jako množinu vzorů všechna písmena klasické abecedy, tedy máme 26 různých vzorových obrázků. U všech obrázků spočítáme normalizované geometrické momenty až do řádu 5 včetně, čímž pro každý vzor dostaneme 15 určujících momentů (ve skutečnosti jich dostaneme 21, ale momenty až do řádu 2 včetně jsou pro rozhodování nepoužitelné, jak bylo ukázáno v kapitole 2.4.1). Pokud nyní vezmeme obrázek, který chceme porovnat se vzory, vyvstává otázka, jak to udělat.

Nejpřímější přístup by zřejmě byl brát hodnoty momentů u jednotlivých vzorů pěkně postupně a říct, že porovnávaný obrázek je shodný se vzorem, pakliže se jejich momenty vzájemně nejvíce podobají. Co to ovšem znamená, že se momenty nejvíce podobají? Odpověď na tuto otázku není vůbec přímočará a pokud bychom k problému chtěli přistupovat tímto způsobem, zjistili bychom, že pokusy odpovědět na ni vyvolávají jen další otázky. Zkusme tedy problém uchopit jinak.

Představme si nyní momenty nejen jako čísla, ale jako souřadnice v prostoru. Máme k dispozici 15 určujících momentů, necht' jsou tedy jednotlivé vzory body patnáctidimenzionálního prostoru a každý moment tvoří jednu ze souřadnic tohoto prostoru. Máme tedy před sebou prostor v němž je umístěno všech 26 známých vzorů. Uvažme funkci  $F(\vec{x})$  kde  $\vec{x} = (m_{30}, m_{21}, m_{12}, \dots, m_{14}, m_{05})$ , která pro zadaný obrázek vrátí číslo reprezentující jeho umístění v daném prostoru a pro niž platí  $F(\vec{x}) = F(\vec{x})$  pro  $\vec{x} = \vec{x}$ ,  $F(\vec{x}) \neq F(\vec{y})$  pro  $\vec{x} \neq \vec{y}$  a pro  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  blízké jsou i hodnoty  $F(\vec{x})$  a  $F(\vec{y})$  blízké. O obrázku  $o$  prohlásíme, že je nejpodobnější vzoru  $v$  pokud platí  $|F(o) - F(v)| < |F(o) - F(p)|$  pro libovolný jiný známý vzor  $p$ . Pokud vezmeme více obrázků reprezentujících stejný vzor (řekněme písmeno A), pak hodnoty  $F(A)$  tvoří distribuční funkci. Jakmile máme k dispozici distribuční funkci, můžeme k problému začít přistupovat statisticky. Bližší informace o statistickém řešení tohoto problému lze nalézt v [5].

Vraťme se nyní ještě k situaci, kdy máme 26 známých vzorů umístěno v patnáctidimenzionálním prostoru. V předchozím případě jsme hledali funkci  $F(\vec{x})$  s netriviálními požadavky, jejíž nalezení nemusí být vůbec lehké. Chceme-li se hledání takové funkce vyhnout, můžeme zkusit jinou metodu. Zaved'me na daném prostoru metriku  $M(\vec{x}, \vec{y})$  tak, že platí  $M(x, x) = 0$  a  $M(x, y) > 0$ . Následně zvolme delta hranici tak, že  $x = y$  pokud  $M(x, y) < \delta$ . Tento přístup nám poskytuje možnost zavrhnout variantu, že porovnávaný obrázek je podobný některému ze vzorů, na druhou stranu zase nastává problém jak zvolit vhodné  $\delta$ .

Pojďme teď na náš problém ještě z trochu jiného konce. Nebudeme se snažit zjistit, kterému vzoru leží porovnávaný obrázek nejbližší, ale nejprve se zaměříme na samotné

vzory. Jak již bylo uvedeno, tvoří tyto vzory 26 bodů patnáctidimenzionálního prostoru. Otázka nyní zní, zda by se nedal tento prostor rozdělit na více podprostorů, které by obsahovaly nenulové množství vzorů a byly od sebe vzájemně vzdálené? Lidštěji řečeno, nelze podle nějakého pravidla rozdělit skupinu všech 26 vzorů na více podskupin? Povede-li se rozdělit vzory na více skupin a každou z těchto skupin na více skupin atd. tak se postupně dobereme až k jednoprvkovým skupinám. Pokud pak porovnávaný obrázek skončí v jedné z těchto skupin, je nejpodobnější vzoru, se kterým tuto skupinu sdílí. Vezmeme tedy některý moment (nejlépe s co nejnižším řádem, neboť ty nesou zásadnější informaci) a podle jeho hodnot rozdělme skupinu vzorů na podskupiny. Následně vezmeme v každé podskupině další z doposavad nevyužitých momentů a rozdělíme podskupinu na další podskupiny. Takto pokračujeme až do získání jednoprvkových skupin.

Jak vidíme, naše poslední řešení se částečně podobá řešení, které jsme uvažovali jako první. Narozdíl od onoho přímého řešení ovšem postupujeme postupně a pro každou skupinu se můžeme rozhodovat individuálně. Problém se tak rozčlenil na množinu dílčích podproblémů, které jsou řešitelné o poznání jednodušeji. Porovnávaný obrázek přichází na řadu až poté, co máme vytvořen systematický rozhodovací strom a v této fázi už je vše zcela automatické a není potřeba nic dalšího řešit. Jak je vidět, toto řešení je vcelku přímé i jednoduše automatizovatelné, stále však zbývá vyřešit ony dílčí problémy, které se objevily v průběhu stavby stromu. Z těch jsou hlavní a důležité dva: Který moment pro danou skupinu vzorů použít jako rozhodující? Na kolik dalších podskupin danou skupinu rozdělit? Na tyto otázky nelze jednoznačně odpovědět, neboť velmi závisí na množství a typu použitých vzorů. Experimentálně jsem zkusil generovat několik různých stromů s různými parametry nad několika skupinami vzorů, výsledky a porovnání jsou k dispozici v kapitole 3.

Závěrem k tomuto podtématu bych ještě rád podotknul, že metoda rozhodovacího stromu mi sice přišla vhodná a prakticky použitelná, neodvážil bych se však v žádném případě tvrdit, že je skutečně tím nejvhodnějším ze všech přístupů.

## 2.5. Shrnutí

V této kapitole jsem se snažil seznámit čtenáře s momentovou metodou jako celkem, s tím, k čemu se hodí a jaké jsou její limity a možnosti. Zároveň jsem se snažil přiblížit její základní části a možné přístupy, jak je řešit. Souhrnně se dá říci, že momentová metoda je nevhodná pro uchovávání informací o obrázku pro jeho následnou rekonstrukci a není příliš vhodná pro případy, kdy se mezi obrázky, které chceme porovnávat, objevují i obrázky více ovlivněné šumem. Naopak pro případy, kdy máme známou množinu vzorů a na vstupu pro porovnávání očekáváme pouze obrázky vstupům hodně podobné či vzniklé přímo ze vzorů nějakou jejich částečnou translací, rotací či deformací je momentová metoda poměrně snadno implementovatelným řešením s očekávanými dobrými výsledky.

Jak jsem se také snažil ukázat, není momentová metoda něčím zastaralým a nepoužitelným. Naopak poskytuje značnou volnost v přístupu k jednotlivým svým částem a variabilitu nastavení mnoha parametrů. Díky tomu má také velký potenciál pro testování jednotlivých praktických případů, na kterých se teprve ukáže, jestli je pro daný typ vstupních dat dostatečně vhodná.

### **3. Praktická část – testování na příkladech**

V teoretické části jsem popsal různé aspekty související s momentovou metodou a jejich předpokládané praktické důsledky. Připravil jsem několik testovacích skupin obrázků na nichž se pokusím doložit či vyvrátit pravdivost teoretických tvrzení. Díky tomu, že doprovodný program vznikl z jednoduché implementace metody postupným přidáváním dalších možností nastavení a zavrhováním možností, které se ukázaly jako neperspektivní, lze různé mezifáze programu použít jako podklad pro praktické závěry o použitelnosti momentové metody. Program poskytuje široký výběr nastavení - od velmi jednoduché implementace zcela nenormalizovaných momentů s ručním návrhem rozhodovacího stromu až po poměrně komplexní řešení s normalizovanými momenty a automatickou stavbou stromu, již lze nastavením různých parametrů značně modifikovat.

I přesto nelze úplně všechny z následujících praktických ukázek na přiloženém výsledném programu otestovat, neboť ten se snaží být optimálním použitelným návrhem a mnohé jeho části byly ve vývoji upraveny či přepracovány. Podle mého názoru však každý z následujících příkladů trefně dokumentuje důležité praktické aspekty momentové metody a je tak potenciálně užitečný (byť třeba jen k tomu, aby čtenář věděl, jak momentovou metodu jistě neimplementovat či nepoužívat).

Aby příklady měly nějaký řád a systém, rozhodl jsem se je řadit chronologicky s tím, jak se postupně vyvíjel program. Začnu tedy od naivní a velmi přímé implementace a postupně rozdělím příklady do dvou hlavních směrů. První směr bude zaměřen na normalizaci a úpravy momentů a druhý se bude zabývat automatizací stavby rozhodovacího stromu.

#### **Obecně platné poznámky**

Jako vzory i porovnávané obrázky jsou použity obrázky ve formátu gif, standardizované velikosti 100x100 pixelů. Pro potřeby souřadnic jsou adresovány oblasti velikosti právě 1 pixel a obrázek je umístěn do jednotkového čtverce.

Z praktického hlediska je užitečné mít k dispozici nejen všechny momenty až do nějakého řádu, ale také několik momentů vyšších řádů (např. aby se ukázalo, jak se změni vlastnosti rozhodovacího stromu, pokud použijeme při stavbě jak momenty nižších, tak i vyšších řádů). Počítat a ukládat kvůli tomu všechny momenty až do nějakého vyššího řádu je však značně nepraktické. Proto v příkladech využívám označení „průměrný řád“.

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $M_{00}$ | $M_{01}$ | $M_{02}$ | $M_{03}$ |
| $M_{10}$ | $M_{11}$ | $M_{12}$ | $M_{13}$ |
| $M_{20}$ | $M_{21}$ | $M_{22}$ | $M_{23}$ |
| $M_{30}$ | $M_{31}$ | $M_{32}$ | $M_{33}$ |

Uspořádáme-li momenty do čtvercové matice tak, že moment  $M_{ij}$  se nachází v  $i$ -tém řádku a

**Obr. 2 Matice momentů**

$j$ -tém sloupci (číslujeme od 0), pak tvrzení, že máme k dispozici momenty průměrného řádu  $n$  znamená, že máme k dispozici všechny momenty, které se nacházejí v čtvercové matici dimenze  $n$  (viz. Obr. 2)<sup>5</sup>.

Při odkazování na vzory nebo porovnávané obrázky je použito postupné číslování odshora dolů a zleva doprava<sup>6</sup>.

