Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Sotona

Kolektivní model rizika v neživotním pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční Matematika

2007

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Doc. RNDr. Janu Hurtovi, se kterým jsem měl možnost podrobně prokonzultovat náplň práce a diskutovat o problémech při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 21. 5. 2007 Petr Sotona

Obsah

Název práce: Kolektivní model rizika v neživotním pojištění
Autor: Petr Sotona
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedoucího: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme kolektivní model rizika v neživotním pojištění. Nejdříve se seznámíme se základní problematikou a uvedeme dva základní modely. Pak si ukážeme některá rozdělení používaná pro modelování výše škodních nároků a počtu pojistných událostí. Poté se dostaneme ke složeným rozdělením a uvedeme některé metody aproximací pomocí známých rozdělení. Ve druhé části práce se seznámíme s technickými rezervami v neživotním pojištění, popíšeme si jejich funkce a nakonec si některé rezervy popíšeme blíže. Zejména se budeme věnovat rezervě na pojistná plnění a ukážeme si několik metod sloužících ke stanovení dostatečné výše této rezervy.

Klíčová slova: Technické rezervy v neživotním pojištění

Title: Collective risk models in general insurance
Author: Petr Sotona
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study collective risk models in general insurance. First we look at elemenary problems and introduce two main models. Then we discuss some distributions used for modeling the level of claims payment and quantity of insured accidents. Then we get to compound distributions and we introduce some methods of approximation by means of some known distributions. In second part of thesis we apprise of technical reserves in general insurance, we describe their functions and finally we analyze some reserves a bit deeper. Particularly we pursue to reserve insurance benefits and we show several methods used to determination adequate level of this reserve.

Keywords: Technical reserves in general insurance

KAPITOLA 1

Úvod

Tématem této bakalářské práce je kolektivní model rizika v neživotním pojištění. Neživotní pojištění je širším odvětvím pojištění než pojištění životní. Mezi neživotní pojištění patří například pojištění úvěru, úrazové pojištění, pojištění odpovědnosti za škodu, pojištění motorových vozidel, pojištění požáru a jiných majetkových škod a další.

Hlavní funkcí pojišťovny (a to i životního pojištění) je přebírání rizika jiných fyzických resp. právnických osob za úplatu. Jednoduše řečeno se u pojišťovny můžeme pojistit proti možné budoucí ztrátě, či jinému riziku. Za toto pojištění musíme pojišťovně platit pojistné, to může být jednorázové nebo v pravidelných platbách.

Pojišťovna uzavíráním pojistných smluv přebírá rizika jiných osob a vzniká jí tím problém, který musí řešit. Jde o problém solventnosti, tj. dostání svých závazků v daném čase. Za tímto účelem pojišťovna tvoří rezervy. Existuje několik druhů rezerv, podrobněji se o nich dozvíme v této práci. Asi nejdůležitější je rezerva na pojistná plnění, proto se této rezervě budeme věnovat nejvíce. Jde o rezervu tvořenou pro pojistná plnění na nahlášené, ale i dosud nenahlášené škody vzniklé na uzavřených pojistných smlouvách.

Jedním z modelů, který slouží k počítání výše rezervy, je kolektivní model rizika. Tomuto modelu bude věnována první polovina této práce, kde si ukážeme různá pravděpodobnostní rozdělení používaná v této problematice a následně si ukážeme různé metody používané k odhadu výše pojistných nároků a tedy i ke stanovení potřebné výše rezervy.

Ve druhé části práce se budeme blíže věnovat konkrétně technickým rezervám v neživotním pojištění. Popíšeme si funkce rezerv a některé rezervy popíšeme podrobněji. Z velké části se budeme věnovat metodám výpočtu rezervy na pojistná plnění, kde si představíme možné metody používané k výpočtu rezervy. Tyto metody budou založeny na vývojových trojúhelnících, které má pojišťovna k dispozici, a na doplnění těchto trojúhelníků na čtverec a zjištění potřebné výše rezervy.

Začneme tedy od začátku a popíšeme si nejprve problematiku pojišťoven z širšího pohledu.

KAPITOLA 2

Individuální a kolektivní model rizika

2.1. Základní pojmy a obecné rozdělení

DEFINICE. Soubor všech pojistných smluv určitého druhu pojištění nazýváme *pojistný kmen.*

Základním problémem činnosti pojišťoven je modelování celkové výše škod nastalých v určitém čase pro určitý pojistný kmen. Rozeznáváme dva základní druhy modelování rizika:

(1) **Individuální model rizika**: zabývá se jednotlivými pojistnými smlouvami v pojistném kmeni a pro každou z nich modeluje výši škodních nároků v daném období. Nechť pojistný kmen obsahuje λ pojistných smluv a nechť

$$Y_i\ ,\ i = 1, \dots, \lambda \tag{1}$$

jsou výše škodních nároků jednotlivých pojistných smluv v daném období.[1] Pak pro celkový úhrn škod S v daném období platí

$$S = \sum_{i=1}^{\lambda} Y_i \tag{2}$$

(2) **Kolektivní model rizika**: předpokládá rizikově homogenní pojistný kmen, tj. výše škodních nároků se dají interpretovat pomocí nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. Nechť

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots \tag{3}$$

je posloupnost škodních nároků v daném období nehledě na příslušející pojistnou smlouvu daného pojistného kmene. Dále nechť N je náhodná velčina představující počet všech škodních nároků v daném období. Pak celkový úhrn škod je určen součtem

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4}$$

2.2. Rozdělení výše škodních nároků

Nechť $F(x)$ je distribuční funkce rozdělení náhodných veličin (3). K modelování rozdělení $F(x)$ se obvykle využívají údaje z minulého škodního průběhu. Lze užít dva postupy, jak najít správný model $F(x)$:

1) Zadání distribuční funkce pomocí tabulky hodnot, získaných z minulého průběhu.

[1] Obvykle se předpokládá, že (1) jsou vzájemně nezávislé.

2) Použití některého ze známých rozdělení pravděpodobností, kde parametry jsou odhadnuty z pozorovaných dat v minulosti. (Tomuto postupu se budeme dále věnovat)

Při výběru vhodného rozdělení je nutné si uvědomit, že pro rozdělení výše škod v pojistných odvětví platí větší četnost malých škod. Požadujeme tedy, aby rozdělení bylo nezáporné s kladnou šikmostí. Můžeme tedy vyloučit normální rozdělení. K modelování výší škod se používají tato rozdělení:

Exponenciální rozdělení: Jeho distribuční funkce je

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}\ ,\ x \geq 0;\ \alpha > 0.$$

Střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost jsou

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\alpha}, \quad \mathrm{Var}X = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 6.$$

Toto rozdělení však podceňuje pravděpodobnost výskytu vysokých škod, daleko častěji se proto používá následující rozdělení.

Paretovo rozdělení: Jeho distribuční funkce je

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha}\ ,\ x \geq a;\ \alpha > 0;\ a > 0,$$

střední hodnota a rozptyl jsou

$$\mathrm{E}X = a\frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \mathrm{Var}X = a^2\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

Střední hodnota je však konečná pouze pro $\alpha > 1$ a rozptyl pouze pro $\alpha > 2$. Dále uvedeme tabulku šikmostí a špičatostí. Nechť $a = 1$ (šikmost ani špičatost na parametru a nezávisí), pak platí

α	$4,1$	5	6	10	50	1000
γ_1	6.63629	4.64758	3.81032	2.81106	2.12637	2.00601
γ_2	786.665	70.8	35.6667	14.8286	7.06	6.04886

Problém konečnosti střední hodnoty a rozptylu řeší další rozdělení.

Cenzorované Paretovo rozdělení: Lze použít, jestliže víme, že škody nemohou přesáhnout určitou konečnou hranici C. Pak pro distribuční funkci platí

$$F(x) = \frac{F_P(x)}{F_P(C)},\ a \leq x < C,$$

kde $F_P(x)$ je distríbuční funkce Paretova rozdělení. V tomto případě jsou momenty vždy konečné.

Gamma rozdělení: Jeho hustota je

$$f(x) = \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\alpha x}\ ,\ x \geq 0;\ \alpha > 0;\ k > 0.$$

Střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost jsou

$$\mathrm{E}X = \frac{k}{\alpha}, \quad \mathrm{Var}X = \frac{k}{\alpha^2}, \quad \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad \gamma_2 = \frac{6}{k}.$$

Weibullovo rozdělení: Jde o rozdělení k-té odmocniny náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Pro distribuční funkci platí

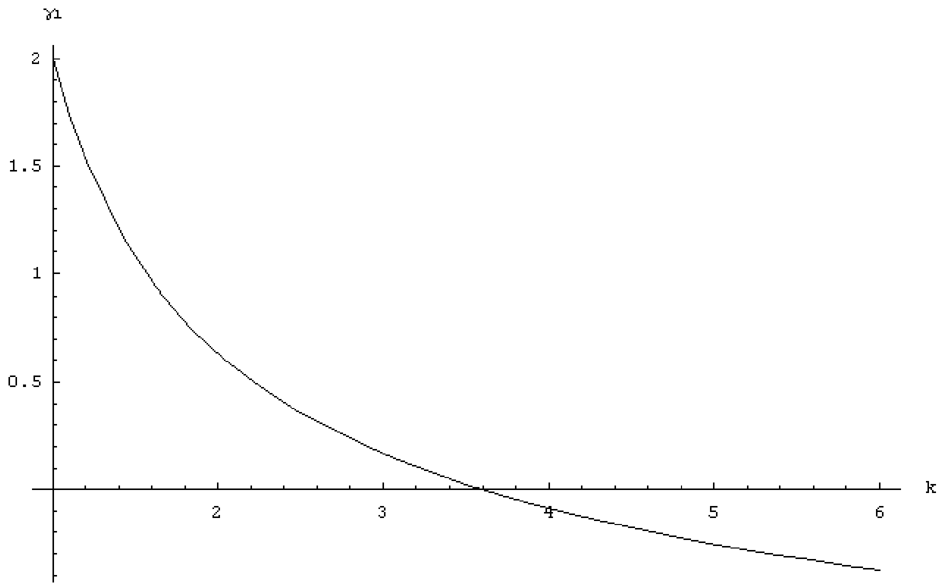
$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^k}\ ,\ x \geq 0;\ \alpha > 0;\ k > 0.$$

