Posudek disertační práce "Absolute and non-absolute $\mathcal{F}$-Borel spaces"Mgr. Vojtěcha Kovaříka

Obsah.

Disertační práce V. Kovaříka se skládá z úvodu (I. kapitola) a tří kapitol (II - IV), jejichž obsahem jsou články doktoranda. Spoluautorem prvního článku je školitel Prof. O. Kalenda, článek byl publikován. Druhý článek byl publikován elektronicky ve Fundamenta Mathematicae a třetí článek byl zaslán k publikaci a je přístupný na arXivu. V. Kovařík je jediným autorem těchto dvou článků, které tvoří co do délky víc než devět desetin obsahu práce.

Celá práce je věnována studiu nejmenšího systému podmnožin (Tichonovova) topologického prostoru, který obsahuje uzavřené množiny a je uzavřený na spočetná sjednocení a spočetné průniky. Přesněji, jde o přirozené hierarchie tříd takových množin a o studium prostorů a jejich tříd v různých kompaktifikacích. Motivací pro toto studium jsou výsledky M. Talagranda, který dokázal, že WCG Banachovy prostory jsou $F_{\sigma\delta}$ v (X^{**}, w^*), našel příklad topologického prostoru, který je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci, ale není $F_{\sigma\delta}$ v každé kompaktifikaci. Zda každý WCG prostor se slabou topologií je $F_{\sigma\delta}$ v každé kompaktifikaci, je otevřený problém. Práce odpovídá na jiné přirozené otázky např. ohledně toho, jakých tříd může jeden prostor (např. Talagrandův příklad a jeho verze) nabývat v různých kompaktifikacích.

Článek v kapitole II obsahuje pěkné pozorování, že existence úplné posloupnosti spočetných dělení na F_σ-množiny je postačující pro to, aby prostor byl typu $F_{\sigma\delta}$ v každé kompaktifikaci. To je příspěvkem ke studiu problému charakterizace "absolutně $F_{\sigma\delta}$-prostorů formulovaného Z. Frolíkem, který charakterizoval prostory, které jsou $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci existencí úplné posloupnosti spočetných pokrytí F_σ, resp. uzavřenými, množinami. Tento výsledek je použit k důkazu toho, že dědičně Lindelöfův prostor, který je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci, je téhož typu v každé kompaktifikaci. Z toho je vyvozeno, že tentýž vysledek platí pro separabilní Banachovy prostory s jejich slabou topologií.

Článek v kapitole III studuje hierarchie $\mathcal{F}_\alpha^{III}$, $\alpha < \omega_1$, v topologických prsotorech, pro které $\mathcal{F}_1^{III}$ je systém uzavřených podmnožin, $\mathcal{F}_\alpha^{III} = (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta)_\delta$ pro lichá $\alpha > 1$ a $\mathcal{F}_\alpha^{III} = (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta)_\sigma$ pro sudá $\alpha > 1$. Vychází se z Talagrandova příkladu $X_\mathcal{E}$ a metody jeho konstrukce, která je analyzována a ukazuje se, jak souvisí složitost systémů $\mathcal{E}$ podmnožin prostoru posloupností přirozených čísel (s použitím speciálních Talagrandových stromů a jejich ranku), na kterých je popis Talagrandova $F_{\sigma\delta}$-příkladu založen, a nejmenší α takové, že prostor $X_\mathcal{E}$ je třídy F_α^{III} v každé kompaktifikaci. K tomu je zavedena originálním způsobem škála prostorů $Y_\beta \supset X_\mathcal{E}$ třídy β v dané kompaktifikaci a ukazuje se existence α, že $X_\mathcal{E} = Y_\alpha$ a α nezávisí na volbě kompaktifikace. Jako důsledek je pro lichá α a $\alpha \geq \beta \geq 3$ ukázána existence prostorů $X_{\alpha,\beta}$, které jsou v $\mathcal{F}_\beta^{III}$ v nějaké kompaktifikaci a α je nejmenší ordinál takový, že $X_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_\alpha^{III}$ v každé kompaktifikaci.