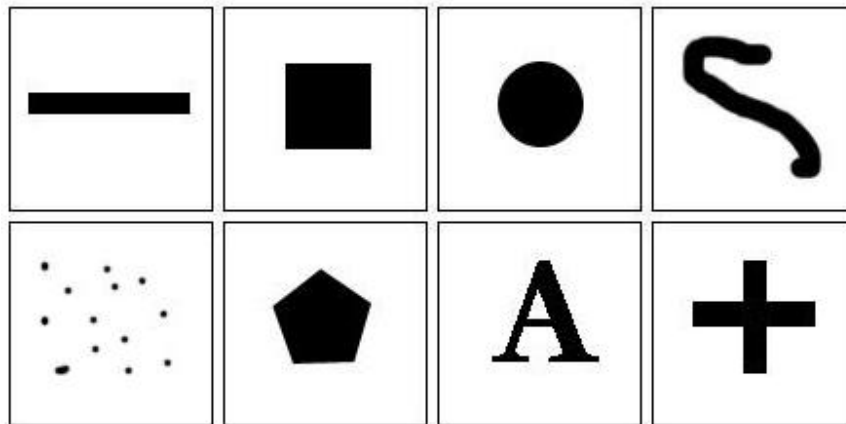
### Příklad 1. Přímá cesta

Na začátek jsem vyzkoušel ten úplně nejpřímější přístup a implementoval jsem zcela nenormalizované geometrické momenty, spočítané podle základní aproximace uvedené v kapitole 2.3., tedy  $M_{ij} = \sum_A x^i y^j$ . Rozhodovací strom jsem postavil ručně podle logického postupu – začínám u momentů nízkých řádů a hledám velké mezery mezi jednotlivými hodnotami, které by mi pomohly vzory rozdělit na skupiny. Díky malému množství vzorů stačí malé množství momentů, použil jsem tedy momenty průměrného řádu 4.

<sup>5</sup> Bílý obdélník obsahuje momenty průměrného řádu 2, světle šedý + bílý řádu 3 a tmavě šedý + světle šedý + bílý řádu 4

<sup>6</sup> Pokud se podíváme na Obr. 3, je vzorem číslo 1 myšlena vodorovná čára v levém horním rohu obrázku, vzor číslo 2 je čtverec, vzor číslo 3 kruh, vzor číslo 6 pak pětiúhelník atd.

**Znamé vzory:**



**Obr. 3** Výběr několika rozdílných tvarů

**Hodnoty momentů:**

| Vzor 1  |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0     | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 913.0 | 438.2 | 211.3 | 102.3 |
| 1       | 456.5 | 219.1 | 105.6 | 51.1  |
| 2       | 280.7 | 134.7 | 64.9  | 31.4  |
| 3       | 192.7 | 92.5  | 44.6  | 21.6  |

| Vzor 5  |       |       |       |      |
|---------|-------|-------|-------|------|
| M [i,j] | 0     | 1     | 2     | 3    |
| 0       | 478.0 | 228.1 | 126.6 | 77.2 |
| 1       | 211.6 | 103.7 | 58.2  | 35.6 |
| 2       | 114.2 | 57.1  | 32.3  | 19.8 |
| 3       | 69.4  | 35.4  | 20.2  | 12.5 |

| Vzor 2  |        |       |       |       |
|---------|--------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0      | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 1936.0 | 919.6 | 468.0 | 252.0 |
| 1       | 958.3  | 455.2 | 231.7 | 124.7 |
| 2       | 505.6  | 240.2 | 122.2 | 65.8  |
| 3       | 281.2  | 133.6 | 68.0  | 36.6  |

| Vzor 6  |        |       |       |       |
|---------|--------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0      | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 1773.0 | 858.9 | 441.4 | 238.4 |
| 1       | 878.0  | 425.4 | 218.7 | 118.2 |
| 2       | 460.2  | 223.1 | 114.6 | 61.8  |
| 3       | 253.1  | 122.7 | 63.0  | 33.9  |

| Vzor 3  |        |       |       |       |
|---------|--------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0      | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 1576.0 | 748.6 | 375.4 | 197.1 |
| 1       | 795.9  | 378.0 | 189.6 | 99.5  |
| 2       | 421.7  | 200.3 | 100.4 | 52.6  |
| 3       | 232.9  | 110.6 | 55.3  | 28.9  |

| Vzor 7  |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0     | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 951.0 | 457.3 | 239.9 | 134.0 |
| 1       | 495.7 | 239.8 | 126.4 | 70.8  |
| 2       | 270.6 | 133.0 | 70.9  | 40.1  |
| 3       | 153.4 | 77.0  | 41.8  | 23.9  |

| Vzor 4  |        |       |       |       |
|---------|--------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0      | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 1960.0 | 832.6 | 436.8 | 261.2 |
| 1       | 914.4  | 452.8 | 265.6 | 170.9 |
| 2       | 508.7  | 281.6 | 177.0 | 118.8 |
| 3       | 316.0  | 188.7 | 123.9 | 85.4  |

| Vzor 8  |        |       |       |       |
|---------|--------|-------|-------|-------|
| M [i,j] | 0      | 1     | 2     | 3     |
| 0       | 1359.0 | 608.4 | 292.9 | 149.9 |
| 1       | 668.6  | 299.4 | 144.2 | 73.8  |
| 2       | 356.7  | 159.5 | 76.4  | 38.8  |
| 3       | 202.6  | 90.4  | 42.9  | 21.5  |

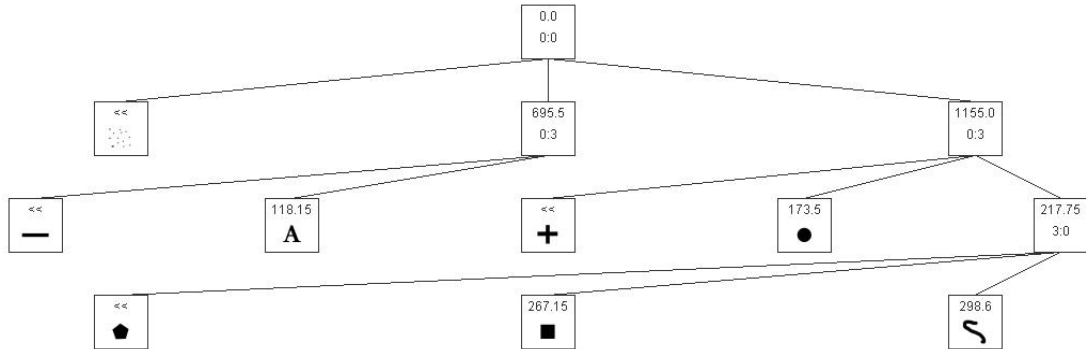
**tabulka 1 – Nenormalizované momenty vzorů z Obr. 3**

**Rozhodovací strom:**

Z hodnot momentů vidíme, že dle momentu  $M_{00}$  lze skupinu vzorů pěkně rozdělit na 3 části – v první bude osamocený obrázek 5, jehož hodnota 478 je o mnoho vzdálena ostatním, ve druhé pak budou obrázky 7 a 1 s hodnotou kolem 900 a v poslední bude



zbytek. Obdobnými úvahami rozdělíme nově vzniklé skupiny i dále a vznikne nám například takovýto strom (Obr. 4).



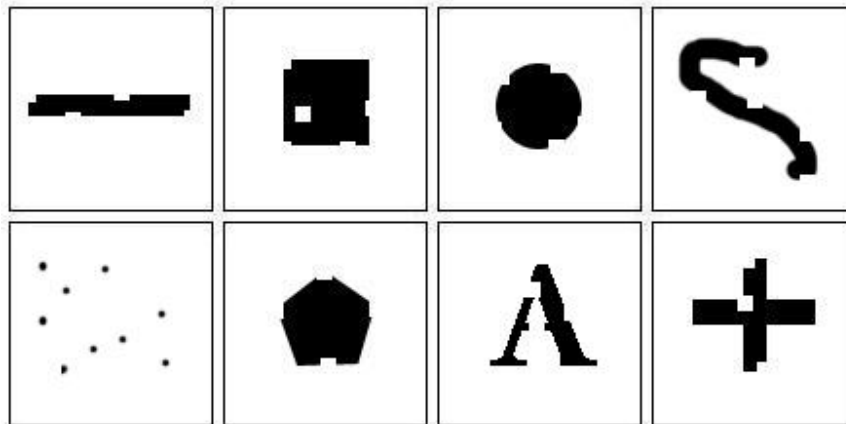
Obr. 4 Rozhodovací strom

### Porovnávání:

Pokud teď použijeme jako obrázky pro porovnávání některý ze skupiny vzorů, program jej bez problémů pozná. Je však praktické používat momentovou metodu, když obdobného výsledku bychom dosáhli prostým porovnáním obrázků bod po bodu? Odpověď zní ano, ale pouze v případě, že obrázků, které chceme porovnávat je více než jeden (řádově alespoň tolik jako vzorů). Čím více je obrázků pro porovnání, tím více ušetříme použitím momentové metody, protože momenty stačí spočítat jen jedenkrát pro všechny vzory i porovnávané obrázky a vzájemných porovnání momentů při průchodu stromem je řádově o mnoho méně než kdybychom porovnávali jednotlivé pixely všech obrázků.

Zkusme se tedy blíže podívat na přednosti momentové metody a porovnávané obrázky trochu upravme...vybere metoda i potom správný vzor? Jako první úpravu obrázky trochu „okousejme“, jako druhou jim pak naopak po obvodu něco „přidejme“ a jako třetí zkusme generovat trochu náhodného šumu.

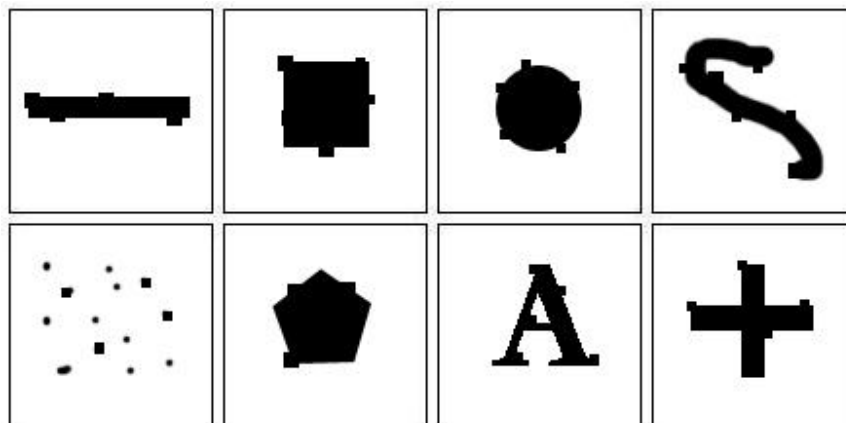
### Porovnávací sada 1:



Obr. 5 Vzory ovlivněné „ukrajováním“ částí u okrajů

Při použití námi zvoleného rozhodovacího stromu jsou všechny obrázky přiřazeny svým skutečným vzorům až na obrázek číslo 4 (Obr. 5). „Ukrajovací“ zásahy v jeho případě byly tak velké, že se hodnoty jeho momentů příliš zmenšily a program ho mylně přiřadil ke vzoru číslo 2 (Obr. 4).

