Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Doležal

Křivky Peanova typu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:
Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program:
Matematika, Obecná matematika

2007

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Prof. RNDr. Jaroslavu Lukešovi, DrSc. za odborné vedení a užitečné rady.

Za cenné připomínky děkuji také všem posluchačům semináře z matematické analýzy.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 31.5.2007 Martin Doležal

Obsah

1. Úvod 5
1.1. Krátká historie Peanových křivek 5
1.2. α-hustá zobrazení 6
2. Dva příklady Peanových křivek 7
2.1. Peanova konstrukce 7
2.2. Hilbertova konstrukce 10
3. α-hustá zobrazení 13
4. Charakterizace konečně dimenzionálních normovaných lineárních prostorů 14
5. Rieszova věta 16
Literatura 19

Název práce: Křivky Peanova typu

Autor: Martin Doležal

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

e-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: První část tohoto textu se věnuje Peanovým křivkám. Je zde popsána zejména Peanova a Hilbertova konstrukce těchto křivek, přitom ve druhém případě je kladen důraz na geometrickou interpretaci. U Peanovy konstrukce je navíc ukázána nediferencovatelnost výsledné křivky v žádném bodě. Druhá část textu na tyto výsledky volně navazuje výkladem o α-hustých zobrazeních do metrických prostorů. Pomocí pojmu vyplnitelné množiny jsou zde charakterizovány normované lineární prostory konečné dimenze. Dále je definován stupeň vyplnitelnosti dané množiny a ukáže se, že uzavřená jednotková koule v nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru má tento stupeň roven jedné. Z toho se nakonec snadno odvodí známá Rieszeho věta.

Klíčová slova: křivky Peanova typu, α-hustá zobrazení, vyplnitelné množiny

Title: Space-filling curves

Author: Martin Doležal

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Supervisor's e-mail adress: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The first part of the text deal with space-filling curves, particularly the constructions of G. Peano and D. Hilbert are described there. The accent is put on the geometric interpretation in the latter case. Moreover the nowhere differentiability of the curve constructed by Peano is shown. The second part of the text have a loose connection with the previous referring to metric space valued mappings which are alpha-dense. The finite dimensional normed vector spaces are characterized by means of definition of the densifiable set there. Next, the degree of densification of a given set is defined and it follows that this degree is equal one in the case of the closed unit ball in an infinite dimensional normed vector space. Finally we can easily deduce the famous theorem of Riesz by using this fact.

Keywords: space-filling curves, α-dense mappings, densifiable sets

1. Úvod

1.1. **Krátká historie Peanových křivek.** V roce 1878 ukázal George Cantor, že všechny konečně dimenzionální hladké variety mají stejnou mohutnost, a to bez ohledu na jejich dimenzi. Tento výsledek, pro tehdejší matematiky dost překvapující, byl prvním krokem ke studiu Peanových křivek. Plyne z něj totiž mj. i to, že existuje bijekce intervalu $[0, 1]$ např. na čtverec $[0, 1]^2$. Už o rok později ale Eugen Netto dokázal, že každé bijektivní zobrazení mezi hladkými varietami různých dimenzí, speciálně tedy i každé prosté zobrazení $[0, 1]$ na $[0, 1]^2$, je nutně nespojité. Zájem matematiků však upoutala otázka, zda je alespoň možné sestrojit spojité zobrazení intervalu $[0, 1]$ na čtverec $[0, 1]^2$ (nebo obecněji na n-dimenzionální jednotkovou krychli). Jako první našel odpověď Giuseppe Peano, když se mu v roce 1890 podařilo takovou křivku sestrojit. Později se pro tyto křivky ujal název *křivky Peanova typu*[1]. Po Peanovi se jinými konstrukcemi prezentovali i další matematici: David Hilbert (1891), Eliakim Hastings Moore (1900), Henri Léon Lebesgue (1904), Waclaw Sierpińsky (1912), Georg Pólya (1913) a po nich následovalo ještě mnoho dalších.

V první části své práce ukáži dva z mnoha způsobů, jak se dá sestrojit Peanova křivka. První z nich je dán poměrně jednoduchým vzorcem, který vymyslel sám Peano. O to pracnější je ale důkaz faktu, že se skutečně jedná o Peanovu křivku. Jistou nevýhodou tohoto postupu je poněkud obtížnější geometrická interpretace, které se v tomto případě ani nebudu věnovat. Druhým zde popisovaným způsobem je Hilbertova konstrukce, která je naopak na geometrické představě zcela založena. Pro Hilbertovu křivku vyplynou všechny požadované vlastnosti přímo ze samotné konstrukce, tentokrát však pro ni nedostaneme žádný jednoduchý předpis. Součástí této práce je přiložené CD, na kterém je program vykreslující prvních několik kroků postupného generování Hilbertovy křivky.

