MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zdena Muzikářová

Binární relace a zobrazení ve výuce matematiky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program: Geografie
Studijní obor: Učitelství geografie a matematiky pro SŠ

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych touto cestou poděkovala doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za odborné vedení a cenné rady, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout. Děkuji především za trpělivost, ochotu a čas, který mi v průběhu zpracování celé práce věnovala.

Název práce: Binární relace a zobrazení ve výuce matematiky

Autor: Zdena Muzikářová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce představuje sbírku řešených i neřešených úloh na téma binární relace. Žáci si v ní osvojují různá použití binárních relací ve středoškolské matematice a geometrii. Důraz je kladen především na grafické zobrazení binárních relací, které slouží jako užitečný nástroj k řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav. Jedná se o pomocný učební materiál určený pro výuku matematického semináře. Součástí práce je též stručný teoretický výklad potřebných pojmů, které jsou doplněny o relevantní definice a ilustrační příklady.

Klíčová slova: množina, uspořádaná dvojice, kartézský součin, binární relace, zobrazení, funkce

Title: Binary relations and mappings in teaching of mathematics

Author: Zdena Muzikářová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: The diploma thesis presents a collection of solved problems in binary relations. Students are familiarized with various applications of binary relations on high school mathematics and geometry. The work focuses on graphical representation of binary relations and their use in solving equations, inequalities and their systems. It is a teaching text designated for a mathematics seminar at high school. In addition to exercises, it also includes an introduction of new concepts which are supplemented by relevant definitions and illustrative examples.

Keywords: set, ordered pair, cartesian product, binary relation, projection, function

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce vznikla jako rozšíření mé bakalářské práce a přináší další sbírku úloh věnovanou binárním relacím v souvislosti s jejich využitím ve školské matematice. Důraz je kladen především na příklady relací, které se vyskytují ve výuce matematiky na střední škole. Práce je rozšířena nejen o nové příklady grafického řešení rovnic a nerovnic, ale i o další příklady relací, které žáci běžně používají, aniž by si uvědomovali, že se jedná o relace. Do textu je nově začleněna kapitola věnována množinám a zároveň došlo k rozšíření stávajících kapitol.

Práce vychází z předpokladu, že se žáci v předchozím studiu již setkali se základními pojmy (množina, zobrazení, funkce) a ovládají základní logické spojky. Látka je představována postupně a nově zaváděné pojmy jsou pro názornost ilustrovány jednoduchými příklady.

V první kapitole jsou žáci seznámeni s pojmem množina a s problémem, se kterým se matematika potýká při její definici. Následují základní operace na množinách a jejich grafické znázorňování, které se v následujícím textu využívá při ověřování množinových vztahů. Dále je důkladně probrán kartézský součin a jeho vlastnosti.

Druhá kapitola již na základě kartézského součinu definuje binární relace a věnuje se postupně jejich vlastnostem. Důraz je kladen na to, aby si žáci osvojili grafické znázorňování binárních relací, které dále slouží jako užitečný nástroj ke grafickému řešení soustav rovnic a nerovnic. Hlouběji jsou rozebrány některé speciální typy relací, jejich využití pro konstrukci oboru racionálních čísel a jejich aplikaci ve středoškolské matematice, především v geometrii.

Kapitola 3 dále zužuje oblast relací. Nejprve je definován pojem zobrazení, jeho jednotlivé typy (zobrazení injektivní, surjektivní, bijektivní) a jeho speciální případ – funkce. Jsou uvedeny základní definice, pomocí kterých je na konkrétních příkladech ověřováno, zda dané binární relace jsou či nejsou zobrazení, resp. funkce. Dále jsou připomenuty některé elementární funkce, které se využívají v kapitolách 4 a 5.

Těžiště práce je v kapitolách 4 až 6. Vlastní přínos přinášejí především řešené úlohy z kapitoly 4, zaměřené na grafické znázornění binárních relací. Cílem kapitoly je zprostředkovat žákům praktickou zkušenost s binárními relacemi a s jejich využitím při grafickém řešení soustav rovnic a nerovnic. Ke grafickému řešení úloh se využívají konstrukce přímek, parabol, hyperbol a dalších grafů funkcí uvedených v předchozí kapitole 3. Kapitola 5 přináší další soubor příkladů, které již přenechávají postup studentům. Ti si pak správnost řešení mohou zkontrolovat v kompletním seznamu výsledků v kapitole 6.