Střední hodnota a rozptyl jsou

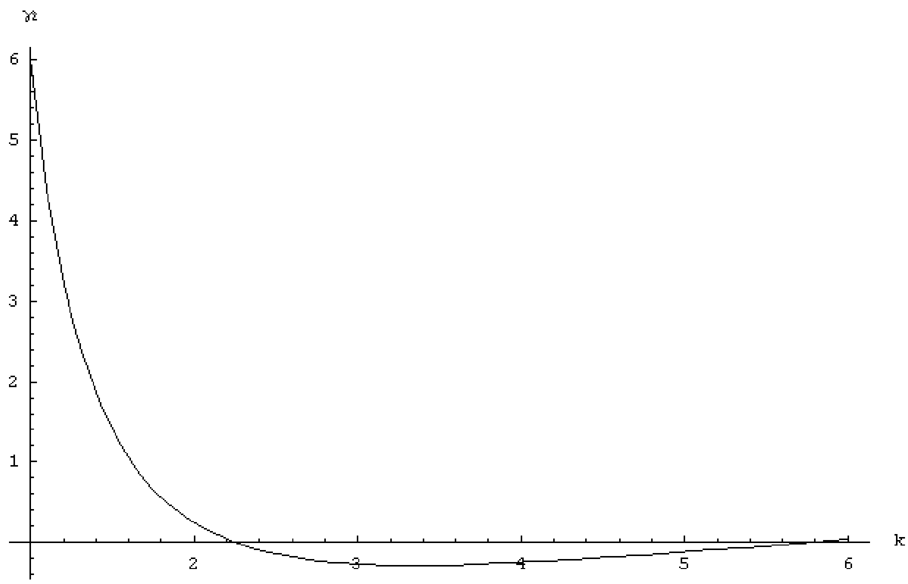
$$\mathrm{E}X = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})}{\alpha}, \quad \mathrm{Var}X = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{k}) - \Gamma(1+\frac{1}{k})}{\alpha^2}.$$

Šikmost a špičatost závisí jen na parametru k. Níže jsou uvedeny grafy závislosti šikmosti, resp. špičatosti na parametru k.

Obrázek 1. Šikmost Weibullova r. v závislosti na parametru k



Obrázek 2. Špičatost Weibullova r. v závislosti na parametru k



Obecné vyjádření pro šikmost, resp. špičatost je

$$\gamma_1 = \frac{2\Gamma(1+\frac{1}{k})^3 - 3\Gamma(1+\frac{1}{k})\Gamma(\frac{2+k}{k}) + \Gamma(\frac{3+k}{k})}{(\Gamma(\frac{2+k}{k}) - \Gamma(1+\frac{1}{k}))^{3/2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(\frac{4+k}{k}) - 3\Gamma(1+\frac{1}{k})^4 + 6\Gamma(1+\frac{1}{k})^2\Gamma(\frac{2+k}{k}) - 4\Gamma(1+\frac{1}{k})\Gamma(\frac{3+k}{k})}{(\Gamma(1+\frac{1}{k})^2 - \Gamma(\frac{2+k}{k}))^2} - 3.$$

Logaritmicko-normální rozdělení: Je rozdělení logaritmu náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Pak náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\log x - \mu)^2/2\sigma^2}\ ,\ x > 0.$$

Pro střední hodnotu a rozptyl platí

$$\mathrm{E}X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad \mathrm{Var}X = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Šikmost a špičatost jsou

$$\gamma_1 = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}(e^{\sigma^2} + 2), \quad \gamma_2 = e^{2\sigma^2}(3 + e^{\sigma^2}(2 + e^{\sigma^2})) - 6.$$

2.3. Rozdělení počtu pojistných událostí

Nyní se zaměříme na nejčastěji užívaná rozdělení počtu pojistných událostí N v kolektivním modelu (4).

Poissonovo rozdělení: Rozdělení je dáno

$$P(N = n) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}\ ,\ n = 0, 1, \ldots;\ \alpha > 0. \tag{5}$$

Pro střední hodnotu, rozptyl, šikmost a špičatost platí

$$\mathrm{E}N = \mathrm{Var}N = \alpha, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

K Poissonovu rozdělení se dostaneme tak, že nejdříve předpokládáme individuální model (2), kde veličiny Y_i jsou nezávislé, stejně rozdělené a platí

$$P(Y_i \neq 0) = p,\ i = 1, \ldots, \lambda,$$

tj. p je pravděpodobnost, že na jednom riziku dojde během sledovaného období ke škodě. Předpokládáme-li, že na jednom riziku nemůže nastat více škod, jsou veličiny X_i v kolektivním modelu (4) rovny nenulovým hodnotám v individuálním modelu (2). Rozdělení počtu pojistných událostí N má tedy binomické rozdělení s parametrem p, tj. platí

$$P(N = n) = \binom{\lambda}{n} p^n (1-p)^{\lambda - n}\ ,\ n = 0, 1, \ldots, \lambda.$$

Obvykle platí, že λ nabývá vysokých hodnot a pravděpodobnost pojistných událostí p malá. Pro $\lambda \to \infty$ a $p \to 0$ tak, že $\lambda p = \alpha$ lze využít aproximaci

$$P(N = n) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} p^n (1 - \frac{\alpha}{\lambda})^{\lambda - n} \to \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}\ ,\ n = 0, 1, \ldots .$$

Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem: Používá se v případě, že rozptyl počtu pojistných událostí významně převyšuje střední hodnotu. Pro toto rozdělení platí

$$P(N=n)=\int_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}u(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

Nechť parametr α v Poissonově rozdělení je náhodná veličina U s hustotou $u(y), y>0$, nechť podmíněné rozdělení náhodné veličiny N za podmínky $U=\alpha$ je Poissonovo rozdělení (5) a nechť U a N jsou nezávislé. Pak pro nepodmíněné rozdělení počtu pojistných událostí platí

$$\begin{aligned} P(N=n) &= \mathrm{E}P(N=n|U)= \\ &= \int_0^\infty P(N=n|U=\alpha)u(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}u(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ . \end{aligned}$$

Pro střední hodnotu platí

$$\mathrm{E}N=\mathrm{E}\,\mathrm{E}(N|U)=\mathrm{E}U$$

a pro rozptyl máme vyjádření

$$\mathrm{Var}N=\mathrm{E}\,\mathrm{Var}(N|U)+\mathrm{Var}\,\mathrm{E}(N|U)=\mathrm{E}U+\mathrm{Var}U.$$

Negativně binomické rozdělení: Toto rozdělení dostaneme, jestliže má náhodná veličina U v předchozím modelu Gamma rozdělení. Pak je rozdělení definováno pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(N=n) &= \tbinom{n+h-1}{n}p^h(1-p)^n=\tbinom{-h}{n}p^h(p-1)^n\ , \\ & n=0,1,\ldots;\ h>0;\ 0<p<1. \end{aligned} \tag{6}$$

Střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost jsou

$$\mathrm{E}N=\frac{n(1-p)}{p},\quad \mathrm{Var}N=\frac{n(1-p)}{p^2},\quad \gamma_1=\frac{2-p}{\sqrt{n(1-p)}},\quad \gamma_2=\frac{p^2-6p+6}{n(1-p)}.$$

K tomuto odvození nejprve předpokládáme, že náhodná veličina U lze napsat ve tvaru

$$U=\alpha\eta,$$

kde α je konstanta a η má Gamma rozdělení s hustotou

$$u(x)=\frac{h^h}{\Gamma(h)}x^{h-1}e^{-hx}\ ,\ x\geq 0;\ h>0,$$

střední hodnotou a rozptylem

$$\mathrm{E}\eta=1,\quad \mathrm{Var}\eta=\frac{1}{h}.$$

Tedy náhodná veličina U má hustotu

$$f(x)=\frac{\left(\frac{h}{\alpha}\right)^h}{\Gamma(h)}x^{h-1}e^{-(\frac{h}{\alpha})x},$$

střední hodnotu a rozptyl

$$\mathrm{E}U=\alpha,\quad \mathrm{Var}U=\frac{\alpha^2}{h}.$$

Vztah pro rozdělení počtu pojistných událostí N je dán odvozením

$$\begin{aligned} P(N=n) &= \mathrm{E}P(N=n|U) = \mathrm{E}\frac{(\alpha\eta)^n}{n!}e^{-\alpha\eta} \\ &= \frac{(\frac{h}{\alpha})^h}{n!\,\Gamma(h)}\int\limits_0^\infty x^{n+h-1}e^{-(\frac{\alpha+h}{\alpha})x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha^n}{n!}\frac{h^h}{\Gamma(h)}\frac{1}{(\alpha+h)^{n+h}}\int\limits_0^\infty y^{n+h-1}e^{-y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha^n}{(\alpha+h)^{n+h}}\frac{h^h}{n!}\frac{\Gamma(n+h)}{\Gamma(h)} = \binom{n+h-1}{n}(\frac{h}{\alpha+h})^h(\frac{\alpha}{\alpha+h})^n \end{aligned}$$

Při dosazení

$$p = \frac{h}{\alpha+h}$$

dostáváme vztah (6) a momenty jsou rovny

$$\mathrm{E}N = \alpha, \quad \mathrm{Var}N = \alpha + \frac{\alpha^2}{h}.$$

Pří $h \to \infty$ konverguje negativně binomické rozdělení k Poissonovu rozdělení.

