Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řešení vybraných aplikačních úloh pomocí soustav rovnic

Solving of selected application problems using systems of equations

Aneta Nováková

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2018

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Řešení vybraných aplikačních úloh pomocí soustav rovnic* vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 20. 4. 2018 . . . .

podpis studentky

Poděkování:

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné vedení při zpracovávání mé bakalářské práce, za cenné rady, připomínky a čas, který mé práci věnovala.

Abstrakt

Práce se zabývá použitím soustav rovnic pro řešení úloh z aplikačních oblastí společná práce, směsi a roztoky, síťové toky. Práce je rozdělena na dvě části - teoretickou a praktickou. Teoretická část je rozdělena na dvě kapitoly. V první kapitole jsou shrnuty základní poznatky o maticích a determinantu matice. V druhé kapitole jsou shrnuty základní poznatky o soustavách lineárních rovnic. Praktická část je tvořena sbírkou slovních úloh z aplikačních oblastí, při jejichž řešení lze použít metody řešení soustavou rovnic. Všechny úlohy jsou řešené a ve většině úloh je předvedeno více způsobů řešení.

Klíčová slova: algebra, matice, soustavy rovnic, slovní úlohy, aplikace algebry

Abstract

The thesis focuses on the use of systems of equations for solving problems from application areas such as common work, mixtures and solutions and network flows. The thesis is divided into two parts - theoretical and practical. The theoretical part is divided into two chapters. The first chapter summarizes basic knowledge about matrices and matrix determinant. The second chapter summarizes the basic knowledge about systems of linear equations. The practical part consists of a collection of examples from those application areas, where solution can be found by solving systems of linear equations. All examples are presented with solution and in most cases more than one method of solving these equations is shown.

Keywords: algebra, matrix, systems of equations, word problems, application of algebra

Obsah

Úvod

Tématem této práce je řešení slovních úloh pomocí soustav rovnic. V celé práci se zabýváme soustavou lineárních rovnic nad číselnými tělesy, zejména nad tělesem reálných čísel. Při řešení úloh předpokládáme čtenářovu znalost rovnic a jejich ekvivalentních úprav, které nemění množinu řešení rovnic.

Cílem této práce je popsat použití soustav lineárních rovnic pro řešení úloh z aplikačních oblastí společná práce, směsi a roztoky, síťové toky a vytvořit sbírku takových úloh.

Práce je rozdělena na dvě části - teoretickou a praktickou. V teoretické části jsou shrnuty informace o maticích a soustavách rovnic, převzaté z literatury. Jsou definovány základní pojmy, které je potřebné znát při řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých. Jsou popsány podmínky, za kterých má soustava rovnic řešení. Uvádíme metody řešení soustavy lineárních rovnic, které jsou aplikovány při řešení slovních úloh v praktické části. V praktické části jsou úlohy rozděleny do tří oblastí - společná práce, směsi a roztoky, síťové toky. Každá oblast je krátce popsána a dále následují řešené úlohy. Řešení úloh je vypracováno autorkou.

Téma práce jsem si vybrala na základě tématu "Různé strategie řešení slovních úloh", který byl vypsán mou vedoucí. Zadání tématu jsem na základě oblasti, která mě zaujala, dále specifikovala na řešení soustavou rovnic.

V úvodu každé kapitoly jsou uvedeny zdroje, odkud jsou informace převzaty. Ve sbírce úloh v oblasti síťových toků jsou použity diagramy, které jsou vytvořené autorkou v programu GeoGebra. Věty v této práci jsou uváděny bez důkazů.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Matice

V kapitole nazvané Matice jsou shrnuty především pojmy, které jsou potřeba k výpočtu řešení soustav lineárních rovnic. V celém textu se omezujeme na matice nad tělesem reálných čísel.

V podkapitole 1.1 jsou shrnuty základní poznatky o determinantu matice a představeny metody výpočtu determinantu, které jsou využity při řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla. Kapitola je zpracována ze zdrojů [1], [2], [3].

Definice 1. *Maticí* A typu (m, n) nazýváme schéma mn reálných čísel $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $m = n$, pak A se nazývá *čtvercová matice n-tého řádu*. Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ matice A tvoří její *hlavní diagonálu*, prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots$ matice A tvoří její *vedlejší diagonálu*.

Nulovou maticí nazýváme libovolnou matici, jejíž všechny prvky se rovnají nule.

Poznámka. V dalším textu budeme používat v případě, že nemůže dojít k nedorozumění, zkrácené značení (a_{ij}) typu (m, n), či (a_{ij}), kde $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$, nebo pouze (a_{ij}), je-li typ matice zřejmý z kontextu.

Pro potřeby práce je uvedena pouze definice horní trojúhelníkové matice. Dolní trojúhelníková matice je definována například v publikaci [5].

Definice 2. *Horní trojúhelníkovou maticí* (a_{ij}) typu (m,n) nazýváme matici, v níž jsou prvky $a_{ij}=0$ pro každá i,j taková, že $i>j$.

Definice 3. *Transponovaná matice* k matici $A=(a_{ij})$ typu (m,n) je matice $A^{\mathrm{T}}=(b_{ji})$ typu (n,m), pro kterou platí

$$a_{ij}=b_{ji}.$$

Poznámka. Transponovanou matici A^{T} získáme z matice A vzájemnou výměnou řádků a sloupců matice A.

Následující úpravy jsou využity při výpočtu hodnosti matice, hodnoty determinantu matice a při výpočtu řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody.

Definice 4. *Elementární řádkovou*, resp. *sloupcovou úpravou matice A* rozumíme některou z těchto úprav:

1. změnu pořadí řádků, resp. sloupců matice A;
2. nahrazení řádku, resp. sloupce matice A jeho α-násobkem, kde $\alpha\in\mathbb{R},\alpha\neq 0$;
3. nahrazení řádku, resp. sloupce matice A jeho součtem s α-násobkem, $\alpha\in\mathbb{R}$, jiného řádku, resp. sloupce matice A;
4. vynechání řádku, resp. sloupce, který je lineární kombinací ostatních řádků, resp. sloupců.

Poznámka. Někdy je mezi elementární řádkové, resp. sloupcové úpravy zařazováno přidání řádku, resp. sloupce, který je lineární kombinací řádků, resp. sloupců matice.

Definice 5. *Hodností matice* $A=(a_{ij})$ typu (m,n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců). Píšeme $h=\text{hod } A$.

Poznámka. Hodnost matice nemůže být nikdy větší než počet řádků či sloupců. Maximální počet lineárně nezávislých řádků je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců.

Věta 1. *Pro libovolnou matici A platí vztah: hod A = hod A^T.*

Poznámka. Tudíž vlastnosti platící pro sloupce platí i pro řádky a naopak.

Věta 2. *Elementární řádkové, resp. sloupcové úpravy nemění hodnost matice.*

Každou matici lze převést elementárními řádkovými či sloupcovými úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici[1]. Pomocí zobecněné trojúhelníkové matice získáme hodnost původní matice.

Věta 3. *Hodnost matice A je rovna počtu řádků zobecněné trojúhelníkové matice A' ekvivalentní s A.*

1.1 Determinant matice

Dříve, než uvedeme definici determinantu matice A n-tého řádu, definujeme pojmy pořadí, permutace a znaménko permutace. Definice jsou zpracované ze zdroje ([5], str. 50, 51).

Definice 6. Buď n přirozené číslo. *Pořadím čísel* $1, 2, \ldots, n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, kde se každý z prvků $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou.

Definice 7. *Permutací* π množiny $1, 2, \ldots, n$ rozumíme každou bijekci množiny $1, 2, \ldots, n$. Permutaci π zapisujeme pomocí matice typu $(2, n)$ tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \end{pmatrix},$$

ve které první řádek nazýváme *pořadím vzorů*, druhý řádek *pořadím obrazů* a pro každé $x \in 1, 2, \ldots, n$ je $\pi(i_x) = s_x$. Množinu všech permutací množiny $1, 2, \ldots, n$ značíme S_n.

[1] Prvek a_{ij} se nazývá *vedoucí prvek* i-tého řádku, jestliže $a_{ij} \neq 0$ a $a_{ik} = 0$ pro $k < j$.

Matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) se nazývá *zobecněná trojúhelníková matice*, právě když

a) má pouze nenulové řádky,

b) jsou-li a_{ij}, a_{rs} vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $j < s$.

Definice 8. *Znaménkem permutace* π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí[2] v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme sign π.

Definice 9. Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem reálných čísel. *Determinantem matice A* rozumíme prvek det A z tělesa reálných čísel, pro který platí:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n},$$

kde $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix}$.

Značíme

$$\det A = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 4. *Determinant matice A je roven determinantu transponované matice A^T k matici A.*

Poznámka. Proto všechny vlastnosti vyslovené pro řádky determinantu platí i pro sloupce a naopak.

Definice 10. Determinant A_{ij}, který vznikne z determinantu A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, se nazývá *subdeterminant* $(n-1)$*-ního řádu determinantu A příslušný k prvku* a_{ij}.
Algebraickým doplňkem M_{ij} *prvku* a_{ij} *v determinantu A* nazýváme $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

1.1.1 Výpočet determinantu

Determinant 1. řádu

$$|A| = (a_{11}) = a_{11}.$$

[2] *Inverzí v pořadí* $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou, že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se vyskytuje v pořadí před menším číslem).

Determinant 2. řádu *(křížové pravidlo)*

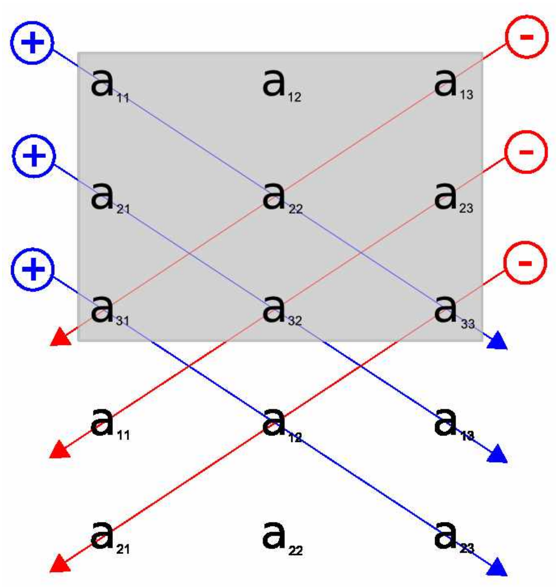
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Princip tohoto výpočtu je vynásobit prvky na hlavní diagonále a odečíst od nich součin prvků na vedlejší diagonále.