Později se začaly řešit další problémy, kterým se již ale v této práci věnovat nebudu. Např. v roce 1903 zkonstruoval William Osgood prostou křivku do $\mathbf{R}^n$, jejíž obraz má nenulovou Lebesgueovu míru. Dále se vyskytla otázka, jestli se dají nějakým jednoduchým způsobem charakterizovat i obecnější struktury než jen n-rozměrné podmnožiny euklidovských prostorů, které jsou spojitým obrazem intervalu $[0, 1]$. Odpověď našli v roce 1913 nezávisle na sobě Stefan Mazurkiewicz a Hans Hahn, kteří dokázali, že neprázdný Hausdorffův topologický prostor je spojitým obrazem intervalu $[0, 1]$, právě když je kompaktní, souvislý, lokálně souvislý a metrizovatelný.

[1]V anglicky psané literatuře *Peano curves* nebo také *space-filling curves*.

Jako podklad pro sepsání této části práce mi posloužila publikace [2].

1.2. α**-hustá zobrazení.** Od třetí kapitoly dále se budu věnovat tzv. α-hustým zobrazením. Teorie α-hustých křivek v $\mathbf{R}^n$ je relativně mladá a začala se rozvíjet zejména pro své využití při hledání efektivních algoritmů globální optimalizace funkcí více proměnných. Těm se zde věnovat nebudu, jenom poznamenám, že jsou tyto algoritmy založeny na následující jednoduché myšlence. Pokud je definiční obor D funkce více proměnných vyplnitelný ve smyslu později uvedené definice, můžeme globální minimum funkce aproximovat globálním minimem této funkce zúžené na obraz nějakého α-hustého zobrazení v D (opět ve smyslu později uvedené definice). Toto minimum se často hledá mnohem snáze.

Já jsem se ve druhé části své práce soustředil zejména na α-hustá zobrazení do normovaných lineárních prostorů. Pomocí nich ukáži nutnou a postačující podmínku pro to, aby normovaný lineární prostor měl konečnou dimenzi. Dále definuji stupeň vyplnitelnosti dané podmnožiny metrického prostoru a dokáži, že v každém nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru nabývá tento stupeň pro uzavřenou jednotkovou kouli největší možné hodnoty, tj. jedné. Z toho nakonec jako snadný důsledek vyplyne známá Rieszova věta o dimenzi lokálně kompaktního normovaného lineárního prostoru.

Pro tuto část své práce jsem čerpal informace z [1].

2. Dva příklady Peanových křivek

V matematické literatuře se dají nalézt různé definice křivek, a tedy i Peanových křivek. Já budu v tomto textu vycházet z této definice:

Definice. Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení. Pak se f nazývá *křivka.*

Je-li navíc $n \geq 2$ a $f([0,1]) = [0,1]^n$, pak se zobrazení f nazývá *Peanova křivka.*

Jak již bylo řečeno, první křivku zobrazující interval $[0,1]$ na čtverec $[0,1]^2$ sestrojil Peano. Z analytického předpisu, který použil, si ale lze jen velmi těžko utvořit nějakou geometrickou představu (alespoň na první pohled). Až Hilbert si začal tuto geometrickou představu plně uvědomovat a jeho konstrukce Peanovy křivky je na ní zásadním způsobem založena. Obě konstrukce nyní předvedu.

2.1. **Peanova konstrukce.** Definujme křivku f_p předpisem

$$f_p(0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots) = \begin{pmatrix} 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \ldots \\ 0{,}_3\, (k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \ldots \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

kde

$$kt_j = 2 - t_j, \quad t_j = 0, 1, 2,$$

k^n značí n-tou iteraci operátoru k a

$$0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \cdots, \quad t_j = 0, 1 \text{ nebo } 2.$$

Poznámka. Zřejmě $k^2 t_j = t_j$, $t_j = 0, 1$ nebo 2. Tento jednoduchý fakt budu často používat v důkazu následující věty.

Věta 2.1. *Zobrazení $f_p\colon [0,1] \to [0,1]^2$ definované předpisem (2.1) je Peanova křivka.*

Důkaz. Důkaz rozdělím do tří částí. Nejdříve ověřím korektnost definice zobrazení f_p. Pak ukáži, že f_p je na $[0,1]^2$, a nakonec dokáži i jeho spojitost.

