

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikálna fakulta

BAKALÁRSKA PRÁCA



Tomáš Bunčák

Nedostatky Black-Scholesovho modelu

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Andrea Karlová

Študijný program: Matematika

Študijný odbor: Finančná matematika

2007

Veľmi rád by som poďakoval vedúcej mojej bakalárskej práce, Mgr. Andrei Karlovej, za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pri tvorbe práce značne pomáhali, taktiež za poskytnutie študijnej literatúry.

Ďalej ďakujem všetkým, ktorí sa podieľajú na tvorbe softwarového GNU projektu *R*. V neposlednej rade aj mojím rodičom, vďaka ktorým môžem študovať.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním a zverejňovaním práce.

V Prahe dňa 29. mája 2007

Tomáš Bunčák

Obsah

Úvod	5
1 Stochastická analýza v teórii oceňovania	7
1.1 Základné pojmy	7
1.2 Brownov pohyb	9
1.2.1 Aproximácia Brownovho pohybu náhodnou prechádzkou	10
1.2.2 Vlastnosti Brownovho pohybu	11
1.3 Itôov integrál	13
1.4 Martingálová miera a oceňovanie	17
1.4.1 Ekvivalentná martingálová miera	17
1.4.2 Arbitráž a EMM v svete s konečnou Ω	17
1.4.3 Oceňovacie formule európskych opcí	20
2 Priblíženie Black-Scholesovho modelu	22
2.1 Black-Scholesov model	22
2.1.1 Predpoklady Black-Scholesovho modelu	22
2.1.2 Náznaky odvodenia Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca	23
3 Kontrasty Black-Scholesovho a reálneho sveta	29
3.1 Nedostatky Black-Scholesovho modelu	29
3.1.1 (Ne)normálne rozdelenie zmien logaritmických cien	30
3.1.2 Nekonštantná volatilita	34
Literatúra	38
A Resumé empirickej analýzy	39
A.1 Informácie o použitých dátach, prostriedkoch a postupoch	39
A.2 Demonštrácia výsledkov empirickej analýzy	40

Názov práce: Nedostatky Black-Scholesovho modelu

Autor: Tomáš Bunčák

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Andrea Karlová

e-mail vedúceho: karlova@karlin.mff.cuni.cz; andrea.karlova@kbc.be

Abstrakt: Black-Scholesov model patrí medzi najviac využívané modely na oceňovanie jednoduchých opčných kontraktov, ako sú európske call a put opcie. Dôvodom jeho širokého uplatnenia je jeho pomerná jednoduchosť a existencia exaktnej formule umožňujúcej určenie ceny opcie na základe niekoľkých vstupných parametrov. Pri konfrontácii predpokladov modelu s reálnym dianím na trhu sa však dostávame do niekoľkých rozporov. V tejto práci sa budeme venovať úvodnému rámcu teórie oceňovania opcií, priblížime Black-Scholesov model z niekoľkých uhlov pohľadu a poukážeme na základné odklony modelu pomocou empirickej štúdie.

Kľúčové slová: opcia, Black-Scholesov model, Brownov pohyb, martingál, volatilita

Title: On Some Disadvantages of the Black-Scholes Model

Author: Tomáš Bunčák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Andrea Karlová

Supervisor's e-mail address: karlova@karlin.mff.cuni.cz; andrea.karlova@kbc.be

Abstract: The Black-Scholes model is the most widely used model for pricing of the plain-vanilla options. The reasons for its popularity are its relative simplicity and existence of an exact pricing formula which enable us to determine the option price with respect to some input parameters. However, the assumptions of the model do not always coincide with everyday development on the financial markets. The aim of this work is to provide reader with a basic insight into the theory of option pricing via Black-Scholes model plus cover the brief explanation of its derivation. The work is accompanied with the empirical research.

Keywords: option, Black-Scholes model, Brownian motion, martingale, volatility

Úvod

Pocit neistoty z budúceho vývoja je neodlúčiteľný prvok spojený s každou činnosťou, ktorá je podmienená určitými nedeterministickými faktormi vyvíjajúcimi sa v čase. Prirodzenou snahou človeka je tento jav, povedzme riziko budúceho vývoja, určitými prostriedkami eliminovať. S týmto úsilím je spojený aj vznik *opcií*, dôležitých finančných derivátov.

Spomenutiahodné prvopočiatky opcií siahajú až do 7.-6. storočia pred Kristom. Z týchto dôb pochádza pomerne známy príbeh o antickom filozofovi *Tálesovi*, ktorý popísal *Aristoteles* vo svojom diele *Politika*. Táles prišiel k bohatstvu pomocou call opcií (právo kúpiť) na použitie olivových lisov. Keďže po nákupe opcií nasledovala hojná úroda olív, majitelia olivových sádov od Tálesa toto právo radšej odkúpili, pretože straty, ktoré by utrpeli, keby nemohli úrodu spracovať, by boli výrazne vyššie ako pri odkupe práv. Ďalším známym obdobím spojeným s opciami sú tridsiate roky 17. storočia. Vtedy sa v Holandsku stali veľmi žiadaným artiklom tulipány, čo viedlo k uzatváraniu call opčných kontraktov práve na ne, keďže budúca ponuka silno závisela na v tej dobe nie najlepšie ovplyvniteľných prírodných podmienkach. V USA je hlavný rozmach obchodovania opcií spojený so vznikom *The Chicago Board of Trade*, ktorá začala v sedemdesiatych rokoch 19. storočia oficiálne obchodovať s futures a opciami. Dnes burzy v mnohých krajinách, ktoré pokrývajú majoritu svetového kapitálového trhu, obchodujú s rôznymi opčnými kontraktmi.

História opcií teda siaha storočia späť, problematika ich oceňovania je však oveľa mladšia. Na prvý pohľad nevýrazný výraz finančný derivát vypovedá o oceňovaní opcií viac ako sa zdá. Hodnota opcie samozrejme priamo závisí na podkladovom aktíve, na ktoré je naviazaná. Podstatný prvok procedúry oceňovania je preto odhadovanie procesu, ktorý sledujú ceny tohoto aktíva, povedzme akcie. Snahou je nájsť proces, ktorý by dokázal odzrkadliť vlastnosti vykazované pozorovaným správaním akcie, a na tomto predpoklade vybudovať oceňovací model. *Louis Bachelier* bol prvým, kto sa o niečo také pokúsil. V roku 1900 vo svojej práci *Théorie de la spéculation* položil základy modelovania finančných trhov pomocou *Brownovho pohybu*. Ten bol ale pre neho vtedy ešte neznámym termínom, pretože idea tohoto pojmu, odpozorovaná škótskym botanikom *Robertom Brownom* na peľových zrnkách pohybujúcich sa vo vode, do Paríža, Bachelierovho pôsobiska, prenikla až po roku 1902. Bachelier sa dopracoval až k oceňovacej formuli, kľúčovým problémom však bolo, že jeho model pripúšťal aj negatívne ceny akcie, v dôsledku čoho bola cena opcie v jeho ponímaní neobmedzená. V roku 1955 znovu osvetlil Bachelierove myšlienky *Paul Samuelson* svojou prácou *Brownian Motion in the Stock Market*, v ktorej sa snažil vyriešiť hlavné nedostatky Bachelierovho modelu. Brownov pohyb (geometrický) ako model pre proces ceny akcie uplatnili vo svojej prelomovej práci [1] publikovanej v roku 1973 aj *Fischer Black* a *Myron Scholes*. Ich snaha viedla k zrejme najznámejšej oceňova-

cej formuli pre opcie, za ktorú dostali spoločne s *Robertom Mertonom*, ktorý s nimi spolupracoval, v roku 1997 Nobelovu cenu za ekonómiu (presnejšie bez Blacka, ktorý zomrel v roku 1995).

Miernym paradoxom je, že jeden z najrozšírenejších modelov, ktorým nesporne Black-Scholesov model je, sa v mnohých charakteristikách od skutočného diania na trhu odkláňa, čo bude demonštrované aj v tejto práci. V čom teda spočíva dôvod jeho širokej aplikácie? Steele v [10] prezentuje názor, že podstatným prvkom živnej pôdy jeho úspechu je odvodenie konkrétnej oceňovacej formule. Parafráza jednej vety z tejto publikácie znie: V svete mimo profesionálnu vedu je formula jadrom toho, čím sa rozumie riešenie problému. Zdá sa teda, že trh nepotrebuje za každú cenu dokonalý model a je schopný akceptovať aj taký, v ktorom sú jasne badateľné nedostatky.

V práci sa pokúsime priblížiť niektoré partie stochastickej analýzy, ktoré korešpondujú s modernými prístupmi k teórii oceňovania a pomocou ktorých je odvodenie Black-Scholesovej oceňovacej formule jednoduchšie ako pri pôvodnom prístupe autorov. Ukážeme aj odvodenia tzv. *Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (PDE)* pomocou replikácie opcie určitým portfóliom. Riešenie tejto PDE taktiež vedie k spomenutému oceňovaciemu vzorcu. Nakoniec rozdiskutujeme niektoré nevýhody Black-Scholesovho modelu, naše tvrdenia budeme demonštrovať na výsledkoch empirickej analýzy reálnych dát.

Štúdium tejto práce predpokladá základné znalosti finančnej teórie týkajúcej sa opcií, taktiež terminológie z teórie miery a pravdepodobnosti.

Kapitola 1

Stochastická analýza v teórii oceňovania

1.1 Základné pojmy

Definícia 1.1.1 (Filtrácia) *Nech (Ω, \mathcal{F}) je merateľný priestor, $T \subseteq [0, \infty)$. Systém σ -algebier $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$, kde*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s \leq t \quad s, t \in T,$$

nazývame filtrácia na (Ω, \mathcal{F}) .

Filtráciu budeme v ďalšom niekedy zjednodušene značiť ako $\{\mathcal{F}_t\}$. Ak nebude inak špecifikované, budeme uvažovať pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definícia 1.1.2 (Stochastický proces) *Nech (S, \mathcal{S}) je merateľný priestor. Množinu náhodných veličín $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$, kde*

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S}),$$

nazývame stochastický proces. (S, \mathcal{S}) sa nazýva stavový priestor. Ak $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, hovoríme, že X je d -dimenzionálny stochastický proces. X môže byť taktiež interpretované ako

$$X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow (S, \mathcal{S});$$

$$X(t, \omega) := X_t(\omega) \quad \forall (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega.$$

X_t a $X(t)$ sú rovnocenné značenia. Definíciu možno zobecniť pre separabilný metrický priestor E a interval $T \subseteq [0, \infty)$ na stochastický proces so stavmi v E a s časom v T ako množinu $\{X_t; t \in T\}$ takú, že

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E)), \quad t \in T.$$

Stochastický (náhodný) proces budeme niekedy v texte zjednodušene značiť $\{X_t\}$.

Definícia 1.1.3 (Trajektória; spojitý proces) Každý stochastický proces možno interpretovať ako zobrazenie

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E^T, \mathcal{B}(E)^T),$$

kde $(E^T, \mathcal{B}(E)^T)$ predstavuje priestor funkcií z T do E . Prvky tohoto priestoru nazývame trajektórie procesu X . Hovoríme, že stochastický proces je spojitý, ak sú jeho trajektórie spojité funkcie.

Pre naše potreby si vystačíme s reálnymi spojitými stochastickými procesmi, teda $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, kde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ štandardne značí borelovskú σ -algebru na \mathbb{R} . Index t bude predstavovať hodnoty na časovej ose, čiže $T = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$.

Definícia 1.1.4 (Štandardné podmienky) Uvažujme pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) s filtráciou $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$. Hovoríme, že tento priestor spĺňa tzv. štandardné podmienky ak:

- (i) \mathcal{F} je P -úplná, t.j. pre každú $B \subset A$ takú, že $P(A) = 0$ platí $B \in \mathcal{F}$.
- (ii) \mathcal{F}_0 obsahuje všetky P -nulové množiny z Ω .
- (iii) Filtrácia $\{\mathcal{F}_t\}$ je zprava spojitá, t.j. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s; \quad \forall 0 \leq t < \infty$.

Podmienka (ii) intuitívne znamená, že už v čase 0 vieme, ktoré javy sú možné, a ktoré nie. Ak máme pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) s filtráciou $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$, jednoduchou procedúrou môžeme získať $(\Omega, \mathcal{F}^P, P)$ spĺňajúce štandardné podmienky, kde $\{\mathcal{F}_t^P; 0 \leq t < \infty\}$ predstavuje tzv. P -zúplnenie filtrácie $\{\mathcal{F}_t\}$. Ide v podstate o rozšírenie daných σ -algebier o podmnožiny množín miery nula; sprava spojitost' σ -algebier filtrácie dostaneme definovaním prienikom, ako je uvedené vyššie v definícii.

Definícia 1.1.5 (Kanonická filtrácia) Nech X je stochastický proces. Definujeme

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t) = \sigma\{[X_s \in B_s], B_s \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 0 \leq s \leq t\},$$

t.j. najmenšiu σ -algebru, vzhľadom ku ktorej je X_s merateľné pre $\forall s \in [0, t]$. Potom $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ nazveme kanonická filtrácia procesu X . Niekedy sa môžeme stretnúť taktiež s označením generovaná filtrácia. Úplnou kanonickou filtráciou procesu X rozumieme kanonickú filtráciu po zúplnení; v niektorej literatúre sa môžeme tiež stretnúť s označením prirodzená filtrácia.

Kanonická filtrácia je systém obsahujúci všetky informácie, ktoré sú obsiahnuté v pozorovanej trajektórii procesu X . Ak nebude povedané inak, budeme v nasledujúcom uvažovať práve túto filtráciu.

Z hľadiska finančnej matematiky možno pojem filtrácie intuitívne pojať ako isté usporiadanie dostupných informácií. Každá σ -algebra obsiahnutá vo filtrácii bude obsahovať informácie zozbierané pozorovaním do daného časového horizontu, ktorý predstavuje jej index. Ak teda sledujeme nejaký náhodný proces, jeho prirodzená filtrácia bude tvorená "pozbieranými" informáciami z výsledkov pozorovania do času, v ktorom sa v danom pozorovaní práve nachádzame.

Každá náhodná veličina z kolekcie nazývanej náhodný proces je definovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) ; v každom bode $t \in T$ (interpretujme ho ako časový okamih) teda vystupuje rovnaká pravdepodobnostná miera P , vzhľadom ku ktorej špecifikujeme rozdelenie danej náhodnej veličiny X_t . Intuitívne však možno dospieť k tomu, že v čase t máme k dispozícii viac informácií ako v predchádzajúcom okamihu. Správnou voľbou filtrácie na pravdepodobnostnom priestore, s ktorým pracujeme, je tento jav možné modelovať práve tak, že v danom časovom okamihu aplikujeme podmieňovanie vzhľadom k odpovedajúcej σ -algebri zo zvolenej filtrácie, t.j. pravdepodobnostnú mieru restringovanú na danú σ -algebru.

Definícia 1.1.6 (\mathcal{F}_t -adaptovaný proces) *Nech X je stochastický proces a $\{\mathcal{F}_t\}$ (zjednodušené značenie) filtrácia na (Ω, \mathcal{F}) . Proces X je nazývaný \mathcal{F}_t -adaptovaný ak X_t je \mathcal{F}_t -merateľná $\forall 0 \leq t < \infty$. Ak je proces \mathcal{F}_t^X -adaptovaný, hovoríme zjednodušene, že je adaptovaný.*

Definícia 1.1.7 (\mathcal{F}_t -progresívny proces) *Nech X je stochastický proces, $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrácia. Hovoríme, že proces X je \mathcal{F}_t -progresívne merateľný, resp. \mathcal{F}_t -progresívny, ak je zobrazenie $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ merateľné v zmysle*

$$(\Omega \times [0, s], \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0, s])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{pre } \forall s \geq 0.$$

Poznámky a odkazy

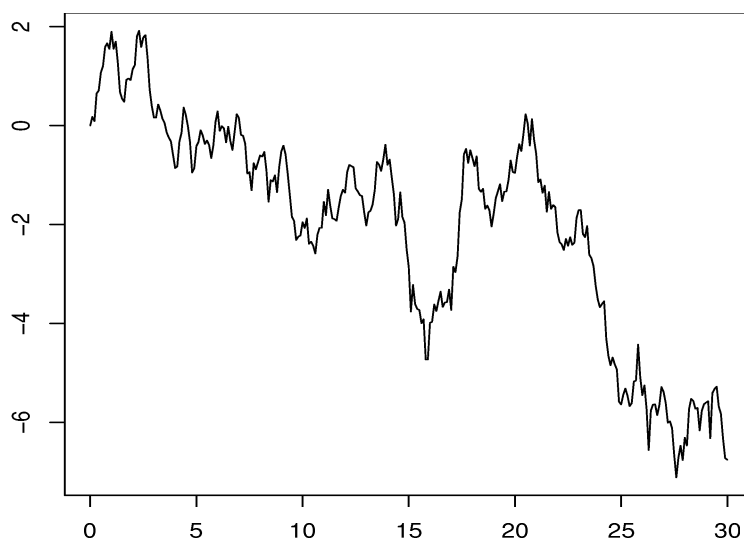
Pre hlbšie nahliadnutie do niektorých pojmov použitých v tejto stati, resp. jednotlivých súvislostí z matematického hľadiska, je možné čerpať z Štěpán [11]. Čo sa týka finančného kontextu, informácie je možné hľadať napr. v Schoutens [9] alebo Steele [10]. Poznámky k jednotlivým definíciám majú slúžiť ako pomôcka pre získanie vhľadu do danej oblasti teórie pravdepodobnosti z hľadiska finančnej matematiky, nie je však vhodné pristupovať k nim dogmaticky, priestor treba prenechať samozrejme aj vlastnej intuícii.