Celá práce je prokládána obrázky, které byly vytvořeny pomocí matematického softwaru GeoGebra. Tento program mohou studenti sami využít při vlastním řešení úloh z kapitoly 5. Definice a věty uvedené v diplomové práci vycházejí z publikací [4], [5], [8], [10] a [11].

1. Množiny a vztahy mezi nimi

Základním pojmem, se kterým budeme v celém textu pracovat, je *množina*. Množinou chápeme v intuitivním pojetí libovolný soubor objektů. Výraz intuitivní je používán pro zdůraznění rozdílu mezi Cantorovým intuitivním zavedením množin a korektním zavedením pomocí tzv. axiomatické teorie množin.

1.1 Russelův paradox

Vývoj matematiky ukázal, že způsob zavedení v Cantorově pojetí není dostačující. S pojmem množina se zacházelo velmi volně, což vedlo k tomu, že byly vytvořeny příklady množin, které nemohou existovat. Pokud bychom totiž podrobněji nespecifikovali, co může a nemůže být množinou, snadno bychom došli ke sporům. Britský matematik Bertrand Russel (1872-1970) poukázal na problém, že v tomto pojetí množin existuje výrok, který je pravdivý, právě když je nepravdivý. Jedná se o paradox, kdy množina je prvkem sebe sama.

Russel definoval množinu M, jejímiž prvky jsou všechny množiny, které nejsou prvkem sebe sama. Je pak množina M prvkem sebe sama? Zkoumáme-li tuto otázku, dospíváme vždy ke sporům. Kdyby totiž M byla prvkem sama sebe, pak podle definice M množina M není prvkem M. Předpokládáme-li naopak, že M není sama svým prvkem, potom by M patřila do množiny M, protože M obsahuje všechny množiny, které nejsou prvky sebe sama. Zjistili jsme tedy, že M je prvkem M právě tehdy, když M není prvkem M. To je v matematice naprosto nemyslitelné. Nemůže se stát, že tvrzení platí právě tehdy, když neplatí. [1]

Ukázalo se tak, že ačkoliv je množina jeden ze základních pojmů v matematice, definovat ji je velice obtížné. Dnes je častým způsobem výstavby matematických teorií axiomatická metoda. Této metodě se však podrobněji věnovat nebudeme a v následujícím textu si vystačíme s Cantorovou intuitivní teorií, která je pro výuku na střední škole dostačující.

1.2 Cantorovo intuitivní zavedení

Množinou chápeme soubor libovolných navzájem různých objektů.

- Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá *prvek množiny*. Prvky nejsou uspořádané, tedy nezáleží na jejich pořadí.
- Pro označování množin se obvykle používají velká písmena latinské abecedy a pro označování jejich prvků malá písmena.
- Je-li x prvkem množiny A, píšeme $x \in A$, v opačném případě $x \notin A$.

Ve školské matematice často pracujeme s množinami, jejichž prvky jsou čísla. Pro názornější představu si však můžeme představit i jiné než číselné množiny. Například školní třídu lze chápat jako množinu, jejímiž prvky jsou jednotliví žáci.

V této kapitole budeme dále pracovat s množinou žáků třídy 1.A. Pro každý nově zavedený pojem bude uveden konkrétní příklad na této množině. Tyto příklady budeme pro přehlednost odlišovat modrou barvou textu.

1.3 Zadávání množin

Množina M obsahující prvky 1, 2, 3, 4 může být zadána buď výčtem prvků, tj. $M = \{1, 2, 3, 4\}$, či pomocí charakteristické vlastnosti $M = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$. V takových případech zapisujeme množiny pomocí složených závorek.

Ve speciálních případech lze množiny zadávat též pomocí intervalu, tj. $N = \langle 1, 4\rangle$. Pozor, množina N se nerovná množině M! Množina M na rozdíl od množiny N obsahuje pouze přirozená čísla.

Pokud bychom uvažovali množinu všech žáků ve třídě 1.A a chtěli bychom tuto množinu zadat pomocí výčtu prvků, museli bychom vypsat všechny žáky této třídy. Pomocí charakteristické vlastnosti bychom mohli stejnou množinu zadat jako množinu všech dětí ve škole, kteří jsou žáky 1.A. Takové zadání nám říká, abychom ze všech žáků ve škole vybrali jen ty, kteří splňují zadanou charakteristickou vlastnost, tj. jsou žáky 1.A.