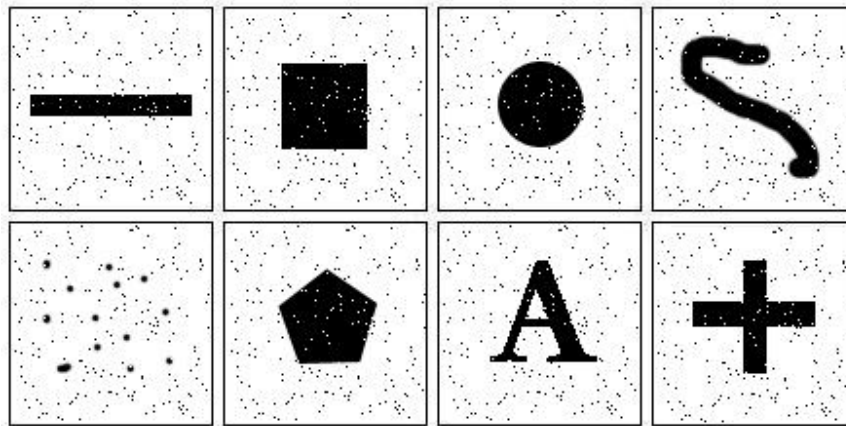
### Porovnávací sada 2:



Obr. 6 Vzory ovlivněné přidáním černých výběžků u okrajů

S použitím námi zvoleného rozhodovacího stromu byly v tomto případě všechny obrázky přiřazeny svým skutečným vzorům (Obr. 6).

### Porovnávací sada 3:



Obr. 7 Vzory ovlivněné náhodným šumem

I přesto, že opticky pro člověka je šum velmi drobný a hlavní vzory jsou snadno rozpoznatelné, momentová metoda už si s takovýmto šumem poradit neodkáže a ke správným vzorům přiřadila pouze 3 z 8 obrázků (Obr. 7). Je to způsobeno hlavně tím, že zatímco člověk vnímá obrázek jako celek, momenty jsou počítány postupně z jednotlivých pixelů a výsledná informace (hodnota momentu) je pak dávana dohromady z těchto hodnot.

#### Závěr:

Jak je patrné z předvedených příkladů, je momentová metoda i v této základní verzi vhodným prostředkem pro rozpoznávání obrazových vzorů, které jsou od sebe navzájem dostatečně odlišné. Drobná deformace okrajů vzorů nemá na úspěšnost metody velký vliv, narozdíl od náhodného šumu, který se ukázal pro metodu skutečně smrtícím. Značné omezení tohoto přístupu je ovšem v přípustném počtu vzorů a také v logické schopnosti člověka vytvořit rozumný rozhodovací strom. V případě, že by vzorů bylo více (řádově desítky), bylo by už skutečným uměním ručně sestavit rozumný rozhodovací strom. Další komplikace by také nastaly v případě, že by porovnávané obrázky nebyly situovány do středu bílé plochy čtverce, či měly odlišnou velikost (i když jinak stejný tvar). Tyto nedostatky budou blíže prozkoumány v následujících příkladech.

### **Doporučení pro praxi:**

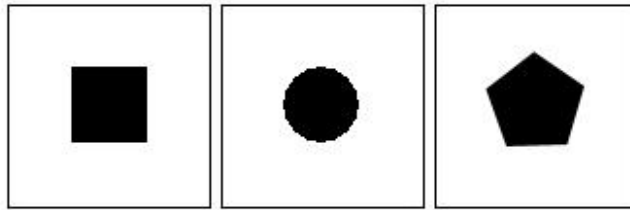
Tuto verzi momentové metody je praktické použít v případech, kdy máme malé množství vzorů (řádově jednotky) a tyto vzory se navzájem na pohled liší, porovnávané obrázky mají stejnou velikost jako vzory a mohou být po okrajích částečně deformovány.

## **Momenty a normalizace**

### **Příklad 2. Jak na velikost a posunutí**

Jedním z aspektů lidského rozpoznávání vzorů je naše schopnost klasifikovat vzor nezávisle na velikosti a poloze. Pokud budeme mít vedle sebe čtverec o rozměrech 10x10cm a čtverec o rozměrech 1x1m, pořád jsme schopní říct, že se jedná o čtverec. Pokud budeme mít dvě velká plátna a v jednom z nich bude čtverec v levém dolním rohu a ve druhém v pravém horním rohu, opět jsme schopni bezpečně určit, že jde o čtverec a ne např. o kruh. Momentová metoda v základní implementaci, jak byla uvedena v příkladu 1., tohoto určení schopna není. Je to hlavně kvůli tomu, že poměr počtu černých pixelů ku všem pixelům plochy se při změně velikosti vzoru na stejné zobrazovací ploše značně změní a tím se změní i hodnota všech momentů obrázku. Obdobně při posunutí vzoru na pozadí ve směru zvyšujících se souřadnic hodnoty momentů rapidně vzrůstají a opačným směrem zase klesají. V některých případech může být tato vlastnost žádána a užitečná (např. jsou-li si dva vzory tvarově velmi podobné, ale značně se liší ve velikosti či umístění a my je chceme brát jako různé), v jiných je naopak na obtíž. Uvažme druhý případ. Teorie nám říká, že při použití normalizovaných momentů spočítaných podle vzorce  $\tilde{M}_{ij} = \sum \tilde{x}^i \tilde{y}^j / M_{00}$  z kapitoly 2.3 momentová metoda nebude brát ohled na posunutí či změnu velikosti. Ověřme to.

Znamé vzory:



Obr. 8 Tři geometrické vzory

Hodnoty momentů:

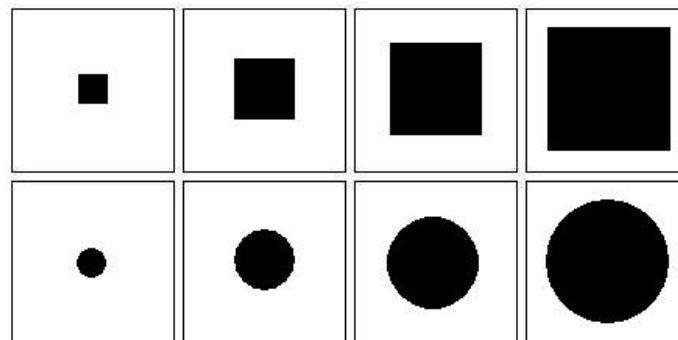
| Vzor 1  |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| M [i,j] | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| 0       |     |     |     | 0.0 | 1.8 |
| 1       |     |     | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2       |     | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.8 |
| 3       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4       | 1.8 | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.2 |

| Vzor 2  |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| M [i,j] | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| 0       |     |     |     | 0.0 | 2.0 |
| 1       |     |     | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2       |     | 0.0 | 0.7 | 0.0 | 1.0 |
| 3       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4       | 2.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.2 |

| Vzor 3  |     |      |     |     |     |
|---------|-----|------|-----|-----|-----|
| M [i,j] | 0   | 1    | 2   | 3   | 4   |
| 0       |     |      |     | 0.0 | 2.0 |
| 1       |     |      | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2       |     | 0.0  | 0.7 | 0.2 | 1.1 |
| 3       | 0.0 | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4       | 2.0 | -0.2 | 1.1 | 0.2 | 1.3 |

tabulka 2 Normalizované momenty geometrických vzorů z Obr. 8

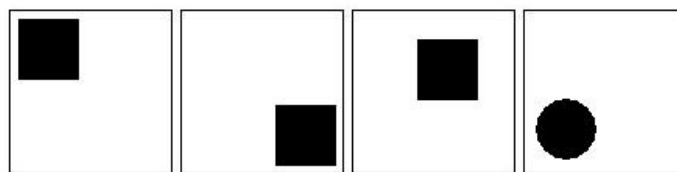
Porovnávací sada 1:



Obr. 9 Postupná změna velikosti dvou geometrických vzorů

Zkoumáním hodnot momentů obrázků 1-4 (Obr. 9) zjistíme, že jsou všechny rovny hodnotám momentů čtvercového vzoru (Obr. 8). Obdobně všechny hodnoty momentů 5-8 (Obr. 9) jsou rovny hodnotám kruhového vzoru (Obr. 8). Při zkoumání hodnot momentů vyšších řádů narazíme už na odchylky, ale ty jsou stále velmi mírné. Pětiúhelník byl mezi vzory (Obr. 8) dosazen pouze pro porovnání, zda se některý z obrázků nepřikloní k němu, jako k mezičlánku mezi čtvercem a kruhem, k čemuž ovšem vzhledem k hodnotám momentů jistě nedojde. Zároveň je zřejmé, že v této situaci lze sestavit takřka jakýkoliv rozhodovací strom založený na nenulových hodnotách momentů. Velké množství nulových hodnot pak pramení z toho, že jsou obrázky symetrické. Při použití nesymetrického obrázku, jak je vidět na příkladu pětiúhelníku, bude nulových hodnot momentů o poznání méně.

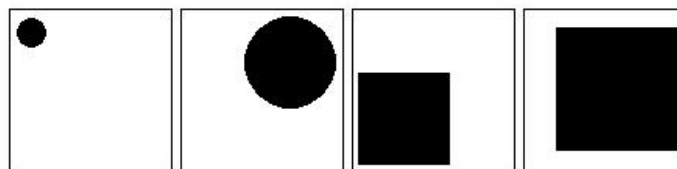
### Porovnávací sada 2:



Obr. 10 Geometrické vzory ovlivněné posunutím

Obdobně jako v předchozím případě s obrázky změněné velikosti, i v tomto případě byl ke všem obrázkům neomylně určen správný vzor, neboť hodnoty normalizovaných momentů obrázků 1-3 (Obr. 10) přesně odpovídají hodnotám vzoru 1 (Obr. 8), u obrázku 4 (Obr. 10) pak odpovídají vzoru 2 (Obr. 8).

### Porovnávací sada 3:



Obr. 11 Geometrické vzory ovlivněné současným posunutím a změnou velikosti

Stejně jako v předchozích dvou případech, i v tomto (Obr. 8), kdy je změněna jak velikost tak pozice obrázku, našla metoda bez nejmenších problémů odpovídající vzor.

**Závěr:**

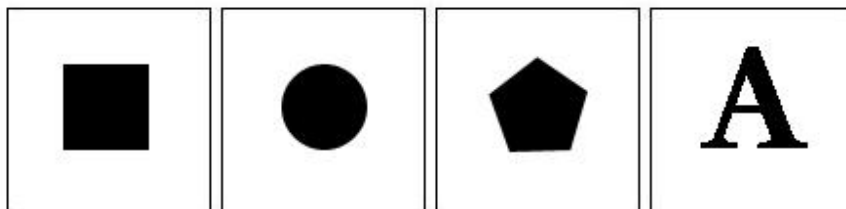
Teoretické předpoklady invariance normalizovaných momentů vůči posunutí i změně velikosti se beze zbytku potvrdily. Metoda je na jejich základě schopna rozhodnout správně i pokud je posunutí či změna velikosti relativně velká, jak je pěkně vidět na uvedených případech.

