

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Tichý

### **Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu**

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2007



Chtěl bych poděkovat doc. RNDr. Z. Drozdovi, Ph.D. a doc. RNDr. J. Obdržálkovi, CSc. za dobrou radu v úvodní části práce. Ale především bych rád poděkoval Mgr. P. Kaplickému, Ph.D. za pečlivý a zodpovědný přístup k vedení práce, za cenné rady, konstruktivní připomínky a za čas, který vedení práce věnoval. Bez něj by práce jistě nebyla v takové podobě, v jaké je teď.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30.5.2007

Jakub Tichý



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Fyzikální motivace . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Radiální případ</b>	<b>11</b>
2.1	Model . . . . .	11
2.2	Třída nerostoucích funkcí . . . . .	14
2.3	Existence ploché oblasti . . . . .	16
2.4	Nepřímé metody variačního počtu . . . . .	18
2.5	Minimalizace funkcionálu . . . . .	21
2.6	Existence minimizéru . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Neradiální případ</b>	<b>28</b>
3.1	Vlastnosti obecného řešení . . . . .	28
3.2	Radiální symetrie optimálního řešení . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>31</b>
	<b>Literatura</b>	<b>32</b>

**Název práce:** Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu

**Autor:** Jakub Tichý

**Katedra:** Katedra matematické analýzy

**Vedoucí bakalářské práce:** Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

**e-mail vedoucího:** Petr.Kaplicky@mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Práce se zabývá klasickým problémem variačního počtu: Newtonovým problémem optimálního aerodynamického profilu. Zajímá nás hlavně případ, kdy obtékané těleso je radiálně symetrické. V tomto případě je řešení analyticky spočítatelné. Nejprve se zabýváme konstrukcí modelu, poté vlastnostmi řešení tohoto modelu a jeho výpočtem. Na závěr shrneme některé vlastnosti řešení pro tělesa, která nejsou radiálně symetrická.

**Klíčová slova:** Variační počet, nekonvexní optimalizační problémy, Newtonův problém minimálního odporu

**Title:** The Newton problem of optimal aerodynamical profile

**Author:** Jakub Tichý

**Department:** Department of mathematical analysis

**Supervisor:** Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

**Supervisor's e-mail address:** Petr.Kaplicky@mff.cuni.cz

**Abstract:** In the work we study classical problem of Calculus of Variations: The Newton's problem of optimal aerodynamical profile. We are interested mainly in the case that the body moving in the fluid is radially symmetric. In this case the solution is analytically computable. At first we construct the model, then we occupy ourselves with properties of the solution to this model and its explicit calculation. In the end we summarize some properties of the solution for non-symmetric bodies.

**Keywords:** Calculus of variations, nonconvex optimization problems, Newton's problem of minimal resistance

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Fyzikální motivace

Problém najít tvar tělesa, které se pohybuje v tekutině s minimálním odporem, může být považován za jeden z prvních problémů variačního počtu. Byl publikován Sirem Isaacem Newtonem před více než 300 lety, dokonce pár let před *problémem brachystochorny*, což je jeden z nejpopulárnějších klasických problémů variačního počtu.

V roce 1685 Newton navrhnul jednoduchý model, který popisoval odpor tělesa pohybujícího se v zidealizovaném prostředí, tj. v dostatečně řídkém, nestlačitelném a nevazkém prostředí. Ve svém slavném díle *Principia Mathematica* napsal:

*"In a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances from each other, a globe and a cylinder described on equal diameter move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, (then) the resistance of the globe will be half as great as that of the cylinder... I reckon that this proposition will be not without application in the building of ships."*

Řešení problému závisí na tom, jak definujeme odpor tělesa. Budeme se držet myšlenky, kterou formuloval sám Newton a kterou mnoho autorů po něm dále rozvinulo a propracovalo. Tato práce se bude opírat o výsledky uvedené v [3], [5] a [6], důraz bude kladen především na odvození těchto výsledků.

Uvažujme třídimensionální těleso  $E$ , s maximálním průřezem  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Horní hranice tělesa je dána grafem funkce  $u(x, y) \geq 0$  definované na  $\Omega$ .

Neboli

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq u(x, y)\}. \quad (1.1)$$

Předpokládejme, že těleso se pohybuje s danou konstantní rychlostí ve směru osy  $z$  prostředím, které je tvořeno mnoha nezávislými částicemi stejné hmotnosti, velikosti, rychlosti a se směrem rychlosti rovnoběžným s osou  $z$ . Interakce mezi tělesem a částicemi se řídí zákony popisujícími elastickou srážku, platí tedy zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie. Tření a jiné efekty zanedbáme, stejně tak jako interakce mezi částicemi.

Nyní můžeme vyjádřit změnu hybnosti tělesa způsobenou srážkou s jednou částicí. Zákon zachování hybnosti má tvar

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}', \quad (1.2)$$

kde  $m$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{v}'$  jsou postupně hmotnost částice, vektor rychlosti částice před srážkou a vektor rychlosti částice po srážce. Obdobně  $M$ ,  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{V}'$  pro těleso. Předpokládali jsme, že srážky tělesa s částicemi tekutiny jsou elastické, a tedy velikosti rychlostí částice před srážkou a po srážce se rovnají, označme je  $v = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$ . Pro změnu hybnosti tělesa po srážce s jednou částicí platí

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{V} - \mathbf{V}') = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}). \quad (1.3)$$

Požadujeme, aby se těleso  $E$  pohybovalo pouze v ose  $z$ , tj. zanedbáme posuny v rovině  $(x, y)$  a rotaci. Fixujeme průřez  $\Omega$  tak, aby byl stále kolmý k ose  $z$ . Zkoumáme změnu hybnosti tělesa pouze v ose  $z$ , tedy

$$p_z = m(\|v'\| \sin(2\vartheta - \frac{\pi}{2}) + \|v\|) = mv(1 - \cos(2\vartheta)) = 2mv \sin^2(\vartheta), \quad (1.4)$$

kde  $\vartheta$  je odklon tečny k profilu tělesa v místě srážky od směru rychlosti částice (viz obrázek 1.1).<sup>1</sup> Velikost změny hybnosti tělesa po srážce s jednou částicí je úměrná  $\sin^2(\vartheta)$ . Tento výsledek lze získat také náhledem z geometrie problému aniž bychom museli používat zákon zachování hybnosti.

Odpor tělesa vzhledem k výše uvedeným úvahám o interakcích částic a tělesa závisí jen na jeho geometrii. Vezmeme-li v úvahu, že normála roviny tečné k tělesu v místě srážky má tvar  $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right)$  a jednotkový vektor směru dopadu částice  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = (0, 0, 1)$ , můžeme vyjádřit úhel, který svírají

---

<sup>1</sup>Obrázek lze najít v [3].

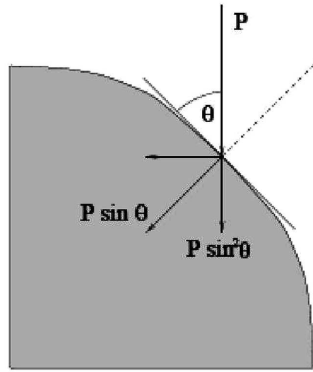


tyto dva vektory

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{a}\|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (1.5)$$

a proto s využitím vztahu pro kosinus rozdílu dvou úhlů dostáváme

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin^2 \vartheta = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{1}{1 + |Du|^2}. \quad (1.6)$$



Obrázek 1.1: Srážka částice s tělesem.

Bereme-li v úvahu všechny částice, které se srazí s tělesem, je celkový odpor tělesa úměrný integrálu

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |Du|^2} dx dy, \quad (1.7)$$

pokud předpokládáme, že se každá částice srazí s tělesem pouze jednou. Takovému požadavku by například vyhovovalo těleso, které by bylo konvexní. V následující kapitole se budeme nejprve věnovat tomu, abychom vhodně zvolili tělesa, respektive třídu funkcí popisující tvar tělesa, pro která budeme hledat minimizér  $\mathcal{F}(u)$ . Proto úvahy o tom, jaké požadavky musí splňovat  $u$ , aby mělo smysl bavit se o minimizéru  $\mathcal{F}(u)$ , nechme na následující sekci.

Ačkoli Newtonův model je pouze hrubá aproximace reálné situace, ukazuje se, že poskytuje dobré výsledky pro tělesa v řídkém plynu s nízkou

rychlostí, pro štíhlá tělesa nebo pro tělesa pohybující se v ideálním plynu s vysokým Machovým číslem (Machovo číslo je definováno jako podíl rychlosti tělesa vzhledem k rychlosti prostředí a rychlosti zvuku v daném prostředí).