Kapitola IV je nejrozsáhlejší a navazuje na předchozí. Vychází z jiné definice hierarchie $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$. Ta je definována v každém topologickém prostoru induktivně takto: $\mathcal{F}_0^{IV}$ je třída uzavřených množin, $\mathcal{F}_{\alpha+1}^{IV} = (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{IV})_\delta$ pro $\alpha > 0$ sudá a $\mathcal{F}_\alpha^{IV} = (\mathcal{F}_\alpha^{IV})_\sigma$ pro α lichá. V části IV je zavedena přirozená reprezentace nazvaná "jednoduchá $\mathcal{F}_\alpha$-reprezentace", která je použita jako vhodný prostředek pro popis třídy k důkazu toho, že z absolutnosti jistých borelovských tříd plyne absolutnost všech $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$-tříd pro dědičně Lindelöfovy prostory.

Jedním z hlavních výsledků je existence prostorů X_I takových, že

$$\{\min\{\beta < \omega_1 : X \in \mathcal{F}_\beta^{IV}(cX)\} : cX \text{ je kompaktifikace } X\} = I,$$

kde $I \subset [2, \omega_1]$ je uzavřený interval.

Důkazy výsledků jsou založeny na pojmu "regulární $\mathcal{F}_\alpha$-reprezentace"(vzhledem ke stromům T_α^c), který je motivován definicí obalů Y_α v části III. Tam použitá operace na Suslinovo schéma $\mathcal{N}(s)$ je zde aplikována na libovolné, ev. uzavřené ap., Suslinovo schéma. Ukazuje se, že výsledky této operace jsou třídy $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$ a každá množina třídy α je výsledkem takové operace aplikované na nějaké uzavřené Suslinovo schéma. Tento výsledek považuji za velmi zajímavý. Suslinova operace je jak známo dobrým prostředkem pro studium borelovských množin v polských prostorech. Její modifikace, která dává množiny předepsané třídy je podle mého pozoruhodným výsledkem. Nejtechničtější z potřebných tvrzení je zřejmě důkaz existence uzavřeného Suslinova schématu, které dává regulární $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$-reprezentaci daného $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$-prostoru.

Poslední část kapitoly IV studuje složitost Talgrandových prostorů v některých kompaktifikacích. Je dokázána existence prostorů X_I, o kterých byla zmínka výše.

Dále je studován vztah mezi "lokální $\mathcal{F}_\alpha$-složitostí"a složitostí celého prostoru. To je použito k zajímavému důkazu existence prostorů, které nemají společnou (univerzální) jednoduchou $\mathcal{F}_\alpha^{IV}$-reprezentaci pro všechny kompaktifikace.

Hodnocení.

Práce je velmi rozsáhlá a technická. Řada výsledků i metoda reprezentace množin dané třídy pomocí speciální operace aplikované na Suslinovo schéma jsou zajímavé a netriviální. Nedostatkem je to, že autor zřejmě přehlédl, že jím odlišně definované hierarchie jsou odlišnější, než by se mohlo na první pohled zdát, a nelze tudíž výsledky o konkrétních nekonečných třídách v jedné hierarchii použít bezprostředně pro výsledky o druhé hierarchii. Některá tvrzení v části IV je tedy třeba dokázat buď modifikací důkazu z III nebo metodami použitými v IV jen pro některé třídy. Autor reagoval rychle na upozornění na toto nedopatření a připravil několik drobných úprav potřebných pro úpravu stávajících důkazů všech uvedených tvrzení.

V práci jsem dále narazil na malé množství drobných pochybení, která nemají vliv na výsledky práce. Na některý místech bych preferoval o něco podrobnější či přesnější vysvětlení, které by mohlo pomoci čtenáři k rychlejšímu porozumění. Své připomínky tohoto typu přikládám. Seznam překlepů a dalších nepodstatných připomínek předám autorovi.

Celkově považuji práci za velmi náročnou, s publikovatelnými výsledky a jsem si jist, že Mgr. V. Kovařík prokázal svou schopnost samostatně vědecky pracovat a doporučuji mu na základě této práce udělit mu titul PhD.

V Praze dne 31.8.2018

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.

Seznam vybraných připomínek.