2.4. Složená rozdělení

Složená rozdělení se zabývají rozdělením náhodné veličiny

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{7}$$

tedy rozdělením celkového úhrnu škod v kolektivním modelu rizika. Předpokládáme, že $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost vzájemně nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin a N je náhodná veličina nezávislá na $X_i, i = 1, 2, \ldots$.

Definice. *Momentová vytvořující funkce* náhodné veličiny S je definovaná vztahem

$$M_S(r) = \mathrm{E}e^{Sr}. \tag{8}$$

Budeme uvažovat jen r, pro která je střední hodnota (8) konečná. Dále využijeme důležité tvrzení, že momentová vytvořující funkce určuje rozdělení pravděpodobnosti jednoznačně. Jestliže náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ mají distribuční funkci $F(x)$, pak zavádíme jejich momentovou vytvořující funkci

$$M_X(r) = \mathrm{E}e^{X_k r} = \int\limits_0^\infty e^{xr}\mathrm{d}F(x). \tag{9}$$

Definice. *Vytvořující funkce pravděpodobností* náhodné veličiny N je definovaná vztahem

$$\Pi_N(r) = \mathrm{E}r^N = M_N(\log r). \tag{10}$$

Využijeme vztah mezi (8) a (9)

$$\begin{aligned} M_S(r) &= \mathrm{E}\ \mathrm{E}(e^{Sr}|N) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\mathrm{E}e^{(X_1+\ldots+X_n)r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)M_x(r)^n = M_N(\log M_X(r)) \end{aligned}$$

a dostáváme tak vztah mezi (8) a (10)

$$M_S(r) = \Pi_N(M_X(r)). \tag{11}$$

Budeme se zabývat momenty. Pokud k-tý moment $\mathrm{E}S^k$ existuje, pak platí

$$M_S^{(k)}(r)|_{r=0} = \mathrm{E}S^k.$$

Označíme $M_S(r) \equiv M$ a vypočteme první tři centrální momenty náhodné veličiny S derivováním $\log M$ v nule

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\log M|_{r=0} &= \frac{M'}{M}|_{r=0} = \mathrm{E}S \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\log M|_{r=0} &= \frac{M''M-(M')^2}{M^2}|_{r=0} = \mathrm{E}S^2-(\mathrm{E}S)^2 = \mathrm{Var}S \\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}r^3}\log M|_{r=0} &= \frac{(M'''M+M''M'-2M'M'')M^2-2MM'(M''M-(M')^2)}{M^4}|_{r=0} \\ &= \mathrm{E}S^3-3\mathrm{E}S\mathrm{E}S^2+2(\mathrm{E}S)^3 = \mathrm{E}(S-\mathrm{E}S)^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Nyní uvedeme dva nejčastěji používané typy složeného rozdělení.

Složené Poissonovo rozdělení: Nechť N má Poissonovo rozdělení s parametrem α, tj. rozdělení jako v (5), pak řekneme, že náhodná veličina S v (7) má složené Poissonovo rozdělení.
Dosazením do definice vytvořující funkce pravdpodobností dostáváme

$$\Pi_N(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}r^n = e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha r)^n}{n!} = e^{\alpha(r-1)}.$$

Užitím vztahu (11) získáme

$$M_S(r) = e^{\alpha(M_X(r)-1)}. \tag{13}$$

Předpokládejme, že první tři momenty náhodných veličin X_k existují, označíme-li je

$$p_j = \mathrm{E}X_k^j,\ j=1,2,3,$$

pak použitím (12) máme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}S &= \alpha M_X'(r)|_{r=0} = \alpha p_1, \\ \mathrm{Var}S &= \alpha M_X''(r)|_{r=0} = \alpha p_2, \\ \mathrm{E}(S-\mathrm{E}S)^3 &= \alpha M_X'''(r)|_{r=0} = \alpha p_3. \end{aligned}$$

VĚTA 2.4.1. *Nechť $S_1, \ldots, S_k$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Nechť S_i má složené Poissonovo rozdělení $(\alpha_i, F_i(x))$, kde $F_i(x)$ je distribuční funkce rozdělení výše škod a α_i příslušný parametr. Pak součet*

$$S = \sum_{i=1}^{k} S_i$$

má složené Poissonovo rozdělení s parametrem

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

a distribuční funkcí pro rozdělení výše škod

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} F_i(x).$$

DŮKAZ. Využijeme nezávislosti veličin S_i a dosadíme do vztahu (13)

$$M_S(r) = \prod_{i=1}^{k} M_{S_i}(r) = \prod_{i=1}^{k} e^{\alpha_i(M_{X_i}(r)-1)} = e^{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(M_{X_i}(r)-1)}.$$

Upravením exponentu máme

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(M_{X_i}(r) - 1) = \alpha(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} M_{X_i}(r) - 1),$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} M_{X_i}(r)$$

je momentová vytvořující funkce rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$. Jednoznačnost mezi momentovou vytvořující funkcí a rozdělením pravděpodobnosti dává tvrzení věty. □

Předešlá věta nám dává právo nahradit součet škodních úhrnů z několika vzájemně nezávislých skupin pojistných smluv s různými parametry Poissonova rozdělení pouze jediným složeným Poissonovým rozdělením se společnou distribuční funkcí určenou dle znění věty.

Složené negativně binomické rozdělení: Nechť N má negativně binomické rozdělení, tj. rozdělení jako v (6), pak řekneme, že náhodná veličina S v (7) má složené negativně binomické rozdělení.
Z definice vytvořující funkce pravdpodobností máme

$$\Pi_N(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-h}{n} p^h (-q)^n r^n = \left(\frac{p}{1 - qr}\right)^h$$

pro $|r| < 1/q$, kde $q = 1 - p$. Zavedením nového parametru vztahem

$$p = \frac{h}{\alpha + h}$$

dostáváme

$$\Pi_N(r) = \left(\frac{\frac{h}{\alpha+h}}{1-\frac{\alpha}{\alpha+h}r}\right)^h = \left(1-\frac{\alpha}{h}(r-1)\right)^{-h}$$

pro $|r| < \frac{\alpha+h}{\alpha}$. Pro momentovou vytvořující funkci tedy platí

$$M_S(r) = \left(1-\frac{\alpha}{h}(M_X(r)-1)\right)^{-h}$$

pro $|M_X(r)| < \frac{\alpha+h}{\alpha}$.
Opět označme první tři momenty náhodných veličin X_k jako $p_j,\ j=1,2,3$. Dále označme $M \equiv M_X(r)$ a $\varphi(M) = 1-\frac{\alpha}{h}(M-1)$. Použitím (12) získáme vyjádření pro první tři momenty

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}S &= \frac{\alpha M'}{\varphi(M)}|_{r=0} = \alpha p_1 \\
\mathrm{Var}S &= \frac{\alpha M''\varphi(M) + \frac{\alpha^2}{h}(M')^2}{\varphi(M)^2}|_{r=0} = \alpha p_2 + \frac{\alpha^2}{h}p_1^2 \\
\mathrm{E}(S-\mathrm{E}S)^3 &= \frac{\left(\alpha M'''\varphi(M) - \frac{\alpha^2}{h}M''M' + 2\frac{\alpha^2}{h}M'M''\right)\varphi(M)^2}{\varphi(M)^4}|_{r=0} \\
&\quad + \frac{2\varphi(M)\left(\frac{\alpha^2}{h}M'M'' + \frac{\alpha^3}{h}(M')^3\right)}{\varphi(M)^4}|_{r=0} \\
&= \alpha p_3 + 3\frac{\alpha^2}{h}p_1p_2 + 2\frac{\alpha^3}{h^2}p_1^3.
\end{aligned}$$

VĚTA 2.4.2. *Nechť S má složení negativně binomické rozdělení $(\alpha, h, F(x))$, kde α a h jsou parametry a $F(x)$ distribuční funkce rozdělení výší jednotlivých škod. K parametrům α, h a $F(x)$ lze nalézt $\bar{\alpha}$ a $\bar{F}(x)$ tak, že složené negativně binomické rozdělení $(\alpha, h, F(x))$ je zároveň složené Poissonovo rozdělení s parametry $(\bar{\alpha}, \bar{F}(x))$.*

DŮKAZ. Využijeme skutečnosti, že momentová vytvořující funkce určuje rozdělení náhodné veličiny jednoznačně. Provedeme transformaci na momentovou vytvořující funkci složeného negativně binomického rozdělení, tj. chceme aby platilo

$$\left(1-\frac{\alpha}{h}(M_X(r)-1)\right)^{-h} = e^{\bar{\alpha}(M_{\bar{X}}(r)-1)},$$

tedy

$$\log\left(1-\frac{\alpha}{h}(M_X(r)-1)\right)^{-h} = \bar{\alpha}(M_{\bar{X}}(r)-1).$$

Upravíme levou stranu

$$\begin{aligned}
\log\left(1-\frac{\alpha}{h}(M_X(r)-1)\right)^{-h} &= \log\left(\left(1+\frac{\alpha}{h}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+h}M_X(r)\right)\right)^{-h} \\
&= -h\log\left(1+\frac{\alpha}{h}\right) - h\log\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+h}M_X(r)\right).
\end{aligned}$$

