Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lenka Slámová

Stochastická dominance a eficience akciového portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Na tomto místě bych ráda poděkovala především vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, PhD., za všechen čas a ochotu, se kterou se mi věnoval, za poskytnuté materiály, rady a možnost přístupu k programu GAMS. Také bych chtěla poděkovat panu Vladimíru Vaňkovi z Burzy cenných papírů Praha, a.s., za poskytnutá data o akciových kurzech.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 20.5.2007 Lenka Slámová

Obsah

Název práce: Stochastická dominance a eficience akciového portfolia
Autor: Lenka Slámová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme stochastickou dominanci druhého řádu (SSD) a její aplikaci na testování eficience akciového portfolia. Definujeme pojmy a popisujeme základní vlastnosti SSD, podmíněného Value at Risk (CVaR) a jejich spojitost. Nejdříve odvodíme kritérium SSD eficience vzhledem ke konečné množině aktiv, které je založeno na vztahu SSD a tzv. distribuční funkce druhého řádu, a poté popíšeme i kritéria SSD eficience vzhledem k nekonečné množině portfolií složených z konečné množiny aktiv. Tento test je založený na vztahu SSD a CVaR. Na konkrétním příkladě dat z Pražské burzy cenných papírů otestujeme SSD eficienci portfolia, odpovídajícího indexu PX.
Klíčová slova: stochastická dominance druhého řádu, eficience portfolia, podmíněný Value at Risk

Title: Stochastic dominance and stock portfolio efficiency
Author: Lenka Slámová
Department: Department of probability and mathematical statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the second order stochastic dominance (SSD) and its application on tests of stock portfolio efficiency. We define terms of SSD, conditional Value at Risk (CVaR) and describe their main properties and a relationship between them. Firstly, we derive a criterion of SSD portfolio efficiency when only a finite set of assets is taken into account. This criterion is based on the relationship between SSD and so called second cumulative distribution function. Secondly, we describe criteria of SSD portfolio efficiency, considering all diversified portfolios. These criteria are based on the relationship between SSD and CVaR. These results are illustrated on an empirical example, using data from the Prague Stock Exchange. We test the SSD efficiency of the stock market portfolio corresponding to the exchange index PX.
Keywords: second order stochastic dominance, portfolio efficiency, conditional Value at Risk

Kapitola 1

Úvod

1.1 Metody optimalizace portfolia

Řešením problému optimalizace portfolia by měla být množina investičních strategií, která je v jistém smyslu "optimální" . Existuje celá řada přístupů, jak by takové optimální portfolio mělo vypadat. Jedním z prvních nápadů byla maximalizace očekávaného zisku. Tento přístup byl obohacen v 50. letech 20. století Markowitzem, který zohlednil také možné riziko.

Od této doby se vyvinulo množství kritérií, z nich se většina zaměřuje na maximalizaci míry zisku a minimalizaci míry rizika. Zisk je ve většině případů měřen pomocí očekávané hodnoty. Měření rizika je složitější, jednak proto, že každý investor má jiný vztah k riziku, a dále proto, že neexistuje žádná všeobecně uznávaná míra rizika. V roce 1944 byl Domarem a Musgravem [2] zaveden index rizika jako střední hodnota ztráty. Dalším kandidátem na index rizika, který zavedl Roy v [17], byla pravděpodobnost "katastrofy", tj. pravděpodobnost, že investor ztratí víc, než je ochoten obětovat. Dále se využíval například rozptyl výnosů (v Markowitzově modelu), ale už Markowitz [10] sám zavedl místo rozptylu výnosů tzv. semivarianci, která na rozdíl od původního rozptylu nepenalizuje odchylku doprava, kdy je výnos vyšší než střední hodnota výnosu. V poslední době se v praxi velmi často využívá k měření rizika tzv. Value at Risk (VaR) s danou konfidencí α, který udává maximální možnou ztrátu při zanedbání ztráty, ke které může dojít s pravděpodobností menší než $1 - \alpha$ (α volíme blízko 1). Jistou modifikací VaR je podmíněný Value at Risk (CVaR), který zavedli Rockafellar a Uryasev v [15]. Jiný přístup zohledňující faktor rizika využívá teorii užitku - kritérium optimality je maximalizace očekávaného užitku. Užitkové funkce zohledňují postoj investora k riziku a díky tomu je možné najít investorovi jeho osobní "optimální" portfolio. Ve většině případů ale konkrétní užitkovou funkci neznáme, je ale možné vycházet z jistých racionálních předpokladů o podobě užitkové funkce. V celé práci se budeme zabývat nalezením množiny eficientních portfolií, tedy v jistém smyslu nejlepších portfolií, pro investory averzní k riziku.

1.2 Metoda stochastické dominance

Stochastická dominance (SD) se v současné době využívá v nejrůznějších oblastech ekonomie, finanční matematiky a statistiky. Je založena na porovnávání náhodných veličin v rámci náhodného uspořádání, které vyjadřuje společné preference racionálně uvažujících jedinců. Stochastická dominance je uspořádání, které se definuje pomocí očekávaného užitku, jak uvidíme v 2. kapitole práce. Racionalita se projevuje nenasytností jedince, tj. jedinec preferuje větší množství bohatství před menším. Tato vlastnost vede v teorii užitku k rostoucí užitkové funkci.

Při řešení problému optimalizace portfolia budeme předpokládat, že se investor snaží maximalizovat svůj výnos a že nevyhledává riziko (mluvíme o rizikově averzním investorovi). V tom případě se nám množina užitkových funkcí, se kterými je třeba pracovat, zúží na množinu neklesajících konkávních užitkových funkcí. Averze k riziku je definována následujícím způsobem.

Máme-li náhodnou veličinu ε s pravděpodobnostním rozdělením P, pak řekneme, že investor je averzní k riziku, jestliže pro jeho užitkovou funkci $u : I \to \mathbb{R}$, (u neklesající na $I \subseteq \mathbb{R}$) platí, že $\mathbb{E}u(W + \varepsilon) < u(W + \mathbb{E}\varepsilon) \quad \forall W$, kde W je úroveň majetku investora.

Averze k riziku se dá interpretovat různě. Rizikově averzní investor je ochotný zaplatit tzv. rizikovou prémii, které eliminuje riziko jeho ztráty. Máme-li X náhodnou veličinu popisující výnos z nějaké investice a W úroveň majetku investora, pak riziková prémie je hodnota π, která řeší rovnici $\mathbb{E}u(W + X) = U(W + \mathbb{E}X - \pi)$. Rizikově averzní investor je také takový investor, který není ochotný riskovat ve spravedlivé hře, tj. ve hře, jejíž střední výnos je nulový. Investor je averzní k riziku, tehdy a jen tehdy, když je jeho užitková funkce u ryze konkávní a riziková prémie kladná, jak dokázal Pratt v [14].

Nadále označme U_2 množinu všech neklesajících konkávních funkcí.

Struktura práce je následující. V kapitole 2 uvedeme základní definice a tvrzení spojené se stochastickou dominancí druhého řádu (SSD) a SSD eficiencí. Ve třetí kapitole uvedeme kritérium SSD eficience portfolia vzhledem ke konečné množině aktiv a na konkrétním příkladě dat z Pražské burzy zjistíme, zda výnosy tržního portfolia, odpovídajícího indexu PX, nejsou striktně dominované výnosy některé z akcií vzhledem k SSD. V kapitole 4 popíšeme algoritmus pro testování SSD eficience portfolia vzhledem k nekonečné množině všech možných portfolií sestavených z konečné množiny aktiv a zjistíme, jestli tržní portfolio, odpovídající indexu pražské burzy PX, je nebo není SSD eficientní.