Poznámka. Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá *prázdná množina* a značíme ji symbolem $\emptyset$, případně $\{\}$. Tyto zápisy však nelze kombinovat. Zápis $\{\emptyset\}$ by určoval jednoprvkovou množinu, která obsahuje prázdnou množinu.

Příklad 1.1. Zapište množinu C, která obsahuje prvky x, y, z.

Řešení. $C = \{x, y, z\}$. Jelikož nezáleží na pořadí jednotlivých prvků, ekvivalentními zápisy jsou rovněž:

$$C = \{x, z, y\},\ C = \{y, x, z\},\ C = \{y, z, x\},\ C = \{z, x, y\},\ C = \{z, y, x\}.$$

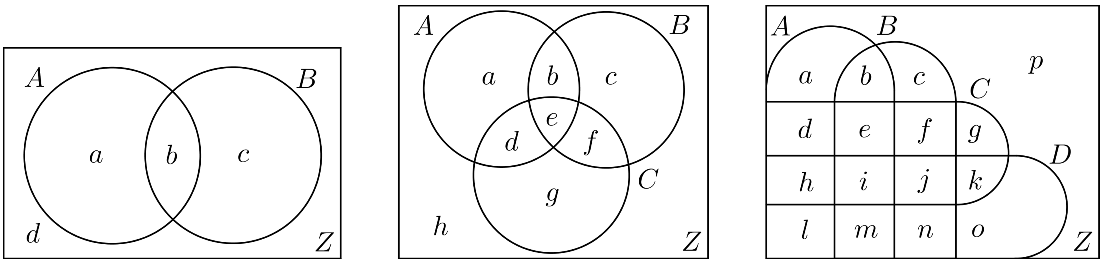
1.4 Vztahy mezi množinami

Graficky se množina ve školské matematice obvykle znázorňuje jako část roviny, která je ohraničená uzavřenou křivkou (nejčastěji jako kruh). Pro grafické znázornění intervalů se využívá reálná osa, na které se vyznačí její část pomocí úsečky či polopřímky podle toho, zda se jedná o konečný či nekonečný interval.

1.4.1 Vennovy diagramy

Grafické schéma, kterým je možné zachytit všechny vztahy mezi libovolným konečným počtem množin, se nazývá *Vennův diagram.* My budeme nejčastěji používat Vennův diagram pro dvě nebo tři množiny. Pro velké počty množin jsou tyto diagramy již poměrně nepřehledné. Na obr. 1.1 je pro ilustraci postupně znázorněn Vennův diagram pro dvě, tři a čtyři množiny. Množina Z se nazývá základní množina a obsahuje množiny A, B, C, D.

Je-li dán prvek základní množiny, vždy je na obrázku právě jedno pole $(a, b, c, ...)$, kam ho můžeme zakreslit. Vennovy diagramy jsou tak rovněž jednoduchým a velice názorným grafickým schématem pro třídění matematických pojmů a vizualizaci jejich vazeb.



Obrázek 1.1

Pro podrobnější popsání jednotlivých vztahů mezi dvěma množinami využijeme první Vennův diagram na obr 1.1. Ten se skládá z následujících polí.

Pole a obsahuje prvky, které patří do množiny A, ale nepatří do množiny B.

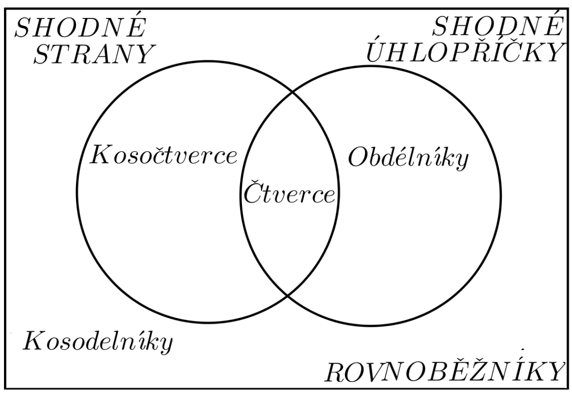
Pole b obsahuje prvky, které patří do množiny A a zároveň patří do množiny B.

Pole c obsahuje prvky, které nepatří do množiny A, ale patří do množiny B.

Pole d obsahuje prvky, které nepatří do množiny A ani do množiny B.

Příklad 1.2. Sestavte Vennův diagram pro klasifikaci rovnoběžníků v rovině dle délky jejich stran a úhlopříček. [2]

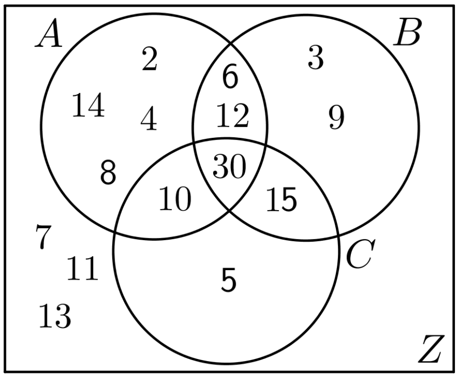
Řešení. Nejprve určíme základní množinu, tj. množinu všech rovnoběžníků v rovině. Dále jsou dány dvě vlastnosti (rovnoběžníky se shodnými stranami a rovnoběžníky se shodnými úhlopříčkami). Použijeme tedy Vennův diagram pro dvě množiny, popíšeme je a do jednotlivých polí zapíšeme konkrétní představitele (obr. 1.2).



Obrázek 1.2

Příklad 1.3. Vytvořte Vennův diagram, je-li dána základní množina $Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 30\}$ a množiny A, B, C tak, že:

- A je množina všech čísel ze Z, která jsou dělitelná dvěma,
- B je množina všech čísel ze Z, která jsou dělitelná třemi,
- C je množina všech čísel ze Z, která jsou dělitelná pěti.



Obrázek 1.3

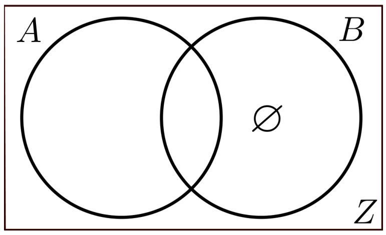
Řešení. Utvoříme Vennův diagram pro 3 množiny a každý prvek množiny Z zapíšeme do příslušného pole. Na obrázku 1.3 si všimněme, že jediné číslo, které náleží do A, B i C, je číslo 30, protože je jako jediné dělitelné současně dvěma, třemi i pěti.

Pomocí Vennových diagramů si přiblížíme některé operace a vztahy mezi množinami ze základní množiny Z.

1.4.2 Podmnožina

Definice. *Podmnožinou* B množiny A rozumíme množinu, jejíž každý prvek je současně prvkem množiny A. Značíme $B \subset A$.

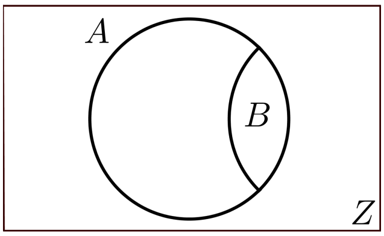
- Pomocí Vennova diagramu znázorňujeme vztah $B \subset A$ následovně (obr. 1.4).



Obrázek 1.4

Pozor, grafické znázornění na obrázku 1.4 neříká, že množina B je prázdná. Pouze vyjadřuje, že daná část množiny B (pole, ve kterém je umístěn symbol $\emptyset$) je prázdná, tj. neobsahuje žádné prvky, neboť všechny prvky B náleží BA.

Podmnožinu B množiny A tedy můžeme zakreslit jednodušším způsobem následovně (obr. 1.5); nejedná se však o Vennův diagram.



Obrázek 1.5

Vrátíme-li se k množině všech žáků ve třídě, pak podmnožinou této množiny je například množina všech dívek této třídy.

Příklad 1.4. Zdůvodněte, že pro libovolnou množinu A platí: $\emptyset \subset A$.

Řešení. Definice podmnožiny říká, že každý prvek podmnožiny musí být prvkem druhé množiny. Protože prázdná množina žádné prvky nemá, je prázdná množina podmnožinou každé množiny.