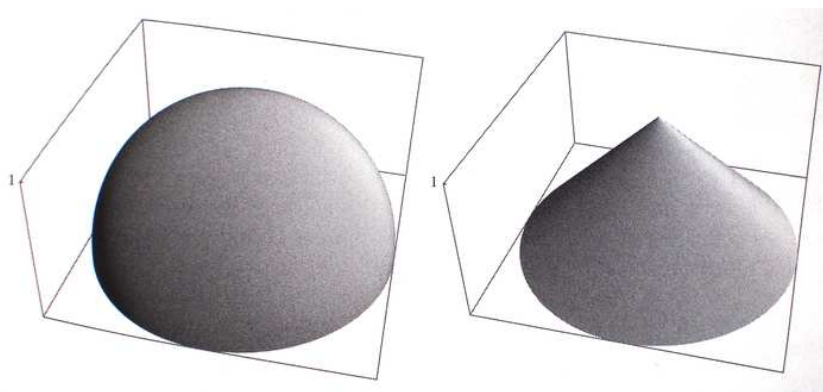
Můžeme také definovat relativní odpor profilu  $u$  vydělením odporu tělesa  $\mathcal{F}(u)$  mírou množiny  $\Omega$

$$C_0(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{|\Omega|}. \quad (1.8)$$

Například pokud by těleso byla polosféra o poloměru  $R$ , funkce  $u$  by měla tvar  $u(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  a relativní odpor

$$C_0(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{\pi R^2} = 0,5$$

jak předpověděl Newton v roce 1685. Na obrázku 1.2 je polosféra a kužel, které mají stejnou hodnotu relativního odporu. <sup>2</sup>



Obrázek 1.2: Tělesa se stejnou hodnotou koeficientu  $C_0$ .

---

<sup>2</sup>Obrázek je převzatý z knihy [3].

# Kapitola 2

## Radiální případ

### 2.1 Model

Newtonův problém optimálního aerodynamického tvaru bývá nejčastěji studován v případě, kdy hledané těleso je radiálně symetrické. Tzn.  $\Omega$  je kruh o poloměru  $R$  a funkce  $u(x, y)$  je radiálně symetrická, tj. je závislá pouze na  $r$ , kde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Po převedení do polárních souřadnic má  $\mathcal{F}(u)$  tvar

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |Du|^2} dx dy = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} dr \quad (2.1)$$

a problém se redukuje pouze na jednodimensionální případ. Máme již variační funkcionál  $\mathcal{F}(u)$  (2.1), který bychom chtěli minimalizovat.<sup>1</sup> Otázkou ovšem zůstává, mezi jakou třídou funkcí by se měl minimizér hledat, aby úloha měla smysl. Postupujme nyní v úvahách podobnou cestou jako v [3] nebo v [6].

Pokud nebudeme klást žádné omezující požadavky na funkci  $u$ , infimum funkcionálu (2.1) bude 0, což je vidět pokud vezmeme například posloupnost

$$u_n(r) = n \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

a pošleme-li  $n \rightarrow \infty$ , je opravdu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{r}{1 + \frac{n^2}{R^2}} = 0. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>V následujícím výpočtu vypustíme faktor  $2\pi$  před variačním integrálem. Výpočet bude přehlednější a později bychom zjistili, že na výsledek nemá vliv (napíše-li se Eulerova rovnice pro Lagrangian variačního integrálu, konstanty před integrálem se zkrátí).

Žádná funkce  $u$  tedy nemůže minimalizovat funkcionál  $\mathcal{F}$ , protože  $\mathcal{F}(u) > 0$  pro každou funkci  $u$ . Bylo by možné se domnívat, že minimizér  $\mathcal{F}$  v předchozím příkladě neexistuje díky neomezenosti posloupnosti  $\{u_n\}$  v  $L^\infty$  normě. Vezměme  $M \in \mathbb{R}$  kladné a uvažujme funkci  $u$  omezenou touto konstantou. Ale dokonce ani tato podmínka

$$0 \leq u \leq M \quad (2.4)$$

nezaručí existenci minimizéru. Posloupnost funkcí  $u_n(r) = M \sin^2(nr)$  splňuje podmínku (2.4), ale pokud se blíže podíváme, jak pro tento případ vypadá funkcionál  $\mathcal{F}(u_n)$ , tak máme

$$\mathcal{F}(u_n) = \int_0^R \frac{r}{1 + M^2 n^2 \sin^2(2nr)} dr < R \int_0^R \frac{1}{1 + M^2 n^2 \sin^2(2nr)} dr. \quad (2.5)$$

Pokračujme dále v odhadování integrálu  $\mathcal{F}(u_n)$  se shora. Jistě platí, že existuje takové  $N \in \mathbb{N}$ , aby platilo  $\frac{\pi N}{2n} - \frac{\pi}{n} < R < \frac{\pi N}{2n} + \frac{\pi}{4n}$ . Potom

$$(0, R) \subset \bigcup_{k=0}^N \left[ -\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}; \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} \right] = S, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_n) &\leq R \int_0^R \frac{1}{1 + M^2 n^2 \sin^2(2nr)} dr < R \int_S \frac{1}{1 + M^2 n^2 \sin^2(2nr)} dr \\ &= \sum_{k=0}^N R \int_{-\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}} \frac{1}{1 + M^2 n^2 \sin^2(2nr)} dr \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{\pi R}{2n\sqrt{1 + M^2 n^2}} = \frac{(N+1)\pi R}{2n\sqrt{1 + M^2 n^2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

z čehož je vidět, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(u_n) = 0 \quad (2.8)$$

a problém opět nemá řešení. Proto je nutné ještě více zúžit třídu povolených funkcí. Jak jsme již naznačili v úvodní sekci, bylo by výhodné uvažovat pouze konvexní tělesa, aby funkcionál  $\mathcal{F}(u)$  vyjadřoval odpor tělesa. Tedy spolu s podmínkou (2.4) na omezenost funkce  $u$  ještě požadujeme, aby byla nerostoucí a konkávní na  $(0, R)$ . Pro každou konkávní funkci existuje derivace

skoro všude, tím pádem je  $\mathcal{F}(u)$  dobře definovaný. Z matematického hlediska je toto omezení na  $u$  dost silné na to, aby zaručilo existenci minimizéru, jak lze vidět např. v 2. kapitole knihy [3].

Snadno lze nahlédnout, že pokud minimizér  $\mathcal{F}(u)$  existuje a funkce  $u$  minimalizuje  $\mathcal{F}(u)$ , pak funkce  $u$  nabývá na krajích intervalu  $[0, R]$  hodnot  $M$  a  $0$ , tj.  $u(0) = M$  a  $u(R) = 0$ . V případě, že by jedna z těchto podmínek nebyla splněna, tak například pro funkci  $w_\varepsilon = (1 + \varepsilon)(u(r) - u(R))$  by platilo

$$\mathcal{F}(w_\varepsilon) = \int_0^R \frac{r}{1 + (1 + \varepsilon)^2 |u'(r)|^2} dr < \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} dr = \mathcal{F}(u) \quad (2.9)$$

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{M}{\max u(r) - u(R)} - 1\right)$$

(Podmínku na  $\varepsilon$  dostáváme z toho, aby funkce  $w_\varepsilon$  splňovala omezení (2.4)  $0 \leq u \leq M$  a aby  $\varepsilon$  bylo kladné). A proto podmínky  $u(0) = M$  a  $u(R) = 0$  mohou být přidány.

Shrneme-li nyní všechny požadavky na  $u$  uvažované výše, potom  $\mathcal{F}(u)$  budeme minimalizovat ve třídě

$$\mathcal{K}_M := \{u \text{ nerostoucí a konkávní na } (0, R), u(0) = M, u(R) = 0\} \quad (2.10)$$

a Newtonův problém bude mít tvar: Hledejme  $u \in \mathcal{K}_M$  tak, aby

$$\mathcal{F}(u) = \inf \left\{ \int_0^R \frac{r}{1 + |h'(r)|^2} dr, h \in \mathcal{K}_M \right\}. \quad (2.11)$$

Na závěr této sekce ještě poznamenejme, že lze uvažovat i jiný požadavek na funkci  $u$  než její omezenost (2.4). Můžeme například chtít, aby těleso  $E$  mělo konečný obsah nebo konečný objem (tento odlišný přístup lze studovat např. v [1]).

Z matematického pohledu je možné hledat minimizéry funkcionálu (1.7) i jinde než mezi konkávními funkcemi, například mezi třídou kvazikonkávních funkcí (což jsou funkce, jejichž horní části  $\{x \in \Omega : u(x) \geq t\}$  jsou konvexní) (více detailů viz [6]). Jiným příkladem vhodné třídy funkcí je třída superharmonických funkcí (např. v [4] je dokázaná existence minimizéru pro tuto třídu funkcí). Avšak z fyzikálního hlediska je nejpřirozenější zabývat se konkávními funkcemi.