Determinant 3. řádu *(Sarrusovo pravidlo)*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$



Obrázek 1.1: Schéma popisující výpočet determinantu pomocí Sarrusova pravidla [4]

Přesný popis výpočtu pomocí Sarrusova pravidla je ilustrován na obr. 1.1. K matici determinantu připíšeme první dva řádky matice A jako čtvrtý a pátý řádek. Následně sečteme tři součiny prvků na modrých diagonálách a odečteme od nich tři součiny prvků na diagonálách červené barvy.

Determinant 4. a vyšších řádů ***(Laplaceův rozvoj - rozvoj podle libovolného řádku či sloupce)***

Rozvoj podle i-tého řádku: $|A| = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in}$.

Rozvoj podle j-tého sloupce: $|A| = a_{j1}M_{j1} + a_{j2}M_{j2} + \ldots + a_{jn}M_{jn}$.

Výpočet determinantu pomocí horní trojúhelníkové matice

V následujících bodech je shrnuto, co se stane s determinantem, použijeme-li elementární úpravy z definice 4 na matici A, jejíž determinant počítáme.

- Změna pořadí řádků matice A
  $\rightarrow$ vyměníme-li mezi sebou dva řádky, změníme znaménko výsledného determinantu.

- Nahrazení řádku matice A jeho α-násobkem, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
  $\rightarrow$ vznikne-li matice A' z matice A vynásobením řádku matice A nenulovým číslem α, platí det $A' = \alpha$det A. Hodnotu původního determinantu matice A získáme vydělením výsledného determinantu matice A' číslem α.

- Nahrazení řádku matice A jeho součtem s α-násobkem, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, jiného řádku matice A
  $\rightarrow$ hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu jeho řádku lineární kombinaci ostatních řádků.

Každou čtvercovou matici lze uvedenými elementárními úpravami převést na horní trojúhelníkovou matici.

Věta 5. *Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále matice.*

Determinant matice lze vypočítat převedením matice na horní trojúhelníkovou matici, jejíž determinant má stejnou hodnotu jako determinant původní matice.

Kapitola 2

Soustavy lineárních rovnic

V této kapitole jsou definovány soustavy lineárních rovnic, uvedeny podmínky řešitelnosti a představeny metody výpočtu řešení. Poznatky jsou dále využity v praktické části.
Kapitola obsahuje informace převzaté ze zdrojů [1], [2], [5].

Definice 11. *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* $x_1, x_2, ..., x_n$ nazýváme soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

kde $a_{11}, \dots, a_{mn}$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná čísla.
Symboly $x_1, \dots, x_n$ nazýváme *neznámými*, čísla a_{ij} *koeficienty u neznámých* a čísla $b_1, \dots, b_m$ *pravými stranami rovnic*.
Řešením soustavy (2.1) se nazývá každá uspořádaná n-tice reálných čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, že při dosazení čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ za neznámé $x_1, \dots, x_n$ do rovnic se všechny rovnice stanou pravdivými výroky[1].

[1]Výrok je sdělení, o kterém se dá jednoznačně rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

Maticí soustavy (2.1) nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí soustavy (2.1) nazýváme matici

$$A_{\mathrm{r}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Věta 6. *(Frobeniova věta)*
Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, když se hodnost matice soustavy a rozšířené matice téže soustavy rovnají.

Definice 12. Soustava lineárních rovnic se nazývá *homogenní*, resp. *nehomogenní*, je-li $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, resp. $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$.

2.1 Počet řešení soustavy lineárních rovnic, je-li splněna podmínka Frobeniovy věty

1. Pro nehomogenní soustavu m lineárních algebraických rovnic o n neznámých platí:
   při $h = n$ existuje právě jedno řešení soustavy,
   při $h < n$ existuje nekonečně mnoho řešení soustavy rovnic závislých na $(n - h)$ parametrech.

2. Pro homogenní soustavu m lineárních algebraických rovnic o n neznámých platí:
   při $h = n$ existuje právě jedno řešení soustavy, a to nulový vektor $\boldsymbol{o} = (0, \dots, 0)$,
   při $h < n$ existuje nekonečně mnoho řešení soustavy rovnic závislých na $(n - h)$ parametrech.
   Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, nulový vektor $\boldsymbol{o} = (0, 0, \dots, 0)$.

Soustava lineárních rovnic nikdy nemůže mít hodnost větší než je počet neznámých n. Již v kapitole Matice jsme uvedli, že maximální počet lineárně nezávislých řádků je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců, tedy neznámých n.

2.2 Ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic

Poznámka. Děláme-li úpravy v rozšířené matici soustavy, využíváme elementární úpravy z definice 4. V každém bodu, kromě druhého, uvádíme úpravy jak soustav rovnic, tak rozšířené matice soustavy. Obdoba úpravy z druhého bodu pro matice neexistuje.

Tyto úpravy nemění množinu všech řešení soustavy lineárních rovnic:

- Záměna pořadí rovnic.
  Změna pořadí řádků v matici.
- Dosazení výrazu, kterým z jedné rovnice vyjádříme neznámou pomocí ostatních neznámých, za příslušnou neznámou do jiné rovnice.
- Nahrazení rovnice jejím α-násobkem, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
  Nahrazení řádku matice jeho α-násobkem, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- Nahrazení rovnice jejím součtem s α-násobkem, $\alpha \in \mathbb{R}$, jiné rovnice soustavy.
  Nahrazení řádku matice jeho součtem s α-násobkem, $\alpha \in \mathbb{R}$, jiného řádku matice.
- Vynechání rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic[2].
  Vynechání řádku matice, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.
- Přidání rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic.
  Přidání řádku matice, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.

[2]Nechť $L_1 = P_1, L_2 = P_2, \ldots, L_n = P_n$ je soustava rovnic a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou reálná čísla. Lineární kombinací těchto rovnic s koeficienty $\alpha_1, , \ldots, \alpha_n$, rozumíme rovnici $\alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n$.

2.3 Metody řešení soustavy lineárních rovnic

V této podkapitole jsou představeny metody, které využíváme při výpočtu řešení slovních úloh v praktické části.

2.3.1 Soustava m rovnic o n neznámých

Je předveden postup Gaussovy eliminační metody, jejíž postup řešení je aplikovatelný na libovolnou soustavu lineárních rovnic.

Gaussova eliminační metoda

Úpravy, které provádíme s rovnicemi soustavy, odpovídají analogickým úpravám s řádky rozšířené matice této soustavy. Pracujeme s maticí, jež má řešení, tedy hod $A =$ hod A_{r}. Rozšířenou matici soustavy (2.1) převedeme vhodnými elementárními úpravami (z definice 4) na zobecněnou trojúhelníkovou matici, jejíž řešení je stejné jako řešení původní matice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{(m-1)}_{mn} & b^{(m-1)}_m \end{array}\right).$$

Ze zobecněné trojúhelníkové matice lze postupně vypočítat hodnoty všech neznámých.
Pokud je hod $A_{\mathrm{r}} = n$, začínáme výpočtem hodnoty neznámé x_n z posledního řádku matice.
Pokud je hod $A_{\mathrm{r}} < n$, zvolíme $(n - h)$ parametrů za neznámé a pomocí nich dopočítáme ostatní neznámé.
Počet řešení soustavy rovnic je popsán v podkapitole 2.1.
Pokud rozšířenou matici soustavy převedeme elementárními úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici, pro niž platí hod $A \neq$ hod A_{r}, pak soustava rovnic nemá řešení.

2.3.2 Soustava n rovnic o n neznámých

Soustava n rovnic o n neznámých je speciálním případem soustavy m rovnic o n neznámých. Výše představenou metodu již nebudeme popisovat, postup řešení by byl v tomto případě stejný.
Metoda, jež je využívána pouze pro tento typ soustavy rovnic, se nazývá Cramerovo pravidlo.

Cramerovo pravidlo

Determinantem D soustavy n rovnic o n neznámých:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

nazýváme determinant

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

D_i je determinant, který získáme z determinantu D nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy rovnic. Pokud $D \neq 0$, soustava n lineárních rovnic má právě jedno řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i = \frac{D_i}{D}$.

2.3.3 Metody používané na ZŠ a SŠ

Představíme metodu dosazovací a porovnávací. Metody popisované v této podkapitole jsou využívány především pro řešení soustav dvou či tří rovnic. Postup výpočtu předvedeme na soustavě dvou rovnic o dvou neznámých. Podmínky jsou uvedeny za představenými metodami.
Metoda, jejíž postup popisovat nebudeme, se nazývá sčítací metoda. Princip této metody je stejný jako u Gaussovy eliminační metody, která již představena je.

Dosazovací metoda

Metoda spočívá ve vyjádření neznámé z jedné rovnice a dosazení do druhé rovnice.
Uvažujme soustavu, pro kterou platí podmínky $a_{11} \neq 0$ a $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Vyjádříme např. neznámou x_1 z první rovnice:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}.$$

Protože předpokládáme, že $a_{11} \neq 0$, je jmenovatel různý od 0. Vyjádřenou x_1 dosadíme do druhé rovnice a vyjádříme neznámou x_2:

$$a_{21}\frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2,$$
$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Protože předpokládáme, že $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, je jmenovatel různý od 0. Získanou neznámou x_2 dosadíme zpět do vyjádřené rovnice pro neznámou x_1 a tu dopočítáme:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}(\frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}})}{a_{11}},$$
$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Porovnávací metoda

Z každé rovnice vyjádříme tutéž neznámou. Hodnota vyjádřené neznámé z jedné rovnice musí být rovna vyjádřené neznámé z druhé rovnice.
Uvažujme soustavu rovnic, pro kterou platí podmínky $a_{11} \neq 0, a_{21} \neq 0$ a $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Z obou rovnic vyjádříme např. neznámou x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}, \tag{2.2}$$

$$x_1 = \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}}. \tag{2.3}$$

Protože předpokládáme, že $a_{11} \neq 0, a_{21} \neq 0$, je jmenovatel různý od 0.

Porovnáme vyjádření x_1 ve (2.2) a (2.3). Vznikne nová rovnice, ze které vyjádříme neznámou x_2:

$$\frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} = \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Protože předpokládáme, že $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, je jmenovatel různý od 0.

Získanou neznámou x_2 dosadíme zpět do rovnice (2.2) či (2.3) a vyjádříme neznámou x_1:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Podmínky

Postup řešení soustavy rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

jsme uvedli s obecnými koeficienty. Diskuzi provádíme s koeficientem a_{11}, analogické úvahy pro jiné koeficienty neuvádíme.

1. Je-li $a_{11} = 0$ a $a_{12}a_{21} \neq 0$, má soustava řešení:

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}},$$

$$x_1 = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}}.$$

Nechť $a_{11} = 0$ a

a) $a_{12} = 0$, pak za předpokladu $b_1 \neq 0$ nemá soustava rovnic řešení. Za předpokladu

$b_1 = 0$ dostáváme jednu rovnici o dvou neznámých. Řešením první rovnice soustavy je libovolné reálné číslo. V druhé rovnici označíme např. $x_1 = t$, kde t je z množiny reálných čísel.

Je-li $a_{22} \neq 0$, má soustava řešení:

$$x_1 = t,$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}t}{a_{22}}.$$

Je-li $a_{22} = 0$ a

- $a_{21} = 0$, $b_2 = 0$, je řešením libovolná dvojice reálných čísel.
- $a_{21} = 0$, $b_2 \neq 0$, nemá soustava rovnic řešení.
- $a_{21} \neq 0$, $b_2 \neq 0$, pak $x_1 = \frac{b_2}{a_{21}}, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) $a_{21} = 0$, získáme dvě rovnice o jedné neznámé.

Je-li $a_{12} \neq 0, a_{22} \neq 0$ je v první rovnici $x_2 = \frac{b_1}{a_{12}}$ a ve druhé rovnici je $x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$.

Nechť:

(a) $\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{22}}$, pak $x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{22}}$ a $x_1 \in \mathbb{R}$,

(b) $\frac{b_1}{a_{12}} \neq \frac{b_2}{a_{22}}$, pak nemá soustava rovnic řešení.

Je-li $a_{12} = 0, a_{22} = 0$, soustava rovnic má řešení pouze tehdy, je-li soustava rovnic homogenní a to takové, že $x_1 \in \mathbb{R}$ a $x_2 \in \mathbb{R}$.

2. Je-li $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ a $a_{11} \neq 0$, a platí rovnost $a_{21}b_1 = a_{11}b_2$, je řešením libovolná dvojice reálných čísel.

   Případ $a_{11} = 0$, je již uveden v 1.

Část II

Praktická část

Kapitola 3

Sbírka řešených slovních úloh

V této kapitole se zaměříme na slovní úlohy řešené soustavou rovnic. Kapitola je rozdělena na tři části, na úlohy o společné práci, úlohy o směsích a roztocích a úlohy o síťovém toku. U každého typu úlohy je uvedena krátká popisující charakteristika, co se zpravidla v daném typu úlohy počítá a jak sestavujeme rovnice pro výpočet. Dále v každé části následují ukázky řešených úloh. Uvádíme vždy některý z postupů řešení, které byly představeny v teoretické části. Úlohy jsou řešené pomocí Gaussovy eliminační metody a Cramerova pravidla, z důvodu toho, že dosazovací a porovnávací metodu můžeme považovat za speciální případy Gaussovy eliminační metody. Dosazovací a porovnávací metoda jsou pouze zjednodušené pro učivo základních a středních škol. Pokud to lze, jsou uvedeny oba způsoby výpočtu řešení. Postup dosazovací a porovnávací metody je použit v jedné úloze o společné práci, na které je ukázáno, že tyto metody lze použít i při výpočtu nelineárních rovnic. Řešení úloh autorka vypracovala sama. Řešení je slovně okomentováno.
Úlohy jsou inspirovány úlohami ze zdrojů [6], [7], [8], [9], [10], [11].

3.1 Úlohy o společné práci

V úlohách o společné práci počítáme dobu, za kterou pracovní síly vykonají práci společně, či dobu, za kterou jsou schopny činnost vykonat samostatně. V některých případech se jedná o úlohy, ve kterých se vyskytuje jedna či více pracovních sil, ke kterým se postupně po určitém čase připojí ostatní pracovní síly a poté již pracují společně, nebo se při práci navzájem vystřídají.

Společná práce všech pracovních sil je rovna 1. Společná práce je určena součtem všech jednotlivých prací vykonaných všemi pracovními silami.

Rovnice úloh o společné práci:

$$\frac{\text{doba společné práce}}{\text{doba práce první pracovní síly}} + \ldots + \frac{\text{doba společné práce}}{\text{doba práce poslední pracovní síly}} = 1.$$

V této části jsou zařazeny většinou úlohy, které vedou na soustavu nelineárních rovnic. Soustavy nelineárních rovnic, které jsou uvedeny v této práci, lze převést pomocí substituce na soustavu lineárních rovnic. V řešení úlohy je vždy uvedena použitá substituce. Pokud to lze, jsou uvedeny dvě substituce, které vedou na řešení soustav lineárních rovnic.

Příklad. Dva agregáty jsou zásobovány z nádrže o objemu 1,50 m^3. Po 14 hodinách chodu obou agregátů se jeden zastavil. Zbývající agregát, s hodinovou spotřebou o 39 l/h vyšší, zbytek nádrže spotřebuje za tři hodiny.

Jaké jsou hodinové spotřeby obou agregátů? (Upraveno z [11].)

Řešení:

Hodinovou spotřebu 1. agregátu označíme x litrů a hodinovou spotřebu druhého agregátu označíme y litrů. Oba agregáty čerpají společně 14 hodin, po zastavení prvního agregátu druhý agregát čerpá další 3 hodiny, tedy 17 hodin, až se vyčerpá celých 1,50 m^3, tedy 1 500 l nádrže. Množství paliva, které spotřebuje agregát za dobu práce, je rovno součinu doby práce a hodinové spotřeby. Celkové množství paliva v nádrži je rovno součtu množství paliva, které spotřebují oba agregáty:

$$14x + 17y = 1\,500.$$

Hodinová spotřeba 2. agregátu je o 39 l větší než hodinová spotřeba 1. agregátu, z toho získáme druhou rovnici:

$$x + 39 = y.$$

Řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 14x + 17y &= 1\,500, \\ x - y &= -39. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda

Napíšeme rozšířenou matici této soustavy rovnic a elementárními úpravami ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici a spočteme neznámé:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 17 & 1\,500 \\ 1 & -1 & -39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -39 \\ 14 & 17 & 1\,500 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -39 \\ 0 & 31 & 2\,046 \end{array}\right),$$

$$31y = 2\,046,$$

$$y = 66.$$

Po dosazení do první rovnice vypočítáme x:

$$x - 66 = -39,$$

$$x = 27.$$

B. Cramerovo pravidlo

Soustavu rovnic zapíšeme pomocí matice a spočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -31.$$

Hodnotu $\det A$ již známe, musíme dopočítat D_x, kde D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1\,500 & 17 \\ -39 & -1 \end{vmatrix} = -837,$$

$$x = \frac{D_x}{\det A} = \frac{-837}{-31} = 27.$$

Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé y. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$.

$$D_y = \begin{vmatrix} 14 & 1\,500 \\ 1 & -39 \end{vmatrix} = -2\,046,$$

$$y = \frac{D_y}{\det A} = \frac{-2\,046}{-31} = 66.$$

Odpověď: Hodinová spotřeba prvního agregátu je 27 l a hodinová spotřeba druhého agregátu je 66 l.

Příklad. Dva dělníci by společně vykopali jámu za 12 dní. Po 8 dnech společné práce byl jeden z nich odvolán a druhý dokončil práci sám za dalších 10 dní.
Za kolik dní by práci udělal každý sám? ([7], str. 98)

Řešení:
Doba společné práce dvou dělníků je 12 dní, dobu práce prvního dělníka označíme x dní a dobu práce druhého dělníka y dní. Předpokládáme, že $x \neq 0, y \neq 0$, pak dle rovnice úloh o společné práci získáme rovnici:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1.$$

První dělník je odvolán po 8 dnech společné práce. Druhý dělník kope jámu dalších 10 dní, tedy dohromady pracuje 18 dní. Druhá rovnice je ve tvaru:

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1.$$

Získáme soustavu nelineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} &= 1, \\ \frac{8}{x} + \frac{18}{y} &= 1. \end{aligned}$$

První způsob řešení pomocí substituce
Aby bylo možno použít metody, které jsou představeny v teoretické části, je třeba soustavu nelineárních rovnic převést na soustavu lineárních rovnic. Použijeme substituci $u = \frac{1}{x}$ a $v = \frac{1}{y}$ a získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 12u + 12v &= 1, \\ 8u + 18v &= 1. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda
Pro soustavu rovnic vytvoříme rozšířenou matici a elementárními úpravami ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 1 \\ 8 & 18 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 1 \\ 0 & 120 & 4 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} 120v &= 4, \\ v &= \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Po dosazení do první rovnice vypočítáme neznámou u:

$$\begin{aligned} 12u + 12.(\frac{1}{30}) &= 1, \\ u &= \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do substituce a dopočteme x, y. Ze substituce $u = \frac{1}{x} = \frac{1}{20}$ je $x = 20$. Ze substituce $v = \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$ je $y = 30$.

B. Cramerovo pravidlo

Napíšeme matici soustavy rovnic a vypočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 18 \end{vmatrix} = 120.$$

Hodnotu $\det A$ známe, musíme dopočítat D_u, kde D_u je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak u je rovno $\frac{D_u}{\det A}$. Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé v. D_v je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak v je rovno $\frac{D_v}{\det A}$.

$$D_u = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = 6, \qquad D_v = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{D_u}{\det A} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}, \\ v &= \frac{D_v}{\det A} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem jako u Gaussovy eliminační metody získáme x, y dosazením do substituce $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$. Tento postup je již uveden, proto uvádíme pouze řešení:

$$x = 20,$$

$$y = 30.$$

Druhý způsob řešení pomocí substituce

Řešíme soustavu rovnic:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1,$$
$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1.$$

Po vynásobení obou rovnic výrazem xy získáváme:

$$12x + 12y = xy,$$
$$18x + 8y = xy.$$

Použijeme substituci $xy = v$ a novou neznámou v převedeme na druhou stranu rovnice:

$$12x + 12y - v = 0,$$
$$18x + 8y - v = 0.$$

Řešíme pomocí Gaussovy eliminační metody. Napíšeme rozšířenou matici soustavy a elementárními úpravami ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici. V prvním sloupci jsou koeficienty u neznámé x, ve druhém sloupci koeficienty u y a ve třetím sloupci koeficienty u v. Jedná se o homogenní soustavu, tedy ve sloupci pravých stran jsou pouze 0. Do matice není nutné u homogenních soustav rovnic pravé strany zapisovat, pro přehlednost raději sloupec pravých stran napíšeme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & -1 & 0 \\ 18 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & 120 & -6 & 0 \end{array}\right),$$

$$120y = 6v,$$

odtud $20y = v$, tj. $20y = xy$ a $x = 20$.

Po dosazení do první rovnice dopočítáme y:

$$12.(20) + 12y - 20y = 0,$$
$$y = 30.$$

Odpověď: 1. dělník udělá práci sám za 20 dní a 2. dělník za 30 dní.

Příklad. Jeden ze dvou závodů může splnit objednávku o 5 dnů dříve než druhý. Při společné práci by oba závody splnily za 28 dnů 18krát větší objednávku.
Za jakou dobu by splnil objednávku každý závod? (Upraveno z [6].)