Volíme

$$\bar{\alpha} = h\log\left(1+\frac{\alpha}{h}\right) \tag{14}$$

a má tedy platit

$$-\bar{\alpha} - h\log\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+h}M_X(r)\right) = \bar{\alpha}(M_{\bar{X}}(r) - 1).$$

Úpravou dostaneme

$$M_{\bar{X}}(r) = -\frac{h}{\bar{\alpha}}\log\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+h}M_X(r)\right).$$

Využitím Taylorova rozvoje

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ -1 \leq x < 1, \tag{15}$$

použitím (15) a dosazením zpět za $\bar{\alpha}$ dle (14) dostáváme

$$M_{\bar{X}}(r) = \frac{1}{\log(1+\frac{\alpha}{h})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+h}\right)^n M_X(r)^n. \tag{16}$$

Uvědomme si, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+h}\right)^n = -\log(1 - \frac{\alpha}{\alpha+h}) = \log(1+\frac{\alpha}{h}).$$

Součet koeficientů u $M_X(r)^n$ je roven jedné a hodnoty

$$\frac{1}{\log(1+\frac{\alpha}{h})}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+h}\right)^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

tedy určují rozdělení pravděpodobností diskrétní náhodné veličiny K nabývajících kladných celočíselných hodnot, označíme $q = \frac{\alpha}{\alpha+h}$

$$P(K=n) = \frac{1}{-\log(1-q)}\frac{q^n}{n},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Uvažujeme náhodnou veličinu

$$\bar{X} = \sum_{n=1}^{K} X_n,$$

kde K má rozdělení (17) s parametrem q, X_n jsou vzájemně nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(x)$, pak momentová vytvořující funkce náhodné veličiny $\bar{X}$ je určená vztahem (16). Tedy pro převedení složeného negativně binomického rozdělení na složené Poissonovo rozdělení se provede volba parametru $\bar{\alpha}$ dle (14) a

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{\log(1+\frac{\alpha}{h})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+h}\right)^n F(x)^{*n},$$

kde $F(x)^{*n}$ značí n-násobnou konvoluci distribuční funkce $F(x)$. Tím je věta dokázána. $\square$

2.5. Aproximace škodního úhrnu pomocí známých rozdělení

V tomto oddílu se budeme věnovat aproximacemi náhodné veličiny S pomocí známých rozdělení. Budeme požadovat rovnost prvních dvou nebo tří momentů. Pro další výpočty označme $\mu = \mathrm{E}S$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}S$ a $\gamma_1 = \mathrm{E}(S-\mu)^3/\sigma^3$.

Přiblížení pomocí normálního rozdělení - NP1

Máme normální rozdělení N(0,1), tedy pro distribuční funkci platí

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u.$$

Přibližné vyjádření distribuční funkce rozdělení náhodné veličiny S je v tomto případě

$$P(S \leq y) = P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \doteq \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Toto přiblížení není často ideální díky nulové šikmosti. Budeme se proto dále zabývat rozděleními s asymetrickým rozdělením, které dávají lepší aproximaci náhodné veličiny S.

Přiblížení pomocí Gamma rozdělení

Předpokládejme kladnou šikmost, tj. $\gamma_1 > 0$. Nechť má náhodná veličina Ψ Gamma rozdělení s hustotou

$$\frac{1}{\Gamma(k)} e^{-x} x^{k-1}, \; x \geq 0; \; k > 0,$$

tj. rozdělení $\Gamma(1,k)$. Pro momenty náhodné veličiny Ψ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Psi &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = k, \\ \mathrm{E}\Psi^2 &= \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k)} = k(k+1), \\ \mathrm{E}\Psi^3 &= \frac{\Gamma(k+3)}{\Gamma(k)} = k(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\mathrm{Var}\Psi = k.$$

Chceme, aby se první dva momenty rovnaly, proto přiblížíme rozdělení $\frac{S-\mu}{\sigma}$ rozdělením náhodné veličiny $\frac{\Psi-k}{\sqrt{k}}$. V tomto případě mají obě veličiny nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Platí tedy

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq y\right) \doteq P\left(\frac{\Psi-k}{\sqrt{k}} \leq y\right) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_{0}^{k+\sqrt{k}y} e^{-x} x^{k-1} \mathrm{d}x.$$

Parametr k se určí tak, aby se shodovala i šikmost γ_1. Máme

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(\Psi - \mathrm{E}\Psi)^3 = \mathrm{E}\Psi^3 - 3\mathrm{E}\Psi^2\mathrm{E}\Psi + 2(\mathrm{E}\Psi)^3 = \\ &= k(k+1)(k+2) - 3k^2(k+1) + 2k^3 = 2k. \end{aligned}$$

Chceme, aby platilo

$$\frac{\mathrm{E}(\Psi-\mathrm{E}\Psi)^3}{k^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{k}}=\gamma_1,$$

tedy

$$k=\frac{4}{\gamma_1^2}.$$

Celkem tedy dostáváme aproximaci rozdělení náhodné veličiny S

$$P(S\le s)\doteq\frac{1}{\Gamma(4/\gamma_1^2)}\int\limits_0^{4/\gamma_1^2+2/\gamma_1(s-\mu)/\sigma} e^{-x}x^{4/\gamma_1^2-1}\mathrm{d}x.$$

Přiblížení pomocí logaritmicko-normálního rozdělení

Máme náhodnou veličinu Y s logaritmicko-normálním rozdělením, tj.

$$Y=a+e^{\psi},$$

kde ψ má normální rozdělení $\mathrm{N}(m,s^2)$. Potřebujeme určit momenty náhodné veličiny Y, k tomu využijeme momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny ψ.

$$\begin{aligned}
M_\psi(r)=\mathrm{E}e^{r\psi}&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}\mathrm{d}x\\
&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(x^2-2xm+m^2-2s^2xr\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=e^{mr+\frac{r^2s^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(x-(m+s^2r)\right)^2\right)\mathrm{d}x\\
&=e^{mr+\frac{r^2s^2}{2}}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Dosazením (18) pro $r=1,2,3$ máme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}Y=a+e^{m+\frac{s^2}{2}},\\
&\mathrm{Var}Y=\mathrm{E}e^{2\psi}-(\mathrm{E}e^{\psi})^2=(e^{s^2}-1)e^{2m+s^2},\\
&\frac{\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^3}{(\mathrm{Var}Y)^{3/2}}=\frac{\mathrm{E}e^{3\phi}-3\mathrm{E}e^{2\psi}\mathrm{E}e^{\psi}+2(\mathrm{E}e^{\psi})^3}{(\mathrm{Var}Y)^{3/2}}=\frac{e^{9/2s^2}-3e^{5/2s^2}+2e^{3/2s^2}}{((e^{s^2}-1)e^{s^2})^{3/2}}\\
&\qquad=\frac{e^{3s^2}-3e^{s^2}+2}{(e^{s^2}-1)^{3/2}}=\frac{(e^{s^2}-1)^2(e^{s^2}+2)}{(e^{s^2}-1)^{3/2}}=\sqrt{(e^{s^2}-1)}(e^{s^2}+2).
\end{aligned}$$

Uvažujeme normovanou náhodnou veličinu S, tj. náhodnou veličinu $\frac{S-\mu}{\sigma}$ a požadujeme, aby náhodná veličina Y měla shodné první tři momenty, tedy aby platilo

$$\mathrm{E}Y=0,\ \mathrm{Var}Y=1,\ \frac{\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^3}{(\mathrm{Var}Y)^{3/2}}=\gamma_1. \qquad (19)$$

Z těchto podmínek určíme parametry a, m a s^2. Označme $q = e^{s^2}$, a přepíšeme podmínky (19) jako

$$
\begin{aligned}
0 &= a + e^m \sqrt{q}, \\
1 &= (q-1)e^{2m} q, \\
0 &= (q-1)(q+2)^2 - \gamma_1^2.
\end{aligned}
$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme parametry a, m v zavislosti na q takto

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{\sqrt{q-1}}, \\
m &= -\log \sqrt{q(q-1)}.
\end{aligned}
$$

Z třetí rovnice vypočteme parametr q, rovnice je třetího stupně a má tedy tři kořeny, jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny. Cardanovy vzorce nám poskytují vyjádření reálného kořene ve tvaru

$$
q = \sqrt[3]{d + \sqrt{d^2 - 1}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{d^2 - 1}} - 1, \tag{20}
$$

kde $d = 1 + \frac{\gamma_1^2}{2}$. (Přitom platí $q > 1$.)

Parametr s^2 lze vyjádřit jako

$$
s^2 = \log q, \tag{21}
$$

kde q je určeno dle (20).