Kapitola 2

Stochastická dominance druhého řádu a eficience portfolia

V této kapitole uvedeme definice a základní vlastnosti stochastické dominance druhého řádu a eficientního portfolia. Hledání optimálního portfolia může probíhat následovně: nejdříve se najde množina eficientních portfolií a poté se na prvky této množiny aplikují preference investora. Pro rizikově averzní investory nám uspořádání dané stochastickou dominancí druhého řádu (SSD) pomůže oddělit portfolia eficientní od neeficientních a určit tak množinu eficientních portfolií, resp. nám stochastická dominance umožní otestovat, zda dané portfolio je eficientní nebo není. Tato redukce množiny přípustných portfolií může značně urychlit výpočet optimálního portfolia, zvláště pokud je množina eficientních portfolií malá. Hledání množiny SSD eficientních portfolií, resp. testování SSD eficience daného portfolia, odpovídá řešení úloh lineárního programovaní, jak uvidíme ve 4. kapitole. Tyto testy budou využívat vztah SSD a podmíněného Value at Risk (CVaR), proto v této kapitole také uvedeme definice a základní vlastnosti CVaR.

2.1 Stochastická dominance

V celé práci uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ a zprava spojité distribuční funkce $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Hanoch & Levy zavedli v [4] definici stochastické dominance následovně:

Definice 2.1. :
Nechť X_1 a X_2 jsou dvě reálné náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$. Řekneme, že X_1 dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci druhého řádu (SSD), píšeme $X_1 \succeq_{SSD} X_2$, jestliže

$$\mathbb{E}u(X_1) - \mathbb{E}u(X_2) \geq 0 \tag{2.1}$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_2$, pro kterou $\mathbb{E}u(X_1)$ a $\mathbb{E}u(X_2)$ existují.

Tato definice vychází z předpokladu, že se rizikově averzní investor snaží maximalizovat svou užitkovou funkci. Jestliže portfolio s výnosem X_1 dominuje portfolio s výnosem X_2 vzhledem ke stochastické dominanci druhého řádu, pak každý investor preferuje X_1 před X_2, nebo je mezi nimi indiferentní, protože očekávaný užitek z portfolia s výnosem X_1 bude větší nebo rovný očekávanému užitku z portfolia s výnosem X_2. Uspořádání dané SSD je pouze částečné uspořádání, protože pokud $X_1 \not\succeq_{SSD} X_2$, pak ještě nemusí platit $X_2 \succeq_{SSD} X_1$.

Odpovídající relace striktní dominance je definována standardně:

Definice 2.2. :
$X_1 \succ_{SSD} X_2$, jestliže $X_1 \succeq_{SSD} X_2$ a současně $X_2 \not\succeq_{SSD} X_1$.

Definice striktní dominance tvrdí, že $X_1 \succ_{SSD} X_2 \iff \forall u \in U_2 : \mathbb{E}u(X_1) - \mathbb{E}u(X_2) \geq 0$ a platí alespoň jedna ostrá nerovnost.

Označme

$$F_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_i(x)dx. \tag{2.2}$$

Pro (SSD) platí následující nutné a postačující podmínky, důkaz je uveden v Hanoch & Levy [4].

Lemma 2.3. :
Nechť X_1 a X_2 jsou dvě náhodné veličiny s distribučními funkcemi po řadě F_1 a F_2. Pak platí:

i) $X_1 \succeq_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$

ii) $X_1 \succ_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *a platí alespoň jedna ostrá nerovnost.*

Kvantilová funkce $F_X^{(-1)}$, odpovídající reálné náhodné veličině X, je standardně definována na $[0,1]$ jako zprava spojitá inverzní funkce k distribuční funkci F_X:

$$F_X^{(-1)}(v) = min\{u : F_X(u) \geq v\}.$$

Definujme kvantilovou funkci druhého řádu $F_X^{(-2)}$:

$$F_X^{(-2)}(v) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{v} F_X^{(-1)}(t)dt & \text{pro } 0 < v \leq 1 \\ 0 & \text{pro } v = 0 \\ +\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nádledující tvrzení, dokázané v práci Ogryczaka a Ruszczyńskeho [11], uvádí základní vlastnosti kvantilové funkce druhého řádu a její vztah s (SSD).

Lemma 2.4. :
Pro každou náhodnou veličinu X, $\mathbb{E}|X| < \infty$ *platí:*

i) $F_X^{(-2)}(p) = \sup_{\nu\in\mathbb{R}} \{\nu p - \mathbb{E}\max(\nu - X, 0)\} \quad \forall p \in \mathbb{R}$

ii) $X_1 \succeq_{SSD} X_2 \Leftrightarrow \frac{F_1^{(-2)}(p)}{p} \geq \frac{F_2^{(-2)}(p)}{p} \qquad \forall p \in [0,1].$

2.2 CVaR - podmíněný Value at Risk

Nechť X je náhodná veličina představující výnos z investice a nechť $Y = -X$ je náhodná veličina s distribuční funkcí G. Value at Risk na konfidenční hladině $\alpha \in [0,1]$ je definován jako $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = G_Y^{(-1)}(\alpha)$. Uryasev a Rockafellar v [15] definovali podmíněný Value at Risk (CVaR) na dané konfidenční hladině α, odpovídající náhodné veličině Y s distribuční funkcí G, následujícím způsobem.

Definice 2.5. :
Podmíněný Value at Risk CVaR_α *na dané konfidenční hladině* α*, odpovídající náhodné ztrátě* Y*, je*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \textit{střední hodnota rozdělení } \alpha\textit{-chvostu } Y,$$

kde rozdělení α-chvostu Y definujeme jako

$$G_\alpha(y, \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{Y})) = \begin{cases} \frac{G(y)-\alpha}{1-\alpha} & \textit{pro } y \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{Y}) \\ 0 & \textit{pro } y < \mathrm{VaR}_\alpha(Y). \end{cases}$$

Jednou ze základních vlastností CVaR je následující rovnost:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y | Y \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y))$$

Předpokládejme, že $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Alternativní definice podmíněného Value at Risk CVaR, kterou můžeme najít v práci Pflug [12], je následující:

Definice 2.6. :
Podmíněný Value at Risk CVaR_α *na dané konfidenční hladině* α *definujeme jako řešení optimalizační úlohy*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[Y - a]^+ \right\}. \tag{2.3}$$

Výraz $[Y - a]^+$ v (2.3) odpovídá kladné části z výrazu $(Y - a)$, platí tedy $[Y - a]^+ = \max(Y - a, 0)$.

Důsledkem Lemmatu 2.4 je následující vztah mezi CVaR a SSD. Důkaz je uveden např. v práci Kopa [7].