## 2.2 Třída nerostoucích funkcí

V předchozí sekci jsme si ujasnili, jaký problém budeme zkoumat. Hledáme  $u \in \mathcal{K}_M$ , že

$$\mathcal{F}(u) = \inf \left\{ \int_0^R \frac{r}{1 + |h'(r)|^2} dr, h \in \mathcal{K}_M \right\}.$$

Funkce  $u \in \mathcal{K}_M$ , tedy mimo jiné požadujeme, aby byla nerostoucí a konkávní. Nyní ukážeme, že funkcionál  $\mathcal{F}(u)$  má stejné infimum ve třídě nerostoucích konkávních funkcí jako ve třídě nerostoucích funkcí. Označme

$$\mathcal{N}_M := \{u \text{ nerostoucí na } (0, R), u(0) = M, u(R) = 0\}$$

Třída všech nerostoucích funkcí je širší než třída všech nerostoucích konkávních funkcí, tj. platí  $\mathcal{K}_M \subset \mathcal{N}_M$ , proto

$$\inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{N}_M\} \leq \inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{K}_M\} \quad (2.12)$$

Než ukážeme opačnou nerovnost, uvedeme teorii k tomu potřebnou. Teorie je převzatá z knihy [2], kde jsou uvedeny i příslušné důkazy. V následujícím bude  $\mu$  jednorozměrná Lebesgueova míra a  $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mu)$  třída všech skalárních  $\mu$ -měřitelných funkcí na  $\mathbb{R}$ , které jsou konečné  $\mu$ -skoro všude.

**Definice 1** *Distribuční funkce  $\mu_f$  funkce  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mu)$  je definována jako  $\mu_f(\lambda) = \mu\{r \in \mathbb{R} : |f(r)| > \lambda\}$ ,  $\lambda \geq 0$ .*

**Definice 2** *Předpokládejme, že  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mu)$ . Nerostoucí přerovnáni funkce  $f$  je funkce  $f^*$  definovaná na  $[0, \infty)$  :  $f^*(r) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq r\}$ .*

**Tvrzení 1** *Nechť  $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mu)$  a  $a \in \mathbb{R}$ . Nerostoucí přerovnáni  $f^*$  je nezáporná nerostoucí zprava spojitá funkce na  $[0, \infty)$ , navíc*

- (a)  $|f| \leq |g|$   $\mu$ -s.v. potom  $f^* \leq g^*$
- (b)  $(af)^* = |a|f^*$
- (c)  $(f + g)(r_1 + r_2) \leq f^*(r_1) + g^*(r_2)$
- (d)  $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$ ,  $\mu_f(f^*(r)) \leq r$  ( $\mu_f(\lambda), f^*(r) < \infty$ )
- (e)  $(|f|^p)^* = (f^*)^p$   $p \in (0, \infty)$
- (f)  $\mu_f(\lambda) = \mu_{f^*}(\lambda)$

**Tvrzení 2 (Hardyho lemma)** *Nechť  $\xi_1$  a  $\xi_2$  jsou nezáporná měřitelné funkce na  $(0, \infty)$  a předpokládejme, že platí*

$$\int_0^t \xi_1(r) dr \leq \int_0^t \xi_2(r) dr \quad \forall t > 0. \quad (2.13)$$

*Nechť  $\eta$  je nezáporná nerostoucí funkce na  $(0, \infty)$ . Pak*

$$\int_0^\infty \xi_1(r)\eta(r)dr \leq \int_0^\infty \xi_2(r)\eta(r)dr. \quad (2.14)$$

Pokusme se dokázat následující nerovnost

$$\int_0^t \frac{dr}{1 + (g(r))^2} \geq \int_0^t \frac{dr}{1 + (g^*(r))^2} \quad t \in (0, R), g \in \mathcal{N}_M. \quad (2.15)$$

Zvolíme-li poté za  $g$  vhodnou funkci, dokážeme tím s využitím Hardyho lemmatu platnost nerovnosti  $\inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{N}_M\} \geq \inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{K}_M\}$ , což nám zbývá k dosažení cíle této sekce.

Přepišme si první integrál z (2.15) pomocí Fubiniho věty, provedeme drobné úpravy, využijme vlastnosti (f) a vlastnosti (e) nerostoucího přerovnění z Tvrzení 1. Tedy

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{dr}{1 + (g^2(r))^2} &= \int_0^{\| \frac{1}{1+g^2(r)} \|_\infty} \mu \left\{ r \in (0, R), \frac{1}{1 + g^2(r)} \geq s \right\} ds \\ &= \int_0^{\| \frac{1}{1+g^2(r)} \|_\infty} \mu \left\{ r \in (0, R), g^2(r) \leq \frac{1-s}{s} \right\} ds \\ &\geq \int_0^{\| \frac{1}{1+g^2(r)} \|_\infty} \mu \left\{ r \in (0, R), (g^2)^*(r) \leq \frac{1-s}{s} \right\} ds \\ &= \int_0^R \frac{dr}{1 + (g^2(r))^*} = \int_0^R \frac{dr}{1 + (g^*(r))^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

a nerovnost (2.15) je dokázána.

Abychom do právě dokázané nerovnosti mohli dosadit vhodné funkce, definujme  $(u')^+(r) := -(u')^*(R-r)$  a  $u^+(r) := M + \int_0^r (u')^+(s) ds$ . Potom  $(u^+)' = (u')^+$  a  $(u^+)'$  je záporná a navíc nerostoucí, z čehož plyne, že  $u^+$  je konkávní. Dosadíme-li nyní do nerovnosti (2.15)  $u'(R-r)$  za  $g(r)$ ,  $(u'(r))^*$  za  $g^*(r)$  (protože  $(u'(R-r))^* = (u'(r))^*$  z definice nerostoucího přerovnění) a využijeme-li výše definované funkce  $u'^+$ , dostáváme pro všechna  $t \in (0, R)$

$$\int_0^t \frac{dr}{1 + (u'(R-r))^2} \geq \int_0^t \frac{dr}{1 + (u'^*(r))^2} = \int_0^t \frac{dr}{1 + (u'^+(R-r))^2}. \quad (2.17)$$

Ověřili jsme tedy předpoklad (2.13) Hardyho lemmatu pro  $\xi_1 := \frac{1}{1+(u^+(R-r))^2}$  a  $\xi_2 := \frac{1}{1+(u'(R-r))^2}$ .

Vezměme funkci  $\eta(r) := (R-r)\chi(0, R)$ , kde  $\chi(0, R)$  je charakteristická funkce intervalu  $(0, R)$ . Funkce  $\eta(r)$  je nezáporná nerostoucí funkce na  $(0, \infty)$ , splňuje tedy předpoklady Hardyho lemmatu (Tvrzení 2). S jeho užitím na (2.17) dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{(R-r)\chi(0, R)}{1+(u'(R-r))^2} dr \geq \int_0^\infty \frac{(R-r)\chi(0, R)}{1+(u^+(R-r))^2} dr \quad (2.18)$$

což lze vyjádřit jako

$$\int_0^R \frac{r}{1+(u'(r))^2} dr \geq \int_0^R \frac{r}{1+(u^+(r))^2} dr \quad (2.19)$$

a tedy  $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(u^+)$ . Tím jsme dokázali  $\inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{N}_M\} \geq \inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{K}_M\}$ , což spolu s opačnou nerovností uvedenou na začátku této sekce dává, že funkcionál  $\mathcal{F}(u)$  má stejné infimum ve třídě nerostoucích konkávních funkcí jako ve třídě nerostoucích funkcí, tj.

$$\inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{N}_M\} = \inf\{\mathcal{F}(u), u \in \mathcal{K}_M\}. \quad (2.20)$$

## 2.3 Existence ploché oblasti

Nechť  $u$  je minimizér  $\mathcal{F}(u)$ , kde  $u \in \mathcal{K}_M$ , tj.  $\mathcal{F}(u) = \inf\{\mathcal{F}(h), h \in \mathcal{K}_M\}$ . Funkce  $u$  musí být nerostoucí a zároveň konkávní funkce. Mohou nastat dvě situace, buď bude  $u$  klesající konkávní funkce na  $(0, R)$ , nebo  $u$  bude konstantní na intervalu  $(0, r_0)$  a dále klesající konkávní na  $(r_0, R)$  pro nějaké  $r_0$ . Zajímá nás, zdali lze zjistit, jaký z těchto dvou případů nastane, respektive jestli každé  $u$  minimalizující  $\mathcal{F}(u)$  má plochý region. Podívejme se blíže na to, zdali existuje takové  $r_0 > 0$ , že  $u(r) = M$  pro každé  $r \in (0, r_0)$  (tj.  $u'(r) = 0$  pro každé  $r \in (0, r_0)$ ).

Předpokládejme, že neexistuje, tj. že nastane první situace a tedy  $u' < 0$  pro každé  $r \in (0, R)$  tam, kde existuje a pokusme se dostat spor. Je-li  $u \in \mathcal{K}_M$  minimizér, musí platit, viz (2.28) níže,

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, M)).$$

Najdeme teď  $\varphi \in C_c^\infty((0, M))$ , které bude neklesající na  $(0, \varepsilon)$ , konstantní na  $(\varepsilon, R - \varepsilon)$  a osově symetrické podle  $\frac{R}{2}$ . Pokud najdeme  $\varphi$  tak, aby



$\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u + \varphi) > 0$ , pak nemůže být  $u$ , které není konstantní na  $(0, \varepsilon)$ , minimizérem a existence ploché oblasti je tedy zaručena. Připravme si nyní tento rozdíl funkcionalů do pohodlnější podoby pro odhadování

$$\begin{aligned}
G &= \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u + \varphi) = \int_0^\varepsilon \left( \frac{r}{1 + u'^2} - \frac{r}{1 + (u' + \varphi')^2} \right) dr \\
&+ \int_{R-\varepsilon}^R \left( \frac{r}{1 + u'^2} - \frac{r}{1 + (u' + \varphi')^2} \right) dr \\
&= \int_0^\varepsilon \left( \frac{r(2u'\varphi' + \varphi'^2)}{(1 + u'^2)[1 + (u' + \varphi')^2]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(R-r)[-2u'(R-r)\varphi'(r) + \varphi'^2(r)]}{[1 + (u'(R-r))^2]\{1 + [u'(R-r) - \varphi'(r)]^2\}} \right) dr,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

kde jsme využili substituce  $R - r$  za  $r$ , abychom druhý integrál převedli do stejných mezí jako ten první. V posledním kroku jsme také využili symetrie  $\varphi$ .

Nyní začněme s odhadováním  $G$  ze zdola. Díky předpokladu je  $u'(r) < 0$  a lze napsat jako  $-|u'(r)|$ . Protože funkce  $u$  je konkávní, můžeme v jednotlivých krocích odhadu nahradit  $u'(r)$  derivací  $u$  v konkrétních bodech tak, aby byly zachovány nerovnosti. Chceme také, aby  $|u'(R)| < \infty$  a  $\varepsilon < \frac{R}{2}$ . Nyní podmínky na  $\varphi$ : víme, že  $\varphi$  je neklesající na  $(0, \varepsilon)$  a požadujeme, aby  $|\varphi'| < |u'|$  a  $\|\varphi'\|_\infty < |u'(\frac{R}{2})|$ . Potom máme

$$\begin{aligned}
G &> \int_0^\varepsilon \left( -3r\varphi'(r)|u'(\frac{R}{2})| + \frac{\frac{R}{2}\varphi'(r)|u'(\frac{R}{2})|}{(1 + 4|u'(R)|^2)(1 + u'(R)^2)} \right) dr \\
&= \int_0^\varepsilon \varphi'(r)|u'(\frac{R}{2})| \left( \frac{R}{2(1 + 4|u'(R)|^2)(1 + u'(R)^2)} - 3r \right) > 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

pro dostatečně malé  $\varepsilon$ . Tím jsme dostali spor a existence ploché oblasti je zaručena.

Mohli by vyvstat pochybnosti, zdali opravdu existuje taková funkce  $\varphi$ , která by splňovala všechny výše uvedené požadavky. Připomeňme si, jaké podmínky jsme kladli na  $\varphi$ . Funkce  $\varphi \in C_c^\infty((0, M))$  je neklesající na  $(0, \varepsilon)$ , konstantní na  $(\varepsilon, R - \varepsilon)$ , osově symetrické podle  $\frac{R}{2}$ ,  $|\varphi'| < |u'|$  a  $\|\varphi'\|_\infty < |u'(\frac{R}{2})|$ .

Dle předpokladu na  $u$  víme, že  $u' < 0$  na  $(0, R)$ , potom existuje  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$  tak, že  $u'(r) \leq u'(\varepsilon_1) < 0$  pro  $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon)$ .

Funkci  $\varphi$  s těmito vlastnostmi můžeme konstruovat například takto:

$$\varphi(r) := \gamma \int_0^r E\left(\frac{s - \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} + \frac{s - \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1}\right) ds, \quad (2.23)$$

kde

$$E(s) = \begin{cases} 0 & s \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ e^{-\frac{1}{1-s^2}} & s \in (-1, 1) \end{cases} \quad (2.24)$$

a  $\gamma$  je vhodná normovací konstanta, aby  $\varphi$  bylo dostatečně malé.

Dokázali jsme, že každé optimální řešení radiálního Newtonova problému musí mít plochý region. Tj. speciálně je-li  $u \in \mathcal{K}_M$  minimizérem  $\mathcal{F}(u)$ , pak existuje takové  $r_0 > 0$ , že  $u(r) = M$  pro každé  $r \in (0, r_0)$ .

## 2.4 Nepřímé metody variačního počtu

Předtím, než se budeme blíže věnovat samotné minimalizaci, je vhodné shrnout některé základní vztahy variačního počtu, konkrétně se jedná o ty vztahy, které popisují nepřímé metody řešení variačních problémů a které budou při výpočtech použity. Tvrzení a lemmata jsou uvedena bez odvození nebo důkazů, ty lze nalézt například v [5].

Funkcionál  $\mathcal{F}$  typu

$$\mathcal{F}(u) = \int_I L(x, u(x), u'(x)) dx \quad I = (a, b) \in \mathbb{R} \quad (2.25)$$

nazvěme variačním integrálem. Integrand  $L(x, y, z)$  je reálná funkce, obvykle nazývaná Lagrangian variačního integrálu  $\mathcal{F}$ . Většinou předpokládáme, že  $L$  je definovaný na  $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  a je minimálně třídy  $C^1$ . Potom je variační integrál dobře definovaný pro jakékoli  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ . Často můžeme uvažovat  $\mathcal{F}$  jen na nějakém okolí funkce  $u$ . Pak stačí uvažovat  $L \in C^1(\mathcal{U})$ , kde  $\mathcal{U}$  značí otevřenou podmnožinu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  obsahující 1-graf  $\{(x, u(x), u'(x)) : x \in \bar{I}\}$ , neboli  $\mathcal{F}(v)$  je definováno pro jakékoli  $v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  splňující  $\|u - v\|_{C^1(I)} < \delta$  pro dostatečně malé  $\delta > 0$ . Definujme funkci

$$\Phi(\epsilon) := \mathcal{F}(u + \epsilon\varphi) \quad (2.26)$$

kde  $|\epsilon| < \epsilon_0$ ,  $\epsilon_0 := \frac{\delta}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}$  a  $\varphi \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ . Navíc  $\Phi$  je třídy  $C^1$  na  $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ . Lze proto vyjádřit

$$\Phi'(0) = \int_I \left\{ \frac{\partial L(x, u, u')}{\partial y} \cdot \varphi + \frac{\partial L(x, u, u')}{\partial z} \cdot \varphi' \right\} dx. \quad (2.27)$$

**Definice 3** První variace  $\mathcal{F}$  v  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  a ve směru  $\varphi \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  je  $\Phi'(0)$  a značí se  $\delta\mathcal{F}(u, \varphi)$ .

**Definice 4** Funkce  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  splňující  $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$  pro všechna  $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N)$  se nazývá slabá extrémála funkcionálu  $\mathcal{F}$ .

**Definice 5** Splňuje-li  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N), \quad (2.28)$$

nazývá se slabý minimizér  $\mathcal{F}$ . Splňuje-li  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(I, \mathbb{R}^N)$  předchozí vztah, nazývá se minimizér.

**Tvrzení 3** Je-li  $u$  slabý minimizér  $\mathcal{F}$ , pak  $u$  je slabá extrémála  $\mathcal{F}$ .

**Lemma 1 (Fundamentální lemma)** Necht'  $f \in C^0(I)$  splňuje

$$\int_I f(x)\eta(x)dx = 0 \quad \forall \eta \in C_c^\infty(I). \quad (2.29)$$

Pak  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$  (Pokud  $f \in L^1(I)$  splňuje vztah (2.29), pak  $f(x) = 0$  s.v. na  $I$ ).

**Lemma 2 (DuBois-Reymondovo lemma)** Necht'  $f \in L^1(I)$  splňuje

$$\int_I f(x)\eta'(x)dx = 0 \quad \forall \eta \in C_c^\infty(I). \quad (2.30)$$

Pak existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$ , že  $f(x) = c$  s.v. na  $I$ .

**Tvrzení 4** Necht'  $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  je slabá extrémála  $\mathcal{F}$ , t.j.

$$\int_I \left\{ \frac{\partial L(x, u, u')}{\partial y} \cdot \varphi + \frac{\partial L(x, u, u')}{\partial z} \cdot \varphi' \right\} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Pak existuje konstantní vektor  $c \in \mathbb{R}^N$ , že

$$\frac{\partial L(x, u(x), u'(x))}{\partial z} = c + \int_a^x \frac{\partial L(t, u(t), u'(t))}{\partial y} dt \quad \forall x \in (a, b) = I. \quad (2.31)$$

Rovnici (2.31) se říká DuBois-Reymondova rovnice nebo také Eulerova rovnice v integrálním tvaru.