1.2 Brownov pohyb

Definícia 1.2.1 (Brownov pohyb) *Nech $W : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- (i) $W(0) = 0$.
- (ii) Každá trajektória $t \mapsto W(t)$ je spojitá, t.j. W je spojitý proces.
- (iii) Pre $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ sú náhodné veličiny (prírastky) $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ navzájom nezávislé.
- (iv) Pre $0 \leq s < t$ platí $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, (t - s))$, t.j. $W(t) - W(s)$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom $t - s$.

Potom sa W nazýva Brownov pohyb (BP), resp. Wienerov proces.



Obr. 1.1: Brownov pohyb

1.2.1 Aproximácia Brownovho pohybu náhodnou prechádzkou

Ako prvý dokázal existenciu Brownovho pohybu ako matematického pojmu *Norbert Wiener*.¹ Pre isté intuitívne pochopenie správania Brownovho pohybu môžeme použiť porovnanie so symetrickou celočíselnou náhodnou prechádzkou.

Definícia 1.2.2 (Symetrická náhodná prechádzka na \mathbb{Z}) *Nech $X = \{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť nezávislých a rovnako rozdelených (iid) náhodných veličín $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$. Definujeme $Z = \{Z_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ako symetrickú náhodnú prechádzku na \mathbb{Z} tak, že $Z_0 := 0$ a $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots$.*

Ak pre $t \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$ uvažujeme normované súčty tvaru

$$Y_k(t) = \frac{Z_{\lfloor kt \rfloor}}{\sqrt{k}},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí celú časť reálneho čísla, platí, že daná postupnosť normovaných súčtov konverguje v distribúcii (teda slabá konvergencia rozdelení ako pravdepodobnostných mier) pre $k \rightarrow \infty$ k $W(t)$.

Príklad 1.2.1 *Nech $k \in \mathbb{N}$. Zrejme $Y_k(0) = 0$. Z Definície 1.2.2 plynie, že $Y_k(t)$ spĺňa i druhý a tretí bod Definície 1.2.1. Ďalej pre $0 \leq t < s$ overme, či $(Y_k(s+t) - Y_k(t)) \sim \mathcal{N}(0, s)$, kde znak \sim značí asymptotické ($k \rightarrow \infty$) rozdelenie danej náhodnej veličiny. K tomu nám posluží centrálna limitná veta (CLV). Platí*

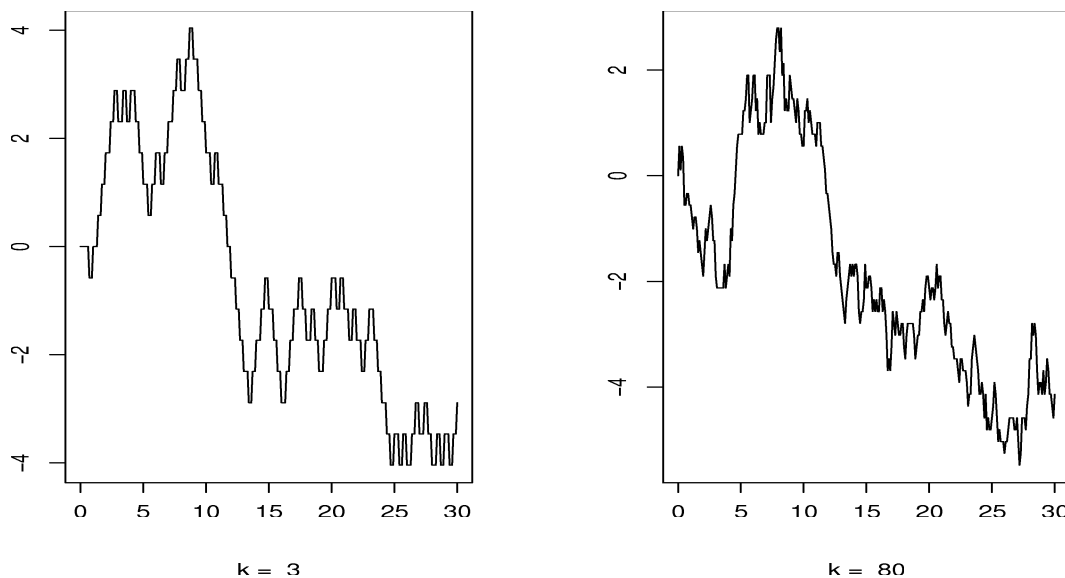
$$Y_k(s+t) - Y_k(t) = \frac{Z_{\lfloor ks+kt \rfloor}}{\sqrt{k}} - \frac{Z_{\lfloor kt \rfloor}}{\sqrt{k}} \approx \frac{Z_{\lfloor ks \rfloor}}{\sqrt{k}}.$$

¹Odkazy na literatúru, v ktorej je možné vyhľadať dôkaz existencie, sa nachádzajú za staťou v *Poznámkach a odkazoch*. Práve kvôli práci N. Wienera sa pre Brownov pohyb používa i označenie *Wienerov proces*.

Konvergenciu v distribúcii odvodíme pomocou Lévy - Lindebergovej CLV, s prihliadnutím na to, že X_i sú iid, $EX_1 = 0$, $\text{var} X_1 = 1$ a $\frac{\sqrt{[ks]}}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{s}$, $k \rightarrow \infty$. Dostávame teda

$$\frac{Z_{[ks]} - [ks]EX_1}{\sqrt{[ks]\text{var} X_1}} \cdot \frac{\sqrt{[ks]}}{\sqrt{k}} \rightarrow \mathcal{N}(0, s), k \rightarrow \infty.$$

◇



Obr. 1.2: Aproximácia Brownovho pohybu náhodnou prechádzkou

1.2.2 Vlastnosti Brownovho pohybu

Lemma 1.2.1 (Vlastnosť kanonickej filtrácie Brownovho pohybu) *Nech $\{\mathcal{F}_t^W\}$ je kanonická filtrácia Brownovho pohybu, čiže $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s); 0 \leq s \leq t)$. Potom platí*

$$\forall 0 \leq t < s \quad \sigma(W(s) - W(t)) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}_t^W$$

sú nezávislé σ -algebry (nezávislosť množinových systémov).

Dôkaz uvážením Definií 1.1.5 a 1.2.1, viac v *Poznámkach a odkazoch* za staťou. V tejto stati budeme implicitne uvažovať filtráciu generovanú Brownovým pohybom.

Martingálová vlastnosť

Definícia 1.2.3 (Martingál) *Nech $X = \{X_t\}$ je stochastický proces, $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrácia a X je \mathcal{F}_t -adaptovaný. Ďalej nech platí $E|X_t| < \infty \quad \forall 0 \leq t < \infty$. Tento stochastický proces sa nazýva \mathcal{F}_t -martingál ak platí*

$$X_s = E[X_t | \mathcal{F}_s] \quad P - s.j., \quad \forall 0 \leq s < t < \infty.$$

Ak v uvedenom výraze nahradíme $=$ znakom \leq , hovoríme, že X je tzv. \mathcal{F}_t -submartingál. Ak nahradíme $=$ znakom \geq , potom hovoríme o \mathcal{F}_t -supermartingále. Ak je X \mathcal{F}_t^X -martingál, hovoríme jednoducho, že je martingál (resp. submartingál, resp. supermartingál).

Tvrdenie 1.2.1 *Brownov pohyb je martingál.*

Dôkaz. Nech sú dané $0 \leq s \leq t$. Potom

$$\begin{aligned} E[W(t) | \mathcal{F}_s^W] &= E[(W(t) - W(s)) + W(s) | \mathcal{F}_s^W] = \\ &= E[W(t) - W(s)] + W(s) = W(s). \end{aligned}$$

Rovnosti plynú z uvedeného Lemma 1.2.1 o filtrácii BP a z vlastností podmienenej strednej hodnoty, konkrétne $E[X | \mathcal{F}] = X$ ak X je \mathcal{F} -merateľná a $E[X | \mathcal{F}] = E X$ ak sú $\sigma(X)$ a \mathcal{F} nezávislé množinové systémy.

□

Kovariancia Brownovho pohybu

Tvrdenie 1.2.2 *Pre $s \geq 0, t \geq 0$ platí*

$$EW(s)W(t) = \min\{t, s\}.$$

Dôkaz. BÚNV (bez újmy na všeobecnosti) nech $s \leq t$, potom

$$\begin{aligned} EW(s)W(t) &= E\{W(s)[(W(t) - W(s)) + W(s)]\} = \\ &= EW(s)[EW(t) - EW(s)] + EW^2(s) = \text{var}W(s) = s. \end{aligned}$$

Ak by platila opačná nerovnosť $t \leq s$, analogickým spôsobom by sme dokázali, že $EW(s)W(t) = t$, z čoho plynie dokazované.

□

Poznámky a odkazy

Dôkaz existencie Brownovho pohybu je založený na hlbších tvrdeniach z teórie pravdepodobnosti, ako sú *Daniell-Kolmogorovova veta*, či *Kolmogorovova veta o spojitých modifikácii*, ktoré sa aj s dôkazom existencie nachádzajú v Štěpán [11]. Dokázať Lemma 1.2.1 o vlastnosti filtrácie generovanej Brownovým pohybom je pomerne jednoduché. Vyjsť môžeme z nezávislosti jednotlivých náhodných veličín $W(s), 0 \leq s < t$ s $W(t) - W(s)$, čo je ekvivalentné s nezávislosťou σ -algebier generovaných týmito náhodnými veličinami. V Štěpán [11] možno nájsť dôkaz ešte všeobecnejšieho tvrdenia (VII.2.1).

1.3 Itôov integrál

Black-Scholesov (B-S) model pre proces ceny podkladovej akcie je príkladom lineárnej stochastickej diferenciálnej rovnice. Pre správne pochopenie problematiky je nutné zaviesť pojem stochastickej integrácie. V tejto stati sa pokúsime priblížiť jeden z typov stochastického integrálu, a to *Itôov integrál*, čo nám umožní správnu interpretáciu výrazov ako $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Budeme sa teda snažiť vysvetliť definíciu pojmu

$$\int_0^T X(t, \omega) dW(t, \omega)$$

pre procesy

$$X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$W(t, \omega)$ Brownov pohyb a $T \in [0, \infty)$. Tento pojem bude definovaný pre istú širokú triedu daných funkcií.

Pomocou stochastického integrálu je možné zahrnúť do určitého modelu prvok náhody. Proces $W(t, \omega)$ možno chápať ako zdroj šumu a proces $X(t, \omega)$ ako prvok, ktorý určuje, akou mierou sa na vývoji modelovaného procesu bude šum podieľať. Intuitívna predstava môže viesť k tomu, že by nebolo správne, aby tento prvok upravoval svoje správanie na základe poznatkov z budúceho vývoja zdroja šumu $W(t, \omega)$, pretože by týmto mohol integrál začať naberať istý deterministický rozmer. Preto sa pri jeho konštrukcii pracuje s kanonickou filtráciou $\{\mathcal{F}_t^W\} = \{\mathcal{F}_t\}$ (v nasledujúcom) a budeme požadovať progresívnosť procesov, pre ktoré budeme Itôov integrál definovať.

Definícia 1.3.1 (Trieda integrandov Itôovho integrálu) Trieda integrandov Itôovho integrálu je definovaná ako množina procesov, ktoré spĺňajú:

- (i) $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ je náhodný proces.
- (ii) X je \mathcal{F}_t -progresívny.
- (iii) Platí $E[\int_0^T X^2(t, \omega) dt] < \infty$.

Označme túto množinu ako $L^2(\mathcal{F}_T)$.

Uvedená definícia triedy integrandov Itôovho integrálu je pre zachovanie jednoduchosti až príliš obmedzujúca, poznamenajme teda, že Itôov integrál by sme mohli definovať pre širšiu triedu funkcií modifikáciou podmienok (ii) a (iii), konkrétne rozšírením definície pre ľubovoľnú filtráciu $\{\mathcal{H}_t\}$, vzhľadom ku ktorej je BP martingál, a zoslabením podmienky (iii); čím dostaneme:

- (ii)' $\{W_t\}$ je martingál vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{H}_t\}$; X je \mathcal{H}_t -progresívny.
- (iii)' Platí $P\left(\int_0^T X^2(t, \omega) dt < \infty\right) = 1$.

Zostaneme však pri striktnom variante, ktorý bude v našom kontexte postačujúci. Komplikáciu by bola napríklad strata istých vlastností integrálu pre širšiu skupinu integrandov.²

²Integrál definovaný pre širšiu triedu integrandov už nemusí byť všeobecne martingál (čo pre našu definíciu platí), ale len lokálny martingál. Viď. Øksendal [6].

Definícia 1.3.2 (\mathcal{F}_t -jednoduchý proces) *Stochastický proces* $G \in L^2(\mathcal{F}_T)$ tvaru

$$G(t) := G_0 \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} G_j \mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

kde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ je delenie intervalu $[0, T]$, G_j sú obmedzené \mathcal{F}_{t_j} -merateľné náhodné veličiny a $\mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}$ značí indikátorovú funkciu, nazývame \mathcal{F}_t -jednoduchý stochastický proces.

Definícia 1.3.3 (Itôov integrál pre jednoduché procesy) *Pre jednoduchý proces definujeme Itôov integrál ako*

$$\int_0^T G(t, \omega) dW(t, \omega) := \sum_{j=0}^{n-1} G_j(\omega) \cdot (W(t_{j+1}, \omega) - W(t_j, \omega)).$$

Povšimnime si, že G_j sú \mathcal{F}_{t_j} -merateľné náhodné veličiny, čo je veľmi dôležité obmedzenie. Našou snahou bude definovať Itôov integrál pre nejakú všeobecnú funkciu (s určitými vlastnosťami uvedenými vyššie) ako limitu Itôových integrálov postupnosti jednoduchých (elementárnych) procesov, ktorá v istom zmysle aproximuje daný proces (bude špecifikované). Bez tohoto predpokladu by sa však mohlo stať to, že dve postupnosti elementárnych procesov by boli vhodnou aproximáciou danej všeobecnej funkcie, ich Itôove integrály takto definované by sa ale ani pre akokoľvek veľké $n \in \mathbb{N}$ "nepodobali".

Idea aproximácie funkcie $X(t, \omega)$ spočíva vo voľbe aproximačných funkcií

$$\sum_j X(t_j^*, \omega) \cdot \mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

kde $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$. Voľbou $t_j^* = t_j$ dostaneme Itôov integrál.

Lemma 1.3.1 (Itôova izometria) ³ *Ak je* $G \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *jednoduchý proces. Potom platí*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T G(t, \omega) dW(t, \omega) \right]^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T G^2(t, \omega) dt \right].$$

Pomocou tohoto lemma je možné definovať Itôov integrál pre funkcie (procesy) s určitými vlastnosťami, pretože je možné istým postupom nájsť aproximujúcu postupnosť jednoduchých procesov v zmysle $\mathbb{E}[\int_0^T (X(t, \omega) - G_n(t, \omega))^2 dt] \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, a Itôov integrál potom definovať ako nižšie uvedenú limitu v zmysle L^2 konvergenzie. Itôova izometria bude platiť aj pre prvky triedy integrandov Itôovho integrálu, nielen jednoduché procesy.