Lemma 2.7. :
Nechť $Y_i = -X_i$ *a* $\mathbb{E}|Y_i| < \infty$ *pro* $i = 1, 2$. *Pak platí*

$$X_1 \succeq_{SSD} X_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) \leq \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2) \ \ \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{2.4}$$

Následující lemma bude užitečné pro praktický výpočet v kapitole 4. Nechť Y je náhodná veličina nabývající hodnot $y_1, \ldots, y_T$ se stejnými pravděpodobnostmi. Označme $y^{[k]}$ k-tý nejmenší prvek mezi $y_1, \ldots, y_T$, tj. platí $y^{[1]} \leq \cdots \leq y^{[T]}$.

Lemma 2.8. :
Pro $\alpha \in \left[\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}\right]$ *a pro* $\alpha \neq 1$ *platí*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = y^{[k+1]} + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=k+1}^{T} \left(y^{[i]} - y^{[k+1]}\right)$$

pro $k = 0, 1, \ldots, T - 1$ *a* $\mathrm{CVaR}_1(Y) = y^{[T]}$.

Důkaz:
Viz. Kopa [7] nebo Rockafellar & Uryasev [16].

2.3 Eficience portfolia

Předpokládejme konečnou (a tedy diskrétní) množinu N rizikových aktiv (nezahrnujeme tedy bezrizikové aktivum). Označme $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)'$ náhodný vektor výnosů z těchto N aktiv. Portfolio můžeme chápat jako vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)'$, kde λ_i představuje podíl jmění investora investovaný do i-tého aktiva, $i = 1, \ldots, N$. Množinu všech portfolií označme

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1, \lambda_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots, N\} \tag{2.5}$$

Požadavek $\mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1$ můžeme chápat tak, že investor chce investovat veškeré své jmění. Požadavkem na $\lambda_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots, N$ zakazujeme tzv. krátké pozice, kdy investor může prodat aktivum, které momentálně nevlastní. Pomocí těchto označení můžeme vyjádřit výnos portfolia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ jako

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} r_i \lambda_i. \tag{2.6}$$

Protože $\mathbf{r}$ je náhodný vektor, tak i $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}$ je náhodná veličina. Testované portfolio označme $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)'$.

Definice 2.9. :
Řekneme, že portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je SSD neeficientní, pokud existuje portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ takové, že $\mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau})$ pro každou užitkovou funkci $u \in U_2$ a platí alespoň jedna ostrá nerovnost. V opačném případě je portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ SSD eficientní.

Množinu eficientních portfolií tvoří všechna portfolia, která nejsou striktně SSD dominována žádným jiným portfoliem. Pokud je nějaké portfolio striktně SSD dominované jiným portfoliem, pak je SSD neeficientní. Jinou definici SSD eficientního portfolia zavedl Post v [13]. Z této definice vychází ve svých testech eficience, jak uvidíme v kapitole 4, proto zde jeho definici uvedu.

Definice 2.10. :
Řekneme, že portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je ryze SSD neeficientní, pokud existuje portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ takové, že $\mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) > \mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau})$ pro každou užitkovou funkci $u \in U_2^s$, kde U_2^s je množina ryze konkávních užitkových funkcí. V opačném případě je portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ striktně SSD eficientní.

Post používá v definici SSD eficience portfolia ryze konkávní užitkové funkce, platí $U_2^S \subset U_2$. Pokud je portfolio ryze SSD neeficientní, pak je i SSD neeficientní. Definice 2.9 je obecnější, proto budeme dále pracovat s eficiencí portfolia ve smyslu Definice 2.9. Dále definujme eficienci portfolia vzhledem ke konečné množině aktiv.

Definice 2.11. :
Řekneme, že portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je SSD eficientní vzhledem ke konečné množině N aktiv, jestliže žádné z těchto N aktiv striktně nedominuje portfolio $\boldsymbol{\tau}$ vzhledem k (SSD).

Tuto definici lze přepsat následovně: $\boldsymbol{\tau}$ je neeficientní, pokud

$$\exists \; i \in \{1, \ldots, N\} : \quad r_i \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}, \tag{2.7}$$

kde $r_i, i = 1, \ldots, N$ je náhodná veličina popisující výnos i-tého aktiva.

Kapitola 3

Testování eficience portfolia vzhledem ke konečné množině aktiv

V této kapitole se budeme zabývat zjednodušeným problémem hledání optimální investice. Mějme množinu N aktiv. Označme $X_1, X_2, \ldots, X_N$ náhodné veličiny vyjadřující výnosy z těchto N aktiv. U každé z těchto N náhodných veličin mějme T pozorování, označme $x_{i,j}$ j-té pozorování náhodné veličiny X_i, $i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, T$. Data uspořádáme tak, aby platilo $x_{i,1} \leq x_{i,2} \leq \cdots \leq x_{i,T}$, $i = 1, \ldots, N$.
Označme Y náhodnou veličinu vyjadřující výnos portfolia, jehož eficienci vzhledem k množině aktiv $\{X_i, i = 1, \ldots, N\}$ chceme testovat. Mějme opět T pozorování náhodné veličiny Y, která uspořádáme tak, že $y_1 \leq \cdots \leq y_T$. Empirická distribuční funkce je podle Štěpána [18] definována takto:

Definice 3.1. :
Buďte $X_1, \ldots, X_T$ nezávislé náhodné veličiny se společným pravděpodobnostním rozdělením P (tj. náhodný výběr). Položíme

$$F(x, \omega) = card\{n : 1 \leq n \leq T, X_n(\omega) \leq x\}/T, \qquad \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}.$$

Zobrazení $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá empirická distribuční funkce příslušná náhodnému výběru $X_1, \ldots, X_T$.

Pozorování $x_{i,1}, \ldots, x_{i,T}, i = 1, \ldots, N$ a $y_1, \ldots, y_T$ jsou náhodné výběry z pravděpodobnostních rozdělení, která odpovídají rozdělení náhodných veličin $X_1, \ldots, X_N$ a Y. Označme $F_{X_i}, i = 1, \ldots, N$ a F_Y empirické distribuční funkce příslušející těmto náhodným výběrům.

Pro testování SSD eficience použijeme Definici 2.11 a Lemma 2.3, neboli pro každé $i = 1, \ldots, N$ ověříme, zda

$$F_{X_i}^{(2)}(t) \leq F_Y^{(2)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ a platí alespoň jedna ostrá nerovnost} \tag{3.1}$$

Pokud takové i najdeme, tak jsme ukázali, že $X_i \succ_{SSD} Y$. Pokud žádné takové i neexistuje, tak jsme dokázali SSD eficienci Y vzhledem k množině aktiv $\{X_1, \ldots, X_N\}$.

K ověření (3.1) použijeme následující tvrzení, které i dokážeme.