(i) Některá čísla z intervalu $[0,1]$ nemají svůj trojkový rozvoj určený jednoznačně, a proto je ze všeho nejdříve nutné ověřit, že hodnoty zobrazení f_p na zvoleném rozvoji nezávisí. Nechť tedy

$$0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots t_n t = 0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots t_n (t-1)\overline{2}, \quad t = 1 \text{ nebo } 2$$

(pro ostatní čísla z intervalu $[0,1]$ je jejich trojkový rozvoj určen jednoznačně). Ukáži, že hodnota první složky zobrazení f_p je v případě $n = 2m$ skutečně jednoznačně určená. Případ $n = 2m - 1$ a jednoznačnost druhé složky se ověří zcela analogicky, a proto se tím zde již nebudu zabývat. Dále budu značit f_{p1} (resp. f_{p2}) první (resp. druhou) složku zobrazení f_p.

Označíme-li $\tau = t_2 + \cdots + t_{2m}$, dostáváme

$$f_{p1}(0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} t) = 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (k^{\tau} t)\overline{(k^{\tau} 0)}$$
$$= \begin{cases} 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots t \\ \text{pokud } \tau \text{ je sudé;} \\ \\ 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (2-t)\overline{2} \\ = 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (3-t) \\ \text{pokud } \tau \text{ je liché.} \end{cases}$$

Na druhou stranu ale máme

$$f_{p1}(0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} (t-1)\overline{2})$$
$$= 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (k^{\tau}(t-1))(k^{\tau+2} 2)(k^{\tau+4} 2) \dots$$
$$= \begin{cases} 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (t-1)\overline{2} \\ = 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots t \\ \text{pokud } \tau \text{ je sudé;} \\ \\ 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (2-(t-1)) \\ = 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots (3-t) \\ \text{pokud } \tau \text{ je liché.} \end{cases}$$

Oba možné postupy tedy skutečně vedou ke stejnému výsledku.

(ii) Nyní ukáži, že zobrazení f_p je na $[0,1]^2$. Nechť

$$(0{,}_3\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots,\ 0{,}_3\, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \dots) \in [0,1]^2.$$

Matematickou indukcí zkonstruuji takovou posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, že

$$f_p(0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 t_4 \dots) = \begin{pmatrix} 0{,}_3\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots \\ 0{,}_3\, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \dots \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Nejdříve položme

$$t_0 = 0.$$

(Tento "nultý" člen posloupnosti sice k ničemu nepotřebujeme, ale usnadní nám konstrukci zbývajících členů.) Pokud už máme

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1},$$

položme

$$t_n = \begin{cases} k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2m-2}} \beta_m, & \text{je-li } n = 2m-1; \\ k^{t_1+t_3+t_5+\cdots+t_{2m-1}} \gamma_m, & \text{je-li } n = 2m. \end{cases}$$

Protože podle poznámky před větou platí

$$k^n t = u \Leftrightarrow t = k^n u, \quad t, u \in \{0, 1, 2\},$$

je snadné se přesvědědčit, že posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ skutečně splňuje (2.2).

(iii) Zbývá dokázat, že zobrazení f_p je spojité. Začnu spojitostí zobrazení f_{p1} na $[0, 1)$ zprava. Zvolme $t_0 \in [0, 1)$ libovolně. Nechť

$$t_0 = 0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$$

je trojkový rozvoj t_0, který neobsahuje nekonečně mnoho dvojek bezprostředně za sebou (takový jistě existuje). Dále zvolme $\epsilon > 0$ libovolně. K němu najdeme takové $n \in \mathbf{N}$, aby

$$\frac{1}{3^n} < \epsilon,$$

a položíme

$$\delta = \frac{1}{3^{2n}} - 0{,}_3\, 000 \ldots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \ldots > 0.$$

Protože

$$\begin{aligned} t_0 + \delta &= 0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n} t_{2n+1} \ldots + \frac{1}{3^{2n}} - 0{,}_3\, 000 \ldots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \ldots \\ &= 0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n} \overline{2}, \end{aligned}$$

shoduje se každé $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ na prvních $2n$ místech svého trojkového rozvoje s t_0. Zvolíme-li tedy libovolné $t \in [t_0, t_0 + \delta)$, můžeme ho zapsat ve tvaru

$$t = 0{,}_3\, t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n} \tau_{2n+1} \tau_{2n+2} \ldots.$$

Pokud ale nyní položíme

$$\kappa = t_2 + t_4 + t_6 + \cdots + t_{2n},$$

dostáváme

$$\begin{gathered} |f_{p1}(t) - f_{p1}(t_0)| \\ = |0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3) \ldots (k^{\kappa} \tau_{2n+1}) \ldots - 0{,}_3\, t_1 (k^{t_2} t_3) \ldots (k^{\kappa} t_{2n+1}) \ldots| \\ \leq \frac{|k^{\kappa} \tau_{2n+1} - k^{\kappa} t_{2n+1}|}{3^{n+1}} + \frac{|k^{\kappa + \tau_{2n+2}} \tau_{2n+3} - k^{\kappa + t_{2n+2}} t_{2n+3}|}{3^{n+2}} + \cdots \\ \leq (\tfrac{2}{3^{n+1}})(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots) = \tfrac{1}{3^n} < \epsilon. \end{gathered}$$

Tím je dokázána spojitost f_{p1} zprava v každém bodě intervalu $[0, 1)$.

Podobně se ukáže spojitost zobrazení f_{p1} na $(0, 1]$ zleva. Tentokrát si pro $t_0 \in (0, 1]$ zvolíme ten trojkový rozvoj, který není konečný (takový opět existuje), pro dané $\epsilon > 0$ najdeme opět takové $n \in \mathbf{N}$, aby

$$\frac{1}{3^n} < \epsilon,$$

a položíme

$$\delta = 0{,}_3\,000\ldots 0t_{2n+1}t_{2n+2}\ldots > 0.$$

Potom se každé $t \in (t_0 - \delta, t_0]$ shoduje s t_0 opět na prvních $2n$ místech svého trojkového rozvoje. Odtud již dostaneme zbytek analogicky jako v předchozím případě. Dokázali jsme tedy spojitost zobrazení f_{p1}. Všimneme-li si nyní, že $f_{p2}(t) = 3f_{p1}(\frac{t}{3})$ pro $t \in [0,1]$, dostáváme i spojitost zobrazení f_{p2}. □

Jako zajímavost můžeme uvést, že už Peano byl přesvědčen o tom, že jeho křivka není v žádném bodě diferencovatelná. Ale první, kdo tento fakt dokázal, byl až Moore.

Věta 2.2. *Peanova křivka definovaná předpisem (2.1) není diferencovatelná v žádném bodě.*

Důkaz. Zvolme libovolně

$$t = 0{,}_3\,t_1t_2t_3t_4\ldots \in [0,1]$$

a pro každé $n \in \mathbf{N}$ položme

$$s_n = 0{,}_3\,t_1t_2t_3\ldots t_{2n}\tau_{2n+1}t_{2n+2}\ldots,$$

kde $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod 2$. Potom platí

$$|t - s_n| = \frac{1}{3^{2n+1}} \to 0.$$

Uvědomíme-li si, že $f_{p1}(t)$ a $f_{p1}(s_n)$ se liší pouze na $(n+1)$-ém místě svého trojkového rozvoje, snadno ověříme, že

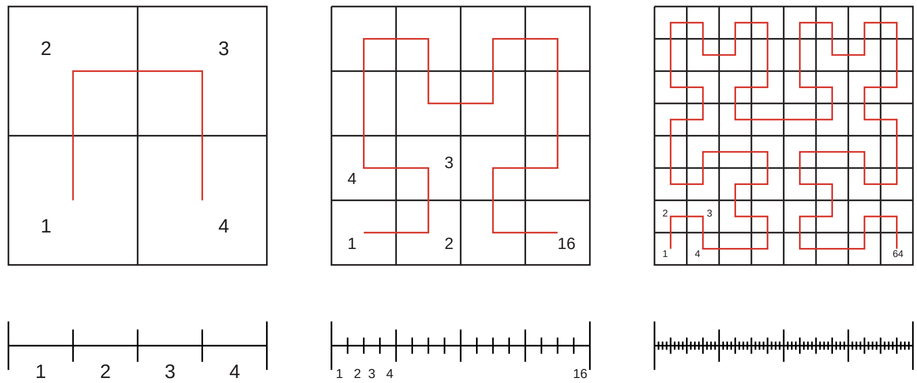
$$|f_{p1}(t) - f_{p1}(s_n)| = \frac{|k^{t_2+\ldots+t_{2n}}t_{2n+1} - k^{t_2+\ldots+t_{2n}}\tau_{2n+1}|}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Celkem dostáváme

$$\frac{|f_{p1}(t) - f_{p1}(s_n)|}{|t - s_n|} = 3^n \to \infty,$$

a tedy f_{p1} není diferencovatelné v bodě t. Nediferencovatelnost f_{p2} nyní snadno plyne ze vztahu $f_{p2}(t) = 3f_{p1}(\frac{t}{3})$ pro $t \in [0,1]$. □

2.2. **Hilbertova konstrukce.** Hilbertova konstrukce Peanovy křivky spočívá v následující myšlence. Pokud můžeme interval $[0,1]$ spojitě zobrazit na čtverec $[0,1]^2$ a rozdělíme-li tento interval na čtyři stejně velké podintervaly a čtverec $[0,1]^2$ na čtyři stejně velké čtverce, pak lze také každý podinterval spojitě zobrazit na libovolný z menších čtverců. Dále můžeme každý podinterval i každý z menších čtverců opět rozdělit na čtyři stejně velké díly a předchozí proces opakovat. V tomto zjemňování můžeme pokračovat až do nekonečna. Hilbert našel způsob, jak se dají volit čtverce, do kterých zobrazíme jednotlivé podintervaly, aby dvěma sousedním podintervalům vždy odpovídaly čtverce se společnou stranou. První tři kroky tohoto přiřazení čtverců intervalům jsou znázorněny na Obrázku 1. Dalších šest kroků (tedy až do devátého) si je možné prohlédnout v programu Hilbert.exe na přiloženém CD. (Návod na použití programu i s jeho zdrojovým textem je také součástí CD.)