**Tvrzení 5** *Nechť  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  je slabá extrémála  $\mathcal{F}$  a předpokládejme, že  $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$  a  $L \in C^2(\mathcal{U})$  pro nějaké okolí  $\mathcal{U}$  1-grafu  $u$ . Pak  $u$  splňuje*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L(x, u(x), u'(x))}{\partial z} \right) - \frac{\partial L(x, u(x), u'(x))}{\partial y} = 0 \quad \text{na } I. \quad (2.32)$$

*Rovnici (2.32) nazýváme Eulerovou rovnicí.*

**Definice 6** *Řekneme, že libovolné řešení  $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$  Eulerovy rovnice (2.32) je extrémála  $\mathcal{F}$ .*

**Tvrzení 6** *Je-li  $u$  minimizér  $\mathcal{F}$ , pak  $u$  je extrémála  $\mathcal{F}$ .*

**Poznámka 1** *Extremály nemusejí nutně být minimizéry. Například lokální minima nebo sedlové body se mohou vyskytnout jako řešení.*

V následující sekci budeme chtít minimalizovat variační integrál ve vhodné třídě funkcí. Pro minimizér, respektive slabý minimizér musí být první variace rovná nule, tedy

$$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = \int_I \left( \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \varphi + \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \varphi' \right) dx = 0, \quad (2.33)$$

pokud  $L$  a  $u$  jsou dostatečně hladké, tak po integraci per partes druhého členu dostáváme

$$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = \int_I \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial z} \right) \cdot \varphi ds + \left[ \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \varphi \right]_a^b = 0. \quad (2.34)$$

Máme-li  $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ , jak je pro minimizér, respektive slabý minimizér požadováno, jsou hodnoty  $\varphi$  na krajích intervalu  $I$  nulové a užitím fundamentálního lemmatu (2.29) dostáváme Eulerovu rovnici (viz Tvrzení (5)).

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (2.35)$$

Pokud jsou hodnoty funkce  $u$  na krajích intervalu  $I$  pevné, pak je přirozené požadovat, aby hodnoty  $\varphi$  byly na krajích intervalu  $I$  nulové, tj. aby funkce  $\varphi$  měla kompaktní nosič v  $I$ . Pokud ale hodnoty  $u$  na krajích  $I$  fixované nejsou, může být  $\varphi$  na krajích  $I$  libovolné. Má tedy smysl zkoumat variaci i ve směrech, které nejsou nulové na krajích. S využitím Eulerovy rovnice (2.35) dostáváme ze vztahu (2.34) tzv. přirozenou hraniční podmínku

$$\frac{\partial L(b, u(b), u'(b))}{\partial z} \varphi(b) - \frac{\partial L(a, u(a), u'(a))}{\partial z} \varphi(a) = 0, \quad (2.36)$$

čímž dostáváme další užitečné informace o chování minimizéru  $u$  v krajních bodech intervalu  $I$ .

## 2.5 Minimalizace funkcionálu

V této sekci vypočítáme kandidáta na optimální řešení radiálního Newtonova problému, tj. nalezneme přesné vyjádření funkce  $u$ , která bude kandidátem na řešení

$$\mathcal{F}(u) = \inf \left\{ \int_0^R \frac{r}{1 + |h'(r)|^2} dr, h \in \mathcal{K}_M \right\}.$$

Vyjdeme z postupu uvedeného v [5]. V předchozích částech práce jsme ukázali, že každý minimizér  $u$  funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  má plochý region, tj. funkce  $u$  je konstantní na  $(0, r_0)$ . Protože uvažujeme  $u \in \mathcal{K}_M$ , je  $u(r) = M$  pro každé  $r \in (0, r_0)$ . Funkce  $u$  je spojitá na celém  $(0, R)$ , avšak není třídy  $C^1([0, R])$  (později ukážeme, že  $u'(r_0+) = -1$ ), tím pádem nemůžeme využít teorii uvedenou v předchozí sekci. Na intervalu  $(r_0, R)$  je  $u$  ryze monotónní, prostá, dostatečně hladká, proto existuje její inverze. Toho můžeme využít k tomu, abychom vyjádřily problém (2.11) ve formě, která by umožnila aplikovat předchozí teorii.

Uvažujme funkci  $v(s) := u^{-1}(M - s)$ ,  $s \in (0, M)$ . Vyjádříme-li si funkci  $v$  pomocí  $u$ , zjistíme některé její vlastnosti. Podle pravidla o derivaci složené funkce lze spočítat:

$$\begin{aligned} u'(r) &= \frac{1}{(u^{-1})'(u(r))} = -\frac{1}{v'(M - u(r))} \quad \forall r \in (r_0, R) \\ u'(r) &= 0 \quad \forall r \in (0, r_0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pokud spočítáme druhé derivace  $v$  ze vztahu (2.37), máme

$$v''(s) = \frac{u''(u^{-1}(M - s))}{|u'(u^{-1}(M - s))|^3}. \quad (2.38)$$

Z (2.38) je vidět, že  $\text{sign}(u'') = \text{sign}(v'')$ . Protože  $u \in \mathcal{K}_M$  je konkávní ( $u'' < 0$ ), je i  $v$  konkávní. Abychom mohli použít teorii, požadujeme  $v \in C^1([0, M] \cap C^2((0, M)))$ . Shrňme vlastnosti  $v$ , které jsme doposud zjistili a které požadujeme a třídu funkcí do níž patří  $v$  označme  $\mathcal{R}_R$ , tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_R &:= \{v \text{ rostoucí konkávní na } (0, M), \\ &v \in C^1([0, M] \cap C^2((0, M))), v(0) \geq 0, v(M) = R\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Derivace (2.37) dosadíme do funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  a po použití substituce

$s = M - u(r)$  má funkcionál  $\mathcal{F}$  tvar

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &= \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} dr = \int_0^{r_0} r dr + \int_{r_0}^R \frac{r}{1 + \left| \frac{1}{v'(M-u(r))} \right|^2} dr \\
&= \frac{|v(0)|^2}{2} + \int_0^M \frac{vv'^3}{1 + |v'|^2} ds \\
&= \frac{|v(0)|^2}{2} + \int_0^M \frac{(\frac{1}{2}v^2)'((v'^2 + 1) - 1)}{1 + v'^2} \\
&= \frac{R^2}{2} - \int_0^M \frac{vv'}{1 + v'^2} ds
\end{aligned} \tag{2.40}$$

a získáme minimalizační problém v tradiční podobě:

$$\inf \left\{ \frac{R^2}{2} + \int_0^M -\frac{vv'}{1 + v'^2} ds; v \in \mathcal{R}_R \right\}. \tag{2.41}$$

Problém je už v dostatečně vhodném tvaru, abychom mohli aplikovat teorii.

Podívejme se, zdali nelze zjistit chování  $v'$  v bodě 0. Dosadíme do vztahu (2.36) Lagrangián  $L = -\frac{vv'}{1+v'^2}$ , máme

$$\frac{v(M) - v(M)v'(M)^2}{(1 + v(M)^2)^2} \cdot \varphi(M) - \frac{v(0) - v(0)v'(0)^2}{(1 + v(0)^2)^2} \cdot \varphi(0) = 0. \tag{2.42}$$

Uvažme, že máme-li  $v(M)$  pevné a  $v(0) \geq 0$ , musí  $\varphi$  splňovat podmínky  $\varphi(M) = 0$  a  $\varphi(0) \geq 0$ . Díky tomu je první člen rovnice (2.42) nulový a dostáváme vztah

$$v(0)\varphi(0)(1 - v'(0)^2) = 0 \tag{2.43}$$

a protože  $v$  je rostoucí, dostáváme podmínku  $v'(0) = 1$ .