Tvrzení 3.2. :
Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny. Nechť náhodná veličina X nabývá hodnot $x_1 \leq \ldots \leq x_T$ a náhodná veličina Y nechť nabývá hodnot $y_1 \leq \ldots \leq y_T$, vždy s pravděpodobností $1/T$. Nechť F_X a F_Y jsou distribuční funkce X a Y. Pak platí následující ekvivalence:

$$\begin{gathered} F_Y^{(2)}(x) \leq F_X^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{a platí alespoň jedna ostrá nerovnost} \\ \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{j} y_i \geq \sum_{i=1}^{j} x_i \quad \forall j = 1, \ldots, T \quad \textit{a platí alespoň jedna ostrá nerovnost.} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Důkaz:
Platí, že

$$F_Y^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \sum_{i=1}^{T} I\{y_i \leq x\}/T \right\} dx = \sum_{i:y_i \leq x} (x - y_i)/T$$

Předpokládejme, že $\forall x \in \mathbb{R}$ je $F_Y^{(2)}(x) \leq F_X^{(2)}(x)$ a že pro $\hat{x} \in \mathbb{R}$ platí $F_Y^{(2)}(\hat{x}) < F_X^{(2)}(\hat{x})$. Dokážeme, že pro každé $i = 1, \ldots, T$ platí

$$\sum_{k=1}^{i} y_k \geq \sum_{k=1}^{i} x_k \tag{3.3}$$

Zvolme $i \in \{1, \ldots, T\}$ libovolně a položme $x = x_i$.
Pokud $x < y_1$, pak určitě $x_1 < y_1, x_2 < y_1 \leq y_2, \ldots, x_i < y_1 \leq y_i$. Tudíž platí (3.3) .
Pokud $x \geq y_1$, tak najdeme $j = \max\{k : y_k \leq x\}$. $F_Y^{(2)}(x) \leq F_X^{(2)}(x)$ implikuje, že

$$\sum_{k=1}^{j} (x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{i} (x - x_k). \tag{3.4}$$

Mohou nastat tři případy:

i) $i = j$: Pak $\sum_{k=1}^{i} y_i \geq \sum_{k=1}^{i} x_i$

ii) $i < j$: Pak máme $\sum_{k=1}^{i}(x - y_k) + \sum_{k=i+1}^{j}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k)$, současně $y_{i+1} \leq \cdots \leq y_j \leq x$, tudíž $\sum_{k=i+1}^{j}(x - y_k) \geq 0$ a tedy platí $\sum_{k=1}^{i} y_i \geq \sum_{k=1}^{i} x_i$.

iii) $i > j$: Protože $x < y_{j+1} \leq \cdots \leq y_i$, tak máme $\sum_{k=1}^{j}(x - y_k) + \sum_{k=j+1}^{i}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{j}(x - x_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k)$ a tudíž opět platí $\sum_{k=1}^{i} y_i \geq \sum_{k=1}^{i} x_i$.

Pro $\hat{x}$ platí $F_Y^{(2)}(\hat{x}) < F_X^{(2)}(\hat{x})$. Pokud $\hat{x} < y_1$, pak $0 = F_Y(\hat{x}) < F_X(\hat{x})$, z čehož ovšem plyne, že $x_1 < \hat{x}$, tedy $\sum_{k=1}^{j} y_k > \sum_{k=1}^{j} x_k$ platí pro $j = 1$. Je-li $\hat{x} \geq y_1$, pak v (3.4) pro $x = \hat{x}$ platí ostrá nerovnost a ve všech třech případech i), ii) a iii) se neostrá nerovnost změní na ostrou. Pro $i = \max\{k : x_k \leq \hat{x}\}$ pak platí $\sum_{k=1}^{i} y_k > \sum_{k=1}^{i} x_k$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že

$$\forall j \quad \sum_{k=1}^{j} y_i \geq \sum_{k=1}^{j} x_i, \tag{3.5}$$

a že pro $l \in \{1, \ldots, T\}$ je $\sum_{k=1}^{l} y_i > \sum_{k=1}^{l} x_i$. Potřebujeme dokázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$F_Y^{(2)}(x) \leq F_X^{(2)}(x) \tag{3.6}$$

a platí alespoň jedna ostrá nerovnost.

- $x \in (-\infty, x_1) \;\Rightarrow\; F_Y^{(2)}(x) = 0 = F_X^{(2)}(x)$.
- $x \in [x_1, y_1] \;\Rightarrow\; F_X^{(2)}(x) = (x - x_1)/T \geq 0 = F_Y^{(2)}(x)$.
- $j = 1, \ldots, T-1$, $x \in [y_j, y_{j+1})$. Najdeme $i \in \{1, \ldots, T\}$ tak, že $i = \max\{k : x_k \leq x\}$. Pak $F_Y^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{j}(x - y_k)/T$ a $F_X^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{i}(x - x_k)/T$.

  Mohou nastat tři případy:

  a) $i = j$: Pak z (3.5) plyne $\sum_{k=1}^{i}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_i) \Rightarrow$ (3.6).

b) $i < j$: Pak z (3.5) a z $x \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_j$ plyne
$\sum_{k=1}^{j}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{j}(x - x_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k) \Rightarrow (3.6)$.

c) $i > j$: Pak z (3.5) a z $x_{j+1} \leq \dots \leq x_i \leq x$ plyne
$\sum_{k=1}^{j}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{j}(x - x_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k) \Rightarrow (3.6)$.

- $x \geq y_T$. Najdeme $i \in \{1, \dots, T\}$, že $i = max\{k : x_k \leq x\}$.
  Pak z předpokladu, že $\sum_{k=1}^{T} y_i \geq \sum_{k=1}^{T} x_i$ plyne $\sum_{k=1}^{T}(x - y_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k) + \sum_{k=i+1}^{T}(x - x_k) \leq \sum_{k=1}^{i}(x - x_k)$, protože $x \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_T$.

Nyní ještě potřebujeme najít $\hat{x}$, pro které by platilo $F_Y^{(2)}(\hat{x}) < F_X^{(2)}(\hat{x})$.
Zvolíme $\hat{x} = x_l$ a najdeme $j = \max\{k : y_k \leq \hat{x}\}$.
Z nerovnosti $\sum_{k=1}^{l} y_k > \sum_{k=1}^{l} x_k$ stejně jako v případech a) - c) (s ostrými nerovnostmi a $i = l$) plyne, že $F_Y^{(2)}(\hat{x}) < F_X^{(2)}(\hat{x})$.

Tím je tvrzení dokázáno.

Jiný důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v Lévy [6] nebo v práci Kuosmanena [9]. Jejich důkaz je založen na duálním přístupu, více viz. práce Ogryczaka & Ruszczyńského [11].

3.1 Test eficience portfolia Pražské burzy I

Testujme eficienci portfolia Pražské burzy vzhledem ke konečné množině aktiv. Tj. chceme otestovat, jestli je portfolio odpovídající indexu Pražské burzy cenných papírů PX, označme si ho $\boldsymbol{\tau}$, SSD eficientní ve smyslu Definice 2.11. Konečná množina, vzhledem ke které chceme SSD eficienci portfolia $\boldsymbol{\tau}$ testovat, je tvořena 9 akciemi, které toto portfolio tvořily k datu 28.2.2007, s vahami uvedenými v tabulce 3.1. Speciálně použijeme Tvrzení 3.2 na scénáře výnosů jednotlivých akcií.

Výnosy byly spočteny z uzavíracích akciových kurzů na konci každého obchodovacího týdne od 1.9.2005 do 28.2.2007, což dává $I = 87$ týdnů. Pro $i = 1, \ldots, I$ označme $K(i)$ kurz dané akcie na konci i-tého týdne. Data, se kterými pracujeme, splňují předpoklad, že dividenda, pokud byla vyplacena, byla v daném období vyplacena právě jednou, a že společnost, pokud dividendy vyplácí, je vyplácí od nějakého data pravidelně jednou ročně. Označíme-li D vyplacenou dividendu, $t \in \{1, \ldots, I\}$ týden, kdy byla dividenda vyplacena, pak je odpovídající průměrný dividendový výnos dané akcie v i-tém týdnu roven $D(i) = \frac{D}{52} I_{[t-52 \leq i < t]}$, kde I je indikátorová funkce, tj. $I_{[t-52 \leq i < t]} = 1$, pokud $t - 52 \leq i < t$ a $I_{[t-52 \leq i < t]} = 0$ jinak. Potom týdenní výnos dané akcie je dán vzorcem

$$V_i = \frac{K(i+1) - K(i) + D(i)}{K(i)}, \quad i = 1, \ldots, 86.$$

Týdenní data od 1.9.2005 do 28.2.2007 dávají 86 pozorování pro každou akcii. Data byla poskytnuta Burzou cenných papírů Praha, a.s.

Portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je SSD eficientní vzhledem k této množině 9 akcií, pokud výnosy žádné z akcií nesplňují podmínku na pravé straně ekvivalence (3.2). Snadno lze ověřit, že tato podmínka není splněna pro žádnou z devíti akcií, testované portfolio je tedy eficientní. Naopak lze jednoduše ověřit, že výnosy akcí Komerční banky, a.s., Phillip Moris, a.s., Telefonica, a.s. a Zentiva, a.s. jsou striktně dominovány výnosy portfolia $\boldsymbol{\tau}$ vzhledem k SSD, a tudíž jsou SSD neeficientní.

Dále otestujeme, jestli mezi portfolii $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ existuje relace striktní SSD dominance, kde portfolio $\boldsymbol{\lambda}$ je složené z bazických akcií portfolia $\boldsymbol{\tau}$ v rovnocenném poměru, tj. $\lambda_i = \frac{1}{9}$, $i = 1, \ldots, 9$. Aplikací Tvrzení 3.2 lze opět snadno ověřit, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ není striktně SSD dominované portfoliem $\boldsymbol{\lambda}$,

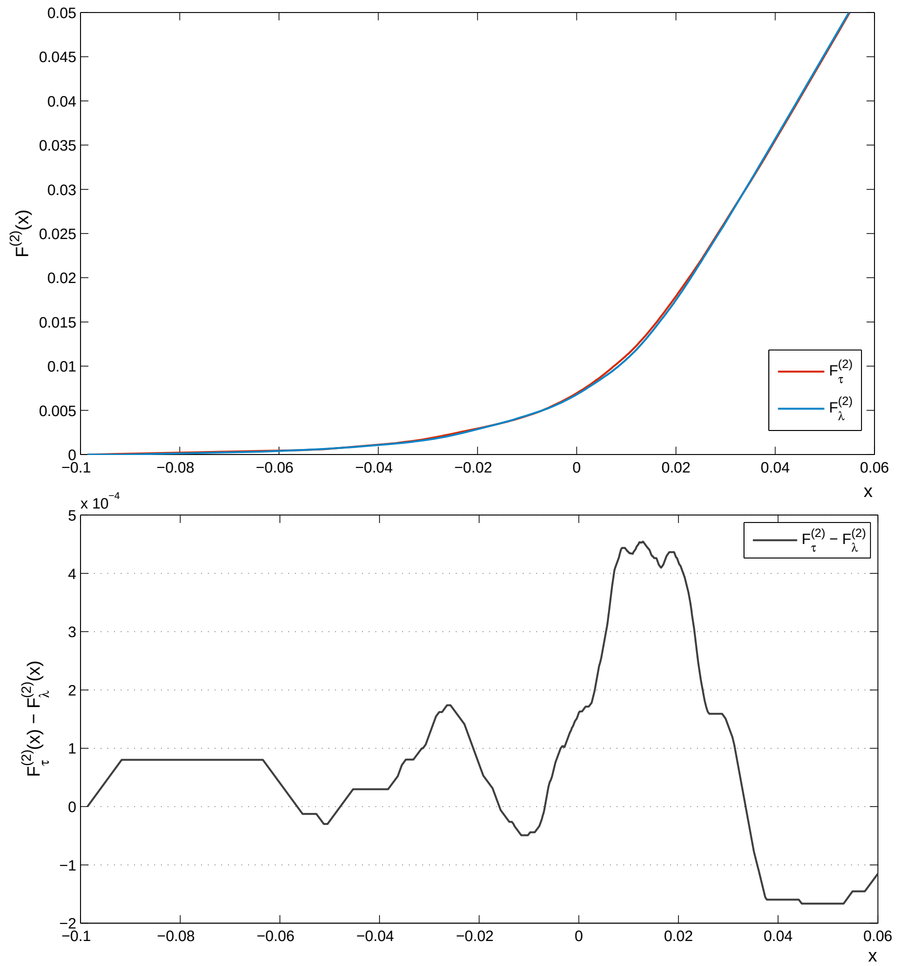
Název akcie	Váha
CETV	6,36%
ČEZ	22,40%
ERSTE BANK	24,33%
KOMERČNÍ BANKA	14,06%
ORCO	2,93%
PHILIP MORRIS ČR	2,17%
TELEFÓNICA O2 C.R.	18,37%
UNIPETROL	4,47%
ZENTIVA	4,92%

Tabulka 3.1: Složení portfolia Pražské burzy PX

viz. obrázek 3.1. Jinak by totiž muselo být $F^{(2)}_{\boldsymbol{\tau}}(x) - F^{(2)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x) \geq 0$ pro každé x, s alespoň jednou ostrou nerovností. Pro porovnání uvádím i tabulku 3.2 středních výnosů a směrodatných odchylek portfolií $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\lambda}$.

	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\lambda}$
EX	0,53 %	0,51 %
σ	2,54 %	2,45%

Tabulka 3.2: Střední hodnoty a směrodatné odchylky týdenních výnosů tržního portfolia $\boldsymbol{\tau}$ a portfolia $\boldsymbol{\lambda}$ s vahami $1/N$



Obrázek 3.1: Grafy funkcí $F_{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}$ a $F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(2)}$ a jejich rozdíl

Kapitola 4

Testování eficience portfolia vzhledem k nekonečné množině portfolií

Ve třetí kapitole jsme ukázali, jak se dá otestovat eficience portfolia vzhledem ke konečné množině aktiv. Předpoklad konečné množiny aktiv ale není reálný, protože investor se obecně snaží diverzifikovat portfolio v rámci určité množiny aktiv a má tedy nekonečně mnoho možností, jak portfolio sestavit. První testy eficience daného portfolia vzhledem k nekonečné množině všech možných portfolií složených z množiny aktiv byly navrhnuty Postem v [13] a Kuosmanenem v [9]. My se soustředíme na podmínky, které odvodil Kopa v [7]. O ostatních testech pojednáme v druhé části kapitoly.

Zachovejme značení z podkapitoly 2.3 a dále předpokládejme, že $\mathbf{r}$ má diskrétní rozdělení s konečnou množinou T hodnot - scénářů, z nichž každý může nastat se stejnou pravděpodobností. Výnosy z N investic při těchto T možných scénářích označme

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \end{pmatrix}$$

kde v i-tém řádku matice X máme vektor výnosů při i-tém scénáři $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že sloupce matice X jsou lineárně nezávislé.