Obrázek 1. První tři kroky generování Hilbertovy křivky

Definice. Každému bodu $t \in [0,1]$ můžeme přiřadit nějakou posloupnost do sebe vnořených uzavřených intervalů získaných výše popsaným dělením intervalu $[0,1]$, jejichž délky konvergují k nule a v jejichž průniku tento bod leží. Takové posloupnosti odpovídá (podle výše uvedeného přiřazení) právě jedna posloupnost do sebe vnořených uzavřených čtverců, pro které délky jejich úhlopříček také konvergují k nule. Tyto čtvrce tedy jednoznačně určují bod z $[0,1]^2$ jako bod ležící v jejich průniku. Tento bod označíme $f_h(t)$. Dostáváme tak zobrazení $f_h \colon [0,1] \to [0,1]^2$, které se nazývá *Hilbertova křivka.*

Věta 2.3. *Hilbertova křivka je Peanova.*

Důkaz. Stejně jako v případě věty 2.1 rozdělíme důkaz na tři části.

(i) V situaci z předchozí definice můžeme každému bodu $t \in [0,1]$ přiřadit více posloupností do sebe vnořených uzavřených intervalů získaných výše popsaným dělením intervalu $[0,1]$. Kladli jsme si totiž jen ty podmínky, že jejich délky musí konvergovat k nule a bod t musí ležet v jejich průniku. Pokud t není krajním bodem žádného podintervalu, je zřejmé, že průnik odpovídajících čtverců bude pro každou vyhovující posloupnost intervalů stejný. Je ale nutné si uvědomit, že tento průnik bude stejný i v případě, že t je krajním bodem některého podintervalu. To je ale také snadné, protože sousední intervaly se zobrazují na čtverce se společnou stranou. Hilbertova křivka je tedy definována korektně.

(ii) Libovolný bod $(\xi_0, \eta_0) \in [0,1]^2$ leží v průniku nějakých do sebe vnořených uzavřených čtverců, které jsme získali výše popsaným dělením čtverce $[0,1]^2$ a pro které délky jejich úhlopříček konvergují k nule. Této posloupnosti čtverců odpovídá (podle výše uvedeného přiřazení) posloupnost do sebe vnořených uzavřených intervalů, jejichž délky také konvergují k nule a které nám jednoznačně určují nějaký bod $t_0 \in [0,1]$ jako bod ležící v jejich průniku. Pro tento bod zřejmě platí $f_h(t_0) = (\xi_0, \eta_0)$. Hilbertova křivka je tedy na $[0,1]^2$.

(iii) Zbývá ukázat spojitost Hilbertovy křivky. Uvědomme si nejprve, že v n-tém kroku jsme rozdělili interval $[0,1]$ na 2^{2n} podintervalů délky $\frac{1}{2^{2n}}$ a čtverec $[0,1]^2$ na 2^{2n} čtverců s délkou strany $\frac{1}{2^n}$. Zvolme nyní $\epsilon > 0$ libovolně. K němu najdeme takové $n \in \mathbf{N}$, aby

$$\frac{\sqrt{5}}{2^n} < \epsilon,$$

a položíme

$$\delta = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Kdykoliv nyní pro nějaká $t_1, t_2 \in [0,1]$ platí

$$|t_1 - t_2| < \delta,$$

protne se interval $[t_1, t_2]$ nejvýše se dvěma (výše popsaným dělením vzniklými) podintervaly délky $\frac{1}{2^{2n}}$. Všechny obrazy intervalu $[t_1, t_2]$ tedy leží nejvýše ve dvou čtvercích, které mají společnou jednu stranu o velikosti $\frac{1}{2^n}$. Sjednocení těchto čtverců ale tvoří obdélník s úhlopříčkou délky $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$, a tedy

$$|f_h(t_1) - f_h(t_2)| < \epsilon.$$

Zobrazení f_h je tedy spojité. $\square$

3. α-HUSTÁ ZOBRAZENÍ

V následujícím textu se budu věnovat tzv. α-hustým zobrazením, jejichž speciálním případem jsou právě Peanovy křivky. Na rozdíl od nich zde ale často budu uvažovat zobrazení intervalu $[0,1]$ do obecného metrického prostoru. Navíc již nebudu požadovat, aby tato zobrazení byla na, a spokojím se místo toho s tím, že budou "dostatečně hustá" ve smyslu následující definice.

