Posudek vedoucího doktorandské disertační práce

Vojtěch Kovařík: *Absolutně a neabsolutně $\mathcal{F}$-borelovské prostory*

Práce se zabývá hierarchií $\mathcal{F}$-borelovských množin a prostorů. Systém $\mathcal{F}$-borelovských podmnožin topologického prostoru je nejmenší systém obsahující uzavřené množiny, který je uzavřený na spočetné průniky a spočetná sjednocení. V metrickém prostoru tento systém splývá se σ-algebrou borelovských množin, protože každá otevřená množina je F_σ; v nemetrizovatelných prostorech může jít o významně menší systém. Podobně jako je tomu v případě borelovských množin, systém $\mathcal{F}$-borelovských množin tvoří přirozenou hierarchii indexovanou spočetnými ordinály.

Hlavním tématem práce jsou otázky související s neabsolutností $\mathcal{F}$-borelovských tříd. M. Talagrand totiž ukázal, že $F_{\sigma\delta}$ množiny nemusí být absolutní – může se stát, že topologický prostor je v některé kompaktifikaci $F_{\sigma\delta}$ a v jiné kompaktifikaci není ani $\mathcal{F}$-borelovský. Prvotní motivací pro předloženou práci byly otázky o Banachových prostorech. Je-li Banachův prostor X slabě kompaktně generovaný (tj., existuje-li lineárně hustá slabě kompaktní podmnožina), je známo, že je $F_{\sigma\delta}$ ve svém druhém duálu X^{**} opatřeném slabou* topologí. Přirozenou otázkou je, zda (X, w) je absolutně $F_{\sigma\delta}$, tj. $F_{\sigma\delta}$ v každé kompaktifikaci. Další otázky se týkají slabě K-analytických Banachových prostorů (tj. těch, které jsou suslinovskou podmnožinou druhého duálu se slabou* topologií). Teprve nedávno byly nalezeny příklady slabě K-analytických prostorů, které nejsou $F_{\sigma\delta}$ v druhém duálu. Přirozenou otázkou se zdá, zda každý slabě K-analytický Banachův prostor je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci. Uvedené otázky se vyřešit nepodařilo a zůstávají dále otevřené. Přínosem práce je zejména podrobná analýza složitosti $\mathcal{F}$-borelovských množin. Dále uvedu stručný obsah práce.

Disertace je tvořena čtyřmi kapitolami, z nichž první je úvodní a každá z dalších tří je tvořena jedním článkem. Jeden z článků byl publikován, jeden přijat k publikaci a již elektronicky publikován a jeden byl zaslán k publikaci. První z článků je napsán společně se školitelem, další dva napsal uchazeč samostatně.

První článek, obsažený v druhé kapitole, se týká absolutních $F_{\sigma\delta}$ prostorů, tj. prostorů, které jsou $F_{\sigma\delta}$ v každé kompaktifikaci. Je v něm dokázáno, že prostor, který má úplnou posloupnost disjunktních spočetných pokrytí tvořených F_σ množinami, je absolutně $F_{\sigma\delta}$. Tento výsledek dobře doplňuje Frolíkovy charakterizace (prostor je K-analytický, právě když má úplnou posloupnost spočetných pokrytí; prostor je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci, právě když má úplnou posloupnost uzavřených spočetných pokrytí). Tato postačující podmínka je použita k důkazu toho, že dědičně Lindelöfovy $F_{\sigma\delta}$ prostory jsou absolutně $F_{\sigma\delta}$. (Uchazeč byl upozorněn J. Spurným, že toto tvrzení lze dokázat jinak, s použitím výsledků P. Holického a J. Spurného o absolutnosti tříd borelovských množin; nicméně postačující podmínku formulovanou pomocí úplných posloupností pokrytí považuji za zajímavou.)

Druhý a třetí článek (tj. třetí a čtvrtá kapitola) se věnují vyšším třídám $\mathcal{F}$-borelovských prostorů. Přičemž třetí článek navazuje na druhý, některé jeho výsledky vylepšuje a dodává nové pohledy na věc. Proto shrnuji hlavní přínosy těchto článků společně:

- Je zavedena jemná hierarchie $\mathcal{F}$-borelovských množin indexovaná spočetnými ordinály. Číslování ve třetím článku je odlišné od číslování užitého ve druhém článku. Důvodem je skutečnost, že při střídavém iterování spočetných průniků a spočetných sjednocení není a priori jasné, kterou z operací zvolit v limitním kroku. Ve druhém článku autor zvolil jednu z možností, ale při vylepšování výsledků se později ukázalo, že druhá možnost je přirozenější.
- Výše zmíněný Talagrandův protipříklad byl rozpracován, zpřesněn a doplněn obrácenými implikacemi. Připomínám, že M. Talagrand sestrojil příklad prostoru, který je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci a v jiné kompaktifikaci není $\mathcal{F}$-borelovský. Příklad je zkonstruován transfinitní indukcí a M. Talagrand poznamenává, že pokud by se s indukcí skončilo dříve, dostali bychom prostor, co je $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci a v jiné kompaktifikaci není $\mathcal{F}$-borelovský zadané třídy. Uchazeč doplnil přesnou formulaci výsledku a horní odhad složitosti. Ukázal, že pro každý ordinál $\alpha \in [2, \omega_1]$ dává Talagrandova konstrukce prostory, ktere jsou $F_{\sigma\delta}$ v nějaké kompaktifikaci, jsou absolutně $\mathcal{F}_\alpha$ a nejsou absolutně $\mathcal{F}_{<\alpha}$. Druhý článek obsahuje důkaz pro multiplikativní třídy, ve třetím článku je doplněn důkaz pro aditivní třídy.

- Uchazeč zavedl dva typy reprezentací $\mathcal{F}$-borelovských množin – nazývá je jednoduché a regulární, ukázal jejich existenci a použití. Pro definici regulárních reprezentací využil metodu 'přípustných zobrazení stromů', kterou sám vyvinul a použil pro důkaz horních odhadů složitosti.
- Dále zkoumal množinu nabývaných složitostí. Je-li X topologický prostor, pak $\mathrm{Compl}(X)$ je množinu těch ordinálů α, pro které existuje kompaktifikace, v níž je X přesně třídy $\mathcal{F}_\alpha$. Ukázal, že tato množina může být $\{0\}$ (pro kompaktní X), $\{1\}$ (pro σ-kompaktní X) nebo libovolný uzavřený podinterval intervalu $[2, \omega_1]$ (kde složitost ω_1 znamená, že množina je suslinovská, ale ne $\mathcal{F}$-borelovská). Je otevřeným problémem, zda tyto případy jsou jediné možné. Pro Talagrandovy příklady je ukázáno, že množina nabývaných složitostí uzavřený interval.

Práci celkově považuji za kvalitní. Zejména na druhém a třetím článku uchazeč pracoval zcela samostatně. Zadal jsem mu úkol vyšetřit absolutní složitost Talagrandových příkladů a zkoumat možné hodnoty složitosti. Tento úkol splnil a přitom sám vyvinul potřebné metody – již zmíněná přípustná zobrazení stromů, jednoduché a regulární reprezentace, jakož i topologické konstrukce v třetím článku. Domnívám se tedy, že předložená práce jednoznačně prokacuje, že je uchazeč schopen samostatné tvořivé práce. Proto bez nejmenších pochyb doporučuji práci uznat jako doktorandskou disertační práci.

V Praze, 2.7.2018

Prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK