

## Vo svetle intuicionizmu: dve štúdie v teórii dôkazov

Táto práca pojednáva o dvoch špecifických aspektoch vzťahu medzi klasickou a intuicionistickou teóriou dôkazov. V prvej časti zavedieme, s použitím odvodení v klasickej aritmetike, formalizáciu pre Gödelov neformálny výklad BHK interpretácie. Gödelova interpretácia dokazateľnosti pre intuicionistickú výrokovú logiku bola prvý raz publikovaná v [1]. Definoval tu modálny systém **S4** ako formalizáciu pre intuitívny koncept dokazateľnosti, a potom preložil **IPC** na **S4** pri zachovaní korektnosti a úplnosti. Gödelova práca navrhuje hľadať interpretáciu dokazateľnosti pre modálnu logiku **S4** s použitím aritmetických dôkazov, ktorá samotná vedie k takejto interpretácii dokazateľnosti pre intuicionistickú logiku. V prvej kapitole sa pokúsime vyriešiť tento problém. Zovšeobecníme Solovayovu interpretáciu dokazateľnosti pre modálnu logiku **GL**, aby sme zachytili iné modálne logiky, konkrétne **K4**, **KD4** a **S4**. S použitím už spomínaného Gödelovho prekladu navrhujeme formalizáciu BHK interpretácie pomocou dôkazov v klasickej logike. Ako dôsledok ukážeme, že BHK interpretácia je dostatočne silná a umožňuje viacero rôznych formalizácií, ktoré prekvapivo zachytávajú rôzne výrokové logiky vrátane intuicionistickej, minimálnej a Visser-Ruitenburgovej basic logiky. Napokon prezentujeme negatívne výsledky ukazujúce, že neexistuje interpretácia dokazateľnosti pre ľubovoľné rozšírenie systému **KD45** a v súlade s očakávaním neexistuje žiadna BHK interpretácia pre klasickú výrokovú logiku.

V druhej polovici dizertácie sa sústreďujeme na ďalší spomínaný aspekt a budeme skúmať aplikáciu intuicionistického hľadiska v teórii dôkazov klasickej logiky. Za týmto účelom zovšeobecníme klasickú verziu Dialectica interpretácie tak, aby brala do úvahy zložitost' dôkazov a využijeme ju pri skúmaní podsystémov aritmetiky s obmedzenou indukciou. Konkrétne, definujeme pojem výpočtový tok (computational flow), čo bude dvojica pozostávajúca z postupnosti výpočetných problémov istého typu a postupnosti redukcií medzi nimi. Na základe teórie, ktorú vypracujeme pre výpočtové toky, získame korektnú a úplnú interpretáciu pre podsystémy aritmetiky s obmedzenou indukciou. Tieto vlastnosti využijeme pri transformácii prvorádových aritmetických dôkazov na postupnosti výpočetných redukcií, pomocou ktorých extrahujeme výpočetný obsah niektorých tvrdení v niektorých podsystémoch aritmetiky vrátane  $I\Delta_0$ ,  $T_n^k$ ,  $I\Delta_0(\text{exp})$  a PRA. V poslednej časti zobecníme toky konečných dĺžok na toky nekonečné a presunieme náš záujem zo systémov s obmedzenou indukciou na systémy PA a PA + TI( $\alpha$ ) s neobmedzenou indukciou.

**Kľúčové slová:** interpretácia dokazateľnosti, BHK interpretácia, aritmetika s obmedzenou indukciou, proof mining

## References

- [1] K. Gödel, Eine Interpretation des Intuitionistischen Aussagenkalküls, *Ergebnisse Math Colloq.* Vol. 4 (1933), pp. 39-40.