Definice. Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$.

(i) Nechť dále $\alpha \geq 0$ a $f\colon [0,1] \to A$ je spojité zobrazení. Pak řekneme, že f *α-vyplňuje* množinu A (nebo že f je *α-husté* v množině A), jestliže pro každé $x \in A$ platí

$$\operatorname{dist}(x, f([0,1])) \leq \alpha.$$

(ii) Jestliže pro dané $\alpha \geq 0$ existuje zobrazení f_α, které α-vyplňuje množinu A, nazývá se A *α-vyplnitelná*.

(iii) Řekneme, že množina A je *vyplnitelná*, jestliže je α-vyplnitelná pro každé $\alpha > 0$.

(iv) Řekneme, že množina A je *peanovská*, jestliže A je 0-vyplnitelná. Každé zobrazení, které 0-vyplňuje A, se nazývá *peanovské* (vzhledem k množině A).

Poznámky.

(i) Pro pevné $x \in A$ a spojité zobrazení f je i funkce $\rho(x, f(\cdot))$ spojitá a nabývá tedy na intervalu $[0,1]$ svého minima. Pro každé $x \in A$ tedy existuje takové $t_0 \in [0,1]$, že

$$\rho(x, f(t_0)) = \operatorname{dist}(x, f([0,1])).$$

(ii) Z předchozí definice je zřejmé, že Peanovy křivky jsou právě ty křivky, které 0-vyplňují $[0,1]^n \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ a $[0,1]^n$ je peanovská podmnožina $\mathbf{R}^n$.

(iii) Každá peanovská množina je vyplnitelná, neboť je-li $\alpha < \beta$ a množina A je α-vyplnitelná, pak je i β-vyplnitelná (stačí volit $f_\beta = f_\alpha$). Naopak ale obecně neplatí, že vyplnitelná množina je peanovská, jak je vidět z následujícího jednoduchého příkladu.

Příklad. Položme $A = (0,1] \subset \mathbf{R}$. Pak A je vyplnitelná, ale není peanovská:

Pro $\alpha > 0$ položme $f_\alpha(t) = \min\{t+\alpha, 1\}$, $t \in [0,1]$. Potom f_α je spojitá a α-vyplňuje $(0,1]$, neboť $f_\alpha([0,1]) = [\alpha, 1] \subset (0,1]$. Množina A je tedy vyplnitelná. Protože ale A není kompaktní množina, nemůže být spojitým obrazem kompaktního intervalu $[0,1]$, a není tedy peanovská.

4. Charakterizace konečně dimenzionálních normovaných lineárních prostorů

V této kapitole pomocí pojmu vyplnitelnosti charakterizuji normované lineární prostory konečné dimenze.

Lemma 4.1. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Nechť $A \subset P$ je vyplnitelná. Potom A je prekompaktní.*

Důkaz. Zvolme libovolné $\epsilon > 0$. Naším cílem je najít v množině A konečnou ϵ-síť. Protože množina A je vyplnitelná, existuje zobrazení $f_{\frac{\epsilon}{3}} \colon [0,1] \to A$, které je $\frac{\epsilon}{3}$-husté v A. Tedy

$$\operatorname{dist}(x, f_{\frac{\epsilon}{3}}([0,1])) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{pro všechna } x \in A. \tag{4.1}$$

Dále využijeme kompaktnosti (ze které plyne prekompaktnost) obrazu křivky $f_{\frac{\epsilon}{3}}$ a najdeme konečnou množinu $F \subset f_{\frac{\epsilon}{3}}([0,1])$ tak, aby

$$\operatorname{dist}(y, F) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{pro všechna } y \in f_{\frac{\epsilon}{3}}([0,1]). \tag{4.2}$$

Z (4.1), (4.2) a trojúhelníkové nerovnosti pak snadno dostáváme, že

$$\operatorname{dist}(x, F) \leq \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon \quad \text{pro všechna } x \in A,$$

a důkaz je dokončen. □

Lemma 4.2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Nechť $A \subset P$ je konvexní a prekompaktní. Potom A je vyplnitelná.*

Důkaz. Zvolme libovolné $\alpha > 0$. Z prekompaktnosti množiny A existuje konečná množina

$$F = \{x_i \colon i = 0, ..., p\} \subset A$$

taková, že pro každé $x \in A$ existuje $0 \leq i \leq p$ tak, že

$$\|x - x_i\| < \alpha.$$

Definujme zobrazení $f \colon [0,1] \to X$ takto:

$$f(t) = \begin{cases} x_0 + pt(x_1 - x_0) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{p}]; \\ x_1 + p(t - \frac{1}{p})(x_2 - x_1) & \text{pro } t \in [\frac{1}{p}, \frac{2}{p}]; \\ \vdots & \\ x_{p-1} + p(t - \frac{p-1}{p})(x_p - x_{p-1}) & \text{pro } t \in [\frac{p-1}{p}, 1]. \end{cases}$$