Definícia 1.3.4 (Itôov integrál) *Ak* X *patriť do triedy* $L^2(\mathcal{F}_T)$, *potom existuje aproximujúca postupnosť* $\{G_n\}$ *jednoduchých procesov (z* $L^2(\mathcal{F}_T)$) *taká, že*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (X(t, \omega) - G_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

³Dôkaz v Øksendal [6], Lemma 3.1.5.

a Itôov integrál X je definovaný ako jednoznačná limita

$$\int_0^T X(t, \omega) dW(t, \omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n(t, \omega) dW(t, \omega)$$

v zmysle L^2 konvergencie.

Existencia uvedenej limity v zmysle L^2 je odvodená z faktu, že postupnosť v priestore $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\{\int_0^T G_n(t, \omega) dW(t, \omega)\}_n$ je cauchyovská, čo plynie z Itôovej izometrie, a uvážením toho, že daný priestor je úplný.

Dá sa dokázať, že stochastický proces $\{M_t; 0 \leq t \leq T\}$, definovaný ako

$$M_t(\omega) = \int_0^t X(s, \omega) dW(s, \omega)$$

pre nejaké $X(t, \omega) \in L^2(\mathcal{F}_t)$, je martingál vzhľadom ku kanonickej filtrácii $\{\mathcal{F}_t^W\}$. Pozoruhodné je, že existujú aj tvrdenia, ktoré umožňujú vyjadrenie martingálov vzhľadom ku kanonickej filtrácii Wienerovho procesu ako Itôových integrálov. Hovoríme o tzv. martingálovej reprezentácii.

Veta 1.3.1 (Itôova reprezentácia) ⁴ Nech $T \in [0, \infty)$, $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Potom existuje jednoznačný stochastický proces $X(t, \omega) \in L^2(\mathcal{F}_t)$ taký, že

$$H(\omega) = EH + \int_0^T X(t, \omega) dW(t, \omega).$$

Veta 1.3.2 (Martingálová reprezentácia) ⁵ Nech $W = \{W_t\}$ je Wienerov proces, $\{M_t\}$ \mathcal{F}_t^W -martingál a $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \forall 0 \leq t < \infty$. Potom existuje jednoznačný stochastický proces $X \in L^2(\mathcal{F}_t) \quad \forall 0 \leq t < \infty$ taký, že

$$M(t, \omega) = EM(0) + \int_0^t X(s, \omega) dW(s, \omega).$$

Definícia 1.3.5 (Itôov proces) Nech σ je stochastický proces patriaci do triedy integrandov Itôovho integrálu taký, že

$$P\left(\int_0^t \sigma(s, \omega)^2 ds < \infty \quad \forall t \geq 0\right) = 1$$

a μ je $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptovaný proces taký, že

$$P\left(\int_0^t |\mu(s, \omega)| ds < \infty \quad \forall t \geq 0\right) = 1.$$

Potom proces definovaný ako

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t \mu(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dW(s, \omega),$$

kde $X(0, \cdot)$ je \mathcal{F}_0 -merateľná, sa nazýva Itôov proces. Zjednodušene môžeme použiť značenie:

$$dX(t, \omega) = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW_t(\omega).$$

⁴Dôkaz v Øksendal [6], Veta 4.3.3.

⁵Dôkaz v Øksendal [6], Veta 4.3.4.

Proces takto definovaný je $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptovaný.

Na tomto mieste uvedme silný nástroj stochastickej analýzy, ktorý sa používa aj pri odvodení *Black-Scholes-Mertonovej* parciálnej diferenciálnej rovnice.

Lemma 1.3.2 (Itôovo lemma) *Nech X je Itôov proces $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$, $g(t, x)$ funkcia patriaca do $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Potom pre stochastický proces definovaný $Y(t) := g(t, X(t))$ platí:*

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2 dt = \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\mu + \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2 \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\sigma dW_t. \end{aligned}$$

Ukážme aplikáciu Itôovho lemma v tvare 1.3.2 na geometrický Brownov pohyb. Ak teda máme proces $\{S_t\}$, ktorý spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu tvaru

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t,$$

ktorej riešenie je

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\};$$

s podmienkou $S_0 = 1$ pre jednoduchosť môžeme na vyjadrenie $dg(t, S_t)$ za splnených predpokladov aplikovať predchádzajúce Lemma 1.3.2 na $f(t, X_t) = g(t, S_t)$ kde $f(t, x) = g(t, \exp\{x - 1/2\sigma^2 t\})$ a $X_t = \mu t + \sigma W_t$. Vyjadrením parciálnych derivácií funkcie $f(t, x)$ pomocou *retiazkového pravidla* dostaneme

$$f_x(t, x) = g_x(t, \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}) \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\},$$

$$f_t(t, x) = g_t(t, \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}) - \frac{1}{2}\sigma^2 g_x(t, \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}) \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\};$$

$$f_{xx}(t, x) = g_x(t, \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}) \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\} + \exp^2\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\} g_{xx}(t, \exp\{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\})$$

a použitím Lemma 1.3.2 sa teda dopracujeme k vzťahu

$$dg(t, S_t) = \left[\frac{\partial g}{\partial s}(t, S_t) S_t \mu + \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(t, S_t) S_t^2 \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial g}{\partial s}(t, S_t) S_t \sigma dW_t. \quad (1.1)$$

Parciálne derivácie funkcie g podľa premennej vzťahujúcej sa k procesu S_t sú pre názornosť označené písmenom s .

Poznámky a odkazy

Postup definície Itôovho integrálu v tejto stati bol zväčša prevzatý z Øksendal [6]. V zdroji je možné nájsť celkom podrobný postup zostrojenia aproximujúcej postupnosti jednoduchých procesov s prípadnými ďalšími referenciami pre hlbšie štúdium. V publikácii sa taktiež nachádzajú dôkazy uvedených tvrdení, konkrétne *Itôovej a martingálovej reprezentácie a Itôovho lemma* v rozsahu formulácie v tomto texte, rovnako i príklad demonštrujúci poznámku za Definíciou 1.3.3.

1.4 Martingálová miera a oceňovanie

1.4.1 Ekvivalentná martingálová miera

Definícia 1.4.1 (Ekvivalentná martingálová miera) *Hovoríme, že pravdepodobnostná miera Q (definovaná na (Ω, \mathcal{F})) je ekvivalentná martingálová miera ak platí:*

- (i) Q je ekvivalentná s P , tzn. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) = 0 \iff Q(A) = 0$, čiže majú rovnaké nulové množiny, teda $P \ll Q \wedge Q \ll P$.
- (ii) Proces diskontovaných cien podkladového aktíva (napr. akcie) $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t = \exp(-rt)S_t; 0 \leq t < \infty\}$ je martingál vzhľadom k miere Q , tzn.

$$e^{-rt}E_Q[S_t | \mathcal{F}_s] = e^{-rs}S_s, \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Skúsme sa pozrieť na jednotlivé body definície ekvivalentnej martingálovej miery (EMM).

Našou snahou je zavedenie akejkoľvek férovosti do systému oceňovania, čo je v podstate motivácia druhého bodu definície. V čase s máme prístup k informáciám o akejkoľvek merateľnej veličine na trhu, ktoré sme do tejto chvíle napozorovali, náš súbor informácií zastupuje σ -algebra \mathcal{F}_s . To, že pri oceňovaní používame mieru s danou vlastnosťou, odráža našu snahu o konzistenciu prístupu, pretože predpokladáme, že diskontovaný proces akcie sa vyvíja férovo, čiže jeho diskontovaná budúca očakávaná hodnota v čase $t > s$ vzhľadom k informáciám nám dostupným v čase s je súčasná diskontovaná hodnota.

Prvá vlastnosť EMM z definície je nemenej dôležitá. Ak by sme ju totiž vynechali, diskontovaný proces cien akcie by síce mohol byť k danej miere stále martingál, naša EMM by však mohla pridať nenulovú pravdepodobnosť javom, ktoré boli pod fyzickou mierou P nemožné, a naopak, čo by samozrejme malo neblahý dopad na oceňovanie. Týmto predpokladom sa takémuto degenerovanému prípadu vyhneme.

1.4.2 Arbitráž a EMM v svete s konečnou Ω

Pokúsime sa priblížiť koncept oceňovania pomocou ekvivalentnej martingálovej miery za zjednodušujúceho predpokladu konečnej množiny $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ nášho pravdepodobnostného priestoru (Ω, \mathcal{F}, P) , ako napríklad v Delbaen [2]. Nech \mathcal{F} značí potenčnú množinu Ω . Treba poznamenať, že obmedzením na konečnú Ω sa vyhneme odlišnostiam závislým na voľbe $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$;⁶ pretože tieto priestory sú vďaka voľbe Ω izomorfné s \mathbb{R}^N , a teda jadro funkcionálnej analýzy, ktorú budeme potrebovať, sa redukuje na lineárnu algebru.

Na modelovanie finančného trhu použijeme $d+1$ -dimenzionálny stochastický proces

$$\hat{S} = \{\hat{S}_t; t = 0, \dots, T\} = \{(\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^d); t = 0, \dots, T\}^7,$$

kde jednotlivé \hat{S}_t^j , $j = 1, \dots, d$ predstavujú ceny j -teho aktíva na trhu vyjadrené v určitých menových jednotkách, sú adaptované vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t; t = 0, \dots, T\}$ pravdepodobnostného priestoru, na ktorom pracujeme. Taktiež adaptované

⁶ $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ predstavuje systém \mathcal{F} -merateľných náhodných veličín (funkcií), ktoré majú konečné momenty p -teho rádu; teda ak $p = 0$ žiadne, a ak $p = \infty$ všetkých rádo.

⁷ Časové členenie bude pre jednoduchosť diskrétné.

$\hat{S}_t^0 > 0$, $t = 0, \dots, T$ bude predstavovať tzv. *numéraire*, teda aktívum, ku ktorému bude možné v relatívnej miere vyjadriť ceny ostatných aktív. Za numéraire môže byť zvolená napríklad jednotka meny ako konštantná hodnota, za predpokladu konštantnej úrokovej miery diskontný inštrument ako pokladničná poukážka je príkladom numéraire s premenlivou, ale deterministickou hodnotou; ak uvažujeme stochastické úrokové miery, akumulovaná hodnota menovej jednotky investovanej na peňažnom trhu predstavuje numéraire s náhodnou hodnotou.

Definícia 1.4.2 (Obchodná stratégia) Obchodná stratégia je $d+1$ -dimenzionálny proces $\{\hat{H}_t; t = 1, \dots, T\}$, ktorý je predpovedateľný, t.j. \hat{H}_t je \mathcal{F}_{t-1} -merateľné.

Hodnota \hat{H}_t^j interpretuje objem aktíva j držaného v čase medzi $t-1$ a t ; rozhodnutie o tejto kvantite sa samozrejme vykonáva v čase $t-1$, z čoho pramení predpoklad predpovedateľnosti.

Definícia 1.4.3 (Samofinancujúca sa obchodná stratégia) Obchodná stratégia sa nazýva samofinancujúca ak platí

$$(\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t) = \sum_{j=0}^d \hat{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j. \quad (1.2)$$

Predpoklad pre samofinancujúcu sa stratégiu zaručí, že zmenami v portfóliu v čase nedochádza k príjmom ani výdajom, všetky sa týkajú len rebalancovania daného portfólia.

Počiatkový kapitál pre danú stratégiu vyjadríme ako $\hat{V}_0 = (\hat{H}_1, \hat{S}_0)$. V čase t bude hodnota portfólia definovaného danou obchodnou stratégiou $\hat{V}_t = (\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t)$.

Model trhu môžeme zjednodušiť zavedením diskontovania, resp. vyjadrením cien aktív v jednotkách daného numéraire. Naším novým modelovým procesom bude teda $S = \{(S_t^1, \dots, S_t^d); t = 0, \dots, T\}$, kde $S_t^j := \frac{\hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0}$. Je možné odvodiť, že pre každú obchodnú stratégiu $\{(H_t^1, \dots, H_t^d); t = 0, \dots, T\}$ existuje jednoznačne určená samofinancujúca sa obchodná stratégia $\{(\hat{H}_t^0, \dots, \hat{H}_t^d); t = 0, \dots, T\}$ taká, že $H_t^j = \hat{H}_t^j \quad \forall t; j = 1, \dots, d$ a $\hat{H}_1^0 = 0$. Odvodenie plynie zo vzťahu (1.2), pomocou ktorého určíme \hat{H}_{t+1}^0 , jednoznačnosť je zaručená pozitivnosťou \hat{S}_t^0 , $t = 0, \dots, T$. Ďalším dôležitým pozorovaním je, že diskontovaná hodnota portfólia

$$V_t = \frac{\hat{V}_t}{\hat{S}_t^0}, \quad t = 0, \dots, T$$

nezávisí na \hat{H}_t^0 , $t = 0, \dots, T$, t. j. objeme držaného numéraire. Platí totiž $\hat{V}_0 = V_0 = \sum_{j=1}^d H_1^j S_0^j$ a pomocou (1.2) $\Delta V_{t+1} = V_{t+1} - V_t = (H_{t+1}, \Delta S_{t+1})$, kde (\cdot, \cdot) značí skalárny súčin v \mathbb{R}^d . Konečne teda

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^t (H_k, \Delta S_k) = V_0 + (H \cdot S)_t.$$

Definujme stochastický integrál v našom kontexte.

Definícia 1.4.4 (Stochastický integrál) Stochastický integrál $H \cdot S = \{(H \cdot S)_t; t = 0, \dots, T\}$ je reálny stochastický proces definovaný ako

$$(H \cdot S)_t = \sum_{k=1}^t (H_k, \Delta S_k), \quad t = 0, \dots, T,$$

kde (\cdot, \cdot) značí skalárny súčin v \mathbb{R}^d .

Týmto pojmom budeme modelovať zisk alebo stratu z obchodovania podľa stratégie H v určitom čase t .

Definícia 1.4.5 (Množina dosiahnuteľných kontraktov) Podmnožinu K priestoru $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ všetkých \mathcal{F} -merateľných reálnych funkcií definovaných na danom priestore nazývame množinou dosiahnuteľných kontraktov ak platí

$$K = \{(H \cdot S)_T; H \in \mathcal{H}\}.$$

Ide v podstate o výplatné funkcie f v čase T , ktoré je možné replikovať obchodovaním podľa nejakej obchodnej stratégie H s počiatočným kapitálom 0. Množina $K_a = a + K$ bude potom predstavovať výplatné funkcie dosiahnuteľné za cenu $a \in \mathbb{R}$, teda tie, ktoré je možné replikovať sledovaním nejakej obchodnej stratégie s počiatočným kapitálom investora a .

Definícia 1.4.6 (Podmienka neexistencie arbitráže) Finančný trh S spĺňa podmienku neexistencie arbitráže (NA) ak platí

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\},$$

kde $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ značí nezáporný polpriestor a 0 funkciu identicky rovnú nule.

Z uvedenej definície priamo plynie vysvetlenie pojmu *arbitrážnej príležitosti*, ide o kontrakt $f = (H \cdot S)_T$, ktorý je nezáporný a nie je identicky rovný 0.

Definícia 1.4.7 (EMM v zjednodušenom kontexte) Pravdepodobnostná miera Q definovaná na (Ω, \mathcal{F}) sa nazýva ekvivalentná martingálová miera vzhľadom k finančnému trhu S ak je ekvivalentná s P a platí $\mathbb{E}_Q[S_{t+1} | \mathcal{F}_t] = S_t$, $t = 0, \dots, T - 1$.

Označme množinu ekvivalentných mier vzhľadom k určitému S ako $\mathcal{M}^e(S)$. Priopomeňme, že v našom zjednodušenom kontexte s konečnou Ω je ekvivalencia Q a P ekvivalentná s tým, že ak $P(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$, potom platí vzťah ekvivalencie ak rovnakú vlastnosť spĺňa aj Q .