Vyjádríme si nyní Eulerovu rovnici (2.32) pro  $L = -\frac{vv'}{1+v'^2}$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{vv'}{1 + v'^2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{vv'}{1 + v'^2} \right) = 0, \tag{2.44}$$

což po proderivování dává

$$\left( \frac{v - vv'^2}{(1 + v'^2)^2} \right)' = \frac{v'}{1 + v'^2}. \tag{2.45}$$

Odtud lehkou úpravou dostaneme

$$-v' \frac{v - vv'^2}{(1 + v'^2)^2} + \frac{vv'}{1 + v'^2} = c. \quad (2.46)$$

Po převedení na společného jmenovatele dostáváme

$$v \frac{v'^3}{(1 + v'^2)^2} = \frac{c}{2}. \quad (2.47)$$

Připomeňme, že  $v$  je konkávní, tedy  $v'$  je klesající. Aplikujme substituci  $z = v'(s)$ , kde  $v'(s) \in (0, 1]$  a uvažujme funkci  $w(z) := v((v')^{-1}(z))$  definovanou na  $(0, 1]$ . Potom  $w(v'(s)) = v(s)$  a

$$w(z) = v(s) = \frac{c}{2} \frac{(1 + v'(s)^2)^2}{v'(s)^3} = \frac{c}{2} \frac{(1 + z^2)^2}{z^3}. \quad (2.48)$$

Je-li  $z = v'(s)$ , můžeme vyjádřit  $s$  jako  $s = (v')^{-1}(z) = v^{-1}(v((v')^{-1}(z))) = v^{-1}(w(z))$ . Pak dle pravidla pro derivaci inverzní funkce lze vyjádřit

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{v'(v^{-1}(w(z)))} \cdot \frac{dw(z)}{dz} = \frac{1}{v'((v')^{-1}(z))} \cdot \frac{dw(z)}{dz} = \frac{c}{2} (z^{-1} - 2z^{-3} - 3z^{-5}). \quad (2.49)$$

Po integraci rovnice (2.49) máme

$$s(z) = \frac{c}{2} \left( \ln z + z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-4} + A \right). \quad (2.50)$$

Uvážíme-li, že  $z = v'(s)$  a  $v'(0) = 1$ , pak  $s(1) = 0$ . S tímto tvrzením a s předpokladem  $c \neq 0$  je  $A = -\frac{7}{4}$ . Zavedme funkci  $f(z)$  jako podíl  $s(z)$  a  $w(z)$ . Máme tedy

$$f(z) = \frac{z^3}{(1 + z^2)^2} \left( \ln z + z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-4} - \frac{7}{4} \right). \quad (2.51)$$

Tato funkce je klesající, definovaná na intervalu  $(0, 1)$  a hned také můžeme vidět, že  $f(1) = 0$  a  $\lim_{z \rightarrow 0^+} f(z) = \infty$ . Funkce  $f(z)$  je spojitá a dle Darbouxovy věty existuje právě jedno  $Z \in (0, 1)$ , že  $f(Z) = \frac{M}{R}$ . Protože  $f(z) = \frac{s(z)}{w(z)}$  a víme že existuje bod  $v'(M)$ , kde  $s = M$ ,  $w(v'(M)) = R$ , musí tedy být  $Z = v'(M)$ ,  $w(Z) = R$  a  $s(Z) = M$ . Můžeme vyjádřit  $R$  pomocí  $Z$ :

$$R = \frac{c(1+Z^2)^2}{2Z^3}. \quad (2.52)$$

Lze také vyjádřit konstantu  $c$ :  $c = \frac{2RZ^3}{(1+Z^2)^2}$  a můžeme definovat

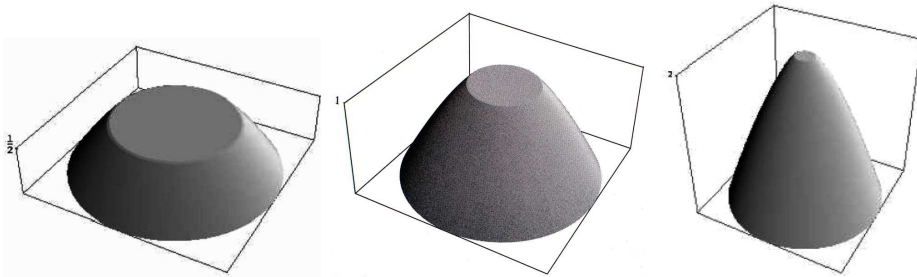
$$r_0 := v(0) = w(1) = \frac{4RZ^3}{(1+Z^2)^2}. \quad (2.53)$$

Nyní můžeme vyjádřit funkci  $u$  pomocí výše odvozených vztahů. Je-li  $v(s(z)) = w(z)$ , je jistě také  $u(w(z)) = u(v(s(z))) = M - s(z)$  a  $r(z) = v(s(z)) = w(z)$ . Funkce  $u$  je konstantní na intervalu  $(0, r_0)$  a ryze monotónní (klesající) na intervalu  $(r_0, R)$ , kde je parametrizována pomocí  $z$ . Řešení má v parametrické podobě tvar:

$$\begin{cases} u(r) = M & r \in (0, r_0) \\ \begin{cases} u(z) = M - \frac{r_0}{4} \left( \ln z + z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-4} - \frac{7}{4} \right) \\ r(z) = \frac{r_0}{4} \frac{(1+z^2)^2}{z^3} \end{cases} & z \in (Z, 1) \end{cases} \quad (2.54)$$

Nebo vyjádřeno s pomocí  $f(z)$ :

$$\begin{cases} u(r) = M & r \in (0, r_0) \\ \begin{cases} u(z) = M - \frac{r_0}{4} f(z) \frac{(1+z^2)^2}{z^3} \\ r(z) = \frac{r_0}{4} \frac{(1+z^2)^2}{z^3} \end{cases} & z \in (Z, 1) \end{cases} \quad (2.55)$$



Obrázek 2.1: Optimální řešení radiálně symetrického Newtonova problému pro  $M = \frac{R}{2}$ ,  $M = R$  a  $M = 2R$ .



Řešení pro různé poměry  $M$  a  $R$  je znázorněno na Obrázku 2.1.<sup>2</sup>

Za předpokladu, že minimizér leží ve třídě funkcí  $\mathcal{R}_R$ , jsme našli extrémálu funkcionálu  $\mathcal{F}(v)$  (2.41) vyjádřenou pomocí funkce  $u$  ve tvaru (2.54) respektive (2.55). Zatím není jasné, zdali je tato extrémála řešení původního problému (2.11). Na to částečně odpovíme v následující sekci.

## 2.6 Existence minimizéru

Nalezli jsme extrémálu funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  ve zvolené třídě funkcí  $\mathcal{K}_M$ . Tj. řešili jsme Eulerovu rovnici pro Lagrangián  $L(v)$ , a tak našli extrémálu problému (2.41) a poté jsme vyjádřili toto řešení pomocí funkce  $u$ . Pro jedno pevné  $r_0 > 0$  (stejně  $r_0$ , jaké jsme spočítali v minulé sekci) ukážeme, že tato extrémála je opravdu minimizér radiálního Newtonova problému. Aby byla existence minimizéru dokázaná korektně, musely by se tyto úvahy zobecnit a dokazovat existenci mezi všemi přípustnými  $r_0$ .

Pro pevné  $r_0$  definujme funkcionál  $\mathcal{F}_0(u) := \int_{r_0}^R L dr = \int_{r_0}^R \frac{r}{1+|u'(r)|^2} dr$ . Buď  $u_1$  extrémála (2.54) funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  nalezená v minulé sekci. Potom  $u_1$  je také extrémálou funkcionálu  $\mathcal{F}_0(u)$  na množině  $\{u(r_0) = M, u(R) = 0, u \in C^1([r_0, R]) \cap C^2((r_0, R))\}$ . Postup výpočtu by byl úplně stejný jako v případě  $\mathcal{F}(u)$ , hledali bychom pouze tvar funkce  $u_1$  od  $r_0$  do  $R$ .

Vyšetřeme průběh Lagrangiánu

$$L(r, u, z) = \frac{r}{1+z^2} \quad (2.56)$$

vzhledem k  $z$  pro nějaké pevné kladné  $r$ . Z vyjádření druhých parciálních derivací podle  $z$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \frac{2r(3z^2 - 1)}{(1+z^2)^3} \quad (2.57)$$

je vidět, že  $L$  má v bodě  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$  inflexní bod a pro  $z \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$  je  $L$  striktně konvexní a tedy i  $\mathcal{F}_0(u)$  je striktně konvexní na třídě  $\mathcal{A} := \{u \in C^1([r_0, R]) \cap C^2((r_0, R)), u' < -\frac{\sqrt{3}}{3}, u(R) = 0, u(r_0) = M\}$ .

Pokud  $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ , platí pro  $\mathcal{F}$  konvexní kombinace

$$\mathcal{F}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) < \lambda \mathcal{F}(u_1) + (1-\lambda)\mathcal{F}(u_2) \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (2.58)$$

<sup>2</sup>Obrázky je možné nalézt v knize [3].