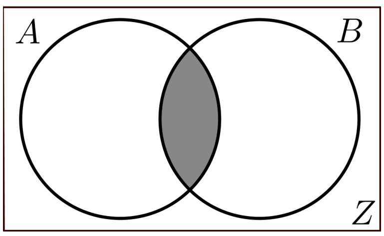
Rovnost množin
Pomocí pojmu podmnožina lze vyjádřit *rovnost množin*. Je-li $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$, tak se množiny A a B rovnají. Jednoduše lze říci, že *rovnost množin* nastává právě tehdy, když množiny obsahují právě tytéž prvky. Zapisujeme $A = B$.

Pro množinu dívek B, jakožto podmnožinu množiny A všech žáků ve třídě, by rovnost nastala v případě, kdyby v celé třídě byla pouze děvčata a žádní chlapci.

1.4.3 Průnik množin

Definice. *Průnikem množin* A a B rozumíme množinu všech prvků, které jsou obsaženy v množině A a zároveň v množině B. Značíme $A \cap B$.

- Symbolicky zapisujeme $A \cap B = \{x \in Z : x \in A \wedge x \in B\}$.
- Pomocí Vennova diagramu znázorňujeme průnik množin A, B následovně (obr. 1.6), jedná se o vybarvenou oblast diagramu.



Obrázek 1.6

Uvažujme opět jako základní množinu Z množinu všech žáků ve třídě. V této množině lze zavést množinu F jako množinu žáků, kteří se učí francouzsky a množinu

M jako množinu žáků, kteří mají jedničku z matematiky. Průnikem těchto dvou podmnožin je množina žáků, kteří se učí francouzsky a zároveň mají jedničku z matematiky.

Příklad 1.5. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$. Určete jejich průnik.

Řešení. Do průniku množin A, B napíšeme všechny společné prvky těchto množin. Řešení je tedy následující.

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

Na závěr si uvedeme některé vlastnosti, které platí pro libovolné množiny A, B.

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$

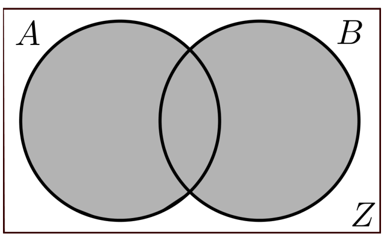
První vlastnost je zřejmá. Průnikem libovolné množiny se sebou samou je opět sama tato množina. Všechny prvky jsou stejné. Druhý vztah plyne z vlastnosti prázdné množiny. Prázdná množina totiž neobsahuje vůbec žádné prvky, a tak nemůže mít s jinou množinou nějaký společný prvek. Poslední vlastnosti říkáme komutativita průniku. Průnik je komutativní operace, protože při ní nezáleží na pořadí množin. Vybíráme-li prvky společné pro obě množiny, tak je lhostejné, u které z daných množin začneme.

Poznámka. Průnik množin lze zavést i pro více množin. Například na obr. 1.1 je průnik tří množin A, B, C množina odpovídající oblasti e.

1.4.4 Sjednocení množin

Definice. *Sjednocením množin* A a B rozumíme množinu obsahující všechny prvky množiny A a také všechny prvky množiny B. Značíme $A \cup B$.

- Symbolicky zapisujeme $A \cup B = \{x \in Z : x \in A \vee x \in B\}$.
- Pomocí Vennova diagramu znázorňujeme sjednocení množin A, B následovně (obr. 1.7), jedná se o vybarvenou oblast diagramu.



Obrázek 1.7

Na závěr opět uvedeme některé vlastnosti, které platí pro libovolné množiny A, B.

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$

První vlastnost plyne z vlastnosti prázdné množiny. Sjednocení libovolné množiny A a prázdné množiny je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A a všechny prvky prázdné množiny. Jelikož ale prázdná množina neobsahuje žádné prvky, sjednocením těchto množin je množina A. Druhý vztah plyne z vlastnosti množin. Už víme, že množina je soubor navzájem různých objektů (tj. obsahuje každý prvek nejvýše jednou). Sjednocením dvou stejných množin je proto opět sama tato množina. Poslední vlastnosti říkáme komutativita. Sjednocení je podobně jako průnik komutativní operace, protože při ní nezáleží na pořadí množin. Vybíráme-li všechny prvky z jedné i druhé množiny, je lhostejné, u které začneme.

Použijeme-li předchozí příklad s třídou žáků, sjednocením množin F, M je množina žáků, kteří se učí francouzsky nebo mají jedničku z matematiky. Pozor však na význam slova „nebo“. Je nutné si uvědomit, že nastane **alespoň jedna** z možností, tj. nesmíme opomenout ty žáky, kteří se učí francouzsky a současně mají jedničku z matematiky.