Veta 1.4.1 (Základná veta teórie oceňovania) Nech je S finančný trh (model), potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (i) S spĺňa podmienku (NA).
- (ii) $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Ak teda máme proces S modelujúci finančný trh, ktorý nepripúšťa arbitrážnu príležitosť, je možné prejsť od pôvodnej miery P k miere Q , vzhľadom ku ktorej je S martingál. Prechod sa realizuje prostredníctvom *Radon-Nikodýmovej derivácie*, resp. hustoty, teda $Z = \frac{dQ}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ktorá má vlastnosť

$$Q(A) = \int_A Z dP \quad A \in \mathcal{F}.$$

V tomto kontexte sa dá určiť jednoducho ako $Z(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$.

Vieme teda, aký je vzťah medzi existenciou EMM a arbitrážou na finančnom trhu. Druhou podstatnou otázkou je jednoznačnosť EMM, odpoveď možno nájsť v nasledujúcej vete.

Veta 1.4.2 (Kompletný finančný trh) *Nech S je finančný trh splňujúci podmienku (NA). Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *Existuje práve jedna ekvivalentná martingálová miera, t.j. $\mathcal{M}^e(S) = \{Q\}$.*

(ii) *Každé $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ môže byť reprezentované ako*

$$f = a + (H \cdot S)_T$$

pre nejaké $a \in \mathbb{R}$ a $H \in \mathcal{H}$. V tomto prípade $a = \mathbb{E}_Q[f]$ a stochastický integrál $H \cdot S$ je určený jednoznačne, taktiež platí

$$\mathbb{E}_Q[f | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_Q[f] + (H \cdot S)_t, \quad t = 0, \dots, T.$$

1.4.3 Oceňovacie formule európskych opcií

K oceňovacej formuli európskej opcie sa dá dôjsť dvojakým spôsobom. Priamočiarejšia metóda je založená na odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu opcie, ktorej riešením dostaneme požadovanú formulu. Druhý koncept je založený práve na EMM, kde sa cena opcie počíta ako diskontovaná podmienená stredná (očakávaná) hodnota výplatnej funkcie derivátu. Pozrime sa bližšie na tento spôsob.

Nech $G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\})$ značí výplatnú funkciu derivátu v čase splatnosti $T < \infty$; $\{S_t\}$ je stochastický proces modelujúci cenu podkladovej akcie derivátu. Napr. pre európsku call opciu máme $G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\}) = G(S_T) = (S_T - K)^+$, kde K predstavuje realizačnú cenu. Potom pre cenu derivátu V_t v čase $t \in [0, T]$ za predpokladu neexistencie arbitráže platí:

$$V_t = \mathbb{E}_Q[\exp(-r(T-t))G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\}) | \mathcal{F}_t] \quad (1.3)$$

kde uvažované Q značí ekvivalentnú martingálovú mieru, $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ je prirodzená filtrácia procesu (uvažujeme konečný horizont) $S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Príklad 1.4.1 *Pre európsku call opciu platí $V_t \geq (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+$. Platí $0 \leq (S_T - K)^+ \geq (S_T - K)$ s.j., z čoho podľa (1.3) $V_t \geq 0$ a ďalej*

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_Q[\exp(-r(T-t))G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\}) | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{rt} \mathbb{E}_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \geq e^{rt} \mathbb{E}_Q[e^{-rT}(S_T - K) | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{rt} (\mathbb{E}_Q[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t] - Ke^{-rT}) = \\ &= e^{rt} (S_t e^{-rt} - Ke^{-rT}) = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

V predposlednej rovnosti bola použitá druhá vlastnosť z Definície EMM 1.4.1.

◇

Poznámky a odkazy

Pasáž o arbitráži a EMM, slúžiaca na vysvetlenie súvislostí EMM s existenciou arbitráže na trhu a jeho kompletnosťou, je odvodená z Delbaen [2]. Referenciou, v ktorej možno nájsť pohľady na problematiku EMM z hľadiska diskrétného modelovania, je napr. Shreve [8]. Všeobecnejšiu teóriu finančnej matematiky je možné vyhľadať napr. v spomínanej publikácii Delbaen [2], alternatívne v Steele [10], v ktorom je popísaná aj problematika voľby EMM ak sú aktíva na finančnom trhu modelované geometrickým Brownovým pohybom. Existencia EMM je odvodená pomocou *Girsanovovej teórie*, ktorá umožňuje prechod k miere, pri ktorej sa z Brownovho pohybu s driftom stáva štandardný Brownov pohyb, čo sa využije na to, aby sme z diskontovaného procesu cien akcie dostali martingál po prechode na novú mieru, vid'. napríklad Steele [10]. Jednoznačnosť sa dá dokázať za asistencie *Radon-Nikodýmovej vety* podmienením istými predpokladmi pre integrand Itôvej reprezentácie diskontovanej ceny $e^{-rt}S_t$, vid'. Steele [10].

Kapitola 2

Priblíženie Black-Scholesovho modelu

2.1 Black-Scholesov model

V tejto stati vysvetlíme koncepciu B-S modelu počínajúc uvedením predpokladov modelu. Ponúkame taktiež pohľad na myšlienky, ktoré smerujú k odvodeniu *Black-Scholes-Mertonovej parciálnej diferenciálnej rovnice* a jej riešeniu. Nakoniec odvodíme oceňovací vzorec pomocou konceptu ekvivalentnej martingálovej miery.

2.1.1 Predpoklady Black-Scholesovho modelu

Aby bolo možné dospieť k riešeniu otázky ceny opcie, je nevyhnutné obmedziť reálnu situáciu na trhu určitými *ideálnymi podmienkami*, ktoré sú v B-S modeli nasledujúce:

- a) Krátkodobá úroková miera (bezriziková) je známa a konštantná v čase.
- b) Proces ceny podkladovej akcie $\{S_t\}$ sleduje tzv. *geometrický Brownov pohyb* (v spojitom čase), ktorý spĺňa lineárnu stochastickú diferenciálnu rovnicu

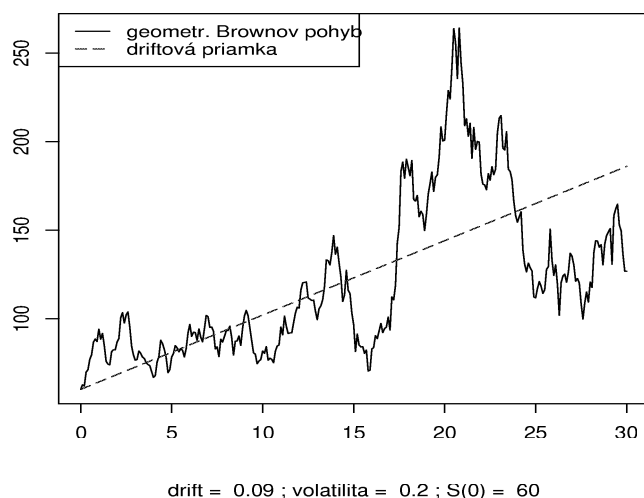
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t); \quad S_0 > 0,$$

s *driftom* μ a *volatilitou* $\sigma > 0$. Vid'. Obr. 2.1.

- c) Akcia nevypláca dividendy ani iné benefity.¹
- d) Opcia je európska, t.j. môže byť uplatnená len v čase expirácie.
- e) Neexistujú transakčné náklady týkajúce sa nákupu a predaja opcie alebo akcie.
- f) Je možné požičať si akýkoľvek podiel z ceny cenného papiera za účelom nákupu alebo držania, a to za bezrizikovú úrokovú mieru.
- g) Nie sú poplatky za *predaj na krátko*².

¹Tento predpoklad platí pre originálny B-S model, *R. Merton* ho však neskôr rozšíril aj o akcie vyplácajúce dividendy.

²Ide o predaj zapožičaného aktíva; investor pritom očakáva pokles ceny aktíva, čím opätovným nákupom a vrátením dosiahne zisk.



Obr. 2.1: Geometrický Brownov pohyb s driftom a volatilitou

Je treba samozrejme pripomenúť, že je predpokladaná aj *neexistencia arbitráže*. Tento predpoklad nám umožňuje použitie ekvivalentnej martingálovej miery namiesto fyzickej pravdepodobnostnej, čiže prechod do rizikovo neutrálneho sveta. Správne je predpokladať aj *kompletnosť trhu*, čo intuitívne zaručuje jednoznačnosť rizikovo-neutrálneho oceňovania a taktiež možnosť replikácie nejakého portfólia iným portfóliom, ktorého hodnota však môže byť závislá na iných parametroch ako hodnota pôvodného portfólia.

2.1.2 Náznaky odvodenia Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca

Stochastický proces modelujúci cenu podkladovej akcie $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ (s konečným horizontom obchodovania T) spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu (SDE):

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t); \quad S_0 > 0, \quad (2.1)$$

ktorej riešenie je tvaru

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\},$$

kde μ predstavuje drift, čiže očakávaný nárast ceny, a σ značí volatilitu, povedzme mieru kolísania ceny. Okrem rizikovej akcie je modelové portfólium tvorené bezrizikovým aktívom (napr. bežný účet, dlhopis), ktorého cena je modelovaná procesom³ $B = \{B_t = \exp(rt); 0 \leq t \leq T\}$, kde r predstavuje bezrizikovú úrokovú mieru (pri spojitom úročení). Tento proces rieši diferenciálnu rovnicu tvaru

$$dB_t = B_t r dt. \quad (2.2)$$

V rizikovo neutrálnom svete môžeme za parameter μ voliť bezrizikovú úrokovú mieru r , v takom prípade dostaneme ako dôsledok riešenia už uvedenej SDE vzťah pre cenu

³Môžeme interpretovať ako množinu reálnych funkcií, závislých na r a t .

akcie tvaru:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

Označme $F(t, S_t)$ ($= F(t, s)$) funkciu vyjadrujúcu cenu derivátu v čase t , závislú na cene podkladového aktíva S_t . Za predpokladu dostatočnej integrovateľnosti dostaneme aplikáciou Lemma 1.3.2 (resp. vzťahu (1.1)) na túto funkciu vzťah:

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\sigma S_t dW_t. \quad (2.3)$$

Odvodenie Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice 1.

Použitá metóda je založená na replikácii hodnoty opcie pomocou portfólia tvoreného podkladovou akciou a bezrizikovým aktívom.

Uvažujme portfólio, ktoré je zložené z troch nasledujúcich zložiek:

- a) Podkladovej akcie, ktorej cena je modelovaná procesom (2.1).
- b) Bezrizikového aktíva, povedzme štátneho dlhopisu, ktorého cena sleduje proces (2.2).
- c) Opcie, ktorej cena v čase t závislá na cene podkladovej akcie S_t je vyjadrená ako $F_t = F(t, S_t)$.

Hodnota nášho portfólia v čase t bude vyjadrená ako

$$\Pi_t = \alpha S_t + \beta B_t + F_t. \quad (2.4)$$

α a β samozrejme predstavujú podiely v daných zložkách portfólia. Zmenu hodnoty portfólia teda bude predstavovať rovnica

$$d\Pi_t = \alpha dS_t + \beta B_t r dt + dF_t.$$

Po dosadení zo vzťahov (2.1) a (2.3) dostávame

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \alpha(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \beta B_t r dt + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t dt + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\sigma S_t dW_t = \\ &= \left[\alpha\mu S_t + \beta B_t r + \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \right] dt + \\ &+ \left[\alpha\sigma S_t + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)S_t\sigma \right] dW_t. \end{aligned}$$

Chceme, aby naše portfólio bolo bezrizikové (v danom krátkom časovom okamihu), a aby hodnota opcie bola replikovaná hodnotou ostatných dvoch zložiek. Budeme teda predpokladať:

1. Portfólio je bezrizikové.
2. Súčasná hodnota portfólia je 0.

Z predpokladu 1. plynie, že vplyv stochastickej zložky v zmene ceny portfólia by mal byť nulový, čiže

$$\alpha = -\frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t).$$

Z druhého predpokladu dostávame za pomoci predchádzajúceho vzťahu a (2.4)

$$\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)S_t - F_t}{B_t}.$$

Platí

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)S_t - F_t = \beta B_t,$$

označme $\Pi_t^* = \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)S_t - F_t$, potom

$$d\Pi_t^* = \beta dB_t = \beta B_t r dt = \Pi_t^* r dt$$

a s prihliadnutím na predchádzajúce rovnice ((2.1) a (2.3)) dostávame vzťah

$$d\Pi_t^* = -\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt.$$

Z posledných dvoch vzťahov teda plynie

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + r\frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 = rF(t, S_t). \quad (2.5)$$

Táto rovnica sa nazýva *Black-Scholes-Mertonova parciálna diferenciálna rovnica (B-S-M PDE)*.⁴

Odvodenie Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice 2.

Ukážeme ešte jeden postup, ktorým sa dá dospieť k vyššie uvedenej parciálnej diferenciálnej rovnici. Predpokladajme, že investor zostavuje portfólio pozostávajúce z troch zložiek. Aktívum A bude značiť opciu, ktorej cena v čase bude vyjadrená ako dvakrát spojito diferencovateľná funkcia $V(t) = F(t, S_t)$. Druhé aktívum bude tvorené podkladovou akciou, označíme ho B . Ako obyčajne proces modelujúci cenu podkladového aktíva bude $\{S_t\}$, pre ktorý platí vzťah (2.1). Tretou zložkou portfólia značenou C bude bezrizikové aktívum so zodpovedajúcou bezrizikovou úrokovou mierou r . Nominálna hodnota daného portfólia v čase t potom bude

$$X(t) = N_1(t)S(t) + N_2(t)V(t) + M(t),$$

kde N_1 predstavuje investičný podiel v zložke portfólia B , N_2 podiel v zložke A a M objem prostriedkov investovaných do bezrizikového aktíva. Ďalej označme rovnicu zo vzťahu (2.3) ako

$$dF_t = adt + bdW_t,$$

kde

$$a = \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 =: \alpha_F F \quad (2.6)$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t)\sigma S_t =: \beta_F F. \quad (2.7)$$

⁴Presnejšie vid'. Poznámka k riešeniu B-S-M PDE.

Malliaris v [5] predpokladá, že N_1 a N_2 sa pomaly prispôsobujú zmenám S , V a t , čiže budeme predpokladať platnosť $dN_1 = dN_2 = 0$ pre krátky časový okamih (spojité rebalancovanie portfólia nie je možné ani v skutočnosti), potom teda

$$\begin{aligned} dX_t &= N_1 dS_t + N_2 dF_t + dM = \\ &= (\mu dt + \sigma dW_t)N_1 S_t + (\alpha_F dt + \beta_F dW_t)N_2 F_t + rM dt. \end{aligned}$$

Definujme $V_1 = \frac{N_1 S_t}{X_t}$, $V_2 = \frac{N_2 F_t}{X_t}$, $V_3 = \frac{M_t}{X_t} = 1 - V_1 - V_2$ tak, aby bolo portfólio bezrizikové (pre daný krátky časový okamih), teda tak, aby

$$\text{var}_t \left(\frac{dX_t}{X_t} \right) = \text{var}_t (V_1 \sigma dW_t + V_2 \beta_F dW_t) = 0,$$

var_t značí rozptyl za daných $S(t)$, $F(t, S(t))$, $M(t)$. Zvolíme teda (\bar{V}_1, \bar{V}_2) tak, aby

$$\bar{V}_1 \sigma + \bar{V}_2 \beta_F = 0. \quad (2.8)$$

Keďže platí $\frac{dX_t}{X_t} = (\mu dt + \sigma dW_t)V_1 + (\alpha_F dt + \beta_F dW_t)V_2 + r dt V_3$ dostávame

$$\mathbb{E} \left(\frac{dX_t}{X_t} \right) = \mu \bar{V}_1 dt + \alpha_F \bar{V}_2 dt + r(1 - \bar{V}_1 - \bar{V}_2) dt = r dt. \quad (2.9)$$

Posledná rovnosť plynie z bezrizikovosti portfólia. Zo vzťahov (2.8) a (2.9) dostaneme

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = -\frac{\beta_F}{\sigma}$$

a

$$r = \mu \bar{V}_1 + \alpha_F \bar{V}_2 - r \bar{V}_1 - r \bar{V}_2 + r.$$

Konečne teda

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\alpha_F - r}{\beta_F}. \quad (2.10)$$

Substitúciou (2.6) a (2.7) do vzťahu (2.10) dostaneme už uvedený tvar Black-Scholes-Mertonovej diferenciálnej rovnice (2.5).