4.1 Kritéria eficience

Kopa v práci [7] odvodil nutné a postačující podmínky SSD eficience portfolia $\boldsymbol{\tau}$, které jsou založené na vztahu CVaR a SSD. Tyto podmínky jsou zformulované v následujících dvou tvrzeních, jejich důkaz je uveden v [7].

Tvrzení 4.1. :
Nechť $\alpha_k = k/T, k = 0, \ldots, T-1$. *Nechť*

$$d^* = \max_{\lambda_n} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n)] \tag{4.1}$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n)] & \geq & 0, & k = 0, 1, \ldots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda. & \end{array}$$

Pokud $d^* > 0$*, pak je portfolio* $\boldsymbol{\tau}$ *SSD neeficientní. Optimální řešení* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *úlohy (4.2) je SSD eficientní portfolio a platí, že* $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$.

Toto tvrzení nám dává nutnou, ale ne postačující podmínku pro SSD eficienci portfolia $\boldsymbol{\tau}$. Může se stát, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je neeficientní, i když (4.1) nemá přípustné řešení nebo když $d^* = 0$. V případě, kdy $d^* = 0$, jsou dvě možnosti:

- Úloha (4.1) má jediné optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\tau}$. V tomto případě je $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientí.
- Úloha (4.1) má optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$. V tomto případě je $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní a $\boldsymbol{\lambda}^*$ je dominující, SSD eficientní portfolio.

Případ, kdy $d^* = 0, \boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\tau}$ je SSD eficientní, nemůže nastat, neboť bychom došli ke sporu s lineární nezávislostí řádků matice X.

Pokud problém (4.1) nemá přípustné řešení, pak lze použít nutnou a postačující podmínku.

Tvrzení 4.2. :
Nechť $\alpha_k = k/T, k = 1, \ldots, T-1$. *Nechť*

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_k, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \tag{4.2}$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{1-\alpha_k}\mathbb{E}[-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} - b_k]^+ & \geq & D_k, & k = 0,1,\ldots,T-1 \\ D_k & \geq & 0, & k = 0,1,\ldots,T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda. & \end{array}$$

Jestliže $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, pak je portfolio $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní. Optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy (4.2) je SSD eficientní portfolio a platí, že $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$.
V opačném případě (tj. jestliže je $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$) je $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientní.

Úloha (4.2) má vždy přípustné řešení a lze jí přepsat do následujícího tvaru:

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_k, b_k, w_k^t} \sum_{k=1}^{T} D_k \tag{4.3}$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{CVaR}_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{(1-\frac{k-1}{T})T}\sum_{t=1}^{T} w_k^t & \geq & D_k, & k = 1,\ldots,T \\ w_k^t & \geq & -\mathbf{x}^t\boldsymbol{\lambda} - b_k, & t,k = 1,\ldots,T \\ w_k^t & \geq & 0 & t,k = 1,\ldots,T \\ D_k & \geq & 0, & k = 1,\ldots,T \\ \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda. & \end{array}$$

Úloha (4.3) použitá v Tvrzení 4.2 namísto úlohy (4.2) dává kritérium SSD eficience ve tvaru lineárního programovaní.

Algoritmus, který odvodil Kopa v [7] pro testování SSD eficience daného portfolia $\boldsymbol{\tau}$ je následující:

KROK 1: Pokud $r_n \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$ pro nějaké $n \in \{1,\ldots,N\}$ nebo pokud $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r_n \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$, pak jdi na KROK 4.

KROK 2: Vyřeš úlohu (4.1). Pokud $d^* > 0$, pak jdi na KROK 4. Pokud $d^* = 0$ a úloha (4.1) má jediné optimální řešení, pak jdi na KROK 5. Pokud $d^* = 0$ a úloha (4.1) má více optimálních řešení, pak jdi na KROK 4.

KROK 3: Vyřeš úlohu (4.3). Pokud $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, pak jdi na KROK 4, jinak jdi na KROK 5.

KROK 4: Konec algoritmu, portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je SSD neeficientní.

KROK 5: Konec algoritmu, portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je SSD eficientní.

4.2 Různé testy eficience a jejich vlastnosti

- Postův test

  Post v [13] vycházel z definice eficience 2.10, tj. uvažoval pouze ryze konkávní užitkové funkce. Jeho test je následující

$$\xi(\boldsymbol{\tau}) = \min_{\theta,\beta_t} \theta \tag{4.4}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{t=1}^{T} \beta_t(\mathbf{x}^{[t]}\boldsymbol{\tau} - x_n^t)/T + \theta &\geq 0 \quad n = 1, \ldots, N \\ \beta_t - \beta_{t+1} &\geq 0 \quad t = 1, \ldots, T-1 \\ \beta_T &= 1, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}^{[t]}\boldsymbol{\tau}$ jsou výnosy portfolia $\boldsymbol{\tau}$ při T různých scénářích seřazené od nejmenšího po největší, tj. $\mathbf{x}^{[1]}\boldsymbol{\tau} \leq \cdots \leq \mathbf{x}^{[T]}\boldsymbol{\tau}$.

Tvrzení 4.3. :
Portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je ryze SSD neeficientní tehdy a jen tehdy, když $\xi(\boldsymbol{\tau}) > 0$. Alternativně, portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je ryze SSD eficientní, právě tehdy, když $\xi(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Post předchozí tvrzení uvádí jako nutnou a postačující podmínku pro ryzí SSD eficienci, v našem kontextu, uvažujeme-li obecně konkávní funkce, je podmínka pro SSD eficienci $\xi(\boldsymbol{\tau}) = 0$ pouze nutná, nikoliv postačující. Tedy pokud $\xi(\boldsymbol{\tau}) > 0$, pak je portfolio $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní ve smyslu Definice 2.9.

Postův test navíc není schopný určit portfolio, které by dominovalo testované portfolio $\boldsymbol{\tau}$ vzhledem ke stochastické dominanci druhého řádu, tím spíš najít eficientní dominující portfolio. Problém (4.4) je výpočetně nenáročný, má pouze $T + 1$ proměnných a $N + T$ omezení.

- Kuosmanenův test

Kuosmanen odvodil v [9] následující testy:

$$\theta_2^N(\boldsymbol{\tau}) = \max_{\boldsymbol{\lambda},W} \left(\sum_{t=1}^{T} (\mathbf{x}^t\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau}) \right) /T \tag{4.5}$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{x}^i\boldsymbol{\lambda} & \geq & \sum_{j=1}^T W_{ij}\mathbf{x}^j\boldsymbol{\tau} & i=1,\dots,T \\ W_{ij} & \geq & 0 & i,j=1,\dots,T \\ \sum_{i=1}^T W_{ij} & = & 1 & j=1,\dots,T \\ \sum_{j=1}^T W_{ij} & = & 1 & i=1,\dots,T \\ \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda. & \end{array}$$

Tvrzení 4.4. :
$\theta_2^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$ *je nutná podmínka pro SSD eficienci portfolia* $\boldsymbol{\tau}$*.*

Úloha (4.5) má vždy přípustné řešení: první podmínka je splněna pro jednotkovou diagonální matici W a $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\tau}$.
Pokud je optimální hodnota účelové funkce kladná, pak je portfolio $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní, neboť podle Tvrzení 3.2 platí, že $X\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} X\boldsymbol{\tau}$.