**Doporučení pro praxi:**

Pro případ kdy jsou porovnávány obrázky pouze velikostně pozměněné či posunuté vzory je momentová metoda extrémně vhodným rozhodovacím prostředkem. Velký pozor ovšem musíme věnovat hodnotám momentů jednotlivých vzorů, neboť nižší hodnoty momentů mohou být shodné i u na pohled dost odlišných obrázků. V případě, že toto u některých našich vzorů nastane, je potřeba spočítat momenty i vyšších řádů. Stejně tak pokud je vzorů větší množství, je potřeba použít více momentů, protože použitelných normalizovaných momentů nižších řádů je málo, obzvláště u symetrických obrázků.

**Příklad 3. Nástup deformací**

Teorie uvádí, že použijeme-li normalizovanou verzi momentů stejnou jako v příkladu 2, bude metoda odolná i vůči roztahování a smrskávání vzoru. Vzhledem k absolutnímu potvrzení teoretických výsledků z minulého příkladu se dá očekávat, že tomu tak skutečně bude, neboť tyto deformace jsou velmi obdobné změně velikosti se změnou pozice, ovšem tato vlastnost je tak důležitá, že jsem se rozhodl ji vyzkoušet samostatně.

**Známé vzory:**

Obr. 12 Několik známých vzorů

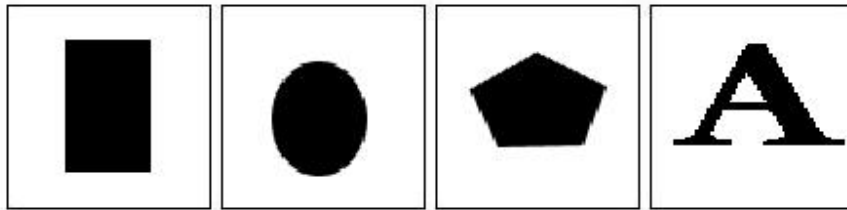
### Hodnoty momentů:

Hodnoty momentů prvních třech obrázků (Obr. 12) jsou shodné jako v příkladu 2 (Obr. 8), hodnoty momentů čtvrtého obrázku jsou:

| Vzor 4 |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|
| M [ij] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0      |      |      |      | -0.2 | 1.9  |
| 1      |      |      | 0.0  | 0.0  | -0.1 |
| 2      |      | 0.8  | 1.1  | 1.2  | 1.7  |
| 3      | -0.5 | -0.5 | -0.6 | -0.8 | -1.0 |
| 4      | 2.5  | 2.7  | 3.5  | 4.4  | 5.9  |

tabulka 3 Normalizované momenty vzoru písmene A

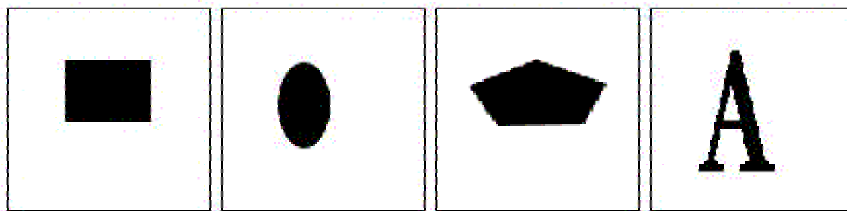
### Porovnávací sada 1:



Obr. 13 Vzory deformované roztažením

Pro první porovnání jsem zvolil roztažené obrázky (Obr. 13). Pokud se podíváme na spočítané momenty této sady, zjistíme, že jsou přesně stejné jako momenty jejich vzorů, proto jejich hodnoty ani zbytečně neuvádím podruhé.

### Porovnávací sada 2:



Obr. 14 Vzory deformované smrštěním i roztažením

Pro toto porovnání jsem zvolil první dva obrázky smrštěné, druhé dva pak ve směru jedné osy roztažené a ve směru druhé osy smrštěné (Obr. 14). Všechny deformace jsou v řádu desítek procent z původního obrázku a přesto se všechny počítané hodnoty momentů opět shodují se svými skutečnými vzory.

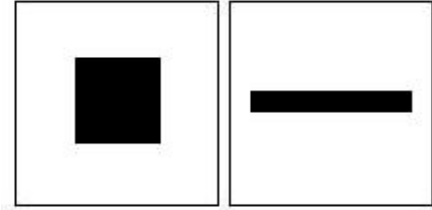


### Závěr:

Není žádným překvapením, že ať už postavíme rozhodovací strom prakticky jakkoliv, momentová metoda nebude mít problémy určit správným vzor i u obrázku poměrně značně deformovaného roztažením či smrštěním.

### Varovný příklad:

Na přiloženém obrázku je vidět dva vzory (Obr. 15), které si z lidského hlediska již příliš podobné nejsou. Protože však druhý vznikl pouze smrštěním



Obr. 15 Vzory se shodnými hodnotami momentů

a roztažením prvního a navíc jsou oba obrázky symetrické, je množství použitelných normalizovaných momentů nižších řádů relativně malé a navíc jsou pro oba vzory shodné.

| Vzor 1  |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| M [i,j] | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| 0       |     |     |     | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.7 |
| 1       |     |     | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2       |     | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.7 |
| 3       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |     |
| 4       | 1.8 | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.2 | 0.0 |     |
| 5       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |     |

| Vzor 2  |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| M [i,j] | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| 0       |     |     |     | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.8 |
| 1       |     |     | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2       |     | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.8 |
| 3       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |     |
| 4       | 1.8 | 0.0 | 1.8 | 0.0 | 3.2 | 0.0 |     |
| 5       | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |     |

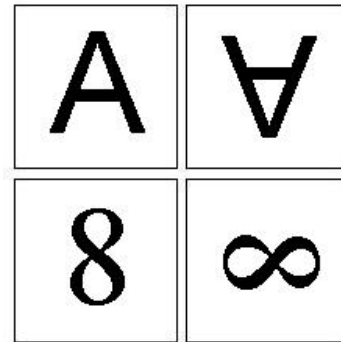
tabulka 4 Normalizované momenty vzorů z Obr. 15

Jak je vidět, první, relativně malá odchylka je k nalezení až u momentu  $M_{06}$ , tedy v šestém řádu. Všechny použitelné momenty nižších řádů jsou shodné. Nenulové momenty vyšších řádů se pak postupně začínají od sebe více a více vzdalovat. Přesto je fakt, že pro odlišení dvou na pohled nepodobných vzorů je potřeba spočítat momenty až do řádu šest, nepříjemný a překvapivý (pro představu u nenormalizovaných momentů by stačil jediný moment  $M_{00}$ ) a je potřeba na něj dát při případné implementaci pozor –

program pro automatickou stavbu rozhodovacího stromu musí být schopen řešit i takovou situaci.

#### Příklad 4. Sklopení a rotace

Další výhodou lidského vnímání je to, že dokážeme určit známý vzor obrázku, i když ten je částečně natočený či sklopený. Typickým příkladem takové úpravy je v praxi asi nejpoužívanější kurzíva u písem. Zároveň ovšem nesmí být rotace či sklopení příliš

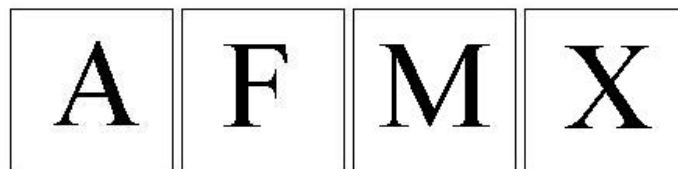


velké, neboť vzor pak v našich očích přechází ve vzor jiný, jak je vidět na přiloženém obrázku (Obr. 16).

Obr. 16 Vzory a rotace

Teoretické předpoklady tvrdí, že normalizované momenty jsou schopné i tuto úpravu přehlédnout a určit správný vzor. Testovací příklad se tak v tomto případě přímo nabízí sám – písmena psaná normálně a písmena psaná kurzívou.

**Znamé vzory:**



Obr. 17 Vzorová písmena

**Hodnoty momentů:**

| Vzor 1  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.2 | 2.0  |
| 1       |      |      | 0.0  | 0.0  | -0.1 |
| 2       |      | 0.8  | 1.1  | 1.3  | 1.9  |
| 3       | -0.7 | -0.7 | -0.9 | -1.2 | -1.6 |
| 4       | 2.6  | 2.9  | 3.7  | 4.9  | 6.8  |

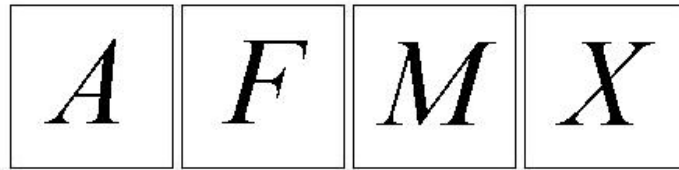
| Vzor 3  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | 0.0  | 1.8  |
| 1       |      |      | 0.0  | 0.0  | 0.0  |
| 2       |      | -0.1 | 1.2  | -0.2 | 2.4  |
| 3       | -0.1 | -0.2 | -0.1 | -0.4 | -0.4 |
| 4       | 1.4  | -0.1 | 2.0  | -0.1 | 4.3  |

| Vzor 2  |     |      |     |      |     |
|---------|-----|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0   | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |     |      |     | 0.2  | 1.9 |
| 1       |     |      | 0.0 | 0.0  | 0.0 |
| 2       |     | -0.5 | 0.9 | -0.7 | 1.4 |
| 3       | 0.7 | -0.3 | 0.4 | -0.3 | 0.4 |
| 4       | 2.7 | -1.8 | 2.4 | -2.5 | 3.6 |

| Vzor 4  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | 0.0  | 1.6  |
| 1       |      |      | 0.0  | -0.1 | -0.1 |
| 2       |      | 0.1  | 1.6  | 0.2  | 2.9  |
| 3       | -0.1 | -0.9 | -0.3 | -1.7 | -0.5 |
| 4       | 2.5  | 0.6  | 4.6  | 1.0  | 9.0  |

tabulka 5 Normalizované momenty vzorů z Obr. 17

### Porovnávací sada 1:



Obr. 18 Písmena s kurzívou

V tomto případě už normalizace nemá tak skvělé výsledky jako u translace či roztažení a v momentech vyšších řádů se začínají objevovat rozdíly. Nejsou však nijak markantní a pořad zůstává dostatek momentů nižších řádů, které, jak se můžeme přesvědčit na následujících hodnotách, jsou ovlivněné relativně málo.