Řešení:
Dobu práce prvního závodu označíme x dní a dobu práce druhého závodu y dní. Ze zadání úlohy víme, že jeden závod splní objednávku o 5 dní dříve než druhý, můžeme tedy napsat, že doba druhého závodu je rovna $x - 5$ dnům. Z toho získáme první rovnici:

$$y = x - 5.$$

Doba společné práce, za kterou udělají 18krát větší objednávku, je 28 dní. Tedy na pravé straně rovnice nebude 1, ale 18. Předpokládejme, že $x \neq 0, y \neq 0$, druhá rovnice je ve tvaru:

$$\frac{28}{x} + \frac{28}{y} = 18.$$

Zapíšeme soustavu rovnic pro řešení:

$$\begin{aligned} y &= x - 5, \\ \frac{28}{x} + \frac{28}{y} &= 18, \end{aligned} \tag{3.1}$$

vynásobením druhé rovnice výrazem xy získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x - y &= 5, \\ 28x + 28y &= 18xy. \end{aligned}$$

Druhá rovnice je nelineární. Pomocí substituce $xy = v$ ji na lineární rovnici převedeme:

$$28x + 28y - 18v = 0.$$

Pro výpočet řešení použijeme Gaussovu eliminační metodu. Rozšířenou matici soustavy převedeme elementárními úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici. V prvním sloupci rozšířené matice soustavy jsou koeficienty u neznámé x, ve druhém sloupci koeficienty u neznámé y a ve třetím sloupci koeficienty u neznámé v, ve čtvrtém sloupci jsou pravé strany rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 28 & 28 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 56 & -18 & -140 \end{array}\right),$$

$$56y - 18v = -140.$$

Za v dosadíme xy ze substituce $xy = v$:

$$56y - 18xy = -140,$$
$$y = \frac{-140}{56 - 18x}.$$

Předpokládejme, že $x \neq \frac{56}{18}$, pak je jmenovatel různý od 0 a zlomek má smysl. Dosadíme y do první rovnice:

$$x - \frac{-140}{56 - 18x} = 5.$$

Tato rovnice má dvě řešení:

$$x_1 = 7,$$
$$x_2 = \frac{10}{9}.$$

Dopočítáme odpovídající y:

$$y_1 = \frac{-140}{56 - 18.7},$$
$$y_1 = 2,$$
$$y_2 = \frac{-140}{56 - 18.(\frac{10}{9})},$$
$$y_2 = -\frac{35}{9}.$$

Neznámá y_2 nevyhovuje kontextu úlohy, čas nemůže být záporný. Správné řešení je tedy (x_1, y_1).

Případ, kdy $x = \frac{56}{18}$, nemůže nastat, jelikož když dosadíme $x = \frac{56}{18}$ do soustavy rovnic (3.1) a vypočteme, zjistíme, že y z první rovnice není rovno y z druhé rovnice, tedy $x = \frac{56}{18}$ není hledanou neznámou.

Odpověď: První závod splní objednávku za 7 dní, druhý závod za 2 dny.

Poznámka. V této úloze nelze použít substituci $u = \frac{1}{x}$ a $v = \frac{1}{y}$, protože bychom v první rovnici získali nelineární rovnici.

Příklad. Výkop pro kanalizaci jsou schopni provést pan Molnár s panem Loudou za 15 dnů. Rozdíl mezi denním výkonem pana Molnára a pana Loudy je 1/45 objemu celého výkopu. Za kolik dnů by byli schopni provést celý výkop pro kanalizaci každý zvlášť, víte-li, že pan Molnár podával větší výkon než pan Louda. (Upraveno z [8].)

Řešení:

Dobu samostatné práce pana Molnára označíme x dní a dobu práce pana Loudy y dní. Předpokládáme, že $x \neq 0, y \neq 0$. Společně práci vykonají za 15 dní, první rovnice má tvar:

$$\frac{15}{x} + \frac{15}{y} = 1.$$

Ve druhé rovnici nebudeme jednotlivé zlomky sčítat, ale odčítat, protože není známo, kolik práce udělají, ale jaký je mezi objemy vykonané práce rozdíl. Rozdíl mezi objemem práce, kterou za den udělá pan Molnár a kterou za den udělá pan Louda, je $\frac{1}{45}$ objemu celé práce:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{45}.$$

Získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} + \frac{15}{y} &= 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

První způsob řešení pomocí substituce

Aby bylo možno použít metody, které jsou představeny v teoretické části, je třeba převést soustavu nelineárních rovnic na soustavu lineárních rovnic. Použijeme substituci $u = \frac{1}{x}$ a $v = \frac{1}{y}$ a získáme soustavu rovnic:

$$15u + 15v = 1,$$

$$45u - 45v = 1.$$

A. Gaussova eliminační metoda

Pro soustavu rovnic vytvoříme rozšířenou matici soustavy a elementárními úpravami ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 15 & 1 \\ 45 & -45 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 15 & 1 \\ 0 & 1\,350 & 30 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} 1\,350v &= 30, \\ v &= \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

Dosazením do první rovnice vypočítáme neznámou u:

$$\begin{aligned} 15u + 15.(\frac{1}{45}) &= 1, \\ u &= \frac{2}{45}. \end{aligned}$$

Vypočítané u, v dosadíme zpět do substituce a vypočítáme x, y. Ze substituce $u = \frac{1}{x} = \frac{2}{45}$ vypočítáme $x = \frac{45}{2}$ a ze substituce $v = \frac{1}{y} = \frac{1}{45}$ vypočítáme $y = 45$.

B. Cramerovo pravidlo

Zapíšeme matici soustavy rovnic a spočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 45 & -45 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 15 & 15 \\ 45 & -45 \end{vmatrix} = -1\,350.$$

Hodnotu det A již známe, musíme dopočítat D_u, kde D_u je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak u je rovno $\frac{D_u}{\det A}$.

$$D_u = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & -45 \end{vmatrix} = -60,$$

$$u = \frac{D_u}{\det A} = \frac{-60}{-1\,350} = \frac{2}{45}.$$

Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé v. D_v je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak v je rovno $\frac{D_v}{\det A}$.

$$D_v = \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 45 & 1 \end{vmatrix} = -30,$$

$$v = \frac{D_v}{\det A} = \frac{-30}{-1\,350} = \frac{1}{45}.$$

Opět dosadíme zpět do substituce jako v Gaussově eliminační metodě a získáme x, y. Výpočet již neuvádíme:

$$x = \frac{45}{2},$$
$$y = 45.$$

Druhý způsob řešení pomocí substituce

Řešíme soustavu rovnic:

$$\frac{15}{x} + \frac{15}{y} = 1,$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{45}.$$

Obě rovnice vynásobíme výrazem xy a získáme soustavu rovnic:

$$15x + 15y = xy,$$
$$-45x + 45y = xy.$$

Soustavu nelineárních rovnic převedeme pomocí substituce $xy = v$ na soustavu lineárních rovnic a řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 15 & -1 & 0 \\ -45 & 45 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 15 & -1 & 0 \\ 0 & 1\,350 & -60 & 0 \end{array}\right),$$

$$1\,350y = 60v.$$

Za v dosadíme xy ze substituce $xy = v$:

$$1\,350y = 60xy,$$
$$x = \frac{45}{2}.$$

Po dosazení do první rovnice dopočítáme neznámou y:

$$
\begin{aligned}
15.(\frac{45}{2}) + 15y &= \frac{45}{2}y, \\
y &= 45.
\end{aligned}
$$

Odpověd: Pan Molnár provede sám výkop za 22,5 dne a pan Louda za 45 dní.

Příklad. Nádrž se plní třemi přívody A, B, C. Současně otevřenými přívody A a B se naplní za 1 hodinu, přívody A a C za 45 minut, přívody B a C za 1,5 hodiny.
Jak dlouho by se plnila každým přívodem zvlášť? ([7], str. 98)

Řešení:
Dobu, za kterou pracují přívody A, B, C samostatně, označíme po řadě x minut, y minut, z minut. Pokud pustíme zároveň přívody A a B, nádrž naplní společnou prací za 1 hodinu, tedy 60 minut. Předpokládejme, že $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. První rovnice je tedy:

$$\frac{60}{x} + \frac{60}{y} = 1.$$

Pustíme-li přívody A a C, nádrž naplní za 45 minut, tedy rovnice je ve tvaru:

$$\frac{45}{x} + \frac{45}{z} = 1.$$

A pustíme-li společně přívody B a C, nádrž naplní za 1,5 hodiny, tedy 90 minut. Třetí rovnice má tvar:

$$\frac{90}{y} + \frac{90}{z} = 1.$$

Získáme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{60}{x} + \frac{60}{y} &= 1, \\
\frac{45}{x} + \frac{45}{z} &= 1, \\
\frac{90}{y} + \frac{90}{z} &= 1.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

První způsob řešení pomocí substituce

Soustava rovnic (3.2) je nelineární, proto ji pomocí substituce $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, w = \frac{1}{z}$ na lineární převedeme:

$$60u + 60v = 1,$$
$$45u + 45w = 1,$$
$$90v + 90w = 1.$$

A. Gaussova eliminační metoda

Pro soustavu rovnic vytvoříme rozšířenou matici této soustavy a převádíme ji vhodnými elementárními úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici, z níž vypočteme u, v, w:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 60 & 60 & 0 & 1 \\ 45 & 0 & 45 & 1 \\ 0 & 90 & 90 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 60 & 60 & 0 & 1 \\ 0 & -2\,700 & 2\,700 & 15 \\ 0 & 90 & 90 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 60 & 60 & 0 & 1 \\ 0 & -2\,700 & 2\,700 & 15 \\ 0 & 0 & 5\,400 & 45 \end{array}\right),$$

$$5\,400w = 45,$$
$$w = \frac{1}{120}.$$

Po dosazení do druhé rovnice vypočítáme v:

$$-2\,700v + 2\,700.(\frac{1}{120}) = 15,$$
$$v = \frac{1}{360}.$$

Po dosazení do první rovnice vypočítáme u:

$$60u + 60.(\frac{1}{360}) = 1,$$
$$u = \frac{1}{72}.$$

Vypočítané u, v, w dosadíme do substituce a vyjádříme x, y, z. Ze substituce $u = \frac{1}{x} = \frac{1}{72}$ získáme $x = 72$, ze substituce $v = \frac{1}{y} = \frac{1}{360}$ získáme $y = 360$ a ze substituce $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{120}$ získáme $z = 120$.