Nyní se podívejme, jestli z předchozích výpočtů nelze zjistit bližší informace o velikosti derivace extrémály  $u_1$ . Na začátku minimalizace funkcionálu jsme použili vztah (2.37) pro derivaci složené funkce

$$u'(r) = \frac{1}{v'(M - u(r))} \quad \forall r \in (r_0, R).$$

Pokud do tohoto vztahu dosadíme podmínku  $v'(0) = 1$ , dostáváme, že  $|u'_1(r_0+)| = 1$ . Uvažujeme-li pouze konkávní funkce, nemůže být velikost derivace na intervalu  $(r_0, R)$  menší než jedna. Tedy  $u_1 \in \mathcal{A}$ , dokonce

$$|u'_1(r)| \geq 1 \quad \forall r \in [r_0, R]. \quad (2.59)$$

Protože  $u_1$  je extrémála  $\mathcal{F}_0(u)$ , je variace  $\mathcal{F}_0(u)$  v  $u_1$  ve všech směrech nulová, kde směr  $\tilde{u} \in \{\tilde{u} \in C^1([r_0, R]), \tilde{u}(r_0) = \tilde{u}(R) = 0\}$ . To můžeme též zapsat jako

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : |\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_1 + \varepsilon \tilde{u})| \leq \varepsilon \delta, \quad (2.60)$$

kde  $u_1 + \varepsilon \tilde{u} \in \mathcal{A}$ . Bud'  $u_2 \in \mathcal{A}$ . Za směr  $\tilde{u}$  vezmeme  $u_2 - u_1$  a z předchozí nerovnosti (2.60) uijeme jen jednu část, tedy

$$\mathcal{F}(u_1) - \varepsilon \delta \leq \mathcal{F}(u_1 + \varepsilon(u_2 - u_1)) \quad (2.61)$$

a užitím konvexity (2.58) dostáváme

$$\mathcal{F}(u_1) - \varepsilon \delta < \varepsilon \mathcal{F}(u_2) + (1 - \varepsilon) \mathcal{F}(u_1) \quad (2.62)$$

a po úpravě

$$\mathcal{F}(u_1) - \delta < \mathcal{F}(u_2) \quad \forall \delta > 0, \quad (2.63)$$

z čehož plyne

$$\mathcal{F}(u_1) \leq \mathcal{F}(u_2) \quad (2.64)$$

ale rovnost nemůže nastat kvůli striktní konvexitě  $\mathcal{F}_0(u)$  na  $\mathcal{A}$ . Z (2.64) vidíme, že extrémála  $u_1$  nalezená v předchozí sekci je minimizér  $\mathcal{F}_0(u)$  pro pevné  $r_0$  ve třídě  $\mathcal{A}$ .

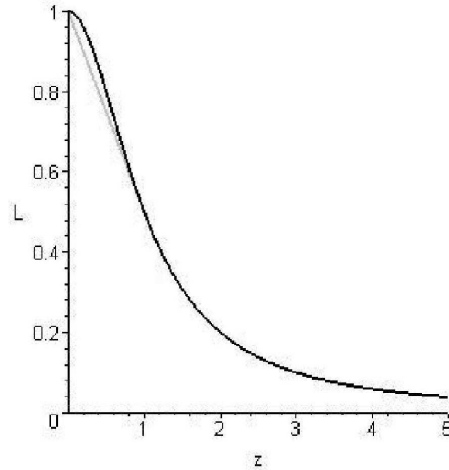
Nyní ukážeme, že  $u_1$  je minimizérem  $\mathcal{F}_0(u)$  na širší třídě  $\tilde{\mathcal{A}} := \{u \in C^1([r_0, R]) \cup C^2((r_0, R)), u \text{ nerostoucí}, u(R) = 0, u(r_0) = M\}$ .

Kdyby byl Lagrangian  $L$  (2.56) konvexní pro všechna  $z \in (0, \infty)$ , z konvexity  $\mathcal{F}_0(u)$  na  $\tilde{\mathcal{A}}$  by plynulo  $\mathcal{F}_0(u_1) = \inf\{\mathcal{F}_0(h), h \in \tilde{\mathcal{A}}\}$ , ale  $L$  je konvexní až pro  $z \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Uvažujme proto funkci  $L^{**}(r, u, z)$ , která je největší funkce

taková, že platí  $L^{**} \leq L$  a je konvexní vzhledem k  $z$ . Funkce  $L^{**}$  se nazývá konvexní relaxace <sup>3</sup> k  $L$  a pro náš problém má tvar

$$L^{**} = \begin{cases} r(1 - \frac{z}{2}) & z \in [0, 1] \\ \frac{r}{1+z^2} & z > 1 \end{cases} \quad (2.65)$$

Jak můžeme vidět na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Lagrangián  $L$  a jeho konvexní relaxace pro  $r = 1$ ,  $z = u'$ .

Z definice  $L^{**}$  je patrné, že  $L^{**} = L$  pro  $|u'| \geq 1$ . Tedy díky (2.59) je  $u_1$  extrémála  $\mathcal{F}^{**}(u) = \int_{r_0}^R L^{**} dr$ . Ale dle definice víme, že  $\mathcal{F}^{**}(u)$  je konvexní, a proto  $u_1$  je minimizérem  $\mathcal{F}^{**}(u)$ . Víme, že  $\mathcal{F}_0(u) \geq \mathcal{F}^{**}(u)$  a  $\mathcal{F}_0(u_1) = \mathcal{F}^{**}(u_1)$ , proto je  $u_1$  minimizérem  $\mathcal{F}_0(u)$ .

Na závěr této sekce udělejme sumarizaci výsledků získaných v celé kapitole, tj. co vše se nám povedlo zjistit o radiálním Newtonově problému. Pro daný model zkonstruovaný v první kapitole jsme nejprve vybrali vhodnou třídu funkcí, mezi nimiž budeme minimizér hledat. Příslušnými příklady jsme ukázali, že kdybychom neuvedli žádné restriktivní požadavky nebo nedostatečné požadavky na funkci  $u$ , minimizér funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  by vůbec neexistoval. Jako vhodnou třídu funkcí jsme zvolili třídu všech nerostoucích konkávních funkcí, která vyhovuje fyzikálnímu předpokladu, aby těleso bylo konvexní. Navíc jsme požadovali funkci  $u$  omezenou. Dále jsme ukázali, že

<sup>3</sup>Například P. Marcellini v [8] hojně pracuje s konvexní relaxací při studiu Newtonova problému.

pokud minimizér existuje, bude stejný jako ve třídě všech nerostoucích funkcí s  $u$  omezenou. V následující sekci jsme dokázali existenci ploché oblasti pro každý minimizér  $u$  funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$ . Poté jsme pomocí nepřímých metod variačního počtu vypočetli extrémálu funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  a v této sekci jsme částečně ukázali, že tato extrémála je opravdu minimizérem  $\mathcal{F}(u)$ . V poslední kapitole ještě uvedeme výsledky týkající se obecného Newtonova problému.

# Kapitola 3

## Neradiální případ

### 3.1 Vlastnosti obecného řešení

Newtonův problém minimálního odporu pro obecný radiálně nesymetrický tvar tělesa  $E$  je podstatně složitější než pro radiálně symetrické těleso. Optimální řešení nebylo zcela charakterizováno dokonce ani v případě, kdy maximální průřez tělesa  $\Omega$  je kruh v  $\mathbb{R}^2$ . Proto v této závěrečné sekci pouze shrneme známé výsledky, které jsou uvedené např. v [3] nebo v [6].

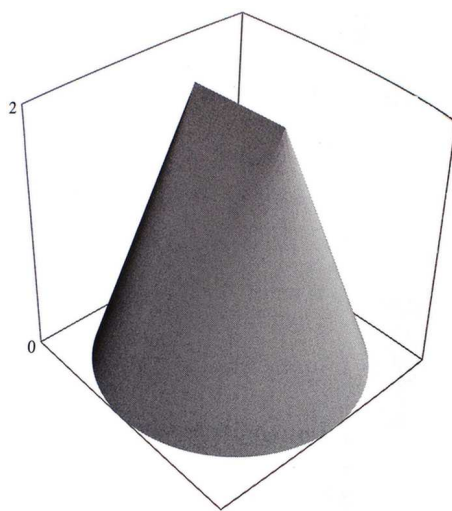
Podobně jako v radiálním případě se nejčastěji hledá minimizér funkcionálu  $\mathcal{F}(u)$  (1.7) mezi třídou konkávních funkcí a je požadovaná omezující podmínka (2.4) na  $u : 0 \leq u \leq M$ . Nechť  $\Omega$  je otevřená konvexní podmnožina  $\mathbb{R}^N$  (pro fyzikální případ  $N = 2$ ). Problém má tvar: Hledejme  $u$  konkávní na  $\Omega$ ,  $u \in (0, M)$ , že

$$F(u) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |Dh|^2} dx, h \text{ je konkávní na } \Omega, 0 \leq h \leq M \right\} \quad (3.1)$$

Uvážíme-li, že každá konkávní funkce  $h$  je lokálně lipschitzovsky spojitá na  $\Omega$ , pak  $Dh \in L_{loc}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$  (viz [6]) a integrál v (3.1) je dobře definovaný. Pro obecné řešení jsou známa následující fakta

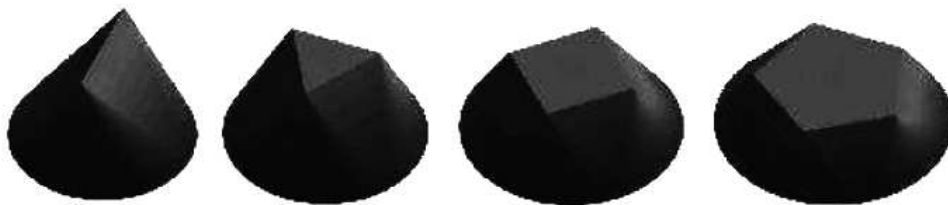
- Pro každé  $M > 0$  má problém (3.1) alespoň jedno řešení. (viz [6] nebo 2. kapitola [3])
- V případě, že  $\Omega$  je kruh, není optimální řešení radiální (tento fakt ukážeme v následující sekci). Například na obrázku 3.1 je neradiální optimální řešení, které bylo získáno numerickým výpočtem.