| Vzor 1  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.2 | 1.9  |
| 1       |      |      | -0.1 | 0.0  | -0.2 |
| 2       |      | 0.8  | 1.1  | 1.3  | 1.8  |
| 3       | -0.7 | -0.7 | -0.8 | -1.0 | -1.4 |
| 4       | 2.7  | 3.0  | 3.8  | 4.8  | 6.4  |

| Vzor 3  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | 0.0  | 1.8  |
| 1       |      |      | 0.0  | 0.0  | -0.1 |
| 2       |      | -0.2 | 1.2  | -0.3 | 2.4  |
| 3       | -0.1 | -0.1 | -0.2 | -0.2 | -0.5 |
| 4       | 1.4  | -0.2 | 1.9  | -0.4 | 4.1  |

| Vzor 2  |     |      |     |      |     |
|---------|-----|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0   | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |     |      |     | 0.2  | 1.9 |
| 1       |     |      | 0.0 | -0.1 | 0.1 |
| 2       |     | -0.6 | 1.0 | -0.9 | 1.6 |
| 3       | 0.9 | -0.5 | 0.8 | -0.8 | 1.1 |
| 4       | 2.9 | -2.2 | 3.1 | -3.5 | 4.8 |

| Vzor 4  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | 0.0  | 1.6  |
| 1       |      |      | 0.0  | -0.1 | 0.0  |
| 2       |      | 0.1  | 1.6  | 0.1  | 2.9  |
| 3       | -0.1 | -0.7 | -0.1 | -1.4 | -0.2 |
| 4       | 2.3  | 0.5  | 4.2  | 0.8  | 8.1  |

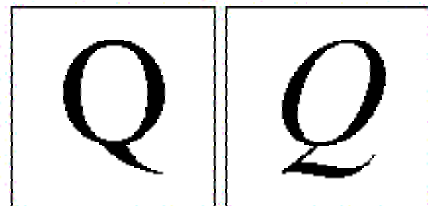
tabulka 6 Normalizované momenty vzorů z Obr. 18

### Závěr:

Schopnost momentů odolávat sklopení a částečné rotaci klesá společně s rostoucím řádem momentů. V nižších řádech (zhruba do pátého) jsou však odchylky minimální a výsledky rozpoznávání dobré. V případě nutnosti využití vyšších řádů a při větším počtu vzorů se však dají očekávat problémy.

### Varovný příklad:

Normalizace momentů způsobující odolnost vůči sklopení a částečné rotaci je čistě geometrickou záležitostí založenou na lineárních transformacích. Kurzíva je u většiny písmen skutečně způsobena takovou transformací a pak nenastávají problémy, najdou se však i výjimky. Na obrázku vidíme jednu z nich (Obr. 19).



Obr. 19 Písmeno Q a jeho kurzíva

Bližším pohledem na momenty těchto dvou obrázků zjistíme, že odchylky se objevují již v některých momentech nižších řádů, na což je při praktické implementaci potřeba dávat dobrý pozor. Kdybychom například v uzlu rozhodovacího stromu postaveného nad celou abecedou zvolili jako rozhodovací moment  $M_{04}$ ,  $Q$  by bylo velmi pravděpodobně přiřazeno jinému vzoru než  $Q$ .

| Vzor 1  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.1  | 2.0 |
| 1       |      |      | 0.1 | 0.1  | 0.4 |
| 2       |      | -0.2 | 0.5 | -0.1 | 0.8 |
| 3       | -0.1 | -0.1 | 0.1 | 0.0  | 0.3 |
| 4       | 1.4  | -0.3 | 0.5 | -0.1 | 0.7 |

| Vzor 2  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.1  | 1.8 |
| 1       |      |      | 0.1 | 0.0  | 0.2 |
| 2       |      | -0.2 | 0.6 | -0.1 | 1.0 |
| 3       | -0.1 | 0.0  | 0.1 | 0.1  | 0.3 |
| 4       | 1.4  | -0.4 | 0.7 | -0.1 | 1.0 |

tabulka 7 Normalizované momenty vzorů z Obr. 19

## Rozhodovací stromy

Vytvořit rozhodovací strom automaticky není nijak extrémně obtížný úkol, stačí prohledávat hodnoty momentů všech vzorů postupně a hledat větší mezery, podle nichž by se dala skupina momentů rozdělit na více skupin. K tomuto rozdělování však lze přistupovat různě, v závislosti na tom, jakých parametrů stromu chceme dosáhnout (hloubka, počet potomků v uzlech, řády momentů v jednotlivých hladinách atp.). Pojdme se tedy podívat na pár příkladů a vyzkoušet, který přístup se jak osvědčí.

### Příklad 5. Hloubka nebo šířka

Příklad se zaměřuje na rozdíl mezi hlubokým a širokým stromem, ostatní parametry jsou voleny pro všechny stromy stejně, aby pokud možno neovlivnily výsledek – všechny stromy jsou vytvářeny nad normalizovanými momenty průměrného řádu 5 s postupným výběrem rozhodovacích momentů podle velikosti mezer nezávisle na řádu. Příklad zároveň testuje využitelnost momentové metody na znaky psané rukou.

## Znamé vzory:



Obr. 20 Několik vybraných japonských znaků kanji

Vzory byly zvoleny tak, aby tvořily dvě skupiny, z nichž každá má specifický základ. U vzorů 1-5 se jedná o svislou čáru uprostřed, u vzorů 6-9 pak o typický stříškovitý tvar (Obr 20).

## Hodnoty momentů:

| Vzor 1  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.3  | 2.9 |
| 1       |      |      | 0.0 | 0.4  | 0.0 |
| 2       |      | -0.1 | 0.2 | -0.1 | 0.3 |
| 3       | -0.1 | -0.5 | 0.0 | 0.0  | 0.0 |
| 4       | 3.6  | -0.2 | 0.4 | -0.1 | 0.1 |

| Vzor 6  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.5 | 2.3  |
| 1       |      |      | 0.2  | -0.2 | 0.7  |
| 2       |      | 0.6  | 0.9  | 0.7  | 1.5  |
| 3       | -0.7 | -0.6 | -0.7 | -1.0 | -1.1 |
| 4       | 2.3  | 2.2  | 2.7  | 3.3  | 4.4  |

| Vzor 2  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.5  | 3.1 |
| 1       |      |      | 0.1 | 0.3  | 0.3 |
| 2       |      | -0.2 | 0.3 | -0.1 | 0.4 |
| 3       | -0.1 | -0.2 | 0.1 | -0.1 | 0.1 |
| 4       | 2.5  | -0.7 | 0.7 | -0.3 | 0.4 |

| Vzor 7  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.1 | 1.9  |
| 1       |      |      | 0.2  | 0.1  | 0.3  |
| 2       |      | 0.6  | 1.1  | 1.2  | 1.9  |
| 3       | -0.3 | -0.5 | -0.4 | -0.8 | -0.9 |
| 4       | 2.6  | 2.1  | 3.7  | 4.6  | 7.0  |

| Vzor 3  |     |      |      |      |      |
|---------|-----|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |     |      |      | 0.6  | 2.8  |
| 1       |     |      | -0.1 | 0.0  | -0.2 |
| 2       |     | -0.1 | 0.3  | -0.3 | 0.4  |
| 3       | 0.2 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | 0.0  |
| 4       | 3.0 | 0.0  | 0.5  | -0.2 | 0.4  |

| Vzor 8  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.4 | 2.1  |
| 1       |      |      | 0.1  | 0.0  | 0.0  |
| 2       |      | 0.8  | 1.0  | 1.1  | 1.5  |
| 3       | -1.4 | -1.4 | -1.6 | -2.0 | -2.7 |
| 4       | 4.3  | 4.7  | 5.7  | 7.3  | 9.7  |

| Vzor 4  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.5  | 2.1 |
| 1       |      |      | 0.1 | -0.2 | 0.1 |
| 2       |      | -0.6 | 0.8 | -0.6 | 0.8 |
| 3       | -0.3 | 0.3  | 0.1 | -0.2 | 0.4 |
| 4       | 3.2  | -2.4 | 2.4 | -2.1 | 2.1 |

| Vzor 9  |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 0       |      |      |      | -0.4 | 2.0  |
| 1       |      |      | 0.3  | -0.2 | 0.7  |
| 2       |      | 0.8  | 1.0  | 0.9  | 1.5  |
| 3       | -0.9 | -0.8 | -0.7 | -1.0 | -1.0 |
| 4       | 3.2  | 3.3  | 3.9  | 4.5  | 5.7  |

| Vzor 5  |      |      |     |      |     |
|---------|------|------|-----|------|-----|
| M [i,j] | 0    | 1    | 2   | 3    | 4   |
| 0       |      |      |     | 0.7  | 3.0 |
| 1       |      |      | 0.1 | 0.2  | 0.5 |
| 2       |      | -0.2 | 0.2 | 0.0  | 0.2 |
| 3       | -0.1 | -0.3 | 0.0 | 0.0  | 0.0 |
| 4       | 3.5  | -0.3 | 0.3 | -0.1 | 0.1 |

tabulka 8 Normalizované momenty vzorů z Obr. 20

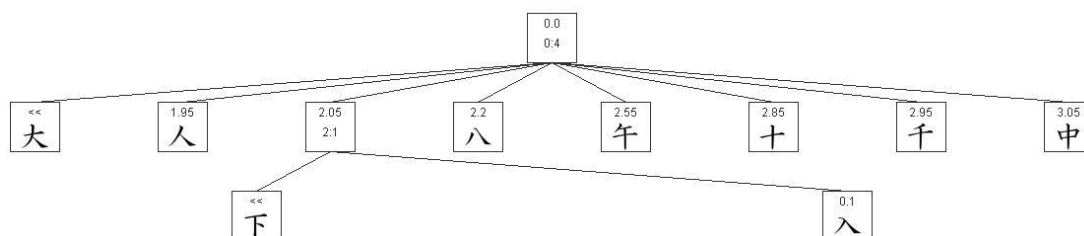
Jak je na hodnotách momentů vidět, rozdíl mezi dvěma skupinami je na některých momentech dobře vidět, na jiných naopak výraznější odlišení nenajdeme. Lidský přístup by zřejmě byl rozdělit nejdříve skupinu na tyto dvě podskupiny, nejlépe asi podle momentu  $M_{03}$  či  $M_{43}$ , a pak pokračovat dál. Nás ale zajímá, jak se s problémem popere automatická stavba stromu.

**Testovací sada:**



Obr. 21 Ručně nakreslené podoby vzorových kanji znaků

**Testovací strom 1:**



Obr. 22 Široký rozhodovací strom

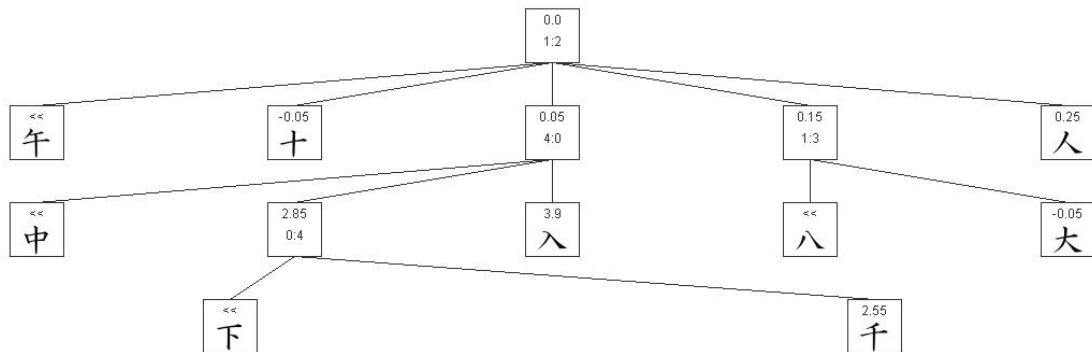
Nejširší zkonstruovatelný strom nad danými vzory (obr. 22). Jak vidíme, momenty jsou skutečně rozlišeny na pomyslné dvě skupiny – vpravo jsou vzory se středovou svislou čarou, vlevo pak se stříškou. Jeden ze vzorů se svislou čarou se zatoulal moc doleva.