Nechť $G(y)$ je distribuční funkce normovaného logaritmicko-normálního rozdělení s parametry (20) a (21). Máme

$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(a + e^{\psi} \le y) = P(\psi \le \log(y - a)) \\
&= P\left(\frac{\psi - m}{s} \le \frac{\log(y-a) - m}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Dosadíme za a, m podle (20) a $q = e^{s^2}$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\log(y-a) - m}{s} &= \frac{1}{s}\left(\log(y + \frac{1}{\sqrt{e^{s^2} - 1}}) + \log\sqrt{e^{s^2}(e^{s^2} - 1)}\right) \\
&= \frac{1}{s}\log\sqrt{e^{s^2}(y\sqrt{e^{s^2} - 1} + 1)} = \frac{s}{2} + \frac{1}{s}\log(y\sqrt{e^{s^2} - 1} + 1).
\end{aligned}
$$

Náhodná veličina $\frac{\psi - m}{s}$ má normované normální rozdělení N(0,1), pro distribuční funkci $G(y)$ tedy platí

$$
G(y) = \Phi\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{s}\log(y\sqrt{e^{s^2} - 1} + 1)\right).
$$

Chceme-li tedy přiblížit rozdělení náhodné veličiny S pomocí logaritmicko-normálního rozdělení, vypočteme parametr s dle (20) a (21) a dosadíme

$$
P(S \le y) \doteq G\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right).
$$

Gram-Charlierovo přiblížení

Nejdříve je potřeba několik předpokladů. Nechť $f(x)$ je hustota rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou rovnou nule a rozptylem rovným jedné, tj. platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Nechť dále $\omega(x) > 0$ je spojitá funkce taková, že integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)\omega(x)\mathrm{d}x$$

existuje pro každý polynom $\pi(x)$. Nechť také existuje posloupnost těchto polynomů $\pi_0(x), \pi_1(x), \pi_2(x), \ldots$ (kde index značí stupeň polynomu) taková, že jsou ortogonální vzhledem k váhové funkci $\omega(x)$. Tedy platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_r(x)\pi_s(x)\omega(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ pro } r \neq s.$$

Za určitých podmínek se funkce $f(x)$ dá vyjádřit jako

$$f(x) = A_0\pi_0(x)\omega(x) + A_1\pi_1(x)\omega(x) + \ldots, \tag{22}$$

kde koeficienty $A_0, A_1, \ldots$ jsou určeny ze vztahu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_k(x) \sum_{i=0}^{\infty} A_i\pi_i(x)\omega(x)\mathrm{d}x = A_k \int_{-\infty}^{\infty} \pi_k^2(x)\omega(x)\mathrm{d}x,$$

tedy pro A_k platí

$$A_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k(x) f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k^2(x)\omega(x)\mathrm{d}x}. \tag{23}$$

Vidíme, že koeficienty $A_0, A_1, \ldots$ jsou dány lineární kombinací momentů rozdělení s hustotou $f(x)$.

Při výše uvedených předpokladech je Gram-Charlierova aproximace hustoty $f(x)$ vyjádřena jako

$$f(x) \doteq A_0\pi_0(x)\omega(x) + \cdots + A_n\pi_n(x)\omega(x). \tag{24}$$

Volíme váhovou funkci $\omega(x)$ rovnou hustotě normovaného normálního rozdělení N(0,1)

$$\omega(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dále

$$\pi_k(x) = \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)},\ k = 0, 1, \ldots, \tag{25}$$

kde $\varphi^{(k)}(x)$ značí k-tou derivaci hustoty $\varphi(x)$. Dosazením do (22) dostáváme tzv. Gram-Charlierův rozvoj. Nyní zderivujeme (25) a využijeme, že $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Máme

$$\begin{aligned} \pi_k'(x) &= \frac{\varphi^{(k+1)}(x)\varphi(x) + x\varphi(x)\varphi^{(k)}(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{\varphi^{(k+1)}(x)}{\varphi(x)} + x\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)} \\ &= \pi_{k+1}(x) + x\pi_k(x). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$\pi_{k+1}(x) = \pi'_k(x) - x\pi_k(x). \tag{26}$$

Dále platí

$$\pi'_{k+1}(x) = -(k+1)\pi_k(x). \tag{27}$$

To dokážeme indukcí s využitím (26). Pro $k = 0$ vzorec platí, předpokládejme nyní, že platí $\pi'_k(x) = -k\pi_{k-1}(x)$. Pak

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(x) &= -k\pi_{k-1}(x) - x\pi_k(x) \\
\pi'_{k+1}(x) &= -k\pi'_{k-1}(x) - \pi_k(x) + xk\pi_{k-1}(x) \\
\pi'_{k+1}(x) &= -k(\pi'_{k-1}(x) - x\pi_{k-1}(x)) - \pi_k(x) = -(k+1)\pi_k(x).
\end{aligned}$$

Vychází $\pi_0(x) = 1,\ \pi_1(x) = -x,\ \pi_2(x) = x^2 - 1,\ \pi_3(x) = -(x^3 - 3x),\ \pi_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

Nyní ověříme ortogonalitu polynomů $\pi_k(x)$. Uvažujeme $k \geq j \geq 1$ a použijeme (27) při integrování per partes.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_r(x)\pi_s(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_r(x)\varphi^{(s)}(x)\mathrm{d}x = -r\int_{-\infty}^{\infty} \pi_{r-1}(x)\varphi^{(s-1)}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \cdots = r(r-1)\ldots(r-s+1)\int_{-\infty}^{\infty} \pi_{r-s}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ pro } r \neq s,$$

protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ pro } k \geq 1.$$

Dále platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = k!,\ k = 0, 1 \ldots.$$

Vypočteme koeficienty A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 dle vztahu (23). Dostáváme

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0, \\
&A_3 = -\frac{\mathrm{E}X^3 - 3\mathrm{E}X}{3!} = -\frac{\mathrm{E}X^3}{3!} = -\frac{\gamma_1}{6}, \\
&A_4 = \frac{\mathrm{E}X^4 - 6\mathrm{E}X^2 + 3}{4!} = \frac{\mathrm{E}X^4 - 3}{4!} = \frac{\gamma_2 - 3}{24},
\end{aligned}$$

kde γ_1, resp. γ_2 je koeficient šikmosti, resp. špičatosti.
Dosazením do (24) dostáváme aprofimaci hustoty $f(x)$, resp. distribuční funkce $F(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &\doteq \varphi(x) - \frac{\gamma_1}{6}\varphi^{(3)}(x) + \frac{\gamma_2 - 3}{24}\varphi^{(4)}(x), \\
F(x) &\doteq \Phi(x) - \frac{\gamma_1}{6}\Phi^{(3)}(x) + \frac{\gamma_2 - 3}{24}\Phi^{(4)}(x).
\end{aligned} \tag{28}$$

Edgeworthovo přiblížení

Opět předpokládáme hustotu $f(x)$ z normovaného rozdělení, tj. náhodné veličiny $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$. Nechť je dána momentová vytvořující funkce

$$M_Z(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Zajímá nás Taylorův rozvoj logaritmu momentové vytvořující funkce na okolí nuly, tedy

$$\log M_Z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots, \tag{29}$$

kde

$$a_k = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k \log M_Z(r)}{\mathrm{d}r^k}|_{r=0}.$$

Po vypočtení vychází koeficienty

$$a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = \frac{\mathrm{E}Z^2}{2} = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{\mathrm{E}Z^3}{6} = \frac{\gamma_1}{6},\ a_4 = \frac{\mathrm{E}Z^4 - 3}{24} = \frac{\gamma_2 - 3}{24}.$$

Dosadíme do (29) za a_0, a_1, a_2 a dostaneme

$$M_Z(r) = e^{r^2/2} e^{a_3 r^3 + a_4 r^4 + \dots} = e^{r^2/2}(1 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + \dots + \frac{a_3^2}{2} r^6 + \dots). \tag{30}$$

Povšimněme si, že platí

$$e^{r^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{31}$$

protože $e^{r^2/2}$ je momentová vytvořující funkce rozdělení N(0,1).
Dále máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\varphi^{(k)}(x)\mathrm{d}x = -r\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\varphi^{(k-1)}(x)\mathrm{d}x = \dots = (-1)^k r^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

kde jsme integrovali metodou per partes. Nyní na výsledek aplikujeme (31) a získáme vztah

$$r^k e^{r^2/2} = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\varphi^{(k)}(x)\mathrm{d}x. \tag{32}$$

Užitím vztahů (30) a (32) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}(\varphi(x) - a_3\varphi^{(3)}(x) + a_4\varphi^{(4)}(x) + \dots + \frac{a_3^2}{2}\varphi^{(6)}(x) + \dots)\mathrm{d}x$$

Edgeworthova aproximace je založena na použití určitého počtu sčítanců z řady

$$\varphi(x) - a_3\varphi^{(3)}(x) + a_4\varphi^{(4)}(x) + \dots + \frac{a_3^2}{2}\varphi^{(6)}(x) + \dots. \tag{33}$$

Řadu (33) nazýváme Edgeworthův rozvoj.

Použijeme-li první tři sčítance (33), dostáváme výsledek jako u Gram-Charlierovy aproximace.

Přesnost Edgeworthovy aproximace neroste s počtem použitých členů, obecně totiž řada (33) nemusí konvergovat. Ze zkušeností je tato aproximace výhodná při přiblížení $P(S \leq y)$ v bodech y blízkých střední hodnotě μ.

Normální mocninné přiblížení - NP2

Tato aproximace se liší od dříve vyloženého přiblížení NP1 tím, že bere v úvahu koeficient šikmosti γ_1. Mějme opět normovanou veličinu S, tj. náhodnou veličinu $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$. Nechť máme funkci $g(x)$ takovou, že platí

$$P(Z \leq g(x)) \doteq \Phi(x). \tag{34}$$

Volíme $g(x) = x + \Delta x$. Levou stranu (34) rozvineme pomocí prvních dvou členů Gram-Charlierova rozvoje (28) a máme

$$\Phi(x + \Delta x) - \frac{\gamma_1}{6}\Phi^{(3)}(x + \Delta x) \doteq \Phi(x). \tag{35}$$

Nyní použijeme přibližné vztahy

$$\Phi(x + \Delta x) \doteq \Phi(x) + \Delta x \varphi(x), ,$$
$$\Phi^{(3)}(x + \Delta x) \doteq \Phi^{(3)}(x) = \varphi^{(2)}(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$$

a použijeme je k vyjádření Δx z (35). Dostáváme

$$\Delta x = \frac{\gamma_1}{6}(x^2 - 1).$$

NP2 přiblížení tedy spočívá v tomto vztahu

$$P(Z \leq x + \frac{\gamma_1}{6}(x^2 - 1)) \doteq \Phi(x).$$

Esscherovo přiblížení

Základem této aproximace je znalost momentové vytvořující funkce náhodné veličiny S Uvažujeme $F(x)$ distribuční funkci náhodné veličiny S a $M_S(r)$ momentovou vytvořující funkci.

Definice. Nechť r je pevně dáno. Pro dané r definujeme distribuční funkci náhodné veličiny S_r vztahem

$$F_r(x) = M_S(r)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{rt} \mathrm{d}F(t).$$

Tento vztah nazýváme *Esscherova transformace* funkce $F(x)$ s parametrem r.

Využitím definice získáme vyjádření pro momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny S_r

$$M_{S_r}(t) = \frac{M_S(r + t)}{M_S(r)}.$$

Jestliže $f(x)$ je hustota od distribuční funkce $F(x)$ pak pro hustotu od distribuční funkce $F_r(x)$ platí

$$f_r(x) = M_S(r)^{-1} e^{ry} f(y)$$

a také platí

$$1 - F(x) = M_S(r) \int_{x}^{\infty} e^{-ry} f_r(y) \mathrm{d}y. \tag{36}$$

Nejprve zvolíme parametr r tak, aby platilo

$$\mathrm{E}S_r = M'_{S_r}(0) = \frac{M'_S(r)}{M_S(r)} = x.$$

Nechť $h_r(z)$ je hustota normované veličiny S_r, tj. veličiny $\frac{S_r - x}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}}$. Pro $h_r(z)$ platí

$$h_r(z) = \sqrt{\mathrm{Var}S_r} f_r(\sqrt{\mathrm{Var}S_r} z + x),$$

resp. pro $f_r(z)$ platí

$$f_r(z) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}} h_r(\frac{z - x}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}}).$$

Nyní využijeme Gram-Charlierův rozvoj (28) pro hustotu $h_r(z)$. Dosadíme do (36) a dostáváme

$$1 - F(x) \doteq \frac{M_S(r)}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}} \int_x^\infty e^{-rz} \left(\varphi(\frac{z-x}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}}) - \frac{\mathrm{E}(S_r - x)^3}{6(\sqrt{\mathrm{Var}S_r})^{3/2}} \varphi^{(3)}(\frac{z-x}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}}) \right) \mathrm{d}z.$$

Upravíme substitucí $y = \frac{z-x}{\sqrt{\mathrm{Var}S_r}}$ na tvar

$$1 - F(x) \doteq M_S(r) e^{-rx} \int_0^\infty e^{-ry\sqrt{\mathrm{Var}S_r}} \left(\varphi(y) - \frac{\mathrm{E}(S_r - x)^3}{6(\sqrt{\mathrm{Var}S_r})^{3/2}} \varphi^{(3)}(y) \right) \mathrm{d}y. \quad (37)$$

Definice. Definujeme *Esscherovu funkci* vztahem

$$E_k(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \varphi^{(k)}(x) \mathrm{d}x, \; k = 0, 1, \ldots, \quad (38)$$

kde $\varphi^{(k)}(x)$ je k-tá derivace hustoty normálního rozdělení N(0,1).

Pro $k = 0$ platí

$$E_0(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \varphi(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} e^{\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \Phi(y)}{\varphi(y)}.$$

Integrováním per partes integrálu (38) získáváme rekurzivní vzorec

$$E_k(y) = -\varphi^{(k-1)}(0) + u E_{k-1}(y), \; k = 1, 2, \ldots.$$

Označíme $y = \sqrt{\mathrm{Var}S_r}$ a dosadíme do (37), dostáváme

$$1 - F(x) \doteq M_S(r) e^{-rx} \left(E_0(y) - \frac{\mathrm{E}(S_r - x)^3}{6(\sqrt{\mathrm{Var}S_r})^{3/2}} E_3(y) \right).$$

KAPITOLA 3

Technické rezervy v neživotním pojištění

3.1. Funkce technických rezerv a jejich druhy

Dle zákona o pojišťovnictví č.363/1999 Sb. má pojišťovna povinnost vytvářet technické rezervy. Slouží jako prostředky potřebné ke krytí závazků vzniklých při převzetí rizik. Při tvorbě rezerv je pojišťovna povinna dodržet zásadu bezpečnosti, rentability, likvidity a diverzifikace. Podrobná úprava tvorby technických rezerv a jejich účtování je dána právní normou, konkrétně v zákoně o pojišťovnictví č. 363/1999 Sb. a vyhlášce k tomuto zákonu, tj. vyhlášce č.303/2004 Sb.
Druhy rezerv v neživotním pojištění:

- rezerva na nezasloužené pojistné
- rezerva na pojistná plnění (škodní rezerva)
- vyrovnávací rezerva (výkyvová rezerva)
- rezerva na prémie a slevy
- rezerva pojistného neživotních pojištění
- rezerva na splnění závazků z ručení za závazky České kanceláře pojistitelů
- jiné rezervy

V následujících oddílech si některé rezervy a jejich modelování popíšeme podrobněji.

3.2. Rezerva na nezasloužené pojistné

Dle zákona č.363/1999 Sb. §14 odst.1 se praví

> Rezerva na nezasloužené pojistné se tvoří jak u životních, tak i u neživotních pojištění. Výše této rezervy odpovídá části předepsaného pojistného, která časově souvisí s následujícím účetním obdobím a stanoví se jako souhrn těchto částí pojistného vypočítaný podle jednotlivých pojistných smluv.

Pokud nelze postupovat tímto způsobem, použijí se matematicko-statistické metody. Část předepsaného pojistného, která se převádí do rezervy na nezasloužené pojistné, se často označuje jako přenáška pojistného. Stanovení výšky této přenášky se určí jednotlivě dle pojistných smluv a závisí na rozložení rizika během roku. Metoda, která předpokládá rovnoměrné rozložení tohoto rizika, se jmenuje pro rata temporis.

3.3. Rezerva na pojistná plnění

Slouží ke krytí závazků z pojistných událostí a obsahuje odhad nákladů spojených s likvidací těchto událostí.
Pojistná plnění dělíme na dva druhy:

(1) škody před rozvahovým dnem vzniklé, nahlášené, ale ještě nezlikvidované, tzv. RBNS (reported but not settled)
(2) škody před rozvahovým dnem vzniklé, ale dosud nenahlášené, tzv. IBNR (incurred but not reported)

Výpočet rezerv pro oba druhy se zpravidla provádí pro jednotlivé smlouvy a využívá se zkušeností z minulosti. Ke kalkulaci se často využívají **vývojové trojúhelníky**. Obecně platí, že ve sloupcích jsou data seřazená dle zpoždění v úhradě nebo nahlášení škody a v řádcích pak dle období, kdy škody nastaly.

$$\begin{array}{c|lllllll}
 & 0 & 1 & \cdots & s & \cdots & t-2 & t-1 \\
\hline
1 & X_{1,0} & X_{1,1} & \dots & X_{1,s} & \dots & X_{1,t-2} & X_{1,t-1} \\
2 & X_{2,0} & X_{2,1} & & X_{2,s} & & X_{2,t-2} & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
j & X_{j,0} & X_{j,1} & & X_{j,s} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
t-1 & X_{t-1,0} & X_{t-1,1} & & & & & \\
t & X_{t,0} & & & & & &
\end{array} \tag{39}$$

Rozeznáváme dva základní typy těchto trojúhelníků:

Kumulativní trojúhelník: V něm mají hodnoty $X_{j,s}$ význam škod vzniklých v roce j a uhrazených nebo nahlášených **do konce roku** $j+s$.

Nekumulativní trojúhelník: Hodnoty tohoto trojúhelníku se často označují $Y_{j,s}$ a mají význam škod vzniklých v roce j a uhrazených nebo nahlášených **v roce** $j+s$. Nekumulativní trojúhelník můžeme získat velice snadno z kumulativního trojúhelníku, stačí volit $Y_{j,s} = X_{j,s} - X_{j,s-1}$. Tento trojúhelník se často využívá v případech, kdy se zohledňuje inflace ve škodních nákladech.

Základním problémem, kterým se budeme zabývat, je doplnění trojúhelníku na čtverec, tj. nalezení odhadů $\hat{X}_{j,s},\ j+s>t$. Jestliže $\hat{X}_{j,s}$ představuje celkovou výši škod z roku j a uhrazených/nahlášených do konce roku $j+s$ a $\hat{X}_{j,\infty}$ představuje odhad celkové výše škod vzniklých v roce j, pak pro t dostatečně velké lze předpokládat, že $\hat{X}_{j,t-1} = \hat{X}_{j,\infty}$. Jestliže máme odhad celkové výše škod $\hat{X}_{j,\infty}$ z roku j a výši škod $X_{j,t-j}$ vzniklých v roce j a **uhrazených** do konce roku t, získáme jejich rozdílem $\hat{X}_{j,\infty} - X_{j,t-j}$ část rezervy na pojistná plnění na konci roku t na krytí škod z roku j. Pokud máme $X_{j,t-j}$ představující celkovou výši škod z roku j a **nahlášených** do konce roku t, pak rozdíl $\hat{X}_{j,\infty} - X_{j,t-j}$ představuje rezervu na nehlášené škody z roku j.

Další možností je vytvoření podobného trojúhelníku, který obsahuje místo výší škod jejich počty. Podělením hodnot v kumulovaném resp. nekumulovaném trojúhelníku a v trojúhelníku obsahujícím počty škod získáme trojúhelník obsahující průměrné škodní náklady. Poté se trojúhelníky s počty škod a průměrnými náklady doplní na čtverce a součinem příslušných hodnot se získají odhady celkových škodních nákladů pro jednotlivé roky.