Snadno se ověří, že f je definováno korektně (hodnoty f v bodech $\frac{1}{p}$, $\frac{2}{p}$, ..., $\frac{p-1}{p}$ jsou určeny jednoznačně), jeho obraz je podmnožinou A (neboť A je konvexní), f je spojité a α-vyplňuje množinu A. □

Věta 4.3. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom X je konečně dimenzionální, právě když uzavřená jednotková koule $B \subset X$ je vyplnitelná.*

Důkaz. Nechť nejprve X je konečně dimenzionální. Potom uzavřená jednotková koule $B \subset X$ je kompaktní, a tedy i prekompaktní (a konvexní), z čehož podle lemmatu 4.2 plyne její vyplnitelnost.

Nechť je nyní naopak X nekonečně dimenzionální. Matematickou indukcí zkonstruuji v uzavřené jednotkové kouli $B \subset X$ nekonečnou $\frac{1}{2}$-izolovanou množinu. Označme

$$S = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$$

jednotkovou sféru v X. Zvolme $x_1 \in S$ libovolně. Pokud už máme $x_1, \ldots, x_n$, existuje podle Rieszova lemmatu $x_{n+1} \in S$ tak, že

$$\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) > \frac{1}{2},$$

neboť $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ je uzavřený a vlastní podprostor X. Výsledná množina $\{x_n \colon n \in \mathbf{N}\} \subset B$ je pak skutečně $\frac{1}{2}$-izolovaná.

Dostáváme tedy, že množina B není prekompaktní, neboť jinak by v ní pro každé $\epsilon > 0$ byla každá ϵ-izolovaná množina konečná. Podle lemmatu 4.1 tedy B nemůže být ani vyplnitelná. □

5. Rieszova věta

V této kapitole definuji stupeň vyplnitelnosti dané podmnožiny metrického prostoru a ukáži, že uzavřená jednotková koule v nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru má tento stupeň vždy roven jedné. Z toho pak snadno odvodíme známou Rieszovu větu o dimenzi lokálně kompaktního normovaného lineárního prostoru.

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $f\colon [0,1] \to A$ je spojité zobrazení. Pak definujeme *stupeň vyplnitelnosti* m_f^A zobrazení f v množině A předpisem

$$m_f^A = \sup\{\delta(x)\colon x \in A\},$$

kde

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, f([0,1])), \quad x \in A.$$

Poznámky.

(i) Zřejmě platí

$$m_f^A = \min\{\alpha \geq 0\colon f\ \alpha\text{-vyplňuje } A\}.$$

(ii) Vezmeme-li za množinu A uzavřenou jednotkovou kouli B v normovaném lineárním prostoru, pak pro libovolné f je zřejmě $0 \leq \delta(x) \leq 2$ pro každé $x \in B$, a tedy i $0 \leq m_f^B \leq 2$.

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $C([0,1], A)$ je množina všech spojitých zobrazení intervalu $[0,1]$ do množiny A. Pak definujeme *stupeň vyplnitelnosti* M_A množiny A předpisem

$$M_A = \inf\{m_f^A\colon f \in C([0,1], A)\}.$$

Poznámky.

(i) Zřejmě A je vyplnitelná, právě když $M_A = 0$.

(ii) Vezmeme-li za množinu A uzavřenou jednotkovou kouli B v normovaném lineárním prostoru, je $0 \leq M_B \leq 1$. Horní odhad na M_B dostaneme např. volbou $f(t) = 0$, $t \in [0,1]$.

(iii) Je snadno vidět, že

$$M_A = \inf\{\alpha \geq 0\colon A \text{ je } \alpha \text{ vyplnitelná}\}.$$

Obecně ale neplatí, že A je M_A-vyplnitelná, jak je vidět např. z dříve ukázané existence vyplnitelné množiny (její stupeň vyplnitelnosti je 0), která není peanovská (neboli 0-vyplnitelná).