Přesně rozpoznané vzory 2/9

Špatně rozpoznané vzory, ale zařazené do správné skupiny 5/7

Špatně rozpoznané vzory, zařazené do špatné skupiny 2/7

### Testovací strom 2:



Obr. 23 Rozhodovací strom s nastaveným počtem 5 potomků v uzlu

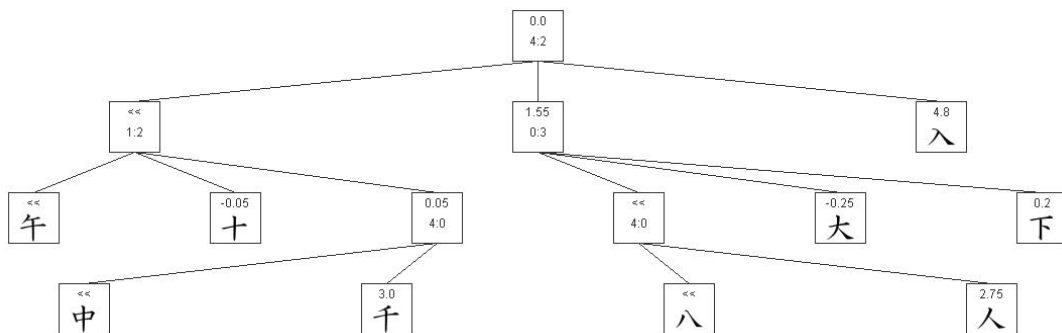
Tento strom vznikne se zadáním parametru počtu potomků kořene na 5 (Obr. 23). Rozdělení na skupiny je opět zřetelné.

Přesně rozpoznané vzory 3/9

Špatně rozpoznané vzory, ale zařazené do správné skupiny 2/6

Špatně rozpoznané vzory, zařazené do špatné skupiny 4/6

### Testovací strom 3:



Obr. 24 Rozhodovací strom s nastaveným počtem 3 potomků v uzlu

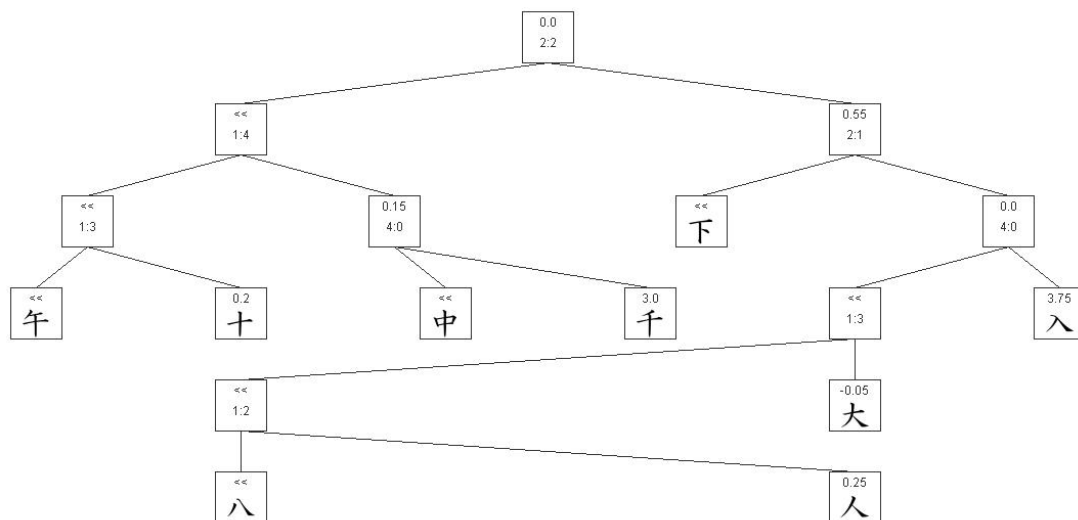
Tento strom vznikne s nastavením počtu potomků na 3 (Obr. 24). Poměrně pěkně je oddělena levá skupina čtyř vzorů se středovou svislou čarou, pátý bohužel utekl moc doprava a tím udělal problém celé skupině. Výsledky jsou přesto skoro perfektní.

Přesně rozpoznané vzory 6/9

Špatně rozpoznané vzory, ale zařazené do správné skupiny 3/3

Špatně rozpoznané vzory, zařazené do špatné skupiny 0/3

#### Testovací strom 4:



Obr. 25 Úzký rozhodovací strom

Nejužší strom, který se dá nad danými vzory vyrobit (Obr. 25). Rozdělení sledovaných dvou skupin je jasně patrné.

Přesně rozpoznané vzory 5/9

Špatně rozpoznané vzory, ale zařazené do správné skupiny 4/4

Špatně rozpoznané vzory, zařazené do špatné skupiny 0/4

#### Závěr:

Z výsledků je patrné, že velmi špatné výsledky dávají první dva stromy. Ani jeden z nich není v praxi použitelný. První strom, který se snaží rozdělit obrázky v jednom kroku, selže u hodně podobných vzorů a při počtu vzorů větším než zhruba 15. Druhý strom bude mít tendenci vytvořit již v prvním kroku příliš mnoho relativně malých skupin a tak se porovnávané obrázky snadno ocitnou při procházení stromu ve špatné větvi.

Naopak velmi uspokojující výsledky poskytují druhé dva stromy. Nejužší strom, který dovoluje v každém uzlu nejvýše dva potomky, může v každém kroku zvolit jednu skutečně velkou mezeru v hodnotách momentů a tím zamezí tomu, aby se porovnávané obrázky ocitly ve špatné větvi při průchodu stromem. Pro praxi je však i tato varianta



nepříliš použitelná, neboť potřeba spočtených momentů roste většinou až na konstantu lineárně s počtem vzorů (teoreticky sice v ideálním případě roste logaritmicky vzhledem k počtu vzorů, v praxi se ovšem na takový ideální případ nedá narazit) a navíc s vyšším řádem momentu klesá jeho rozhodovací síla.

Pro praxi nejvhodnější se tak jeví varianta, ve které má každý uzel srovnatelně či méně potomků než je odmocnina z počtu vzorů. Ta nevyžaduje žádný extrémně velký počet spočítaných momentů a zároveň vykazuje slušné výsledky srovnatelné s nejužším stromem. Dalším testováním jsem došel k závěru, že máme-li dostatečný počet spočítaných momentů, vyplatí se nám mít počet potomků v jednotlivých uzlech ostře menší než je odmocnina z počtu vzorů, dokonce platí pravidlo čím méně, tím lépe (nesmí však být bráno tak doslova, stále je potřeba dávat pozor, aby strom nenarostl do příliš velké hloubky a neztratil tak svou výhodu rychlého porovnání).

### **Příklad 6. Široký kmen a úzké větve či naopak**

Tento příklad se pokusí najít odpověď na otázku, zda je lepší udržovat konstantní počet potomků v každém uzlu stromu či je postupně s přibývajícimi hladinami stromu přidávat nebo naopak ubírat. Jako vzory použijeme písmena, jako porovnávané obrázky písmena s kurzívou. Všechny stromy jsou vytvářeny nad normalizovanými momenty průměrného řádu 5 s postupným výběrem rozhodovacích momentů podle velikosti mezer nezávisle na řádu.

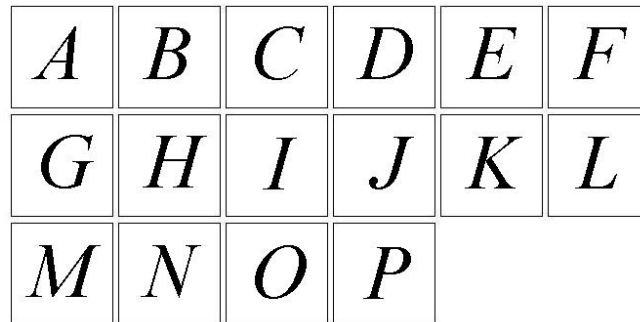
**Znamé vzory:**

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F |
| G | H | I | J | K | L |
| M | N | O | P |   |   |

**Obr. 26 šestnáct prvních velkých písmen fontu Times New Roman**

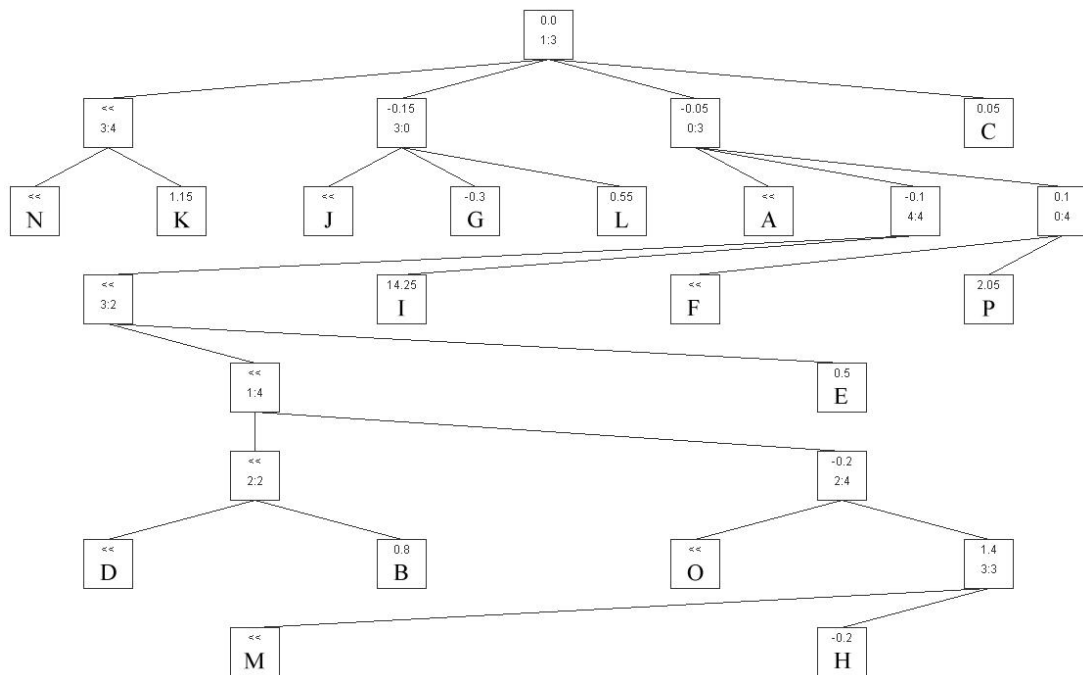
Konkrétní hodnoty momentů v tomto případě nejsou příliš důležité, neboť vše je pěkně vidět na rozhodovacím stromě, a tak je neuvádím.