Poznámka k riešeniu B-S-M PDE

Ak v (2.5) nahradíme S_t za x dostaneme PDE tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + r \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x)\sigma^2 x^2 = rF(t, x).$$

Za podmienky $F(T, x) = G(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, kde G značí výplatnú funkciu opcie, môžeme dospieť k riešeniu, teda opčnej oceňovacej formuli, štandardne pre európsku call opciu. Na tomto mieste však odkážeme na príslušnú literatúru, ktorá je uvedená v *Poznámkach a odkazoch*, a pozrieme sa na odvodenie danej formule z iného hľadiska.

Náznak odvodu Black-Scholesovho opčného oceňovacieho vzorca

Budeme postupovať podľa druhého konceptu oceňovania, čiže použitím EMM.

Definícia 2.1.1 ("Translačná" hustota) *Nech $X = \{X_t\}$ je stochastický proces. Označme $p(t_0, t_1; x, y)$ pre $t_0 < t_1$ ako podmienenú hustotu náhodnej veličiny $X(t_1)$ za podmienky $X(t_0) = x$ (premenná je y).*

Lemma 2.1.1 ("Translačná" hustota geometrického BP) *Nech je stochastický proces $S = \{S_t\}$, ktorý splňa SDE tvaru $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$, ďalej $t_0 < t_1$ a máme dané S_{t_0} (značí hodnotu, nie náhodnú veličinu), potom riešenie danej SDE tvaru $S(t_1) = S_{t_0} \exp\{\sigma(W(t_1) - W(t_0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1 - t_0)\}$ (tzv. geometrický Brownov pohyb) má translačnú hustotu*

$$p(t_0, t_1; S_{t_0}, y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(t_1 - t_0)\sigma^2} \left[\log \frac{y}{S_{t_0}} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1 - t_0)\right]^2\right\}. \quad (2.11)$$

Náznak dôkazu. $W(t_1) - W(t_0)$ má hustotu tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(t_1 - t_0)}\right\}.$$

Substitúciou

$$\begin{aligned} y &= S_{t_0} \exp\left\{\sigma z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1 - t_0)\right\} \\ dy &= \sigma dz \end{aligned}$$

dostaneme hustotu daného tvaru. □

Predpokladajme, že výplatná funkcia je tvaru $G(y) = (y - K)^+$ (európska call opcia) a pre proces podkladového aktíva platí SDE $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ (teda $\mu = r$). Potom použitím lemma dostávame

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[G(S_T) | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty G(y) p(t, T; S_t, y) dy = \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (y - K) \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(T-t)\sigma^2} \left[\log \frac{y}{S_t} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]^2\right\} dy = \\ &= S_t \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]\right) - \\ &\quad - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]\right), \quad (2.12) \end{aligned}$$

kde $\Phi(v) = \int_{-\infty}^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Vzťah (2.12) sa nazýva *Black-Scholesova opčná oceňovacia formula*.

Poznámky a odkazy

Konkrétne predpoklady B-S modelu by sa mohli napr. v závislosti od prístupu k odvodeniu oceňovacej formule líšiť, ich jadro však spočíva v efektívnosti a kompletnosti trhu. V tomto texte sú uvedené v takmer rovnakej podobe ako v pôvodnej práci o B-S modeli Black-Scholes [1].

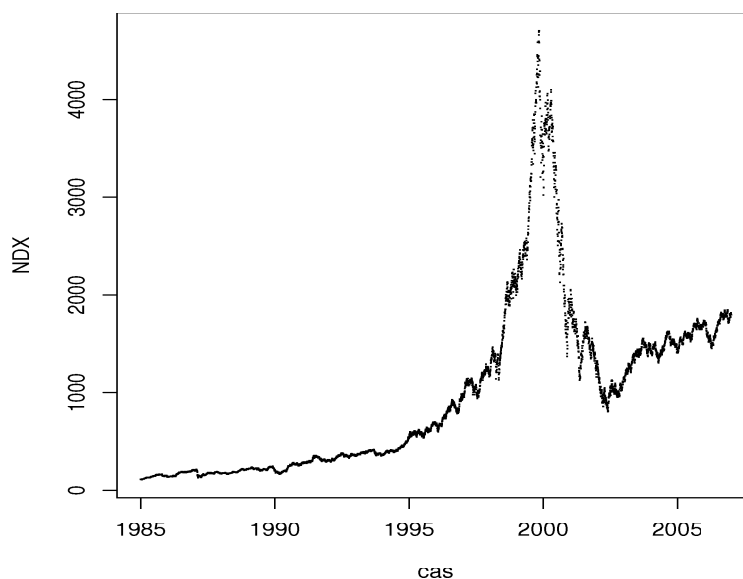
Postupy odvodenia B-S-M PDE sú založené na schémach uvedených v Black-Scholes [1], Hull [4], či Steele [10]; alternatívne (2. spôsob) v Malliaris [5]. Cenným zdrojom informácií je aj Shreve [8], z ktorého vychádza odvodenie oceňovacej formule pomocou EMM.

Kapitola 3

Kontrasty Black-Scholesovho a reálneho sveta

3.1 Nedostatky Black-Scholesovho modelu

Cieľom nasledujúcej časti bude konfrontovať modelové predpoklady a ich vlastnosti s vlastnosťami získanými empirickou analýzou dát z trhu. Základným kameňom B-S modelu je lineárna stochastická diferenciálna rovnica (2.1) modelujúca proces cien podkladovej akcie daného opčného kontraktu. Z nasledujúceho textu bude zrejmé, že vlastnosti implikované týmto predpokladom, ako sú spojitosť procesu, či normálne rozdelenie jeho prírastkov, často pri porovnaní s vlastnosťami vykazovanými reálnymi dátami zlyhávajú. Je samozrejme potrebné si uvedomiť, že všetky konštatovania týkajúce sa reálnych dát sú podmienené ich výberom. Empirické štúdie sú založené na dátach z americkej akciovej burzy NASDAQ, ide o istý výber opčných kontraktov týkajúcich sa akcií danej burzy a burzový index NASDAQ-100, zjednodušene značený tiež ako NDX. Detailnejšia charakteristika dát a postupov sa nachádza v dodatkoch.



Obr. 3.1: Pribeh indexu NASDAQ-100 v rokoch 1985 - 2007

3.1.1 (Ne)normálne rozdelenie zmien logaritmických cien

Black-Scholesov model pracuje s predpokladom procesu ceny akcie $\{S_t\}$, ktorý je riešením SDE (2.1) pre určité $S_0 > 0$. Definujme funkciu $g(t, s) = g(t, S_t) := \ln S_t$. Pre túto funkciu platí

$$\frac{\partial g}{\partial s}(t, S_t) = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(t, S_t) = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) = 0.$$

Aplikáciou Lemma 1.3.2, resp. vzťahu (1.1), dostaneme

$$dg_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (3.1)$$

Vzťah (3.1) implikuje tzv. *lognormálnu vlastnosť* zmien ceny podkladovej akcie v B-S modeli, pretože z vlastností Brownovho pohybu vyplynie, že zmeny logaritmických cien majú normálne rozdelenie, presnejšie $\ln \frac{S_t}{S_0}$ má rozdelenie $\mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$.

Otázne však je, do akej miery tento predpoklad korešponduje s reálnym správaním cien na trhu. Pozrime sa teda na vlastnosti vykazované tzv. dennými *logaritmickými prírastkami* dát, ktoré sú definované ako

$$R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right).$$

Aplikáciou známej *Taylorovej formule*

$$R_t = \ln \left(1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right) \doteq \frac{S_t - S_{t-1}}{S_t}$$

sa dostaneme k interpretácii logaritmických prírastkov ako denných relatívnych zmien $\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$. Budeme predpokladať, že proces definovaný logaritmickými prírastkami je *stacionárny*, teda zjednodušene povedané, že rozdelenie procesu závisí len na dĺžke časového intervalu, nie časovom bode počiatku intervalu.

Nenulová šikmosť a nadmerná špicatosť

Definícia 3.1.1 (Šikmosť) *Nech X je náhodná veličina, $E|X|^3 < \infty$. Šikmosťou tejto náhodnej veličiny je*

$$\frac{E(X - EX)^3}{(var X)^{3/2}}.$$

Táto charakteristika vyjadruje mieru asymetrie rozdelenia. Rozdelenia vychýlené (zošikmené) viac naľavo od strednej hodnoty vykazujú negatívnu šikmosť a naopak. Pre symetrické rozdelenia (okolo strednej hodnoty) platí, že šikmosť je nulová. V Prípade 3.1.1 je táto vlastnosť odvodená pre normálne rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Definícia 3.1.2 (Špicatosť) *Nech X je náhodná veličina, $E|X|^4 < \infty$. Špicatosťou tejto náhodnej veličiny je*

$$\frac{E(X - EX)^4}{(var X)^2}.$$

Touto charakteristikou môžeme merať tzv. *ťažké chvosty* rozdelenia danej náhodnej veličiny, čiže zjednodušene povedané, ako sa veličina správa v oblasti hodnôt dostatočne vzdialených od jej strednej hodnoty.

Príklad 3.1.1 *Nech má náhodná veličina X rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Potom*

$$\begin{aligned} E(X - \mu)^3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 0. \end{aligned}$$

Použili sme substitúciu $y = x - \mu$, integrujeme teda nepárnu funkciu cez interval symetrický okolo 0, čo nám dáva nulový výsledok.

Špicatosť tejto náhodnej veličiny je rovná 3. Dokážme i túto vlastnosť.

$$\begin{aligned} E(X - \mu)^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} y^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} z^{-1/2} \sqrt{2}\sigma z^2 4\sigma^4 e^{-z} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\sigma^4 \int_0^{\infty} z^{3/2} e^{-z} dz = \\ &= \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} ([-z^{-3/2} e^{-z}]_0^{\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} z^{1/2} e^{-z} dz) = \\ &= \frac{6\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = \dots = \frac{6\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = 3\sigma^4. \end{aligned}$$

Použili sme substitúciu $\frac{y^2}{2\sigma^2} = z$ a dvakrát metódu per partes, pričom pri jej druhej aplikácii nie je postup rozpisovaný (analogické s prvou aplikáciou). Γ značí Gamma funkciu tvaru $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, platí $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Z výsledku teda plynie, že špicatosť rozdelenia $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ je 3.

◇

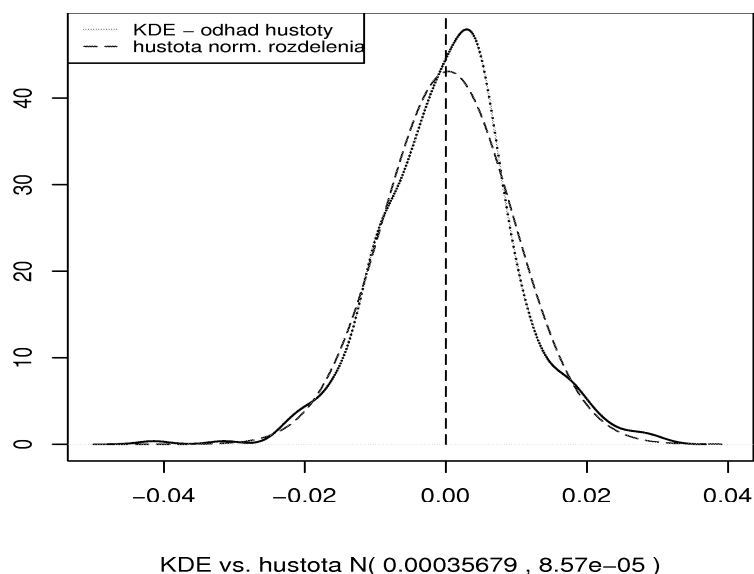
Problémom je, že empirická šikmosť pre logaritmické prírastky nenadobúda nulovú hodnotu (často nadobúda menšie, záporné hodnoty), čo svedčí o odklone modelu od reálneho diania.

Šikmosť	Špicatosť
-0.0903372	7.098136

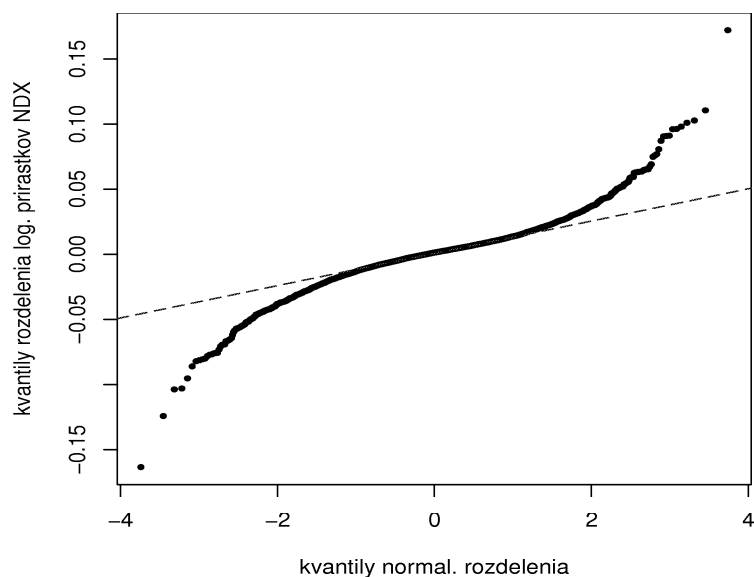
Tabuľka 3.1: Empirické údaje indexu NASDAQ-100 za roky 1985 - 2007

Jav nenulovej šikmosti je dobre badateľný aj pri porovnaní hustoty normálneho rozdelenia s parametrami určenými z dát s odhadom hustoty rozdelenia¹ logaritmických prírastkov, viď. Obr. 3.2 a 3.4.

¹KDE - *Kernel Density Estimation*, jeden zo spôsobov odhadovania hustoty rozdelenia empirických dát.

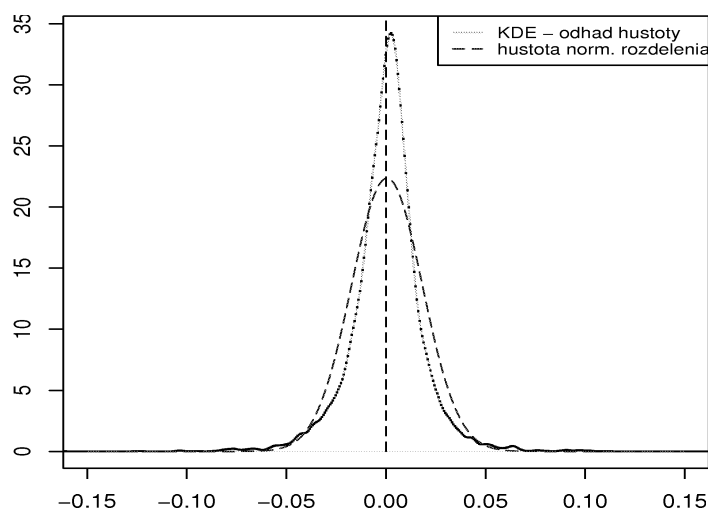


Obr. 3.2: Porovnanie odhadu hustoty s hustotou normálneho rozdelenia, NASDAQ-100 2005 - 2007



Obr. 3.3: Q-Q graf pre rozdelenie logaritmickej prírastkov NASDAQ-100

Pri porovnaní špicatosti normálneho rozdelenia s charakteristikou získanou skúmaním empirických dát sa opäť dostávame do istého sporu, pretože pozorované dáta z trhu vykazujú spravidla väčšiu špicatosť ako náš model (viď. Tab. 3.1 alebo Obr. 3.4). To, že empirické rozdelenie má *leptokurotický* charakter, teda vykazuje jav ťažkých chvostov a zošíkmenie, je badateľné aj z Q-Q grafu (Obr. 3.3), ktorý porovnáva kvantily normálneho rozdelenia s empirickými kvantilmi rozdelenia logaritmickej prírastkov.

KDE vs. hustota $N(0.000512300710449265, 0.000318577471028558)$

Obr. 3.4: Porovnanie odhadu hustoty s hustotou normálneho rozdelenia, NASDAQ-100 1985 - 2007

Zhrnutie

Uvedené porovnania teda poukazujú na to, že zmena ceny akcie na trhu sa skutočne podľa normálneho rozdelenia riadiť nebude. Finančné dáta majú tendencie k nespojitému, skokovitému priebehu. Embrechts [3] uvádza, že reálne dáta nesledujú spojité procesy, pretože ceny sa v skutočnosti nemenia v ľubovoľne malých časových okamihoch, nakoľko od Brownovho pohybu, ktorý v akomkoľvek časovom intervale generuje zmenu modelovanej ceny. Lineárna SDE (2.1) taktiež neumožňuje zachytiť skoky vyskytujúce sa v reálnych dátach spojené s ťažkými chvostami rozdelenia empirických zmien cien. Upozorníme opäť na fakt, že akékoľvek konštatovanie je závislé na výbere dát, čo je častokrát vo finančnej literatúre podceňované.