B. Cramerovo pravidlo

Pro soustavu rovnic (3.2) vytvoříme matici soustavy rovnic a spočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 60 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 90 & 90 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 60 & 60 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 90 & 90 \end{vmatrix} = -486\,000.$$

Hodnotu det A již známe. D_u je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak u je rovno $\frac{D_u}{\det A}$. D_v je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak v je rovno $\frac{D_v}{\det A}$. D_w je determinant matice, která vznikne nahrazením třetího sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak w je rovno $\frac{D_w}{\det A}$.

$$D_u = \begin{vmatrix} 1 & 60 & 0 \\ 1 & 0 & 45 \\ 1 & 90 & 90 \end{vmatrix} = -6\,750,$$

$$u = \frac{D_u}{\det A} = \frac{-6\,750}{-486\,000} = \frac{1}{72}.$$

$$D_v = \begin{vmatrix} 60 & 1 & 0 \\ 45 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 90 \end{vmatrix} = -1\,350,$$

$$v = \frac{D_v}{\det A} = \frac{-1350}{-486\,000} = \frac{1}{360}.$$

$$D_w = \begin{vmatrix} 60 & 60 & 1 \\ 45 & 0 & 1 \\ 0 & 90 & 1 \end{vmatrix} = -4\,050,$$

$$w = \frac{D_w}{\det A} = \frac{-4\,050}{-486\,000} = \frac{1}{120}.$$

Stejným postupem jako u Gaussovy eliminační metody dosadíme zpět u, v, w do substituce a vypočítáme x, y, z. Tento postup je již uveden, proto uvádíme pouze řešení:

$$x = 72,$$
$$y = 360,$$
$$z = 120.$$

Druhý způsob řešení pomocí substituce

Tento postup jen krátce nastíníme, je analogický jako postup, který byl představen v předchozích případech.

I v tomto případě můžeme použít substituci: $xy = u$, $xz = v$ a $yz = w$ pro převod soustavy nelineárních rovnic na soustavu lineárních rovnic. Rozšířená matice této soustavy má tvar:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 60 & 60 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 45 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 90 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

kde v prvním sloupci jsou koeficienty u neznámé x, ve druhém koeficienty u y, ve třetím koeficienty u z, ve čtvrtém koeficienty u u, v pátém koeficienty u v, v šestém koeficienty u w a v posledním sloupci jsou pravé strany rovnic.

Řešení pomocí dosazovací a porovnávací metody

V soustavě rovnic (3.2) vynásobíme první rovnici výrazem xy, druhou rovnici výrazem xz a třetí rovnici výrazem yz a získáme soustavu rovnic:

$$60x + 60y = xy, \tag{3.3}$$

$$45x + 45z = xz, \tag{3.4}$$

$$90y + 90z = yz. \tag{3.5}$$

Na úloze předvedeme, že při řešení není nutno používat pouze jednu metodu, ale metody lze kombinovat. Dosazovací a porovnávací metodu lze použít i pro soustavy nelineárních rovnic, což si na této úloze předvedeme.

Z rovnice (3.3) a (3.4) vyjádříme neznámou x a rovnice porovnáme:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-60y}{60-y}, \\ x &= \frac{-45z}{45-z}, \\ \frac{-60y}{60-y} &= \frac{-45z}{45-z}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Předpokládejme, že $y \neq 60$, $z \neq 45$. Z rovnice (3.5) vyjádříme např. neznámou y, dosadíme do rovnice (3.6) a vypočítáme neznámou z.

$$y = \frac{-90z}{90 - z},$$
$$\frac{-60.(\frac{-90z}{90-z})}{60 - (\frac{-90z}{90-z})} = \frac{-45z}{45 - z}.$$

Předpokládejme, že $z \neq 90$. Tato rovnice má dvě řešení:

$$z_1 = 0,$$
$$z_2 = 120.$$

Z podmínek víme, že $z \neq 0$, proto neznámá z je rovna 120. Neznámou z dosadíme do rovnic (3.4) a (3.5) a dopočteme neznámé x a y. Z rovnice (3.4) po dosazení dopočteme x:

$$45x + 45.120 = 120x,$$
$$x = 72.$$

Z rovnice (3.5) po dosazení dopočteme y:

$$90y + 90.120 = 120y,$$
$$y = 360.$$

Případ, kdy $y = 60$ či $z = 45$ či $z = 90$, nemůže nastat, jelikož když dosadíme jednotlivé neznámé do soustavy rovnic (3.2), nezískáme pravdivé výroky.

Odpověď: Přívodem A se nádrž naplní za 72 minut, přívodem B za 360 minut a přívodem C za 120 minut.

3.2 Úlohy o směsích a roztocích

V úlohách o směsích a roztocích zjišťujeme, jaké množství zadaných látek použijeme na výrobu požadované směsi či roztoku, jaký počet kusů určitých látek použijeme, aby se vše spotřebovalo, či jaká bude výsledná koncentrace nebo hmotnost roztoku.

Výsledná hmotnost směsi či roztoku je rovna součtu hmotností jednotlivých látek, ze kterých má být směs či roztok vyroben. Pracujeme-li s látkami určité koncentrace, ceny či počtu, rovnici získáme vynásobením koncentrace (ceny či počtu) hmotností látky a součet těchto součinů je roven součinu koncentrace (ceny či počtu) a hmotnosti požadovaného roztoku.

Příklad. Cena 1 kg kávy Robusta je 230 Kč a cena 1 kg kávy Arabica 310 Kč.
Kolik kilogramů kávy Robusta a kolik kilogramů kávy Arabica je potřeba, abychom získali 60 kg směsi, jejíž cena za jeden kilogram je 250 Kč? (Upraveno z [8].)

Řešení:
Počet kilogramů kávy Robusta označíme x a počet kilogramů kávy Arabica y. Požadováno je 60 kg směsi. První rovnice je:

$$x + y = 60.$$

Druhou rovnici získáme z informací o cenách. x kilogramů kávy Robusta stojí 230.x Kč, y kilogramů kávy Arabica stojí 310.y Kč, 60 kilogramů požadované směsi stojí 250.60 Kč, tedy 15 000 Kč, proto:

$$230x + 310y = 15\,000.$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 60, \\ 230x + 310y &= 15\,000. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda
Rozšířenou matici soustavy rovnic převedeme elementárními úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici a spočteme neznámé x a y:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 23 & 31 & 1\,500 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 0 & 8 & 120 \end{array}\right),$$

$$8y = 120,$$

$$y = 15.$$

Po dosazení do první rovnice spočteme x:

$$x + 15 = 60,$$
$$x = 45.$$

B. Cramerovo pravidlo

Napíšeme matici soustavy rovnic a vypočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 23 & 31 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 23 & 31 \end{vmatrix} = 8.$$

Hodnotu $\det A$ známe. D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$. Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé y. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 60 & 1 \\ 1\,500 & 31 \end{vmatrix} = 360, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 60 \\ 23 & 1\,500 \end{vmatrix} = 120,$$

$$x = \frac{D_x}{\det A} = \frac{360}{8} = 45,$$
$$y = \frac{D_y}{\det A} = \frac{120}{8} = 15.$$

Odpověď: K získání 60 kg požadované směsi musíme smíchat 45 kg kávy Robusta a 15 kg kávy Arabica.

Příklad. Laboratorní nádoba s roztokem má hmotnost 58 kg. Při chemických pokusech v pondělí spotřebovali žáci 20 % roztoku, v úterý 2/5 pondělního zbytku roztoku. Po těchto dvou dnech je hmotnost nádoby se zbylým roztokem 45 kg.
Vypočítejte hmotnost prázdné nádoby a hmotnost původního množství roztoku v nádobě. (Upraveno z [8].)

Řešení:

Hmotnost laboratorní nádoby označíme x kg a hmotnost roztoku y kg. Ze zadání úlohy víme, že hmotnost nádoby s roztokem činí 58 kg, z čehož získáme první rovnici:

$$x + y = 58.$$

Pokud v pondělí spotřebovali žáci 20 % roztoku, zůstalo v nádobě 80 % roztoku, tedy 0,8y kg roztoku. V úterý použili 2/5 ze zbylého pondělního roztoku, tedy v nádobě zůstaly 3/5 roztoku, což po těchto dvou dnech je (3/5).0,8y, tedy 0,48y kg roztoku. Sečteme-li hmotnost nádoby a hmotnost zbývajícího roztoku, získáme 45 kg:

$$x + 0,48y = 45.$$

Řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 58, \\ x + 0,48y &= 45. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a vhodnými elementárními úpravami ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici, ze které již spočítáme neznámé x a y:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 58 \\ 1 & 0,48 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 58 \\ 0 & 0,52 & 13 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} 0,52y &= 13, \\ y &= 25. \end{aligned}$$

Dosazením do první rovnice vypočítáme x:

$$\begin{aligned} x + 25 &= 58, \\ x &= 33. \end{aligned}$$

B. Cramerovo pravidlo

Zapíšeme matici soustavy rovnic a vypočteme determinant této matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,48 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,48 \end{vmatrix} = -0,52.$$

Hodnotu det A již známe, musíme dopočítat D_x, kde D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$. Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé y. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 58 & 1 \\ 45 & 0,48 \end{vmatrix} = -17,16, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 58 \\ 1 & 45 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{\det A} = \frac{-17,16}{-0,52} = 33, \\ y &= \frac{D_y}{\det A} = \frac{-13}{-0,52} = 25. \end{aligned}$$

Odpověď: Hmotnost nádoby je 33 kg a hmotnost původního roztoku 25 kg.

Příklad. V prodejně prodávají tři různé směsi kávy. Jeden sáček Domácí směsi obsahuje 300 g kolumbijské kávy a 200 g francouzské pražené kávy. Jeden sáček Speciální směsi obsahuje 200 g kolumbijské kávy, 200 g keňské kávy a 100 g francouzské pražené kávy. Jeden sáček Labužnické směsi obsahuje 100 g kolumbijské kávy, 200 g keňské kávy a 200 g francouzské pražené kávy. Ve skladu mají 30 kg kolumbijské kávy, 15 kg keňské kávy a 25 kg francouzské pražené kávy. Chtějí připravit směsi tak, aby spotřebovali všechnu kávu ze skladu.
Podaří se jim to? Pokud ano, kolik sáčků jednotlivých typů směsí připraví? (Úloha je převzata ze souborné zkoušky 9/2017)

Řešení:
Za neznámé označíme počty sáčků směsí, které lze z uvedeného množství připravit. Počet sáčků Domácí směsi označíme x, počet sáčků Speciální směsi y a počet sáčků Labužnické směsi z. Kolumbijské kávy je ve skladu 30 kg, tedy 30 000 g, aby byla všechna spotřebována, musíme zjistit počet sáčků této kávy ve všech směsích. V Domácí směsi je jí 300 g, Speciální směsi 200 g a v Labužnické směsi 100 g, tedy získáme rovnici:

$$300x + 200y + 100z = 30\ 000.$$

Keňské kávy je ve skladu 15 kg, tedy 15 000 g. Opět zjišťujeme počet sáčků kávy v jednotlivých směsích. Domácí směs neobsahuje keňskou kávu, Speciální směs obsahuje 200 g a Labužnická směs 200 g keňské kávy:

$$200y + 200z = 15\,000.$$

Francouzské pražené kávy je ve skladu 25 kg, tedy 25 000 g. Domácí směs je tvořena 200 g francouzské kávy, Speciální směs 100 g a Labužnická směs 200 g:

$$200x + 100y + 200z = 25\,000.$$

Získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 300x + 200y + 100z &= 30\,000, \\ 200y + 200z &= 15\,000, \\ 200x + 100y + 200z &= 25\,000. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic můžeme zjednodušit:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 300, \\ 2y + 2z &= 150, \\ 2x + y + 2z &= 250. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda

Napíšeme rozšířenou matici této soustavy, převedeme ji na horní trojúhelníkovou matici a spočteme neznámé x, y, z:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 2 & 1 & 2 & 250 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & -1 & 4 & 150 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & 0 & 10 & 450 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} 10z &= 450, \\ z &= 45. \end{aligned}$$

Dosazením do druhé rovnice dopočteme y:

$$2y + 2.45 = 150,$$
$$y = 30.$$

Dosazením do první rovnice spočteme x:

$$3x + 2.20 + 45 = 300,$$
$$x = 65.$$

B. Cramerovo pravidlo

Soustavu rovnic zapíšeme pomocí matice a vypočítáme determinant této matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Hodnotu $\det A$ již známe, musíme dopočítat D_x, kde D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$. Analogicky postupujeme při výpočtu neznámých y a z. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$. D_z je determinant matice, která vznikne nahrazením třetího sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak z je rovno $\frac{D_z}{\det A}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 300 & 2 & 1 \\ 150 & 2 & 2 \\ 250 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 650, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 300 & 1 \\ 0 & 150 & 2 \\ 2 & 250 & 2 \end{vmatrix} = 300,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 150 \\ 2 & 1 & 250 \end{vmatrix} = 450.$$

A dopočteme x, y, z:

$$x = \frac{D_x}{\det A} = \frac{650}{10} = 65,$$
$$y = \frac{D_y}{\det A} = \frac{300}{10} = 30,$$
$$z = \frac{D_z}{\det A} = \frac{450}{10} = 45.$$

Odpověď: Spotřebují všechnu kávu ze skladu a připraví 65 sáčků Domácí směsi, 30 sáčků Speciální směsi a 50 sáčků Labužnické směsi.

Příklad. Máme k dispozici 20%, 30% a 40% roztoky stejné kyseliny.
Kolik kilogramů kterého roztoku musíme smíchat, abychom dostali 15 kg 35% roztoku? ([6], str. 113)

Řešení:
Počet kilogramů 20% kyseliny označíme x, počet kilogramů 30% kyseliny y a počet kilogramů 40% kyseliny z. Neznámé x, y, z jsou nezáporná reálná čísla.
Je potřeba vyrobit 15 kg roztoku z těchto kyselin, tedy součet počtu kilogramů jednotlivých kyselin je roven 15:

$$x + y + z = 15.$$

Druhou rovnici získáme z informací o koncentracích. Pro výrobu 15 kilogramů 35% roztoku použijeme x kilogramů 20% kyseliny, tedy 20.x kg kyseliny, y kilogramů 30% kyseliny, tedy 30.y kg kyseliny a z kilogramů 40% kyseliny, tedy 40.z kg kyseliny, proto:

$$20x + 30y + 40z = 35.15.$$

Řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 15, \\ 20x + 30y + 40z &= 525. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou, rozšířenou matici soustavy převedeme elementárními úpravami na zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 20 & 30 & 40 & 525 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 10 & 20 & 225 \end{array} \right).$$

Jelikož $n = 3$ a je splněna podmínka hod A = hod A_{r}, hodnost matice je rovna dvěma, soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Zvolíme $(3 - 2)$ parametrů za neznámé, tedy jeden, a pomocí tohoto parametru dopočítáme ostatní neznámé.

Z poslední rovnice můžeme volit parametr za neznámou y či z. Zvolíme za parametr např. $z = t$, kde t je nezáporné reálné číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy). Z druhé rovnice pomocí parametru vyjádříme y:

$$10y + 20t = 225,$$
$$y = \frac{225 - 20t}{10}.$$

Po dosazení do první rovnice vypočítáme x:

$$x + \frac{225 - 20t}{10} + t = 15,$$
$$x = \frac{100t - 75}{10}.$$

Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané trojice $(x, y, z) = (\frac{100t-75}{10}, \frac{225-20t}{10}, t)$, kde t je nezáporné reálné číslo. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$7,5 \leq t \leq 11,25.$$

Příklad. Denní produkce mléka na farmě je 200 l mléka. Mléko dávají do prodeje ve dvoulitrových a pětilitrových lahvích. Pondělní produkce mléka bylo odvezena k prodeji v 55 lahvích, s tím, že žádné mléko nezbylo.
Určete počet dvoulitrových a pětilitrových lahví, ve kterých bylo mléko odvezeno. (Vlastní úloha)

Řešení:
Počet dvoulitrových lahví označíme x a počet pětilitrových lahví označíme y. Počet dvoulitrových a pětilitrových lahví je celkově 55 lahví, z toho plyne první rovnice:

$$x + y = 55.$$

V x plných dvoulitrových lahvích je $2.x$ litrů mléka, v y plných pětilitrových lahvích je $5.y$ litrů mléka, celkem bylo odvezeno 200 l mléka. Odtud dostáváme rovnici:

$$2x + 5y = 200.$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 55, \\ 2x + 5y &= 200. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda

Napíšeme rozšířenou matici soustavy rovnic a převedením pomocí vhodných elementárních úprav na zobecněnou trojúhelníkovou matici najdeme řešení soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 55 \\ 2 & 5 & 200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 55 \\ 0 & 3 & 90 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} 3y &= 90, \\ y &= 30. \end{aligned}$$

Dosazením do první rovnice vypočítáme x:

$$\begin{aligned} x + 30 &= 55, \\ x &= 25. \end{aligned}$$

B. Cramerovo pravidlo

Napíšeme matici soustavy rovnic a spočteme její determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Hodnotu $\det A$ již známe. D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$. Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé y. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 55 & 1 \\ 200 & 5 \end{vmatrix} = 75, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 55 \\ 2 & 200 \end{vmatrix} = 90.$$

A dopočteme x, y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{\det A} = \frac{75}{3} = 25, \\ y &= \frac{D_y}{\det A} = \frac{90}{3} = 30. \end{aligned}$$

Odpověď: Mléko bylo odvezeno ve 25 dvoulitrových lahvích a 30 pětilitrových lahvích.

Příklad. Prodejce ovoce nakoupil od farmáře jablka za 15 Kč za kilogram a meruňky za 20 Kč za kilogram. Celková hmotnost nakoupeného ovoce byla 250 kg. Prodejní cenu každého ovoce si zvýšil o 20 % z nákupní ceny. Za celý den prodal všechno ovoce a utržil 5 400 Kč.
Vypočítejte hmotnost jablek a meruněk, které prodejce nakoupil. (Vlastní úloha)

Řešení:
Hmotnost nakoupených jablek označíme x kilogramů a hmotnost nakoupených meruněk označíme y kilogramů. Hmotnost nakoupených jablek a meruněk je rovna 250 kilogramům, rovnice má tvar:

$$x + y = 250.$$

Cenu prodejce zvýšil o 20 % na každém kilogramu ovoce, prodejní cena jednoho kilogramu jablek byla 120 % z 15 Kč, což je 18 Kč za kilogram, a prodejní cena meruněk byla 120 % z 20 Kč, což je 24 Kč za kilogram. Celková utržená cena 5 400 Kč je rovna součtu x kilogramů jablek za 18 Kč za kilogram, což je $18.x$ Kč, a y kilogramů meruněk za 24 Kč za kilogram, což je $24.y$ Kč, proto:

$$18x + 24y = 5\,400.$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 250, \\ 18x + 24y &= 5\,400. \end{aligned}$$

A. Gaussova eliminační metoda
Napíšeme rozšířenou matici soustavy rovnic, převedeme ji na zobecněnou trojúhelníkovou matici pomocí elementárních úprav a spočteme x, y:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 250 \\ 18 & 24 & 5\,400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 250 \\ 0 & 6 & 900 \end{array}\right),$$

$$
\begin{aligned}
6y &= 900,\\
y &= 150.
\end{aligned}
$$

Dosazením do první rovnice vypočítáme x:

$$
\begin{aligned}
x + 150 &= 250,\\
x &= 100.
\end{aligned}
$$

B. Cramerovo pravidlo

Napíšeme matici soustavy rovnic a vypočteme její determinant:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 24 \end{vmatrix} = 6.
$$

Hodnotu $\det A$ již známe, musíme dopočítat D_x, kde D_x je determinant matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak x je rovno $\frac{D_x}{\det A}$.

$$
D_x = \begin{vmatrix} 250 & 1 \\ 5\,400 & 24 \end{vmatrix} = 600,
$$

$$
x = \frac{D_x}{\det A} = \frac{600}{6} = 100.
$$

Analogicky postupujeme při výpočtu neznámé y. D_y je determinant matice, která vznikne nahrazením druhého sloupce v matici A pravými stranami rovnic. Pak y je rovno $\frac{D_y}{\det A}$.

$$
D_v = \begin{vmatrix} 1 & 250 \\ 18 & 5\,400 \end{vmatrix} = 900,
$$

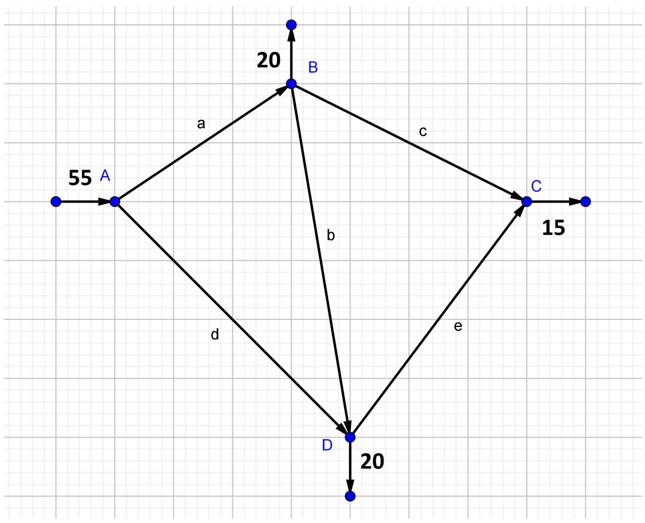
$$
y = \frac{D_y}{\det A} = \frac{900}{6} = 150.
$$

Odpověď: Prodejce nakoupil na prodej 100 kilogramů jablek a 150 kilogramů meruněk.