**Testovací sada:**



Obr. 27 šestnáct prvních velkých písmen fontu Times New Roman psaných kurzívou

**Testovací strom 1:**

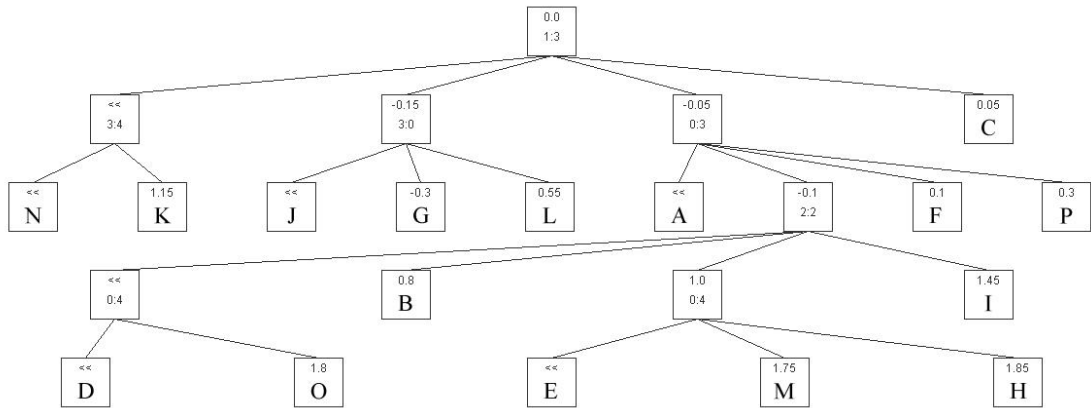


Obr. 28 Rozhodovací strom se snižujícím se počtem potomků

Strom reprezentující variantu s postupným snižováním počtu potomků (Obr. 28).

Správně rozpoznáno 10/16.

**Testovací strom 2:**

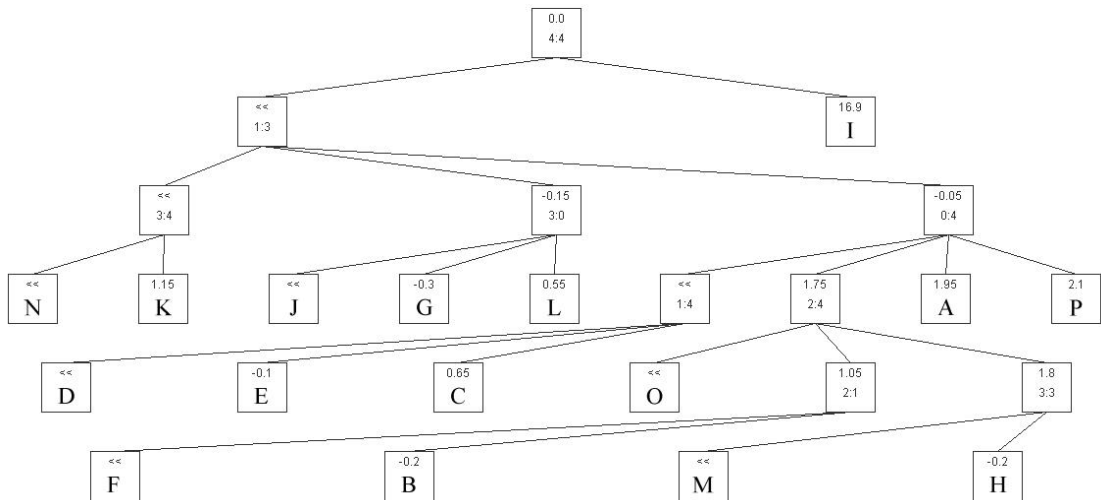


**Obr. 29** Rozhodovací strom se stabilním počtem potomků

Strom reprezentující variantu, která se snaží udržet stabilní počet potomků v každém uzlu (Obr. 29).

Správně rozpoznáno 10/16.

**Testovací strom 3:**



**Obr. 30** Rozhodovací strom se vzrůstajícím počtem potomků

Strom reprezentující variantu s rostoucím počtem potomků v uzlech.

Správně rozpoznáno 9/16.

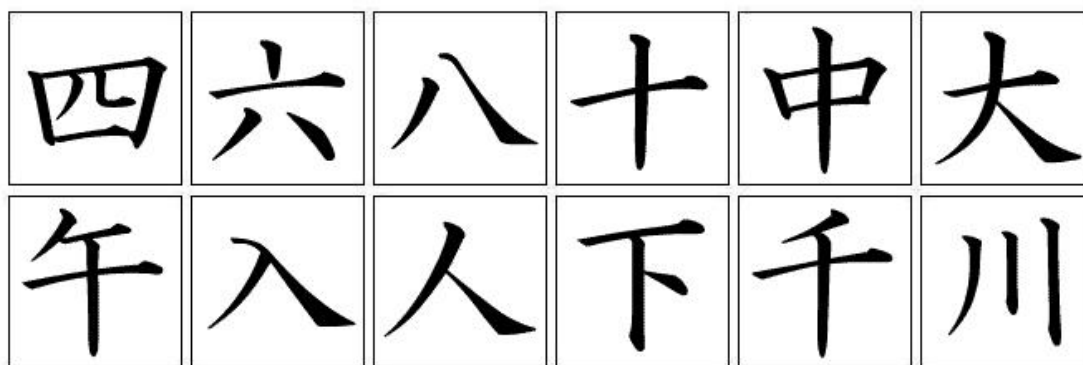
### **Závěr:**

Na základě výsledků můžeme říci, že všechny stromy dopadly velmi podobně. Dá se tedy předpokládat, že zvyšování ani snižování počtu potomků v jednotlivých hladinách nemá na efektivitu stromu při rozhodování velký vliv. Tento předpoklad zřejmě neplatí, pokud budeme mít množinu vzorů složenou ze dvou vzájemně velmi odlišných skupin jako tomu bylo v příkladu 5. Pak se dá očekávat, že přístup s postupným růstem počtu potomků bude nejvhodnější.

### **Příklad 7. Momenty a jejich řady**

Další z ovlivnitelných podmínek při stavbě stromu jsou vybírané rozhodovací momenty a jejich řád. Tento příklad se pokusí prakticky ukázat, zda záleží na tom, momenty jakého řádu používáme v kterých vrstvách stromu. Všechny stromy jsou vytvářeny nad normalizovanými momenty průměrného řádu 5 se vzrůstajícím počtem potomků v uzlech.

### **Známé vzory:**



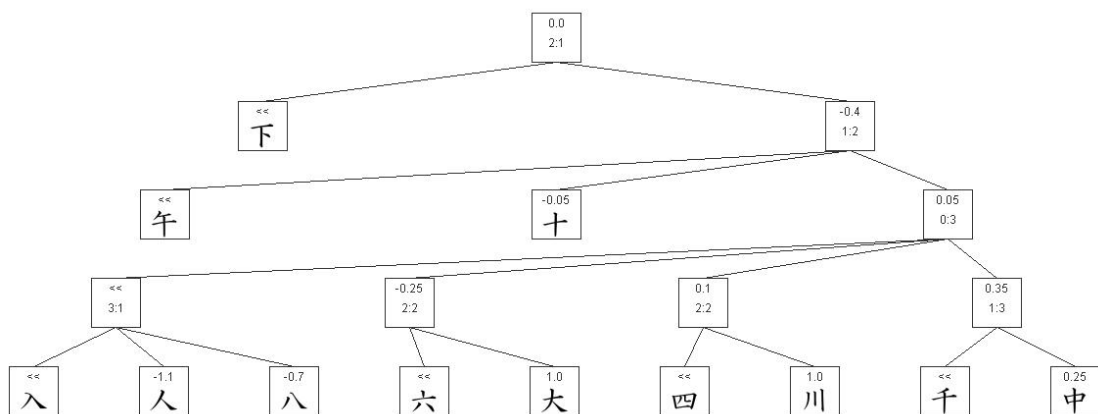
Obr. 31 Dvanáct vybraných vzorových znaků japonského písma kanji

Testovací sada:



Obr. 32 Dvanáct vybraných znaků japonského písma kanji psaných rukou

Testovací strom 1:



Obr. 33 Rozhodovací strom postavený od nejnižších řádů momentu

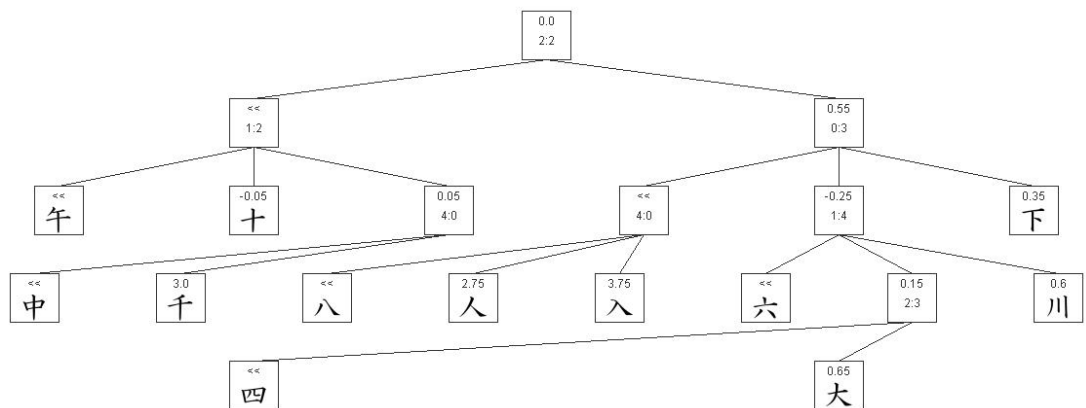
Strom postavený od momentů nejnižších použitelných řádů – v každém uzlu se vybere rozhodovací moment nejnižšího možného řádu, podle kterého je možno získat požadovaný počet potomků (Obr. 33).

Správně rozpoznáno 7/12.

Nesprávně rozpoznáno, ale opticky podobné nalezenému vzoru 2/5.

Nesprávně rozpoznáno, zcela nepodobné nalezenému vzoru 3/5.