Uvedme ešte tabuľku s výsledkami rôznych testov normality logaritmických prírastkov. Vo všetkých je hypotéza normálneho rozdelenia jednoznačne zamietnutá (napr. na hladine $\alpha = 0,05$), vid. Tab. 3.2.

Test	Test. štatistika	p-hodnota
Lilliefors	$D = 0.0753$	$< 2.2e-16$
Pearson chi-square	$P = 719.4605$	$< 2.2e-16$
Shapiro-Francia	$W = 0.9317$	$< 2.2e-16$
Shapiro-Wilk	$W = 0.9327$	$< 2.2e-16$

Tabuľka 3.2: Výsledky testov normality logaritmických prírastkov indexu NASDAQ-100 za roky 1985 - 2007

3.1.2 Nekonštantná volatilita

Volatilita akcie a jednoduchý spôsob jej odhadovania

Volatilita akcie σ je parameter určujúci mieru kolísania jej ceny, čím vyššia hodnota parametru, tým výraznejšie výkyvy môžeme v správaní ceny akcie očakávať. Volatilitu je možné odhadnúť jednoduchým spôsobom z historických dát pomocou štandardného odhadu, a to výberového rozptylu logaritmických prírastkov pozorovaných cien danej opcie R_t . Predpokladajme, že máme k dispozícii pozorovania logaritmických prírastkov R_t , $t = 1, \dots, T$, kde R_t predstavuje logaritmický prírastok v t -tom intervale dĺžky τ vyjadrenej v rokoch, teda $R_t = \ln S_{t\tau} - \ln S_{(t-1)\tau}$. Odhad štandardnej odchýlky R_t dostaneme ako

$$s_R = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2},$$

kde \bar{R} štandardne značí priemer. Zo vzťahu (3.1) plynie, že teoretická štandardná odchýlka R_t je $\sigma\sqrt{\tau}$. Z toho vyplýva odhad volatility tvaru $\hat{\sigma} = \frac{s_R}{\sqrt{\tau}}$. Tento vzťah je použitý pri odhade *realizovanej*² volatility vyobrazenej v Obr. A.6.

Volatility smile

B-S oceňovací vzorec pracuje s piatimi vstupnými parametrami, ktorými sú cena podkladovej akcie S , uplatňovacia (realizačná) cena K , doba do splatnosti T , bezriziková úroková miera r a volatilita podkladovej akcie σ . Prvé štyri parametre sú buď pomerne jednoducho merateľné, alebo priamo dané opčným kontraktom. Jediným prvkom s určitým podielom nejednoznačnosti je práve volatilita podkladovej akcie.

Ako, resp. z ktorých pozorovateľných veličín na trhu tento parameter určíť, je pomerne zložitá otázka. Určme volatilitu akcie na základe konkrétne daných ostatných štyroch parametrov a ceny derivátu pozorovanej na trhu.

Definícia 3.1.3 (Implikovaná volatilita) *Nech sú dané hodnoty parametrov S , K , T , r a cena opcie C . Potom definujeme implikovanú volatilitu σ_{impl} ako hodnotu, pre ktorú platí³*

$$C = \text{BSP}(S, K, T, r, \sigma_{impl})$$

kde BSP značí B-S oceňovaciu formulu - pre európsku call opciu (2.12).

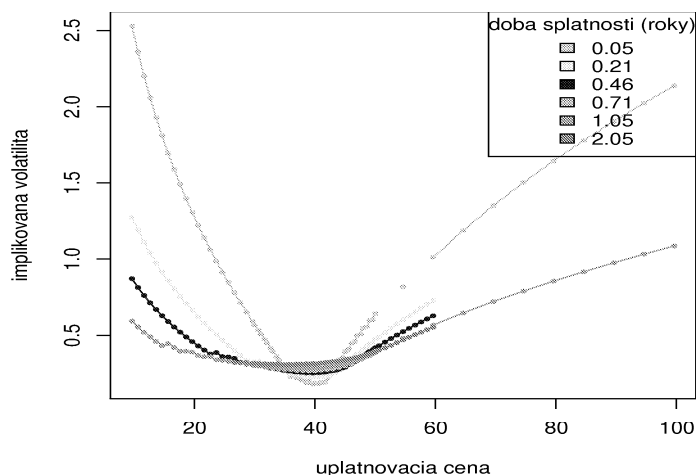
Za platnosti modelu pre cenu opcie na rovnakú podkladovú akciu s fixovanou cenou akcie S , dobou do splatnosti T a úrokovou mierou r by pre rôzne uplatňovacie ceny K mala byť implikovaná volatilita konštantná. Pri empirických pokusoch však dostávame nekonštantnú závislosť implikovanej volatility na K . Tento jav sa nazýva *volatility smile*, resp. *volatility skew*.⁴ Volatility smile nezávisí na type opcie (call

²Niekedy sa používa termín *historická volatilita*.

³K riešeniu možno dospieť numerickými metódami. Poznamenajme ešte, že pri riešení daného vzťahu pre jednoduché call a put opcie dospejeme k jednoznačnému riešeniu, čo by však pri rôznych iných zložitejších typoch opcií, ako sú napríklad *exotické*, nemuselo platiť. Tieto typy derivátov však nie sú predmetom nášho záujmu.

⁴V niektorých špecifických prípadoch pozorovania vykazujú odlišný efekt, z čoho pramení pojem *volatility frown* (*zamračený pohľad*).

alebo put), čo plynie z platnosti *put-call parity*⁵ pre ceny určené B-S modelom ako aj pre trhové ceny. Na Obr. 3.5 sú zobrazené volatility smiles pre rôzne doby splatnosti. Badateľný je klesajúci dôraz smileu s rastúcou dobou splatnosti. Pre dlhšie doby splatnosti sa teda približujeme k predpokladu B-S modelu.



Obr. 3.5: Volatility smile

Vidíme teda, že v skutočnosti existuje funkčná závislosť implikovanej volatility na uplatňovacej cene akcie. Obr. 3.5 motivuje ku skúmaniu závislosti implikovanej volatility na dobe splatnosti, čím dostaneme o niečo komplexnejší pohľad. Študujme teda i závislosť implikovanej volatility na dobe splatnosti opcie, v anglickej terminológii *term structure of implied volatility*. Takto dostaneme hodnoty implikovaných volatilit v závislosti na K a T , teda takzvaný *volatility surface* (viď. Obr. 3.6), laicky povedané ide o graf funkcie $\sigma_{impl}(K, T)$. Na volatility surface je zjavné zjemňujúce sa zakrivenie s rastúcou dobou splatnosti, s týmto javom sme sa stretli v inej interpretácii už v Obr. 3.5.

Jav volatility smile je paralelou spojený s empirickým rozdelením cien podkladovej akcie, presnejšie s jeho porovnaním s rozdelením teoretickým, viď. Obr. 3.4. Vidíme, že empirické rozdelenie prisudzuje relatívne vyššiu pravdepodobnosť vyšším a nižším cenám (resp. zmenám cien), čo spôsobuje relatívne vyššie ocenenie opcií s vysokými, resp. nízkymi uplatňovacími cenami.⁶ Toto vedie k pomerne vyšším hodnotám implikovanej volatility pre vyššie a nižšie hodnoty uplatňovacích cien, čo si môžeme všimnúť na Obr. 3.5.

Ak akceptujeme B-S vzorec ako cenotvorný, môžeme pomocou konceptu implikovanej volatility vyjadriť ceny derivátov. Existujú rôzne metódy prístupu k analýze javov spojených s implikovanou volatilitou. Na oceňovanie opcie možno napríklad použiť ako parameter σ B-S vzorca priemer kotovaných implikovaných volatilit

⁵Vzťah vychádzajúci z predpokladu neexistencie arbitráže umožňujúci vyjadriť cenu európskej put, resp. call opcie pomocou známej ceny call, resp. put opcie so zhodnou uplatňovacou cenou a dobou splatnosti, v základnom tvare $c + Ke^{-rT} = p + S_0$.

⁶Deep-out-of-the-money call a put opcie, viď. Hull [4].

opcí na zhodnú podkladovú akciu, alebo taký parameter, ktorý minimalizuje strednú štvorcovú odchýlku trhových cien a cien určených B-S vzorcom. Kotácie implikovaných volatilit pre rôzne K a T sa dajú samozrejme rozdielnymi spôsobmi interpolovať⁷, čím dostaneme "hladké" krivky, resp. plochy, ktoré nám opäť ponúkajú širšiu škálu uplatnenia, napríklad môžeme určiť ceny derivátov B-S vzorcom podľa volatilit pre nové kombinácie realizačných cien a dôb splatností získaných interpoláciou. Implikovaná volatilita ponúka finančným špecialistom nástroj, ktorým môžu Black-Scholesov model adaptovať na podmienky rôznych trhov, a to rozličnými spôsobmi modelovania tohoto prvku. Podobné prístupy sú už však nad rámec tohoto textu.

Zhrnutie

V spomenutých javoch je odzrkadlený odklon B-S modelu od skutočnosti. *Reálny proces* cien akcie, teda ten, ktorý sledujú ceny pri vývoji na trhu (za predpokladu, že nejaký existuje), bude zrejme iný ako ten, ktorý navrhuje B-S model. Existujú samozrejme modely, ktoré sa snažia implementovať do procesov poznatky získané empirickými pozorovaniami, čiže napríklad zmeniť konštantný charakter volatility (aj driftu) na deterministický

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

resp. zahrnúť do ich vývoja prvok stochasticity, v jednoduchšom prípade naviazaním volatility i driftu na cenu podkladovej akcie

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t,$$

alebo interpretáciou volatility ako stochastického prvku. Model pre proces cien sa teda môže zovšeobecniť na

$$dS_t = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW_t.$$

Tento model predstavuje najvšeobecnejšiu verziu spojitého procesu, pri jeho rozšírení sa dostávame už k pokročilejším metódam, ako sú napríklad *Lévyho procesy* atď. Pri záujme o hlbšie štúdium však odkážeme na príslušnú literatúru.

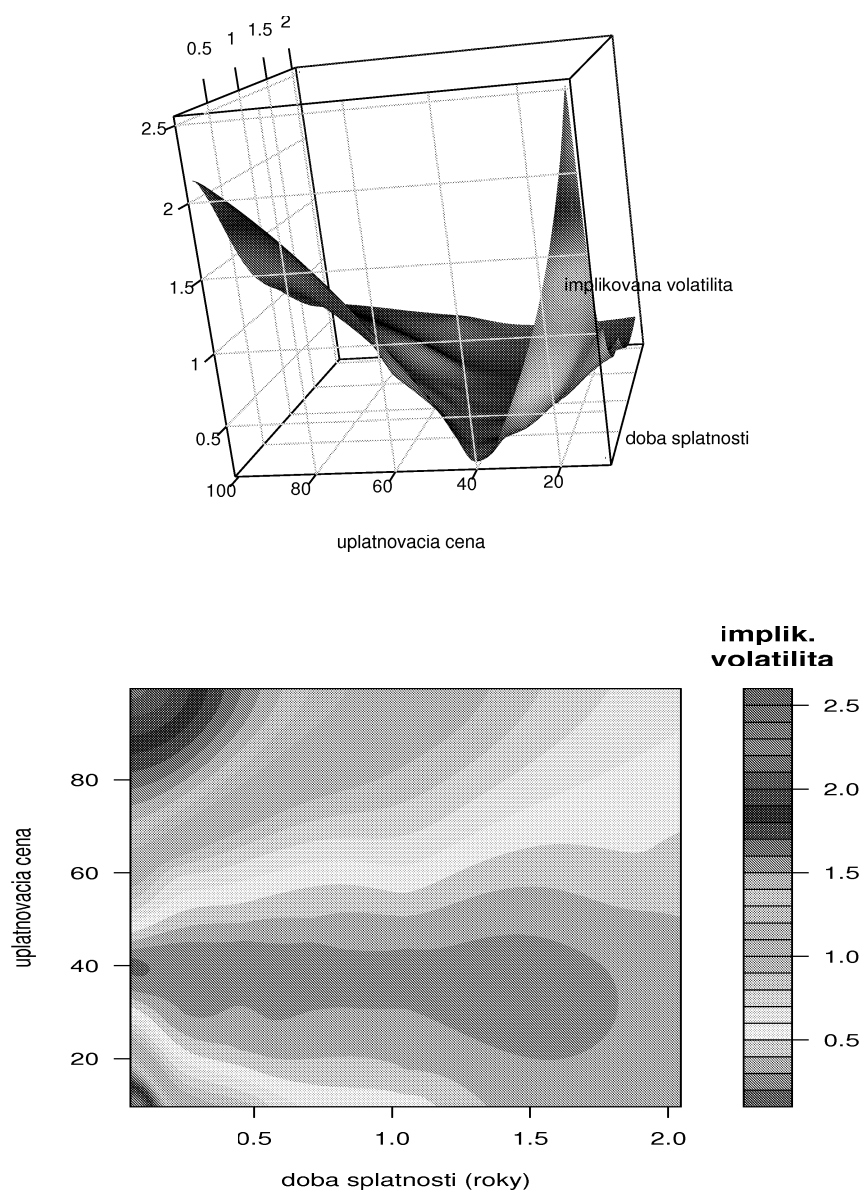
Poznámky a odkazy

Podklady získané empirickou analýzou dát pre spomenuté odklony od modelu normálneho rozdelenia zmien logaritmických cien sa nachádzajú taktiež v Schoutens [9].

Zaujímavé pohľady z finančného hľadiska na paralely medzi kvadratickou variáciou a volatilitou sa nachádzajú v Rebonato [7]. Kniha je však určená pre čitateľov s dobrými znalosťami problematiky obchodovania opčných kontraktov. V publikácii sa nachádzajú aj informácie o spomenutých pokročilejších postupoch modelovania.

Rozsiahlejšia prezentácia poznatkov získaných empirickou analýzou trhových dát, týkajúca sa i javov volatility smile a volatility surface, sa nachádza v dodatkoch.

⁷Napríklad v našom prípade je Obr. 3.6 výsledkom interpolácie splineami.



Obr. 3.6: Volatility surface a jeho "topografia"

Literatúra

- [1] Black, F.; Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy vol. **81** (1973), s. 637 - 654.
- [2] Delbaen, F.; Schachermayer, P.: *The Mathematics of Arbitrage*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T.: *Modelling Extremal Events*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [4] Hull, J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives (5th edition)*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 2002.
- [5] Malliaris, A. G.: *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1982.
- [6] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Fifth edition)*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] Rebonato, R.: *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox (2nd edition)*, Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2004.
- [8] Shreve, E. S.: *Stochastic Calculus in Finance*, Preprint, Carnegie Mellon University, 1996.
- [9] Schoutens, W.: *Lévy Processes in Finance*, Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2003.
- [10] Steele, J. M.: *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag Inc., New York, 2001.
- [11] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.