- Okamžitým důsledkem neradiality je tvrzení, že problém (3.1) nemá jednoznačné řešení pro případ, kdy  $\Omega$  je kruh. Vskutku, pootočíme-li libovolné neradiální řešení  $u$ , dostáváme jiné řešení problému a tím pádem je počet řešení nekonečný (viz [3]).
- Je-li řešení  $u$  třídy  $C^2$ , potom existuje plochý region, tj. existuje  $\Omega_0 \subset \Omega$  tak, že  $u = M$  na  $\Omega_0$ . Obecně však doposud není známo, zdali má každé optimální řešení plochý region (viz 1. a 2. kapitola knihy [3]).
- Každé řešení má vlastnost, že  $|Du| \notin (0, 1)$  (Důkaz uveden na str. 38 a 39 knihy [3]).



Obrázek 3.1: Příklad neradiálního řešení Newtonova problému, kdy  $\Omega$  je kruh, nalezený P.Gausonim (viz [3]) a nazývaný "Šroubovák". "Plochý region" je v tomto případě úsečka.

Například v článku [7] se autoři zabývali hledáním minimizéru pro třídimensionální těleso s maximální výškou  $M$  mezi konvexně rozšiřitelnými funkcemi definovanými na kruhu pro obecný radiálně nesymetrický případ. Dokázali, že minimizér v této třídě funkcí má plochý region  $\Omega_0$  ve tvaru pravidelného mnohoúhelníku, kde počet stran mnohoúhelníku roste s klesající výškou tělesa.



Obrázek 3.2: Tělesa s plochou oblastí ve tvaru pravidelného  $n$ -úhelníka.

### 3.2 Radiální symetrie optimálního řešení

Ukážeme (stejným postupem jako v knize [3]), že pokud  $\Omega$  je kruh, tak optimální řešení Newtonova problému

$$F(u) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |Dh|^2} dx : 0 \leq h \leq M, h \text{ konkávní na } \Omega \right\}$$

není radiální. Nechť  $u$  je optimální radiální řešení (2.54). Můžeme vidět, že mimo kruh o poloměru  $r_0$ , kde  $u \equiv M$ , je funkce  $u$  hladká, ryze konkávní a nenabývá maximální hodnoty  $M$ . Lze vyjádřit druhou variaci  $\mathcal{F}(u)$  ve směru  $\varphi$ , přičemž  $\varphi$  má kompaktní nosič v  $\omega := \Omega - B_{r_0}(0)$  ( $B_{r_0}(0)$  značí kruh o poloměru  $r_0$  a středu 0). Je-li  $u$  minimizér, potom musí platit  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \varphi) \geq 0$ , tedy

$$\int_{\omega} \frac{2(4(Du D\varphi)^2 - (1 + |Du|^2)|D\varphi|^2)}{(1 + |Du|^2)^3} dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\omega). \quad (3.2)$$

Separujeme-li proměnné a vyjádříme funkci  $\varphi$  jako  $\eta(r)\psi(\vartheta)$ , kde  $\psi(\vartheta)$  je  $2\pi$  periodická hladká funkce,  $\text{supp} \eta \in (r_0, R)$ , dostáváme

$$\int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} r \left[ \frac{4|u'(r)\eta'(r)\psi(\vartheta)|^2}{(1 + |u'(r)|^2)^3} - \frac{|\eta'(r)\psi(\vartheta)|^2 + |\eta(r)\psi'(\vartheta)|^2 r^{-2}}{(1 + |u'(r)|^2)^2} \right] d\vartheta dr \geq 0. \quad (3.3)$$

Užijeme-li  $\psi(k\vartheta)$  místo  $\psi(\vartheta)$ , předchozí nerovnost přejde v

$$\int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} r \left[ \frac{4|u'(r)\eta'(r)\psi(\vartheta)|^2}{(1 + |u'(r)|^2)^3} - \frac{|\eta'(r)\psi(\vartheta)|^2 + k^2|\eta(r)\psi'(\vartheta)|^2 r^{-2}}{(1 + |u'(r)|^2)^2} \right] d\vartheta dr \geq 0. \quad (3.4)$$

Funkce  $\psi(\vartheta)$  je  $2\pi$  periodická hladká funkce, integrál z  $\psi(k\vartheta)$  nezávisí na  $k$  (což lze dostat jednoduchým výpočtem), proto jsme v (3.4) opět místo

$\psi(k\vartheta)$  užili  $\psi(\vartheta)$ . V druhém zlomku (3.4) se díky derivování objevil člen  $k^2$ . Snadno zvolíme přípustné funkce  $\eta$  a  $\psi$  tak, že integrál přes druhý zlomek je kladný. Pokud pošleme  $k \rightarrow \infty$ , nezůstane zachovaná nerovnost v (3.4) a dostáváme spor. Je tedy vidět, že radiální řešení nalezené v 2. kapitole nemůže být optimální.



# Kapitola 4

## Závěr

Newtonův problém optimálního aerodynamického tvaru je jedním z nejzajímavějších klasických problémů variačního počtu a tvarových optimalizačních problémů, při jeho studiu se užívá mimo jiné i metod nekonvexní analýzy. Tento problém má dlouhou historii, v roce 1685 byl předložen Newtonem, který sám uhádl řešení pro radiální případ, jež je ve své třídě jediné a který pozoroval i některé kvalitativní vlastnosti, jež platí obecně. První důkaz existence byl publikován až v roce 1902 A. Kneserem. V posledních letech se zvyšuje zájem o studium tohoto problému a stále více autorů publikuje nové důkazy existence řešení ve stále zajímavějších třídách funkcí, jsou objeveny nové vlastnosti řešení a k problému je přistupováno zajímavějšími a elegantnějšími metodami se zapojením širších oblastí matematiky.

V této práci jsme se zaměřili na případ, kdy zkoumané těleso je radiálně symetrické. V tomto případě lze optimální řešení spočítat analyticky. Opírali jsme se o knihy a články, kde jsou tyto výsledky již uvedené, především [3], [5] a [6]. V kapitole 1 a 3 se čerpá převážně z těchto třech publikací, přičemž vlastním přínos je minimální. Ve 2. kapitole jsme se snažili dojít vlastní cestou k výsledkům, které jsou známé. V publikacích [3], [5] a [6] jsou tyto výsledky uvedené, aniž by zde byl blíže popsán výpočet, jak k těmto závěrům dojít. V některých místech bylo zadáno hrubé schéma výpočtu nebo prozrazená metoda, která povede k výsledku. Proto naším cílem bylo hlavně tyto výsledky odvodit a dokázat vlastnosti radiálního řešení, u nichž bylo pouze napsáno "lze ukázat".

# Literatura

- [1] M. Belloni, A. Wagner: *Newton's Problem of Minimal Resistance in the Class of Bodies with Prescribed Volume*. J. Convex Anal., **10**(2) (2003), 491-500.
- [2] C. Bennett, R. Sharply: *Interpolation of operators*. Academic press, Boston, 1988.
- [3] D. Bucur, G. Buttazzo: *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. Birkhäuser, Boston, 2005.
- [4] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl: *Minimum problems over sets of concave functions and related questions*. Math. Nachr., **173** (1995), 71-89.
- [5] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *One-dimensional Variational Problems*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [6] G. Buttazzo, B. Kawohl: *On Newton's Problem of Minimal Resistance*, The Mathematical Intelligencer **15**, no.4 (1993), 7-12.
- [7] T. Lachand-Robert, M.A. Peletier *Newton's Problem of the Body of Minimal Resistance in the Class of Convex Developable Functions*. Math. Nachr. **226** (2001), 153-176
- [8] P. Marcellini *Nonconvex integrals of the calculus of variations* Methods of nonconvex analysis (Verenna, 1989), 16-57, Lecture Notes in Math., 1446, Springer, Berlin, (1990).