Nutnou a postačující podmínku dává následující úloha LP:

$$\theta_2^S(\boldsymbol{\tau}) = \min_{W,\boldsymbol{\lambda},s^+,s^-} \sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T} (s_{ij}^+ + s_{ij}^-) \tag{4.6}$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{x}^i\boldsymbol{\lambda} & = & \sum_{j=1}^T W_{ij}\mathbf{x}^j\boldsymbol{\tau} & i=1,\dots,T \\ s_{ij}^+ - s_{ij}^- & = & W_{ij} - \frac{1}{2} & i,j=1,\dots,T \\ s_{ij}^+, s_{ij}^- & \geq & 0 & i,j=1,\dots,T \\ W_{ij} & \geq & 0 & i,j=1,\dots,T \\ \sum_{i=1}^T W_{ij} & = & 1 & j=1,\dots,T \\ \sum_{j=1}^T W_{ij} & = & 1 & i=1,\dots,T \\ \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda. & \end{array}$$

Minimální hranice statistiky $\theta_2^S(\boldsymbol{\tau})$ je $T^2/2 - T$, kterou získáme volbou $W_{ij} = 1/T, \forall i,j = 1,\dots,T$. Maximální hranice závisí na počtu opakujících se hodnot ve vektoru výnosů $X\boldsymbol{\tau}$. Označme d_k počet hodnot, které se ve vektoru výnosů $X\boldsymbol{\tau}$ opakují právě k-krát (tj. $d_2 = 1$, pokud $\mathbf{x}^i\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}^j\boldsymbol{\tau}$). Pak maximální hodnota, které může $\theta_2^S(\boldsymbol{\tau})$ dosáhnout, je $T^2/2 - \sum_{k=1}^{T} kd_k$. Test eficience portfolia $\boldsymbol{\tau}$ je následující:

Tvrzení 4.5. :
Nutnou a postačující podmínkou pro SSD eficienci portfolia $\boldsymbol{\tau}$ je

$$\theta_2^N(\boldsymbol{\tau}) = 0 \wedge \theta_2^S(\boldsymbol{\tau}) = \frac{T^2}{2} - \sum_{k=1}^{T} kd_k.$$

Problém (4.5) má $T^2 + N$ proměnných a $T^2 + 3T + N + 1$ omezení. Problém (4.6) má $3T^2 + N$ proměnných a $4T^2 + 3T + N + 1$ omezení. S rostoucím počtem pozorování tedy počet proměnných a omezení kvadraticky roste. Kusomanenův přístup je z výpočetní hlediska nepřijatelný pro velký vzorek pozorování. Výhodou Kuosmanenových testů narozdíl od Postových je, že ke každému neeficientnímu portfoliu je nalezeno portfolio, které testované portfolio dominuje - argument optima $\boldsymbol{\lambda}$ úlohy (4.5), případně (4.6).

Kopův test (4.3) jsme si vybrali, protože na rozdíl od Postova testu je v případě, kdy se dokáže SSD neeficience testovaného portfolia, schopen najít dominující SSD eficientní portfolio. V porovnání s testem Kuosmanena je Kopův test výpočetně méně náročný, protože má pouze $T^2 + 2T + N$ proměnných a $2T^2 + 2T + N + 1$ omezení.

4.3 Test eficience portfolia Pražské burzy II

V této části zjistíme, jestli je tržní portfolio Pražské burzy $\boldsymbol{\tau}$, odpovídající indexu PX, SSD eficientní vzhledem ke všem portfoliím, které lze z bazických emisí - akcií portfolia $\boldsymbol{\tau}$ sestavit. Stejně jako v podkapitole 3.1 bereme v úvahu pouze akcie, které tvořili portfolio $\boldsymbol{\tau}$ k datu 28.2.2007. Pro každou z $N = 9$ akcií máme $T = 86$ pozorování - týdenních výnosů akcií od 1.9.2005 do 28.2.2007, vypočtených podle vzorce v podkapitole 3.1. Váhy, s nimiž jsou jednotlivé akcie v portfoliu $\boldsymbol{\tau}$ zastoupené, jsou uvedené v tabulce 4.1 v prvních dvou sloupcích. Testování eficience portfolia $\boldsymbol{\tau}$ probíhá podle algoritmu popsaném v podkapitole 4.1.

SSD eficienci testovaného portfolia vzhledem k množině 9 bazických akcií jsme ověřili v podkapitole 3.1. Stejně tak jsme v podkapitole 3.1 zjistili, že portfolio $\boldsymbol{\lambda}$ složené z 9 akcií s vahami $\lambda_i = \frac{1}{9}$, $i = 1, \ldots, 9$, striktně SSD nedominuje portfolio $\boldsymbol{\tau}$.

V druhém kroku algoritmu, řešením úlohy (4.1), jsme zjistili, že daná úloha nemá přípustné řešení. Neeficienci tedy nemůžeme prokázat.

Dalším krokem bylo řešení úlohy (4.3). Hodnota účelové funkce $D^*(\boldsymbol{\tau})$ vyšla kladná, což podle Tvrzení 4.2 znamená, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je SSD neeficientní. Optimální řešení úlohy (4.3) $\boldsymbol{\lambda}^*$ nám dává SSD eficientní portfolio a navíc platí, že $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$. Tento výsledek lze snadno ověřit aplikací Tvrzení 3.2, na obrázku 4.1 je vidět, že $F^{(2)}_{\boldsymbol{\tau}}(x) \geq F^{(2)}_{\boldsymbol{\lambda}^*}(x)$ pro každé x, s minimálně jednou nerovností ostrou, tedy tržní portfolio Pražské burzy je striktně SSD dominováné portfoliem $\boldsymbol{\lambda}^*$. Váhy akcií dominujcího portfolia $\boldsymbol{\lambda}^*$ jsou v tabulce 4.1 srovnány s vahami akcií v portfoliu $\boldsymbol{\tau}$.