### Testovací strom 2:



**Obr. 34 Rozhodovací strom postavený nezávisle na řádech použitých momentů**

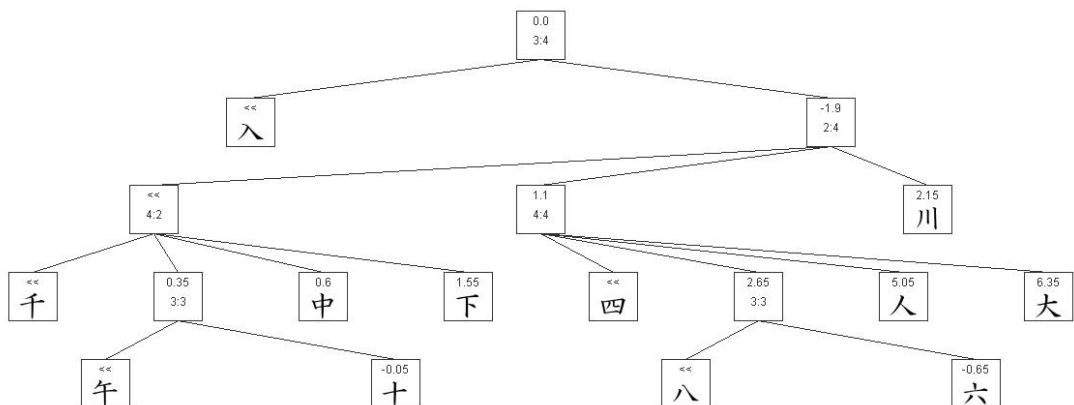
Strom postavený nezávisle na řádu používaných momentů – v každém uzlu se vybere moment, který poskytuje největší mezery mezi hodnotami vzorů z různých nově vznikajících skupin nezávisle na řádu momentu (Obr. 34).

Správně rozpoznáno 6/12.

Nesprávně rozpoznáno, ale opticky podobné nalezenému vzoru 4/6.

Nesprávně rozpoznáno, zcela nepodobné nalezenému vzoru 2/6.

### Testovací strom 3:



**Obr. 35 Rozhodovací strom postavený od nejvyšších řádů momentu**

Strom postavený od momentů nejvyšších použitelných řádů – v každém uzlu se vybere rozhodovací moment nejvyššího možného řádu, podle kterého je možno získat požadovaný počet potomků (Obr. 35).

Správně rozpoznáno 4/12.

Nesprávně rozpoznáno, ale opticky podobné nalezenému vzoru 6/8.

Nesprávně rozpoznáno, zcela nepodobné nalezenému vzoru 2/8.

### **Závěr:**

Nejhůře dopadl strom postavený na rozhodování od nejvyšších známých řádů. To se dalo očekávat, vzhledem k povaze informace nesené momenty vyšších řádů, kterou tvoří větší detaily obrázku. Překvapivě srovnatelné výsledky však mají zbylé dva stromy. V případě, že máme spočítáno relativně malé množství momentů, vykazuje výběr nezávislý na řádu momentů dobré výsledky. Počítali-li bychom však mnoho momentů i vyšších řádů (např. bylo-li by mnoho vzorů), dá se předpokládat, že s nejlepším výsledkem by skončil strom postavený nad momenty nejnižších řádů (strom stavěný nezávisle na řádu momentů by mohl chybně využít pro rozhodnutí moment vysokého řádu, jímž nesená informace by ve skutečnosti netvořila požadovaný velký optický rozdíl).

## **Komplexní příklady**

Následující dva příklady dokumentují použití momentové metody na praktických příkladech. Používají předpoklady získané z předchozích příkladů za účelem dosažení co nejlepších výsledků.

### **Příklad 8. Abeceda**

Příklad testuje nasazení momentové metody na klasický problém rozpoznávání vzorů – rozpoznávání písmen abecedy.

#### **Rozhodovací strom:**

- průměrný řád momentů 6
- udržování stabilního počtu potomků na hodnotě 3
- využívání momentů od nejnižších řádů

**Znamé vzory:**

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F |
| G | H | I | J | K | L |
| M | N | O | P | Q | R |
| S | T | U | V | W | X |
| Y | Z |   |   |   |   |

**Obr. 36** Všech 26 velkých písmen abecedy<sup>7</sup>

**Porovnávací sada 1:**

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> |
| <i>G</i> | <i>H</i> | <i>I</i> | <i>J</i> | <i>K</i> | <i>L</i> |
| <i>M</i> | <i>N</i> | <i>O</i> | <i>P</i> | <i>Q</i> | <i>R</i> |
| <i>S</i> | <i>T</i> | <i>U</i> | <i>V</i> | <i>W</i> | <i>X</i> |
| <i>Y</i> | <i>Z</i> |          |          |          |          |

**Obr. 37** Všech 26 velkých písmen abecedy psaných kurzívou<sup>8</sup>

**Výsledek:**

Správně rozpoznáno 20/26 písmen.

---

<sup>7</sup> Použitý font je Times New Roman.

<sup>8</sup> Použit opět font Times New Roman



**Závěr:**

Jak vidíme, výsledek metody nastavené na obecné vzory není u rozpoznávání písmen s kurzívou vůbec špatný. Pokud bychom však chtěli v praxi metodu použít na rozpoznávání textu, který může obsahovat i kurzivu, zřejmě by nám tato rozhodovací síla nestačila.

**Doporučení pro praxi:**

To, že je výsledek 20/26 pro praktické rozpoznávání tištěného textu nedostatečný, neznamená, že by se momentová metoda nedala pro tento případ využít. Stačí jen místo schopnosti momentové metody odolávat sklopení využít její jinou vlastnost – přesné rozpoznání známého vzoru. Očekáváme-li na vstupu text psaný velkými písmeny jednoho fontu, stačí prostě mezi známé vzory zahrnout písmena psaná normálně i s kurzívou. Počet známých vzorů se tak dvakrát zvětší a jejich zpracování bude trvat déle, hloubka stromu také vzroste, dle nastavení, o několik hladin, ale výsledkem bude přesné rozpoznání všech 52/52 vzorů.

**Příklad 9. Mnoho vzorů**

Příklad testuje použití momentové metody při větším počtu známých vzorů, z nichž některé jsou si hodně podobné.

**Rozhodovací strom:**

Strom je příliš rozsáhlý, na list A4 ho nelze reprodukovat žádnou rozumnou formou. Byl postaven automaticky s parametry:

- průměrný řád momentů 6
- udržování stabilního počtu potomků na hodnotě 3
- využívání momentů od nejnižších řádů

Obrázek stromu je k dispozici v elektronické podobě na CD ve složce „obrazky/vel.jpg“.

Znamé vzory:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 |
| 九 | 十 | 上 | 分 | 長 | 中 | 大 | 出 |
| 電 | 円 | 外 | 学 | 月 | 午 | 後 | 東 |
| 北 | 本 | 百 | 入 | 時 | 人 | 女 | 間 |
| 見 | 気 | 金 | 国 | 今 | 行 | 校 | 高 |
| 下 | 万 | 木 | 雨 | 父 | 土 | 語 | 母 |
| 半 | 左 | 火 | 聞 | 毎 | 右 | 何 | 男 |
| 名 | 白 | 食 | 天 | 友 | 休 | 読 | 南 |
| 年 | 日 | 来 | 西 | 山 | 生 | 千 | 川 |
| 先 | 車 | 子 | 書 | 小 | 水 | 話 | 前 |

Obr. 38 Osmdesát vzorů japonských znaků kanji

Testovací sada:



Obr. 39 Různé japonské znaky kanji

Testovací sadu tvoří znaky kanji nejednotné velikosti vystříhané z několika obrázků s kanji písmem nalezených na Internetu (Obr. 39).

Výsledky:



Obr. 40 Výsledné dvojice porovnání vzor-obrázek

Správně rozpoznáno 8/12.

**Závěr:**

Jak je vidět, momentová metoda byla v tomto případě poměrně úspěšná a to i přestože porovnávané obrázky byly velikostně odlišné a pouze podobné vzorům, v případě posledních čtyř obrázků dokonce pouze vzdáleně.

**Shrnutí:**

Jak jsme se přesvědčili, momentová metoda skutečně splňuje většinu svých teoretických předpokladů. Podává skvělé výsledky při porovnávání obrázků pozměněných úpravou velikosti, posunutím, roztažením i smrštěním a uspokojivé výsledky pro obrázky vzniklé sklopením či částečnou rotací vzoru. S automatickým nastavením generovaného stromu je zároveň schopna bez chyby rozpoznat řádově několik desítek různých vzorů.

## 4. Závěr

V práci jsme měli možnost seznámit se s momenty a momentovou metodou, jejich významem, vlastnostmi a využitím. Probrali jsme jednotlivé teoretické předpoklady hodnot momentů, vzniklé matematickými odvozeními a praktické výsledky jejich použití v momentové metodě. Zaměřili jsme se detailně na rozhodovací strom a rozebrali jsme jeho výsledky v závislosti na nastavených parametrech. Výsledkem práce je také příložený program, který umožňuje ozkoušet mnohé z napsaného v praxi, případně testovat momentovou metodu na vlastních příkladech.

I přes všechno výše jmenované, čemu jsme se v práci věnovali, stále zůstává mnoho neprobraných věcí souvisejících s momentovou metodou. V teoretické části jsme nastínili, že existuje mnoho rozhodovacích mechanismů, kterých může momentová metoda využít, ale podrobněji jsme se věnovali pouze jednomu. Zároveň jsme uvedli některé z typů momentů, ale prakticky jsme zvládli využít opět jen jediný z nich. Příložený program by se dal také v mnohých ohledech rozšířit. Tyto a mnohé další neuvedené aspekty jsou zcela jistě také zajímavou látkou ke zpracování, z časových a rozsahových důvodů již na ně bohužel nezbylo v mé práci místo.

Přesto věřím, že Vám přečtení mé práce poskytlo ucelený náhled na problematiku rozpoznávání vzorů momentovou metodou a možná dalo i pár námětů k zamyšlení nad různými souvisejícími problémy a jejich řešením.

## 5. Literatura

- [1] Alt, F. L. : **Digital pattern recognition by moments**, Journal of the ACM, 1962, pp. 240-258
- [2] Teh Ch-H., Chin R. T. : **On image analysis by the methods of moments**, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 1988, pp. 496-512
- [3] Novikoff A. S. J. : **Integral geometry as a tool in pattern perception**, In Principles of Self-Organization, Pergamon Press, Elmsford, N.Y., 1962, pp. 347-368.
- [4] Hu, M-K. : **Visual pattern recognition by moment invariants**, IEEE Transactions on Information Theory, 1962, pp. 179-187
- [5] Anderson T.W. : **Intoduction to Multivariate Statistical Analysis**, Wiley, New York, 1958, pp. 142-147
- [6] Kamila N. K., Mahapatra S., Nanda S. : **Invariance image analysis using modified Zernike moments**, Pattern Recognition Letters Vol. 26(6), Elsevier Science Inc, New York, 2005, pp. 747-753
- [7] Liu J., Zhang T. : **Recognition of the blurred image by complex moment invariants**, Pattern Recognition Letters Vol. 26(6), Elsevier Science Inc, New York, 2005, pp. 1128-1138
- [8] Papademetriou, R. C. : **Data processing using information theory functionals**, Kybernetes Vol. 27(3), MCB UP Ltd., 1998, pp. 264-272
- [9] Klette R., Rosenfeld A. : **Digital Geometry**, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004