3.3 Úlohy na síťové toky

V této části se zabýváme úlohami, které se týkají sítí vodičů, podél kterých je pozorován určitý průtok. Mezi příklady sítě vodičů patří zavlažovací sítě, síť ulic a dálnic, síť potrubních cest atd. V síťovém systému jsou často body (průsečíky), v nichž do systému vstupují či vystupují síťové toky. Celkový vstupní síťový tok musí odpovídat celkovému výstupnímu síťovému toku. Toto pravidlo musí platit i pro jednotlivé průsečíky, tedy vstupní tok do průsečíku je roven výstupnímu toku z průsečíku. Z těchto požadavků získáme lineární rovnice, které se vztahují k tokům ve vodičích a průsečíkům v síti. Směr průtoku jednotlivými vodiči je určen šipkami.
Úlohy jsou zadány v této práci diagramy.

Příklad. Síť jednosměrného provozu aut je ukázána v diagramu. Počet aut, která jedou do průsečíku A, je 55 aut, z průsečíku B 20 aut, z průsečíku C 15 aut a z průsečíku D 20 aut. Vypočítejte počet aut, která projedou cestami a, b, c, d, e. (Upraveno z [9], str. 28.)



Řešení:

Počet aut, která projedou cestami a, b, c, d, e, označíme po řadě a, b, c, d, e.

Neznámé a, b, c, d, e jsou přirozená čísla.

Pro průsečíky platí:

Průsečík A $55 = a + d.$

Průsečík B $a = 20 + b + c.$

Průsečík C $c + e = 15.$

Průsečík D $b + d = 20 + e.$

Řešíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
a + d &= 55,\\
a - b - c &= 20,\\
c + e &= 15,\\
b + d - e &= 20.
\end{aligned}
$$

Soustavu rovnic řešíme Gaussovou eliminační metodou. Napíšeme rozšířenou matici soustavy rovnic a převedením pomocí vhodných elementárních úprav na zobecněnou trojúhelníkovou matici vypočítáme neznámé a, b, c, d, e:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55\\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 20\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15\\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 20
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 35
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right).
$$

Jelikož ze zobecněné trojúhelníkové matice plyne, že $n = 5$ a $h = 3$, zvolíme $(5 - 3)$ parametrů, tedy dva parametry, za neznámé, pomocí nichž vyjádříme ostatní neznámé. Z poslední rovnice můžeme libovolně volit parametr za neznámou c nebo e. Označíme např. $e = t$, kde t je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy). Po dosazení do třetí rovnice vyjádříme c:

$$\begin{aligned} c + t &= 15, \\ c &= 15 - t. \end{aligned}$$

V druhé rovnici vystupují neznámé b, d, e, proto můžeme jednu z neznámých b, d libovolně zvolit. Označíme např. $d = s$, kde s je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy). Po dosazení do druhé rovnice vyjádříme b:

$$\begin{aligned} b + s - t &= 20, \\ b &= 20 - s + t. \end{aligned}$$

Po dosazení do první rovnice vyjádříme a:

$$\begin{aligned} a + s &= 55, \\ a &= 55 - s. \end{aligned}$$

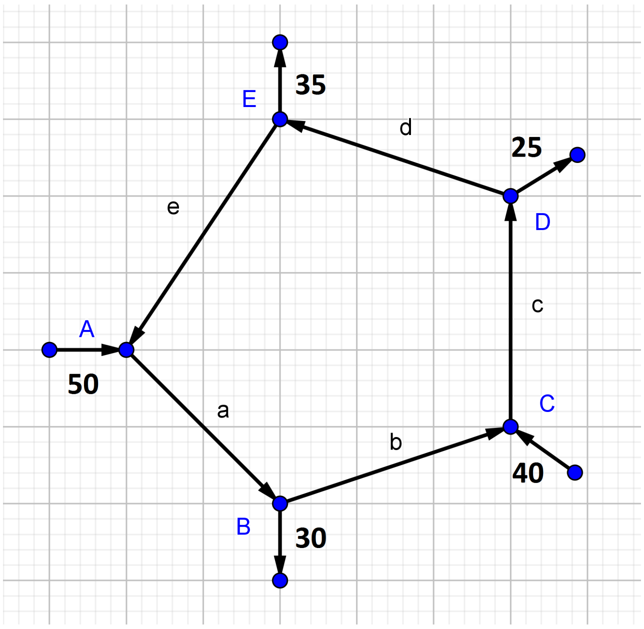
Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané pětice

$$(a, b, c, d, e) = (55 - s, 20 - s + t, 15 - t, s, t),$$

kde s, t jsou přirozená čísla. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$\begin{aligned} s &\leq 55, \\ t &\leq 15, \\ s - t &\leq 20. \end{aligned}$$

Příklad. Síť jednosměrných potrubních cest je ukázána v diagramu. Počet litrů vody, které tečou do průsečíku A, je 50 l, z průsečíku B 30 l, do průsečíku C 40 l, z průsečíku D 25 l a z průsečíku E 35 l. Vypočítejte počet litrů, které protečou jednotlivými potrubními cestami a, b, c, d, e. (Upraveno z [9], str. 28.)



Řešení:

Počet litrů, které protečou jednotlivými potrubními cestami a, b, c, d, e, označíme po řadě a, b, c, d, e.

Neznámé a, b, c, d, e jsou nezáporná reálná čísla.

Pro průsečíky platí:

Průsečík A	$50 + e = a$
Průsečík B	$a = 30 + b.$
Průsečík C	$b + 40 = c.$
Průsečík D	$c = 25 + d.$
Průsečík E	$d = 35 + e.$

Řešíme soustavu rovnic:

$$a - e = 50,$$

$$a - b = 30,$$

$$b - c = -40,$$

$$c - d = 25,$$

$$d - e = 35.$$

Soustavu rovnic řešíme Gaussovou eliminační metodou. Zapíšeme rozšířenou matici této soustavy a pomocí vhodných elementárních úprav ji převedeme na zobecněnou trojúhelníkovou matici, ze které již spočítáme neznámé.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right)$$

Jelikož $n = 5$ a $h = 4$, zvolíme parametr za jednu neznámou a pomocí tohoto parametru dopočítáme ostatní neznámé. Z poslední rovnice můžeme parametr libovolně volit za neznámou d či e. Označíme např. $e = t$, kde t je nezáporné reálné číslo (podmínka nezápornosti čísel vyplývá z kontextu úlohy). Po dosazení do čtvrté rovnice vyjádříme d:

$$d - t = 35,$$
$$d = 35 + t.$$

Po dosazení do třetí rovnice vyjádříme c:

$$c - 35 - t = 25,$$
$$c = 60 + t.$$

Po dosazení do druhé rovnice vyjádříme b:

$$\begin{aligned} b - 60 + t &= -40, \\ b &= 20 - t. \end{aligned}$$

Po dosazení do první rovnice vyjádříme a:

$$\begin{aligned} a - 20 + t &= 30, \\ a &= 50 - t. \end{aligned}$$

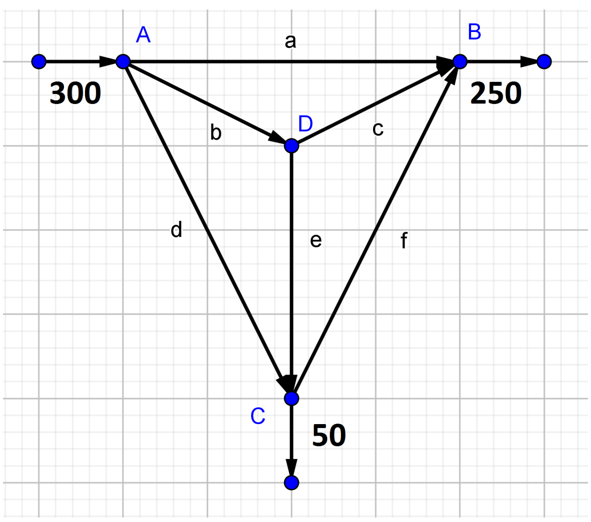
Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané pětice

$$(a, b, c, d, e) = (50 - t, 20 - t, 60 + t, 35 + t, t),$$

kde t je nezáporné reálné číslo. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$t \leq 20.$$

Příklad. Síť jednosměrných zavlažovacích cest je ukázána v diagramu. Počet litrů vody, které tečou do průsečíku A, je 300 l, z průsečíku B 250 l, z průsečíku C 50 l. Vypočítejte počet litrů, které protečou jednotlivými zavlažovacími cestami a, b, c, d, e, f. (Upraveno z [9].)



Řešení:

Počet litrů, které protečou zavlažovacími cestami a, b, c, d, e, f, označíme po řadě a, b, c, d, e, f. Neznámé a, b, c, d, e, f jsou nezáporná reálná čísla.

Pro průsečíky platí:

Průsečík A $\quad 300 = a + b + d.$

Průsečík B $\quad a + c + f = 250.$

Průsečík C $\quad d + e = 50 + f.$

Průsečík D $\quad b = c + e.$

Řešíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
a + b + d &= 300,\\
a + c + f &= 250,\\
d + e - f &= 50,\\
b - c - e &= 0.
\end{aligned}
$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou. Napíšeme rozšířenou matici této soustavy, převedeme ji na zobecněnou trojúhelníkovou matici, ze které spočítáme neznámé:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 250\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 250\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 50\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 50
\end{array}\right).
$$

Počet neznámých v matici je roven šesti a hodnost matice je rovna třem. Řešení soustavy rovnic nebude jednoznačné. Pomocí $(6-3)$, tedy tří, zvolených parametrů vypočítáme neznámé. Z poslední rovnice můžeme libovolně volit dva parametry za neznámé d, e, f. Označíme např. $e = s$ a $f = t$, kde s, t jsou nezáporná reálná čísla (podmínka nezápornosti čísel vyplývá z kontextu úlohy), a po dosazení do poslední rovnice vyjádříme d:

$$
\begin{aligned}
d + s - t &= 50, \\
d &= 50 - s + t.
\end{aligned}
$$

V druhé rovnici vystupují neznámé b, c, e, proto můžeme jednu z neznámých b, c libovolně zvolit. Označíme např. $c = r$, kde r je nezáporné reálné číslo (podmínka nezápornosti čísel vyplývá z kontextu úlohy). Po dosazení do druhé rovnice vyjádříme b:

$$
\begin{aligned}
b - r - s &= 0, \\
b &= r + s.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do první rovnice vyjádříme a:

$$
\begin{aligned}
a + r + s + 50 - s + t &= 300, \\
a &= 250 - r - t.
\end{aligned}
$$

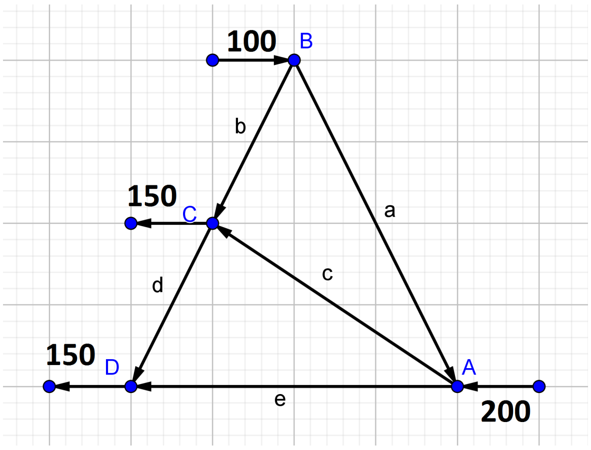
Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané šestice

$$(a, b, c, d, e, f) = (250 - r - t, r + s, r, 50 - s + t, s, t),$$

kde r, s, t jsou nezáporná reálná čísla. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$
\begin{aligned}
r + t &\leq 250, \\
0 &\leq r + s, \\
s - t &\leq 50.
\end{aligned}
$$

Příklad. Síť jednosměrných cest je znázorněna v diagramu. Počet aut, která jedou do průsečíku A, je 200 aut, do průsečíku B 100 aut, z průsečíku C 150 aut a z průsečíku D 150 aut. Vypočítejte počet aut, která projedou cestami a, b, c, d, e. (Upraveno z [10], str. 116.)