3.4. Metody odhadu rezervy na pojistná plnění

Nyní si popíšeme některé metody pro výpočet odhadů $\hat{X}_{j,s},\ j+s>t$.

Metoda chain-ladder

Patří mezi nejčastěji používané metody. Používá kumulativní trojúhelník a předpokládá úměrnou závislost mezi sloupci trojúhelníku, tj.

$$X_{j,s+1} \doteq c_s X_{j,s}, \ s = 0, \ldots, t-2, \ j = 1, \ldots, t-s-1.$$

Parametry c_s odhadujeme podle vztahu

$$\hat{c}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}}, \ s = 0, \ldots, t-2.$$

Doplnění trojúhelníku (39) na čtverec provedeme násobením odhadnutými parametry $\hat{c}_s$ počínaje od diagonály, tj.

$$\hat{X}_{j,r} = \hat{c}_{t-j} \cdots \hat{c}_{r-1} X_{j,t-j}, \ r = t-j+1, \ldots, t-1, \ j = 2, \ldots, t.$$

Jestliže škody mohou být nahlášeny nejpozději se zpožděním t let, pak je výše rezervy na škody z roku j rovna $\hat{X}_{j,t-1} - X_{j,t-j}$.

Varianty metody chain-ladder

Předpokládejme, že parametry nezávisí jen na sloupcovém indexu ale i na řádcích. Zavádíme vývojové faktory takto

$$D_{j,s} = \frac{X_{j,s+1}}{X_{j,s}}, \ j = 1, \ldots, t-1, \ s = 0, \ldots, t-2.$$

Z takto vypočítaných hodnot sestavíme trojúhelník

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & \cdots & s & \cdots & t-3 & t-2 \\
\hline
1 & D_{1,0} & D_{1,1} & \ldots & D_{1,s} & \ldots & D_{1,t-3} & D_{1,t-2} \\
2 & D_{2,0} & D_{2,1} & & D_{2,s} & & D_{2,t-3} & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
j & D_{j,0} & D_{j,1} & & D_{j,s} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
t-1 & D_{t-1,0} & & & & & &
\end{array} \tag{40}$$

a poté lze užít jednu ze dvou modifikací metody chain-ladder.

1) Vypočteme pro každý sloupec parametr $\hat{D}_s$ podobně jako v klasické metodě chain-ladder parametry $\hat{c}_s$. Využijeme k tomu vážené průměry

$$\hat{D}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} D_{j,s}}{\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s}}, \ s = 0, \ldots, t-2$$

a násobením těmito parametry získáme odhady $\hat{X}_{j,s}, \ j+s > t$ analogicky jako v klasické metodě chain-ladder. Váhy $w_{j,s}$ se mohou například volit s vyšší váhou pro novější data, tj. $w_{j,s} = j + s$.

2) Doplníme trojúhelník (40) na čtverec. Stačí předpoklad lineární závislosti $D_{j,s}$ na j, proložíme sloupci (40) přímky a metodou nejmenších čtverců najdeme odhady

$$\hat{D}_{j,s}, \ j = t-s, \ldots, t-1, \ s = 0, \ldots, t-4$$

a pro poslední dva sloupce můžeme volit například

$$\hat{D}_{j,t-3} = \frac{1}{2}(D_{1,t-3} + D_{2,t-3}), \ j = 3, \ldots, t-1$$

$$\hat{D}_{j,t-2} = D_{1,t-2},\ j = 2, \ldots, t-1.$$

Doplnění trojúhelníku (39) se pak provede takto

$$\hat{X}_{j,r} = \hat{D}_{j,t-j} \cdots \hat{D}_{j,r-1} X_{j,t-j},\ r = t-j+1, \ldots, t-1,\ j = 2, \ldots, t.$$

Londýndský řetězec

Tento model uvažuje opět kumulativní trojúhelník a předpokládá následující závislost dat

$$X_{j,s+1} \doteq a_s + c_s X_{j,s},\ s = 0, \ldots, t-2,\ j = 1, \ldots, t-s-1.$$

Parametry a_s a c_s se odhadnou metodou nejmenších čtverců, tj. minimalizací výrazu

$$\sum_{j=1}^{t-s-1} (X_{j,s+1} - a_s - c_s - X_{j,s})^2,\ s = 0, \ldots, t-3. \tag{41}$$

Zderivujeme podle parametrů a položíme rovno nule, dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} &= (t-s-1)a_s + c_s \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s},\ s = 0, \ldots, t-3, \\ \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} X_{j,s} &= a_s \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s} + c_s \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2,\ s = 0, \ldots, t-3. \end{aligned} \tag{42}$$

Úpravami získáme

$$\begin{aligned} \hat{a}_s &= \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} X_{j,s}}{(t-s-1) \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - (\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s})^2}, \\ \hat{a}_s &= \frac{(t-s-1) \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} X_{j,s} - \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}}{(t-s-1) \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - (\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s})^2}, \\ s &= 0, \ldots, t-3. \end{aligned} \tag{43}$$

Pro $s = t-2$ nelze z (41) odhadnout dva parametry a_{t-2}, c_{t-2}, lze například volit $\hat{a}_{t-2} = 0$ a dostaneme $\hat{c}_{t-2} = \frac{X_{1,t-1}}{X_{1,t-2}}$. Doplnění trojúhelníku (39) provedeme rekurzivně takto

$$\hat{X}_{j,s+1} \doteq a_s + c_s \hat{X}_{j,s},\ s = t-j, \ldots, t-2,\ j = 2, \ldots, t,$$

kde $\hat{X}_{j,t-j} = X_{j,t-j}$ je známá hodnota na diagonále.

Při volbě $a_s = 0,\ s = 0, \ldots, t-2$ dostáváme klasický model metody chain-ladder.

De Vylderova metoda nejmenších čtverců

V této metodě uvažujeme nekumulativní hodnoty $Y_{j,s}$ a předpokládáme, že se dají vyjádřit součinem takových dvou parametrů, že jeden je závislý jen na roce vzniku škody j a druhý pouze na zpoždění s, tj. platí

$$Y_{j,s} \doteq u_j v_s,\ s = 0, \ldots, t-1,\ j = 1, \ldots, t.$$

Další předpoklad je, že

$$\sum_{s=0}^{t-1} v_s = 1. \tag{44}$$

Parametry u_j a v_s se vypočítají minimalizací výrazu

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{s=0}^{t-1}(Y_{j,s} - u_j v_s)^2. \tag{45}$$

Tedy zderivujeme (45) podle parametrů, položíme rovno nule a získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{\sum_{s=0}^{t-j} Y_{j,s} v_s}{\sum_{s=0}^{t-j} v_s^2},\ j = 1, \dots, t, \\ v_s &= \frac{\sum_{j=1}^{t-s} Y_{j,s} u_j}{\sum_{j=1}^{t-s} u_j^2},\ s = 0, \dots, t-1. \end{aligned} \tag{46}$$

Soustavu (46) řešíme iteračně. Odhadneme parametry $v_s,\ s = 0, \dots, t-1$ a spočteme hodnoty $u_j,\ j = 1, \dots, t$, poté se v_s znormují tak, aby platil předpoklad (44) a opět se vypočtou $u_j,\ j = 1, \dots, t$.

Vhodná interpretace tohoto modelu je například jestliže u_j představují celkovou výši škod z roku j nahlášených, resp. uhrazených maximálně se zpožděním $t-1$ let a v_s je podíl celkové výše škod a škod se zpožděním s. Pokud volíme $c_s = \frac{v_0 + \dots + v_{s+1}}{v_0 + \dots + v_s},\ s = 0, \dots, t-2$, pak je De Vylderova metoda totožná klasické metodě chain-ladder.

Separační metody

Výpočet rezervy může významně ovlivnit inflace, tím se zabývají separační metody, které inflaci ve výpočtech zohledňují. Následující modely umožní odhadnout inflaci ve škodních nárocích přímo z pozorovaných dat. Budeme používat nekumulativní trojúhelník s hodnotami $Y_{j,s}$. Využijeme předchozí De Vylderovu metodu a doplníme ji o další parametr představující inflaci v roce $j+s$, dostáváme tak model

$$Y_{j,s} \doteq u_j v_s \lambda_{j+s},\ s = 0, \dots, t-1,\ j = 1, \dots, t. \tag{47}$$

Z tohoto modelu však nelze odhadnout všechny parametry na základě pozorovaných dat, proto je potřeba počet parametrů zredukovat. Vydělíme-li (47) parametrem u_j, mohli bychom k odhadu $v_s,\ s = 0, \dots, t-1,\ \lambda_r,\ r = 1, \dots, t$ použít hodnoty $Y_{j,s}/u_j,\ j + s \le t$, tj. výše škod z roku j uhrazených resp. nahlášených do konce roku $j+s$ ku celkové výši škod z roku j. Hodnoty u_j však neznáme, známe maximálně akorát u_1, v praxi se často používají nějaké hodnoty, která pro daný rok dobře vystihují míru objemu rizika. Předpokládejme, že $Y_{j,s}$ jsou již takto upravené hodnoty a nadále tedy uvažujeme model

$$Y_{j,s} \doteq v_s \lambda_{j+s},\ s = 0, \dots, t-1,\ j = 1, \dots, t. \tag{48}$$