Dodatok A

Resumé empirickej analýzy

A.1 Informácie o použitých dátach, prostriedkoch a postupoch

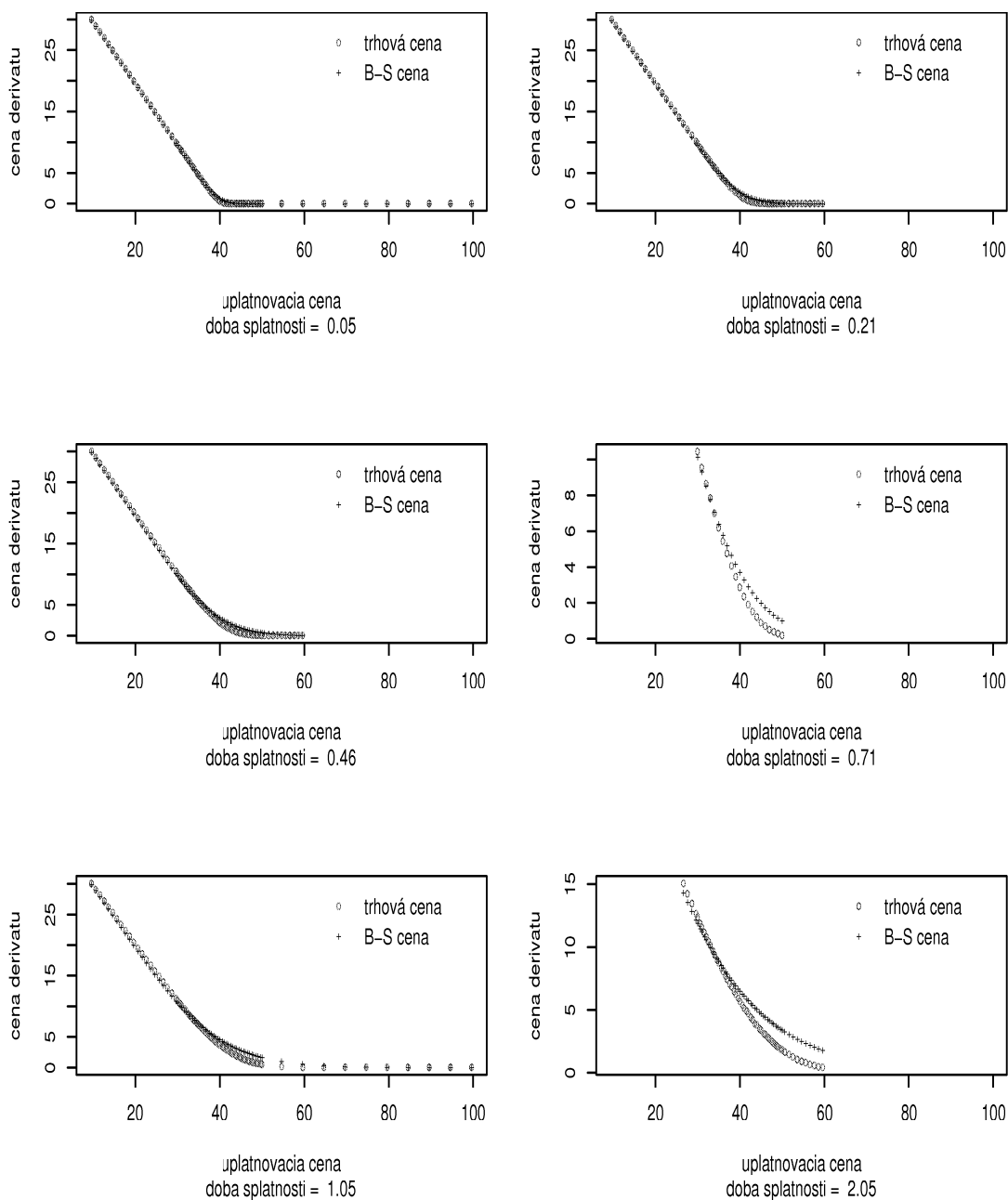
Dátový súbor obsahujúci informácie o opčných kontraktach bol získaný zo servera <http://www.ivolatility.com>. Ide o ukážkovú vzorku obsahujúcu údaje o kontraktach vzťahujúcich sa na akcie americkej burzy NASDAQ; opcie majú rôzne doby splatnosti v rozpätí od 9 dní po viac ako 2 roky, dáta sa jednotne vzťahujú k 3. 1. 2005, čas expirácie je v rozmedzí 22. 1. 2005 do 20. 1. 2007. Ďalej sa pracovalo s dátami obsahujúcimi informácie o vývoji burzového indexu NASDAQ-100, skrátene NDX, a to s dvoma súbormi. Tieto súbory poskytla ČSOB, zdroj Reuters. Jeden súbor obsahuje informácie o denných uzatváracích hodnotách indexu od 25. 9. 1985 do 11. 4. 2007, druhý rozšírené informácie (denné uzatváracie i otváracie hodnoty, denné maximá a minimá) o priebehu NDX pre obdobie zodpovedajúce zhruba datovaniu opčných kontraktov, konkrétne od 1. 3. 2005 do 11. 4. 2007. Rozšírené charakteristiky súborov sa nachádzajú na priloženom CD.

Na analýzu dát bol použitý GNU štatistický software *R* s balíkom *fOptions* obsahujúcim funkcie na oceňovanie opcií okrem iného aj pomocou B-S modelu, ďalej s balíkom *MBA* umožňujúcim interpoláciu pomocou B-splínov na vytvorenie volatility surfacu, použitý bol taktiež balík *rgl*, ktorý poskytuje sofistikované nástroje na prácu s grafikou. Na implementáciu testov normality bol použitý balík *nortest*. Všetok uvedený software je taktiež súčasťou spomenutého CD.

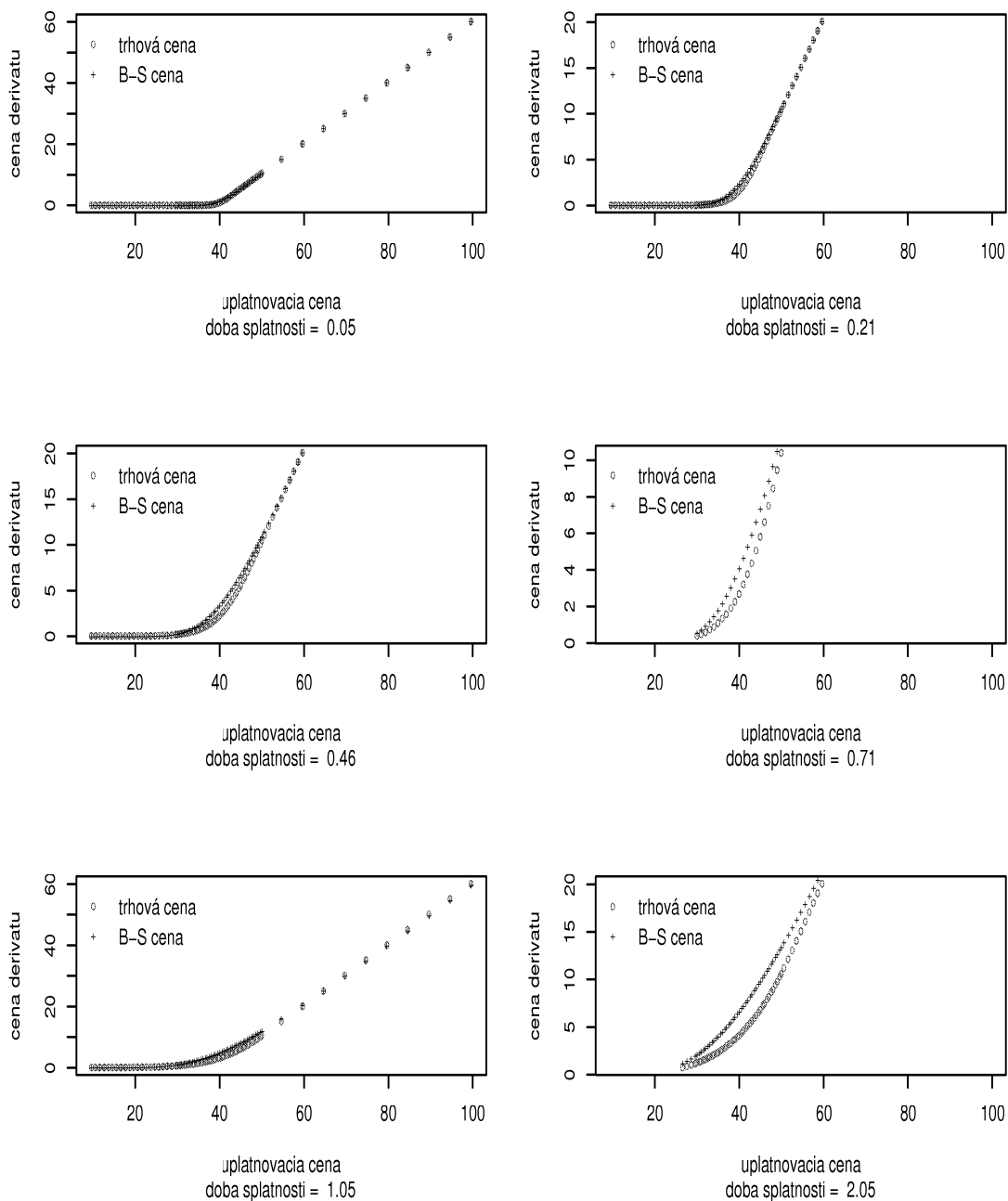
Pri určovaní cien akcií pomocou B-S modelu bol ako parameter σ zvolený priemer implikovaných volatilit celého súboru opcií. Volatility surfacu je výsledkom už spomenutej interpolácie implikovaných volatilit vyčíslených pre kombinácie rôznych dôb splatností a uplatňovacích cien, ktoré boli k dispozícii, pomocou viacúrovňových B-splínov.

Všetky výsledky, ako aj zdrojové kódy a dátové súbory, je možné nájsť na priloženom CD.

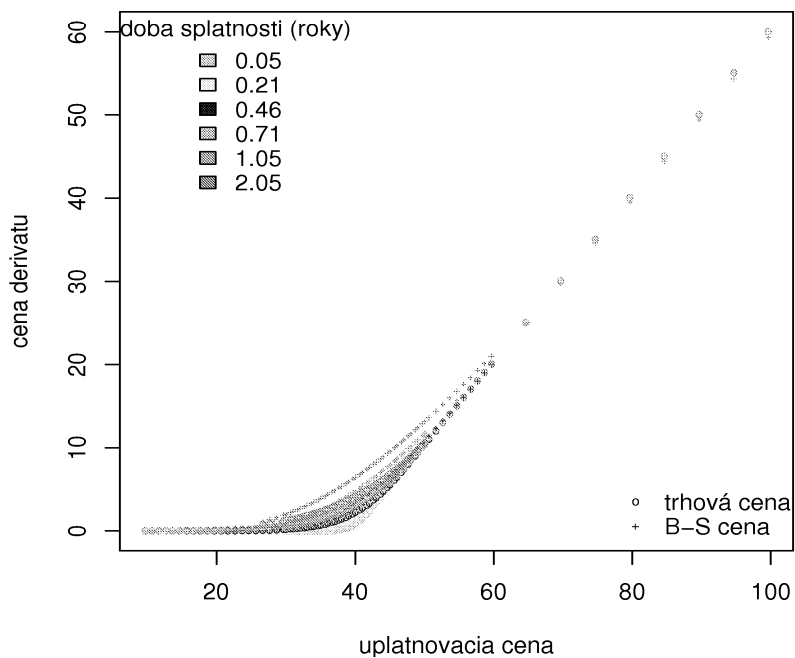
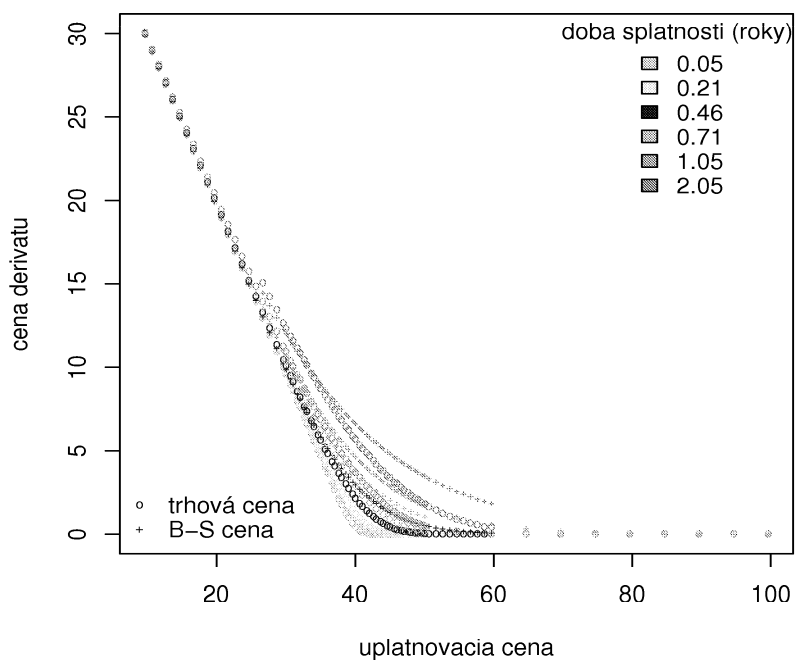
A.2 Demonštrácia výsledkov empirickej analýzy



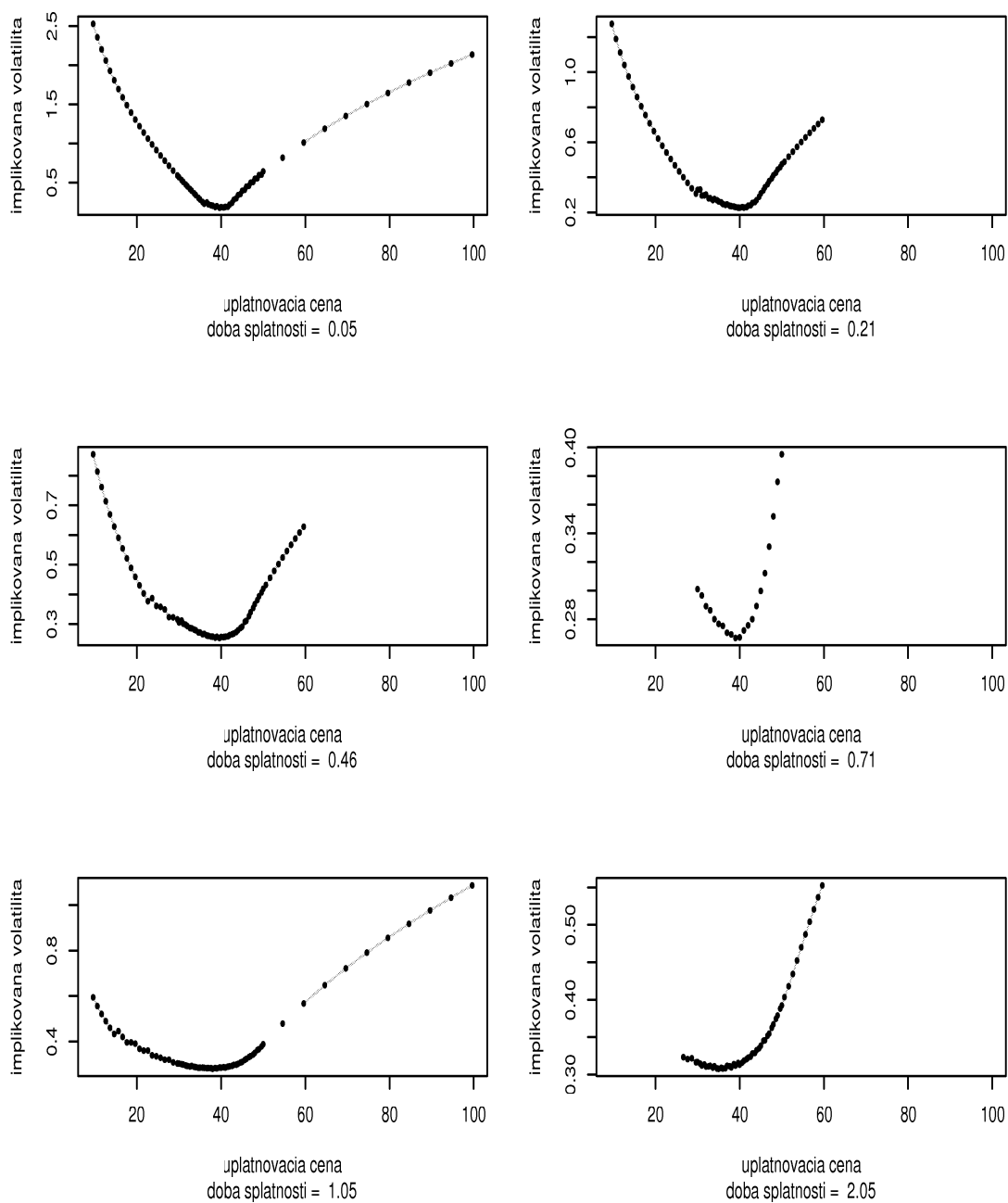
Obr. A.1: Porovnanie B-S a trhových cien - call opcie s rôznymi dobami splatnosti (v rokoch)