Řešení:

Počet aut, která projedou cestami a, b, c, d, e, označíme po řadě a, b, c, d, e.

Neznámé a, b, c, d, e jsou přirozená čísla.

Pro průsečíky platí:

Průsečík A $\quad 200 + a = c + e.$

Průsečík B $\quad 100 = a + b.$

Průsečík C $\quad b + c = 150 + d.$

Průsečík B $\quad d + e = 150.$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -a + c + e &= 200, \\ a + b &= 100, \\ b + c - d &= 150, \\ d + e &= 150. \end{aligned}$$

Soustava rovnic je řešena Gaussovou eliminační metodou. Napíšeme rozšířenou matici soustavy rovnic a převedeme ji na zobecněnou trojúhelníkovou matici, z té vypočteme neznámé a, b, c, d, e:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 200 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right).$$

Ze zobecněné trojúhelníkové matice vidíme, že $n = 5$ a $h = 3$, zvolíme $(5 - 3)$ parametrů za neznámé, tedy dva, a pomocí nich vyjádříme ostatní neznámé. Z poslední rovnice můžeme libovolně volit parametr za neznámou d či e. Označíme např. $e = t$, kde t je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy), a po dosazení do poslední rovnice vyjádříme d:

$$\begin{aligned} d + t &= 150, \\ d &= 150 - t. \end{aligned}$$

V druhé rovnici vystupují neznámé b, c, e. Jednu z neznámých b, c můžeme libovolně zvolit za parametr. Označíme např. $c = s$, kde s je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy), a po dosazení do druhé rovnice vyjádříme b:

$$\begin{aligned} b + s + t &= 300, \\ b &= 300 - s - t. \end{aligned}$$

Po dosazení do první rovnice vyjádříme a:

$$\begin{aligned} -a + s + t &= 200, \\ a &= -200 + s + t. \end{aligned}$$

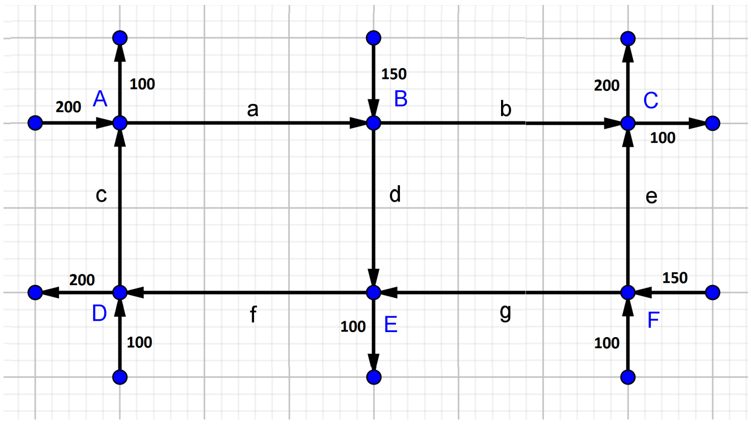
Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané pětice

$$(a, b, c, d, e) = (-200 + s + t, 300 - s - t, s, 150 - t, t),$$

kde s, t jsou přirozená čísla. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$\begin{aligned} 200 \leq s + t &\leq 300, \\ t &\leq 150. \end{aligned}$$

Příklad. Síť jednosměrných ulic v New Yorku je znázorněna v diagramu. Do průsečíku A jede 200 aut a vyjede jím 100 aut, do průsečíku B jede 150 aut, průsečíkem C vyjede jednou cestou 100 aut a druhou cestou 200 aut, do průsečíku D jede 100 aut a vyjede jím 200 aut, z průsečíku E vyjede 100 aut, do průsečíku F jede jednou cestou 150 aut a druhou cestou 100 aut. Nalezněte počet aut, které projedou cestami a, b, c, d, e, f, g. (Upraveno z [10], str. 116.)



Řešení:

Počet aut, která projedou cestami a, b, c, d, e, f, g, označíme po řadě a, b, c, d, e, f, g. Neznámé a, b, c, d, e, f, g jsou přirozená čísla.

Pro průsečíky platí:

Průsečík A $\quad 200 + c = a + 100.$

Průsečík B $\quad a + 150 = b + d.$

Průsečík C $\quad b + e = 200 + 100.$

Průsečík D $\quad 100 + f = 200 + c.$

Průsečík E $\quad d + g = f + 100.$

Průsečík F $\quad 150 + 100 = g + e.$

Řešíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
a - c &= 100,\\
a - b - d &= -150,\\
b + e &= 300,\\
-c + f &= 100,\\
d - f + g &= 100,\\
e + g &= 250.
\end{aligned}
$$

Soustavu rovnic řešíme Gaussovou eliminační metodou. Převedeme rozšířenou matici soustavy rovnic vhodnými elementárními metodami na zobecněnou trojúhelníkovou matici, ze které vyjádříme neznámé:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -150\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -150
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250\\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 250
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 50
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 150
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250
\end{array}\right)
\sim
$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \end{array}\right).$$

Ze zobecněné trojúhelníkové matice plyne, že $n = 7$ a $h = 5$, zvolíme $(7 - 5)$ parametrů za neznámé a pomocí těchto parametrů dopočítáme ostatní neznámé. Z poslední rovnice můžeme libovolně volit parametr za neznámou e či g. Označíme např. $g = t$, kde t je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy), a vyjádříme z poslední rovnice e:

$$\begin{aligned} e + t &= 250, \\ e &= 250 - t. \end{aligned}$$

Ze čtvrté rovnice vystupují neznámé d, f, g, jednu z neznámých d, f můžeme libovolně zvolit. Označíme např. $f = s$, kde s je přirozené číslo (tato podmínka plyne z kontextu úlohy), a po dosazení do čtvrté rovnice vyjádříme d:

$$\begin{aligned} d - s + t &= 100, \\ d &= 100 + s - t. \end{aligned}$$

Po dosazení do třetí rovnice vyjádříme c:

$$\begin{aligned} -c + s &= 100, \\ c &= -100 + s. \end{aligned}$$

Po dosazení do druhé rovnice vyjádříme b:

$$\begin{aligned} b + 250 - t &= 300, \\ b &= 50 + t. \end{aligned}$$

Po dosazení do první rovnice vyjádříme a:

$$\begin{aligned} a - s + 100 &= 100, \\ a &= s. \end{aligned}$$

Shrnutí: Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané sedmice

$$(a, b, c, d, e, f, g) = (s, 50 + t, s - 100, 100 + s - t, 250 - t, s, t),$$

kde s, t jsou přirozená čísla. Z kontextu úlohy vyplývá, že řešení vyhovuje pro:

$$\begin{aligned} -s + t &\leq 100, \\ t &\leq 250, \\ 100 &\leq s. \end{aligned}$$

Závěr

Cílem této práce bylo popsat řešení úloh z aplikačních oblastí společná práce, směsi a roztoky a síťové toky pomocí soustav lineárních rovnic. Díky velkému množství metod, kterými lze soustavu rovnic řešit, nebyly v práci popsány všechny metody. Vybrala jsem algebraické metody řešení, se kterými se nejčastěji setkáváme od základní školy po vysokou školu, a aplikovala je na vybrané slovní úlohy. Pro řešení soustav lineárních rovnic jsem zvolila Gaussovu eliminační metodu, Cramerovo pravidlo, dosazovací a porovnávací metodu. Vytvořila jsem sbírku řešených úloh z oblastí společná práce, směsi a roztoky a síťové toky. U většiny úloh jsem uvedla víc možných způsobů řešení, aby měl čtenář možnost porovnat různé způsoby řešení. Mojí snahou bylo, aby práce byla poučná pro studenty středních škol s matematickým zaměřením a studenty vysokých škol, což je splněno.
Práce by mohla být zařazena jako výukový materiál do předmětu Středoškolská matematika čtená podruhé či do Aplikace algebry.

Seznam použité literatury

[1] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 3., nezměn. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1973. Česká matice technická (SNTL).

[2] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. 3., rev. vyd. Přeložil Zdeněk TICHÝ. Praha: Mladá fronta, 2002. ISBN 80-204-0607-7.

[3] BARTO, Libor a Jiří TŮMA. *Lineární algebra* [elektronická skripta] 2017. [citováno 04. 03. 2018]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/ tuma/LinAlg14-15/skripta.pdf

[4] Wikipedie: Otevřená encyklopedie. *Sarrusovo pravidlo* [online] 2017. [citováno 05. 03. 2018]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Sarrusovo pravidlo

[5] NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů. 1. část, Lineární algebra*. Vyd. 3. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2006. ISBN 80-7290-252-0.

[6] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*.Vyd. 4. Praha: Prometheus, spol., 2010. ISBN 987-80-7196-362-2.

[7] JANEČEK, František. *Matematika: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*.Vyd. 5. Praha : Prometheus, spol. s r.o., 1995. ISBN 978-80-7196-360-8.

[8] TREJBAL, Josef. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. Vyd. 2. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2003. ISBN 80-7235-057-9.

[9] NICHOLSON, W. Keith. *Linear algebra with applications*. 3rd ed. Boston: PWS Pub. Co., c1995. ISBN 0-534-93666-0.

[10] POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole-Thomson Learning, c2003. ISBN 0-534-34174-8.

[11] BÍLKOVÁ, Klára. *Slovní úlohy řešené soustavou rovnic* [online]. [citováno 15. 04. 2018]. Dostupné z: http://slideplayer.cz/slide/1982967/