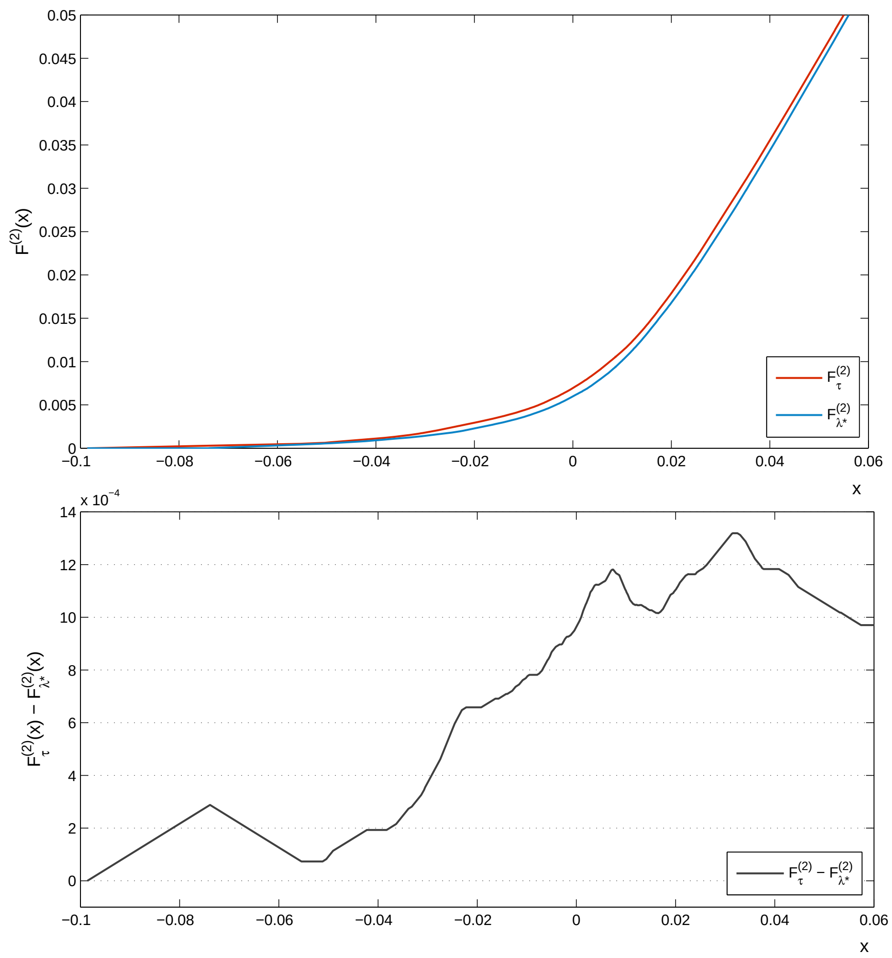
Název akcie	Váha v $\boldsymbol{\tau}$	Váha v $\boldsymbol{\lambda}^*$
CETV	6,36%	9%
ČEZ	22,40%	0%
ERSTE BANK	24,33%	24%
KOMERČNÍ BANKA	14,06%	1,9%
ORCO	2,93%	22,8%
PHILIP MORRIS ČR	2,17%	0%
TELEFÓNICA O2 C.R.	18,37%	38,4%
UNIPETROL	4,47%	3,9%
ZENTIVA	4,92%	0%

Tabulka 4.1: Srovnání složení portfolia $\boldsymbol{\tau}$ s dominujícím portfoliem $\boldsymbol{\lambda}^*$

Pro porovnání uvádíme v tabulce 4.2 také střední výnosy a směrodatné odchylky výnosů portfolií $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\lambda}^*$. Z této tabulky lze vidět, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je také dominované portfoliem $\boldsymbol{\lambda}^*$ vzhledem k Markowitzovu modelu, neboť střední hodnota výnosů portfolia $\boldsymbol{\lambda}^*$ je vyšší než střední hodnota výnosů portfolia $\boldsymbol{\tau}$ a současně rozptyl výnosů portfolia $\boldsymbol{\lambda}^*$ je menší než rozptyl výnosů portfolia $\boldsymbol{\tau}$.

	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\lambda}^*$
EX	0,53 %	0,60 %
σ	2,54 %	2,28%

Tabulka 4.2: Střední hodnoty a směrodatné odchylky týdenních výnosů tržního portfolia $\boldsymbol{\tau}$ a dominujícího SSD eficietního portfolia $\boldsymbol{\lambda}^*$



Obrázek 4.1: Grafy funkcí $F_{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}$ a $F_{\boldsymbol{\lambda}^*}^{(2)}$ a jejich rozdíl

Závěr

V práci byl popsán test, který je schopen spolehlivě rozhodnout, jestli je dané portfolio SSD eficientní nebo není. V případě, že se dokáže SSD neeficience tohoto portfolia, tak navíc jako další informaci z tohoto testu získáme i portfolio, které SSD eficientní je a testované portfolio dominuje vzhledem k SSD. Nutno podotknout, že toto dominující portfolio nemusí být nutně optimální pro každého rizikově averzního investora a zpravidla ani není. Je to ale portfolio, které není horší než testované portfolio pro všechny rizikově averzní investory, a pro některého z nich je SSD dominující portfolio optimálním řešením úlohy maximalizace očekávaného užitku.

Popsaný test jsme použili na otestování eficience tržního portfolia Pražské burzy cenných papírů, vyjádřeného indexem PX. Zjistili jsme, že toto portfolio není SSD eficientní, a žádný rizikově averzní investor ho nebude preferovat před žádným jiným. Navíc jsme našli portfolio, které není horší pro žádného rizikově averzního investora.

V práci jsem se zaměřila na stochastickou dominanci druhého řádu, existují ale i stochastické dominance jiných řádů. Pomocí stochastické dominance prvního řádu (FSD) lze uspořádat náhodné veličiny i bez předpokladu konkavity užitkové funkce. Jsou odvozeny podobné testy FSD eficience portfolia, využívající teorii celočíselného programování, která je nad rámec této práce. Pro další prostudovaní viz. práce Kopa [7] a Kuosmanen [9]. Pomocí stochastické dominance třetího řádu (TSD) lze řešit podobný problém testování eficience portfolia, jako pomocí SSD, navíc se zde předpokládá, že averze k riziku s rostoucím bohatstvím klesá. Stochastické dominance řádů vyšších už nejsou prakticky tak významné, proto jim příliš pozornosti není věnováno.

Problematika hledání eficientního portfolia pomocí stochastické dominance se dále rozvíjí, jedním z dalších směrů zkoumání je testování statistických hypotéz o SSD eficienci.

Literatura

[1] Dentcheva D., Ruszczyński A.: *Portfolio optimization with stochastic dominance constraints*, Journal of Banking and Finance **30**, 2 (2006), 433–451.

[2] Domar E., Musgrave R.A.: *Proportional income taxation and risk taking*, Quarterly Journal of Economics, LVII, 1944.

[3] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[4] Hanoch G., Levy H.: *The efficiency analysis of choices involving risk*, Review of Economic Studies **36** (1969), 335–346.

[5] Levy H.: *Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis*, Management Science **38**, 4 (1992), 555–587.

[6] Levy H.: *Stochastic dominance:Investment decision making under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, 2006.

[7] Kopa M.: *Utility functions in portfolio optimization*, disertační práce KPMS MFF UK, 2006.

[8] Kopa M.: *Postavení užitkové funkce v úlohách stochastického programování*, rigorózní práce KPMS MFF UK, 2004.

[9] Kuosmanen T.: *Efficient diversification according to stochastic dominance criteria*, Management Science **50**, 10 (2004), 1390–1406.

[10] Markowitz H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, Yale University Press, 1970.

[11] Ogryczak W., Ruszczyński A.: *Dual stochastic dominance and related mean-risk models*, SIAM Journal on Optimization **13** (2002), 60–78.

[12] Pflug G.Ch.: *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications (S. Uryasev ed.)*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA (2000), 278–287.

[13] Post T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency*, Journal of Finance **58** (2003), 1905–1932.

[14] Pratt J.W.: *Risk aversion in the small and in the large*, Econometrica **32** (1964), 122–136.

[15] Rockafellar R.T., Uryasev S.: *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk **2** (2000), 21–41.

[16] Rockafellar R.T., Uryasev S.: *Conditional value-at-risk*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), 1443–1471.

[17] Roy A.D.:*Safety First and the Holding of Assets*, Econometrica **20** (1952), 431–449

[18] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti, matematické základy*, Academia, Praha, 1987.

Přílohy

Zdrojový kód úlohy (4.3) v programu GAMS.

Scénáře výnosů bazických akcií portfolia $\boldsymbol{\tau}$ odpovídajícího indexu PX.