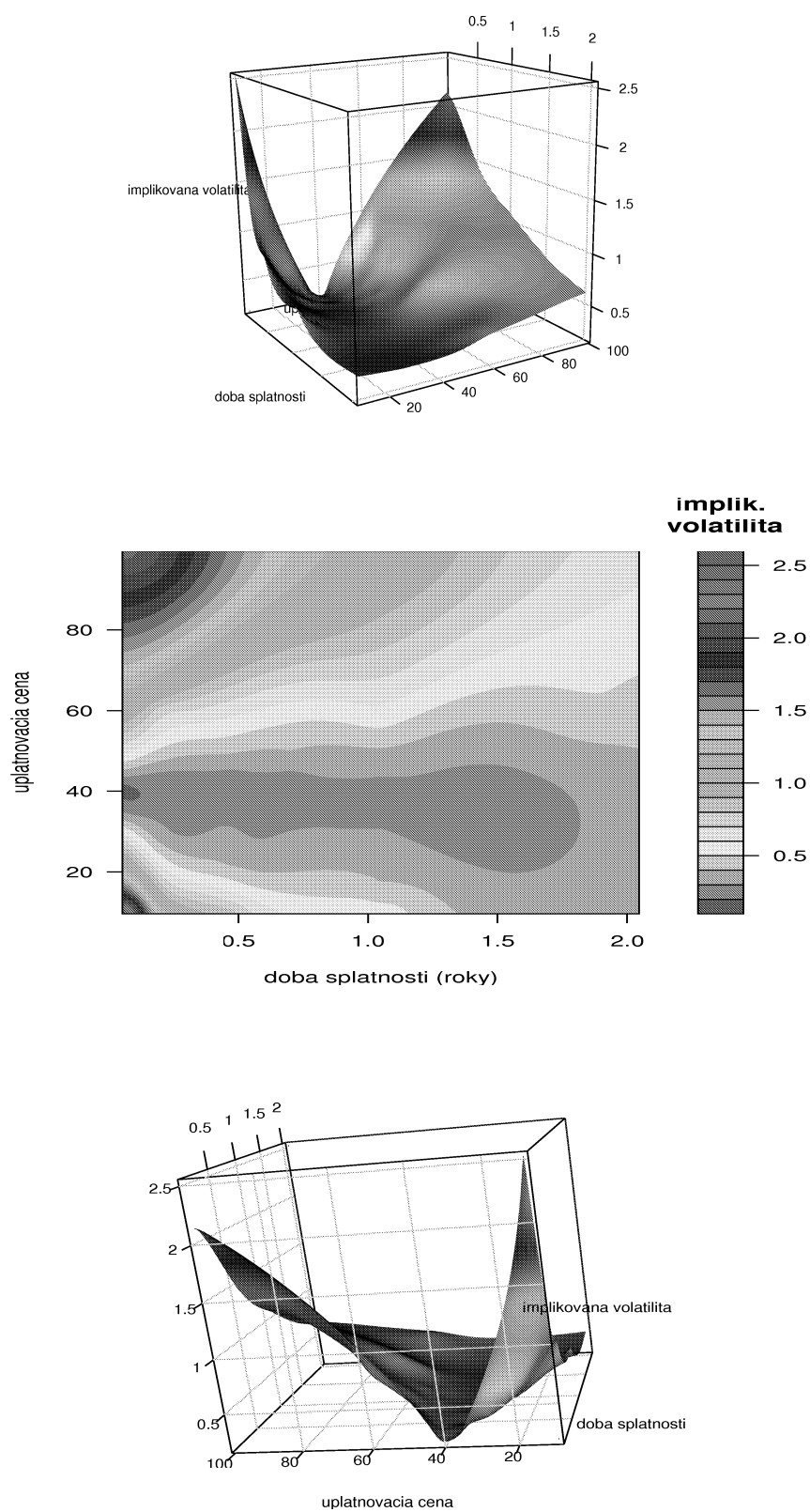
Obr. A.2: Porovnanie B-S a trhových cien - put opcie s rôznymi dobami splatnosti (v rokoch)



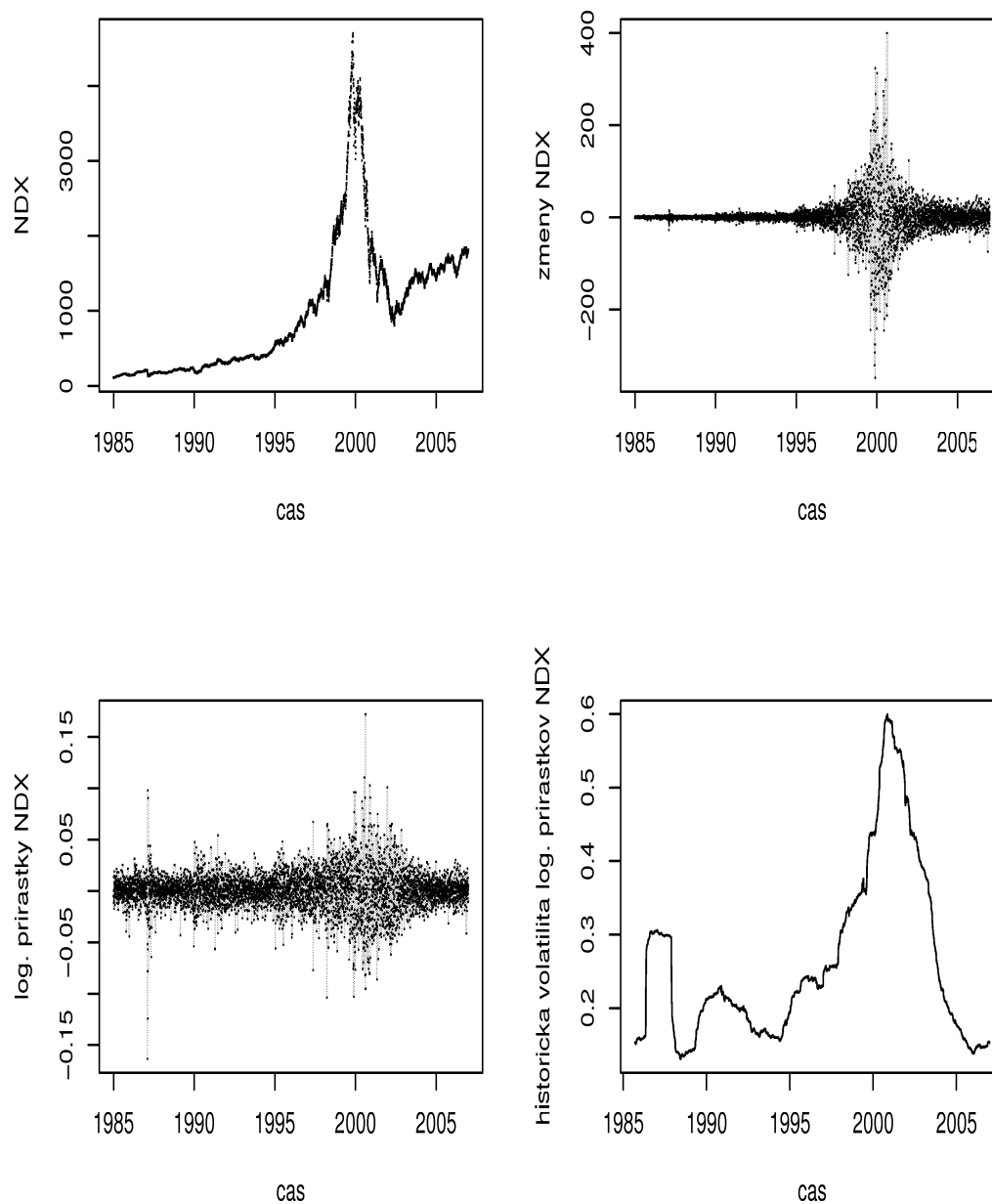
Obr. A.3: Porovnanie B-S a trhových cien pre call a put opcie s rôznymi dobami splatnosti



Obr. A.4: Grafy implikovaných volatilit pre rôzne doby splatnosti (v rokoch) - volatilita smiles

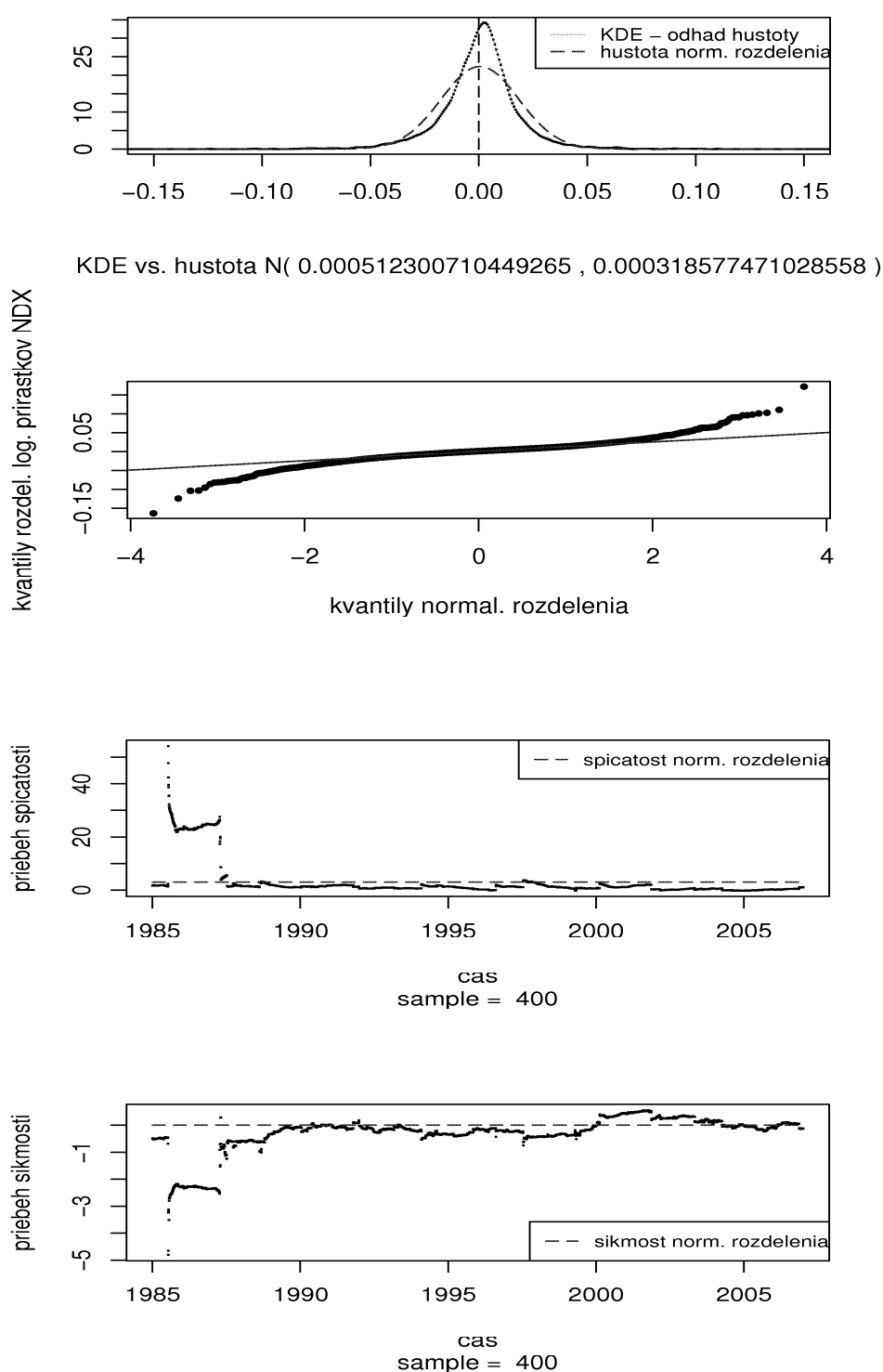


Obr. A.5: Volatility surface



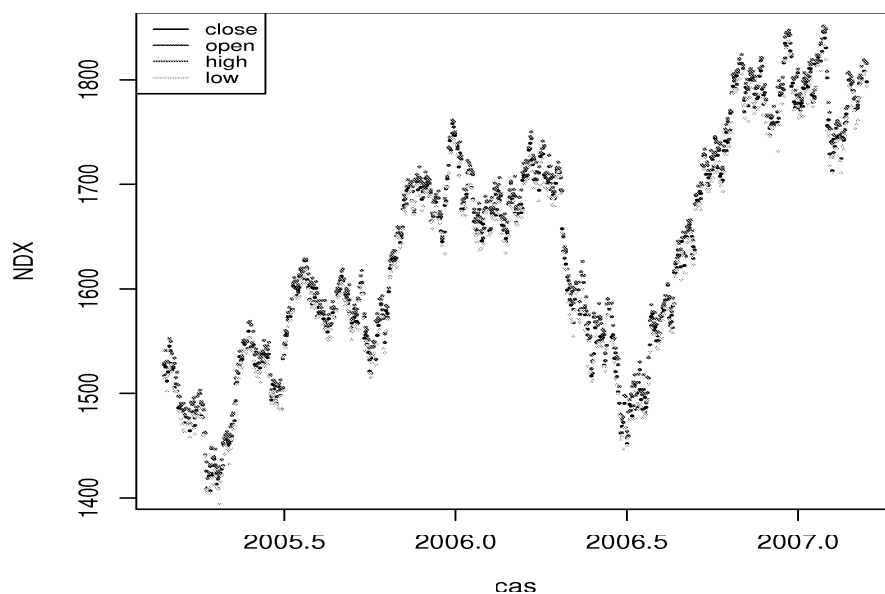
Obr. A.6: Priebeh NDX, jeho zmien a logaritmickej prírastkov v rokoch 1985 - 2007

Realizovaná volatilita bola určená ako odhad štandardnej odchýlky z dát od daného dňa o rok späť a vynásobením odmocninou počtu dní v kalendárnom roku, cez ktoré sa obchoduje, ktorých je približne 252. Exaktný postup výpočtu je uvedený v stati 3.1.2.

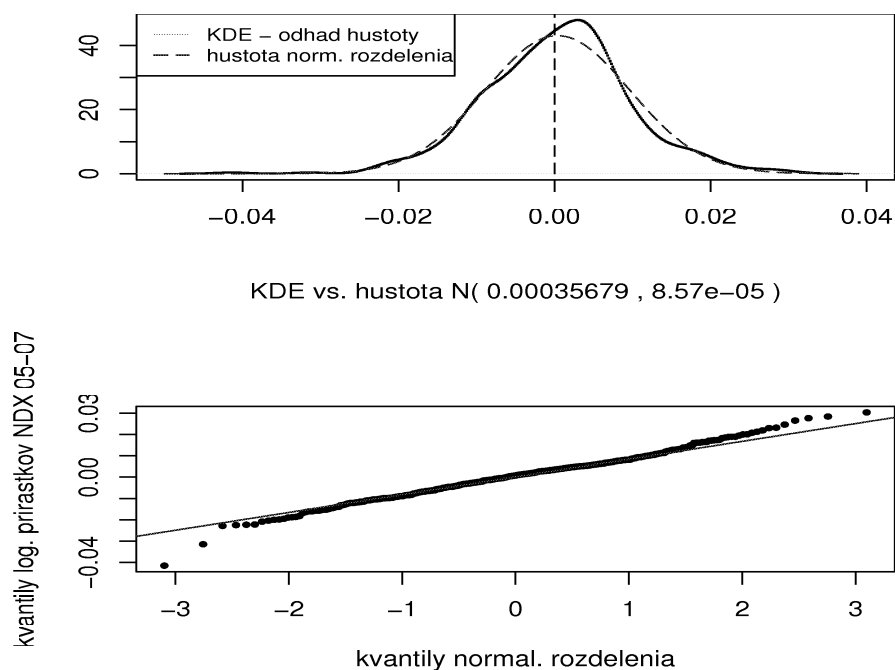


Obr. A.7: Informácie o empirickom rozdelení logaritmickej prírastkov NDX za roky 1985 - 2007

Priebeh empirickej šikmosti a špicatosti demonštruje zmeny týchto veličín pre výbery z dát veľkosti *sample* spätne od jednotlivých dní v plynúcom čase.



Obr. A.8: Priebeh NDX v období datovania opcií, roky 2005 - 2007



Obr. A.9: Informácie o empirickom rozdelení logaritmickej prírastkov NDX v období datovania opcií