Tomuto modelu odpovídá trojúhelník teoretických nekumulativních hodnot

$$
\begin{array}{c|lllll}
 & 0 & 1 & \cdots & t-2 & t-1 \\
\hline
1 & v_0\lambda_1 & v_1\lambda_2 & \dots & v_{t-2}\lambda_{t-1} & v_{t-1}\lambda_t \\
2 & v_0\lambda_2 & v_1\lambda_3 & & v_{t-2}\lambda_t & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
t-1 & v_0\lambda_{t-1} & v_1\lambda_t & & & \\
t & v_0\lambda_t & & & &
\end{array}
\tag{49}
$$

Pro další výpočty ztotožníme hodnoty nekumulativních škod $Y_{j,s}$ a jejich teoretické hodnoty v (49). Nyní si představíme dva druhy separačních metod:

1) Aritmetická separační metoda, jejíž speciální předpoklad je

$$\sum_{s=0}^{t-1} v_s = 1. \tag{50}$$

Odhady parametrů modelu (48) vypočteme s využitím (50) takto

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_t &= \sum_{j=1}^{t} Y_{j,t-j}, \\
\hat{v}_{t-1} &= \frac{Y_{1,t-1}}{\hat{\lambda}_t}, \\
\hat{\lambda}_{t-1} &= \frac{\sum_{j=1}^{t-1} Y_{j,t-j-1}}{1-\hat{v}_{t-1}}, \\
\hat{v}_{t-2} &= \frac{Y_{1,t-2}+Y_{2,t-2}}{\hat{\lambda}_{t-1}+\hat{\lambda}_t}, \\
&\vdots \\
\hat{\lambda}_{t-h} &= \frac{\sum_{j=1}^{t-h} Y_{j,t-j-h}}{1-\hat{v}_{t-1}-\cdots-\hat{v}_{t-h}}, \\
\hat{v}_{t-h-1} &= \frac{\sum_{j=1}^{h+1} Y_{j,t-h-1}}{\hat{\lambda}_{t-h}+\cdots+\hat{\lambda}_t}, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Obecné vyjádření lze napsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_r &= \frac{\sum_{j=1}^{r} Y_{j,r-j}}{\sum_{s=0}^{r-1} \hat{v}_s}, \ r = 1,\dots,t, \\
\hat{v}_s &= \frac{\sum_{j=1}^{t-s} Y_{j,s}}{\sum_{r=s+1}^{t} \hat{\lambda}_r}, \ s = 0,\dots,t-1.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Abychom mohli doplnit nekumulativní trojúhelník na čtverec, potřebujeme ještě získat odhady pro budoucí vývoj inflace. Z hodnot $\hat{\lambda}_r,\ r = 1,\dots,t$ extrapolujeme hodnoty $\hat{\lambda}_r,\ r = t+1,\dots,2t-1$. Lze použít například logaritmicko-lineární regresi.

2) Geometrická separační metoda předpokládá navíc

$$\prod_{s=0}^{t-1} v_s = 1. \tag{53}$$

Oproti aritmetické separační metodě využijeme v modelu (48) předpoklad (53) a dostaneme opět vyjádření pro jednotlivé parametry

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_t &= (\prod_{j=1}^{t} Y_{j,t-j})^{\frac{1}{t}}, \\
\hat{v}_{t-1} &= \frac{Y_{1,t-1}}{\hat{\lambda}_t}, \\
\hat{\lambda}_{t-1} &= (\hat{v}_{t-1} \prod_{j=1}^{t-1} Y_{j,t-j-1})^{\frac{1}{t-1}}, \\
\hat{v}_{t-2} &= \left(\frac{Y_{1,t-2} Y_{2,t-2}}{\hat{\lambda}_{t-1} \hat{\lambda}_t} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\vdots \\
\hat{\lambda}_{t-h} &= (\hat{v}_{t-1} \cdots \hat{v}_{t-h} \prod_{j=1}^{t-h} Y_{j,t-j-h})^{\frac{1}{t-h}}, \\
\hat{v}_{t-h-1} &= \left(\frac{\prod_{j=1}^{h+1} Y_{j,t-h-1}}{\hat{\lambda}_{t-h} \cdots \hat{\lambda}_t} \right)^{\frac{1}{h+1}}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{54}$$

Obecně tedy platí

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_r &= \left(\frac{\prod_{j=1}^{r} Y_{j,r-j}}{\prod_{s=0}^{r-1} \hat{v}_s} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad r = 1, \ldots, t, \\
\hat{v}_s &= \left(\frac{\prod_{j=1}^{t-s} Y_{j,s}}{\prod_{r=s+1}^{t} \hat{\lambda}_r} \right)^{\frac{1}{t-s}}, \quad s = 0, \ldots, t-1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Ke stejnému výsledku lze dospět také, pokud v modelu (48) použijeme k odhadu parametrů metodu nejmenších čtverců na logaritmy hodnot $Y_{j,s}$.

Metoda škodního poměru

Základem této jednoduché metody je definice škodního poměru.

DEFINICE. *Škodní poměr* roku j definujeme jako podíl celkové výše škod vzniklých v roce j a zaslouženého pojistného pro tento rok.

Dále předpokládáme, že pojišťovna dokáže odhadnout jaké části zaslouženého pojistného jsou určeny na škodní náklady, správní náklady a na zisk pojišťovny. Pro rok j označíme škodní poměr jako SP_j, zasloužené pojistné jako ZP_j a celkové pojistné plnění za škody z roku j jako CP_j. Odhadneme-li škodní poměr pro rok

j hodnotou $\widehat{SP}_j$, můžeme celkové pojistné plnění odhadnout vztahem

$$\widehat{CP}_j = ZP_j\widehat{SP}_j. \tag{56}$$

Výši rezervy na pojistná plnění za škody z roku j dostaneme jako

$$\widehat{CP}_j - X_{j,t-j},$$

kde $X_{j,t-j}$ je výše již vyplacených plnění za škody z roku j.

Bornhuetter-Fergusonova metoda

Tato metoda je kombinací několika výše popsaných metod. Používá kumulativní trojúhelník s hodnotami $X_{j,s}$.

Nejprve některou z popsaných metod doplníme trojúhelník (40) na čtverec, tj. získáme hodnoty $\hat{D}_{j,s},\ j+s \geq t$. Nechť $\hat{D}_{j,\infty}$ je odhad celkového násobitele, kterým získáme $\hat{X}_{j,\infty}$ ze vztahu

$$\hat{X}_{j,\infty} = \hat{D}_{j,\infty}X_{j,t-j}. \tag{57}$$

Za předpokladu, že škody mohou být nahlášeny nejdéle se zpožděním t let, platí

$$\hat{D}_{j,\infty} = \hat{D}_{j,t-j}\hat{D}_{j,t-j+1}\cdots\hat{D}_{j,t-2}.$$

Odhadneme škodní poměr SP_j pro rok j a podle (56) můžeme odhadnou celkové plnění $\widehat{CP}_j$ pro rok j. Upravením (57) dostáváme vyjádření pro dosud vyplacené plnění za škody z roku j

$$\hat{X}_{j,t-j} = \frac{\hat{X}_{j,\infty}}{\hat{D}_{j,\infty}}. \tag{58}$$

Nyní dosadíme do (58) za $\hat{X}_{j,\infty}$ odhad celkového plnění $\widehat{CP}_j$ vypočtený dříve. Dostáváme vztah pro výši rezervy na nevyplacená plnění z roku j

$$\widehat{CP}_j\left(1 - \frac{1}{\hat{D}_{j,\infty}}\right)$$

3.5. Vyrovnávací rezerva

Je to rezerva určená ke krytí výkyvů ve škodném poměru, které nezávisí na vůli pojišťovny. Postup, kterým se stanoví výše rezervy a podmínky pro čerpání rezervy, je stanoven Českou národní bankou. Pojišťovna každý rok vykazuje technický zisk resp. ztrátu, tj. rozdíl mezi náklady na škody a ryzím pojistným. Pokud je toto pojistné vyšší než dané náklady, hovoříme o technickém zisku a v tomto případě lze z tohoto zisku tvořit výkyvovou rezervu, v opačném případě mluvíme o technické ztrátě a v takovém případě dochází k čerpání výkyvové rezervy.

KAPITOLA 4

Závěr

Seznámili jsme se s kolektivním modelem rizika a technickými rezervami v neživotním pojištění. Ukázali jsme si různé metody a postupy výpočtu dostatečné výše rezervy. Princip kolektivního modelu je užíván ve velké míře v celém neživotním pojištění. S tímto modelem zejména souvisejí složená rozdělení, která jsme si také popsaly. Složená rozdělení a i výše odvozená tvrzení jsou jedním ze základních kamenů při kalkulaci rezerv pojišťovny.

Velká část teorie výpočtu technických rezerv je založená na znalostech z teorie pravděpodobnosti. Využívali jsme různá známá diskrétní, ale i spojitá rozdělení, použili jsme například momentové vytvořující funkce a vytvořující funkce pravděpodobností, které nám velmi pomohli k výpočtu momentů při aproximacích pomocí známých rozdělení.

Vypracování této práce mi přineslo mnoho užitečných znalostí v oboru neživotního pojištění. Poskytlo mi hlubší pohled na fungování pojišťovny a na teorii výpočtu technických rezerv. Pojišťovnictví je pro mě velmi zajímavá a perspektivní oblast a lepší pochopení této problematiky mě opět posunulo o trochu blíže ke skutečnému pojišťovnictví, ve kterém se snad budu moci v budoucnu uplatnit.

Literatura

[1] Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, Ekopress, Praha, 2005.

[2] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2002.

[3] Huleš, J., Hornigová, J.: *Účetnictví pojišťoven*, Linde, 1997.

[4] Mandl, P.: *Pojistně technická finanční analýza*, Matfyzpress, Praha 1999.

[5] Mandl, P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.

[6] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha 1999.