MUNI
PŘÍRODOVĚDECKÁ
FAKULTA

Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy university
Kotlářská 2
611 37 Brno

Oponentský posudek disertační práce

Autor: Mgr. Michal Zamboj

Název: Synthetic projective geometry

Obsah práce je možno rozdělit do dvou oblastí. První oblast je přehledem vzniku a vývoje projektivní geometrie s důrazem na syntetický přístup a druhá oblast je zaměřena na klasifikaci reálných regulárních kvadrik jako řezů kuželových nadploch ve 4-rozměrném prostoru s využitím vizualizace 4D prostoru (syntetický přístup). Spojovacím článkem obou částí je významná role kvadrik a využití počítačové grafiky pro vizualizaci.

Práce je rozdělena do 4. kapitol a přílohy s foto-kopiemi některých historických článků použitých v práci a programem k vizualizaci s využitím počítačové 3D grafiky. V 1. kapitole je popsán vznik a vývoj projektivní geometrie. Zárodky projektivní geometrie je možno nalézt už u řeckých matematiků v souvislosti se studiem kuželoseček. Později byl zvýšený zájem o studium nevlastních bodů (a tím o projektivní rozšíření prostoru) vyvolán vznikem lineární perspektivy v období renezance. V 19. století je možno zaznamenat vrchol zájmu o syntetickou projektivní geometrii, který je spojen s řadou významných matematiků, jako Staudt, Brianchon, Poncelet, Möbius, Plücker a Chasles. Vývoj projektivní geometrie byl završen ve 20. století využitím axiomatické a analytické metody. Analytické metoda také umožnila v poslední době počítačovou vizualizaci, která byla velice pracná v době „ručně“ kreslených obrázků. Autor disertace popisuje podrobně tento historický vývoj a rozebírá přínos jednotlivých autorů k rozvoji projektivní geometrie. Zvláštní pozornost je věnována jedné z nejdůležitějších vět projektivní geometrie, takzvané Chaslesově větě (z roku 1839), která říká, že čtyři tečné roviny podél netorzální přímky nerozvinutelné přímkové plochy mají stejný dvojpoměr jako jejich body dotyku. Tato věta je využívána v deskriptivní geometrii ke konstrukci tečných rovin, kdy při znalosti tří tečných rovin s body dotyku na netorzální přímce můžeme další tečné roviny s body dotyku na této přímce hledat jen pomocí dvojpoměru ve svazku rovin, který tyto tečné roviny tvoří. V původním důkazu použil Chasles metod, které nepatří do projektivní geometrie. V části 4.2 disertace se autor k této větě vrací a předkládá čistě projektivní důkaz Chaslesovy věty.

2. kapitola se věnuje metodám syntetické projektivní geometrie. Nejdříve je popsána perspektivita a projektivita bodů na přímce nebo přímek ve svazku přímek a s nimi spojené hlavní věty – Pappova věta a Desarguesova věta. Projektivní korespondence je využita také

k popisu projektivního vytvoření kuželoseček. Jsou uvedeny ukázky navzájem duálních vět. V poslední části této kapitoly je také představena analytická metoda a její využití pro vizualizaci v programu Wolfram Mathematica 11.

3. kapitola je věnována vizualizaci 4-rozměrného euklidovského prostoru, která je obdobou Mongeova promítání. Při použití souřadnic $[x,y,z,w]$ kolmo promítáme do prostorů $\Xi(x,y,z)$ a $\Omega(x,y,w)$. Poté otočíme prostor Ξ do prostoru Ω tak, aby oba průměty bodů, ležely na ordinálách, tj. kolmicích na rovinu $\pi(x,y)$. Tímto způsobem můžeme 4D objekty reprezentovat pomocí dvou 3D projekcí a tyto 3D projekce potom zobrazit, např. volným rovnoběžným promítáním, do roviny. Autor v této vizualizaci 4D zobrazil několik možností vzájemných poloh přímek a rovin. Je třeba si uvědomit, že např. 2 roviny ve 4D mohou být rovnoběžné, protínat se v bodě nebo přímce, ale také mohou být mimoběžné se společným směrem. Je také podána konstrukce skutečné délky úsečky. S využitím 4D vizualizace jsou zobrazena některá 4D tělesa – pentachoron (5-nadstěn), tesseract (nadkrychle), řezy takovýchto nadtěles nadrovinou a konečně středové osvětlení nadjehlanu a stín vržený do prostorů Ξ a Ω.