Věta 5.1. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je nekonečně dimenzionální normovaný lineární prostor. Potom stupeň vyplnitelnosti uzavřené jednotkové koule $B \subset X$ je roven jedné, neboli*

$$M_B = 1.$$

Důkaz. Předpokládejme, že
$$M_B < 1.$$
Potom musí existovat $f \in C([0,1], B)$ a $\alpha < 1$ takové, že f α-vyplňuje B, tj.
$$\inf\{\|x - f(t)\| \colon t \in [0,1]\} \le \alpha \quad \text{pro všechna } x \in B. \tag{5.1}$$
Zvolme
$$0 < \epsilon < \frac{1-\alpha}{2}. \tag{5.2}$$
Protože $f([0,1])$ je kompaktní množina, můžeme najít její konečnou podmnožinu
$$F = \{f(t_i) \colon i = 1, \dots, n\} \subset f([0,1])$$
takovou, že
$$\inf\{\|y - f(t_i)\| \colon i = 1, \dots, n\} \le \epsilon \quad \text{pro všechna } y \in f([0,1]). \tag{5.3}$$
Podle (5.1) a (5.3) dostáváme
$$\inf\{\|x - f(t_i)\| : i = 1, \dots, n\} \le \alpha + \epsilon \quad \text{pro všechna } x \in B. \tag{5.4}$$
Definujme nyní V jako lineární obal množiny F. Potom V je konečně dimenzionální podprostor X, tedy vlastní a uzavřený. Existuje tedy vektor z $X \setminus V$, který má od V kladnou vzdálenost, a po vynásobení jednoho takového vektoru vhodnou konstantou dostaneme vektor x_0, pro který
$$\lambda = \inf\{\|x_0 - v\| \colon v \in V\} \ge 1. \tag{5.5}$$
Zvolme k němu vektor $v_0 \in V$ takový, aby
$$\lambda \le \|x_0 - v_0\| \le \lambda + \epsilon. \tag{5.6}$$
Položme $z_0 = \frac{x_0 - v_0}{\|x_0 - v_0\|}$. Protože $z_0 \in B$, existuje podle (5.4) $1 \le k \le n$ takové, že
$$\|z_0 - f(t_k)\| \le \alpha + \epsilon. \tag{5.7}$$
Dále si rozepišme
$$x_0 = v_0 + \|x_0 - v_0\| \cdot f(t_k) + \|x_0 - v_0\| \cdot (z_0 - f(t_k)) \tag{5.8}$$
a uvědomme si, že $v_0 + \|x_0 - v_0\| \cdot f(t_k) \in V$. Dostáváme tedy odhad (rovnost plyne z (5.8), nerovnost z (5.5)):
$$\|x_0 - v_0\| \cdot \|z_0 - f(t_k)\| = \|x_0 - (v_0 + \|x_0 - v_0\| \cdot f(t_k))\| \ge \lambda. \tag{5.9}$$
Podle (5.2) je ale
$$\alpha < 1 - 2\epsilon, \tag{5.10}$$
a proto postupně z (5.6), (5.9), (5.7) a (5.10) dostáváme
$$\lambda + \epsilon \ge \|x_0 - v_0\| \ge \frac{\lambda}{\|z_0 - f(t_k)\|} \ge \frac{\lambda}{\alpha + \epsilon} \ge \frac{\lambda}{1 - \epsilon}.$$

Odtud již ale jednoduchými úpravami dostaneme, že

$$1 - \epsilon \geq \lambda,$$

což je spor s (5.5). Nutně tedy platí

$$M_B \geq 1.$$

Z dřívější poznámky už ale víme, že

$$M_B \leq 1,$$

a věta je dokázána. □

Poznámka. Z vět 4.3 a 5.1 plyne, že uzavřená jednotková koule v libovolném normovaném lineárním prostoru X má stupeň vyplnitelnosti roven nule nebo jedné podle toho, jestli má X konečnou nebo nekonečnou dimenzi.

Příklad. Pro každé $\xi > 0$ existuje takový metrický prostor (P, ρ), že $M_P = \xi$:

Uvažme alespoň dvouprvkovou množinu P a pro $x, y \in P$ položme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \xi & \text{pro } x \neq y; \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Protože spojitým obrazem souvislé množiny je opět souvislá množina, je pro každé $f \in C([0,1], P)$ množina $f([0,1])$ pouze jednobodová. Zřejmě tedy pro každé $f \in C([0,1], P)$ platí

$$m_f^P = \xi,$$

a tedy i

$$M_P = \xi.$$

Důsledek 5.2 (Rieszova věta)**.** *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor. Jestliže* $(X, \|\cdot\|)$ *je lokálně kompaktní, pak* X *má konečnou dimenzi.*

Důkaz. Pokud uzavřená jednotková koule $B \subset X$ je kompaktní, je i prekompaktní (a konvexní), a tedy podle lemmatu 4.2 vyplnitelná. Tedy

$$M_B = 0.$$

Kdyby ale X byl nekonečně dimenzionální, platilo by podle věty 5.1

$$M_B = 1.$$

□

Literatura

[1] Mora G., Mira J. A. (2003): Alpha-dense curves in infinite dimensional spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **5**, 437-449.

[2] Sagan H. (1994): Space-Filling Curves. Springer-Verlag, New York.