18 ... Proposition 3.2, není druhý uzávěr v cY?;

18 ... ψ namísto q?;

24 ... $\mathcal{E}$ by měla být pokrytí, abychom dostali Hausdorffovy (pracujeme jen s Tichonovovými) prostory, užívá se tak;

26 ... "which means that Y_0^h místo Y_α^h;

27 ... "Since for limit α ...", zdůraznil bych, že $\mathcal{F}_\alpha$ je aditivní;

27 ... Lemma 5.10 ... x asi nemusí být různé od ∞;

28 ... "Lemma 5.10 shows", asi Lemma 5.11?;

29 ... $\alpha \leq r_i(B)$...;
31 ... možná T_α tučně oproti T_α z Notation 5.6;
32 ... "we define X", má být $X_{\alpha,\beta}$;
34 ... "arbitrarily many", to nehraje s hypotézou, že jde jen o intervaly;
34 ... alternative proof, nevidím 2 důkazy, všude je třeba 7.28;
37 ... v (1.1) má být X_2^β a ne tlusté T, odkaz na III nesedí;
37 ... důkaz k 2.1 nesedí, je třeba užít 7.28 a to doplnit?;
37 ... "Proof of Theorem 2.2 ... end of Section 4.1", jde o 4.2 a bez 7.28 se to neobejde;
37 ... srovnej Conjecture a tvrzení v abstraktu o libovolném počtu;
38 ... "we prove the following version of", už zde by mohlo být kde, tj. v 5.10;
42 ...definice T^c, indexy n a i se mají rovnat a značení n a i užita v zápise $\alpha = \lambda + 2n + i$;
43, 47 ... jak je myšleno "disjoint union", měly být prostory voleny jako disjuntní nebo se to standardně zařídí jako v topologické sumě?;
43 ... jde o "basis"nebo subbasis?;
48 ... "Finally, suppose ...", nejen předpoklad na $\beta = \omega_1$, ale i $\alpha < \omega_1$? ($\alpha = \beta = \omega_1$ bylo zvlášť);
49 ... "$\supset$"-part, nevidím v Proposition 4.6, tam jsou nerovnosti mezi složitostmi;
53 ... jaké tvrzení o univerzální (simple?) representaci ze 7.2 je míněno?;
56 ... "follows from (i)", co je (i)?;
58 ... Y v důkazu má bý cX;
63 ... pod průnikem by mělo být $m \in M$ a místo t by mělo být t';
63 ... není jasné, co je (iv) a co (v)?;
63 ... v Definition Suslin scheme, in Y bych doplnil zde i leckde dál;
64^4 ... nemá zde být $r_l(T)$?;
64 ... "It follows from (ii)", vidím z citovaného místa jen, že stejné stromy dávají stejný výsledek?;
66 ... "later in this section", lépe citovat kde;
67 ... má být "s.t. $X = \mathcal{A}(\overline{\mathcal{C}}^Y)$";
69 ... má být $\varphi(t) \in$ ...
70 ... Lemma, $cX = \{x_s|$..., ale ne $\mathcal{X} = X \in$;
70,71 ... chybí mi explicitní zdůvodnění (či odkaz?), proč jde v Lemmatu o regulární reprezentaci, totéž pro Proposition 2.20;
73 ... $\{X_s|...\}$ covers X, terminologie není nejdokonalejší, zde je to třeba číst "Suslinovo schéma ... covers ...", je to ovšem systém množin, o němž pokrytí X znamená něco jiného";
74 ... co je "(5) from Lemma 6.8";
74 ... nemá být za 3. ekvivalencí od zdola 1 místo m?;
75 ... "Using exactly the same arguments"by mohlo být trochu podrobnější;
76 ... myslím, že jen inkluze na předposledním řádku důkazu byla (a měla být) dokázána;
76 ... má být $s \in \omega^{<\omega}$ nebo $s \in T^c_\alpha$?;
77 ... druhý zápis (s,t) trochu ztěžuje šanci pochopit, co se myslí zápisem ρ_1^{-1} a ρ_2^{-1};
77 ... úvod k sekci 7: výsledek o celém intervalu viz 7.8, "the existence ... already follows from Theorem 2.2"není na místě, věta 2.2 je dokázána až v 7.28?, odkazy, kde co najít by pomohly v orientaci;

79 ... poslední řádek, $\alpha - 1 = \lambda + 2n - 1 = ...$?;
80 ... místo D má být D_{iie}?;
82 ... Theorem 7.8, mělo by být poznamenáno, že důkaz v sekcích 7.5 a 7.6;
82 ... co je T v (7.7), broom space?;
82 ... v důkazu Lemmatu 7.9 jednou $S(x)$ místo $S(y)$;
83 ... ...$\mathcal{A} \subset \mathcal{A} = \mathcal{A}_{<\alpha}$..., asi něco navíc, co značí $\mathcal{A}'$ není řečeno;
94 ... Lemma, ve znění je α nebo ω_1?;