Ve 4. kapitole se nejdříve autor vrátil k Schalesově větě a dokázal ji algebraicky s využitím pouze projektivních metod nejdříve pro přímkové regulární kvadriky a poté ji zobecnil i pro algebraické plochy vyšších stupňů. V části 4.3 je potom klasifikace regulárních (reálných) kvadrik pomocí řezů (reálné) kuželové nadplochy v 4D nadrovinami. Jako řídící kvadriku reálné kuželové nadplochy bere autor buďto elipsoid nebo jednodílný hyperboloid. Pokud tyto kuželové nadplochy protneme nadrovinou, která neprochází vrcholem, dostaneme v prvním případě jako řezy nepřímkové regulární kvadriky (elipsoid, dvoudílný hyperboloid a eliptický paraboloid), ve druhém případě potom dostaneme přímkové regulární kvadriky (jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid). Všechny tyto možnosti jsou zobrazeny s využitím programu GeoGebra a příslušné obrázky jsou také dostupné v interaktivní podobě na Internetu. Je třeba říct, že především u přímkových kvadrik vyžaduje tato vizualizace opravdu dobrou prostorovou představivost.

K práci mám následující připomínky:

1. Občas se stane, že označení bodů v textu a v příslušném obrázku se neshoduje, např. Obrázky 6.26 a 6.27.
2. Autor zřejmě z důvodů vizualizace pracuje pouze s reálnými body, což někdy vede k složitějším formulacím. Např. řešení rovnice (4.8) není prázdná množina nebo jediný bod, ale imaginární regulární kuželosečka nebo singulární kuželosečka tvořená dvojicí komplexně sdružených přímek. Podobně 3. možnost není (reálná) elipsa, ale regulární reálná kuželosečka, protože v nevlastní rovině nemůžeme dělit reálné regulární kuželosečky na elipsy, hyperboly a paraboly.
3. Na straně 76 autor tvrdí, že dvě různé roviny ve 4D se mohou protínat v bodě, přímce nebo jsou rovnoběžné. Pod rovnoběžnost tak zahrnuje nepřesně i mimoběžné roviny se společným směrem.
4. Na str. 97 definuje autor kvadriku v projektivním prostoru, ale hovoří potom o jednodílném hyperboloidu nebo hyperbolickém paraboloidu, což je klasifikace až v afinním prostoru, takže ve skutečnosti definoval kvadriku v projektivním rozšíření afinního prostoru.
5. V části 4.3.2 (str. 107) hovoří autor o kuželových nadplochách v projektivním rozšíření 4D prostoru. Protože ale řezná nadrovina se předpokládá kolmá na Ω, pracuje se v projektivním rozšíření euklidovského 4D prostoru a rovnice (4.4) je

rovnicí nadplochy s řídící kulovou plochou – dělení na „ellipsoidal cone“ (v části 4.3.2) a „spherical cone“ (v části 4.3.3) je tak zbytečné.

6. Na straně 109 použil autor pojem „ellipsoidal cone“ pro kuželovou plochu v 3D. Jde opět o geometricky nepřesnou formulaci, protože reálná kuželová plocha může mít za řídící kuželosečku libovolnou reálnou regulární kuželosečku.
7. Poslední připomínka je obecná a navazuje na předchozí připomínku. Odkud vzal autor názvy „ellipsoidal cone“ a „two-sheet hyperboloidal cone“? Protože se pracuje v projektivním rozšíření 4D euklidovského prostoru, může být jako řídící plocha v prvním případě použitá jakákoliv nepřímková regulární kvadrika (včetně kulové plochy) a ve druhém případě jakákoliv přímková kvadrika. Jediný rozdíl mezi těmito dvěma typy kuželové nadplochy je v tom, že v prvním případě má kuželová nadplocha tvořící přímky a ve druhém případě tvořící roviny. Proto jsou řezy nadrovinami v prvním případě nepřímkové kvadriky a ve druhém případě přímkové kvadriky. Existuje v literatuře toto rozlišení na „přímkové“ a „rovinné“ kuželové nadplochy?

Práce je psána anglicky. Po technické stránce je na vysoké úrovni. Ocenit je třeba kvalitu doprovodných obrázků a jejich dostupnost na Internetu.

Závěr: Drobné nedostatky uvedené výše nesnižují hodnotu práce. Považuji proto práci za hodnotnou jak z teoretického, tak i praktického (počítačová 4D vizualizace) pohledu. Autor prokázal schopnosti samostatné tvůrčí práce. Po úspěšné obhajobě doporučuji práci **uznat** jako Ph.D. disertaci a autorovi přiznat titul Ph.D.

V Brně, 27.9.2018

prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.