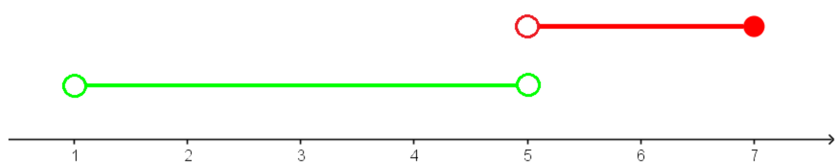
Poznámka. Sjednocení množin lze zavést i pro více množin. Například na obr. 1.1 je sjednocení tří množin A, B, C množina obsahující oblasti a, b, c, d, e, f, g.

Příklad 1.6. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$. Určete jejich sjednocení.

Řešení. Do sjednocení množin A, B napíšeme všechny prvky množiny A a všechny prvky množiny B. Pokud množiny obsahují stejné prvky, tak se tyto společné prvky uvádí **pouze jednou**. Řešení je tedy následující.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Příklad 1.7. Jsou dány množiny $C = (1, 5)$ a $D = (5, 7\rangle$. Určete jejich sjednocení.



Obrázek 1.8

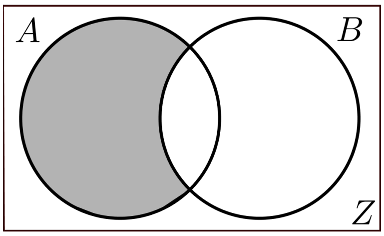
Řešení. Na obr. 1.8 jsou obě množiny graficky znázorněny. Do sjednocení množin C, D napíšeme všechny prvky množiny C a všechny prvky množiny D. Číslo 5 neobsahuje ani jedna z množin, a je tedy nutné tento prvek z konečného řešení vyloučit.

$$C \cup D = (1, 5) \cup (5, 7\rangle$$

1.4.5 Rozdíl množin

Definice. *Rozdílem množin* A a B rozumíme množinu obsahující všechny prvky množiny A s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny B. Značíme $A \backslash B$.

- Symbolicky zapisujeme $A \backslash B = \{x \in Z : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- Pomocí Vennova diagramu znázorňujeme rozdíl množin A, B následovně (obr. 1.9), jedná se o vybarvenou oblast diagramu.



Obrázek 1.9

Uvažujme opět jako základní množinu Z množinu všech žáků ve třídě a její podmnožiny F, M. Rozdílem $F \backslash M$ je množina žáků, kteří se učí francouzsky s výjimkou těch, kteří mají současně jedničku z matematiky.

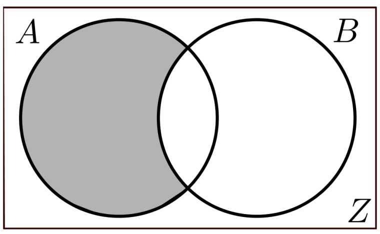
Příklad 1.8. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$. Určete rozdíl $A \backslash B$.

Řešení. Do rozdílu množin $A \backslash B$ napíšeme všechny prvky množiny A s výjimkou těch, které patří do množiny B. Řešení je tedy následující.

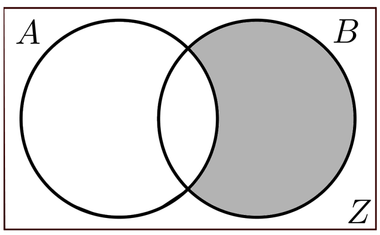
$$A \backslash B = \{1\}$$

Poznámka. Jak se můžeme přesvědčit na následujícím obrázku 1.10, rozdíl množin není obecně komutativní operace.

$A \setminus B$



$B \setminus A$

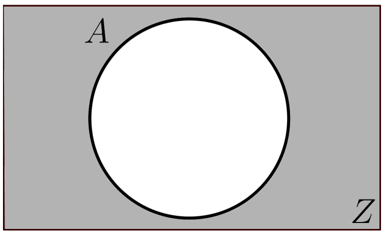


Obrázek 1.10

1.4.6 Doplněk množiny

Definice. Uvažujme základní množinu Z a její podmnožinu A. Potom *doplňkem množiny A vzhledem k množině Z* je množina, která obsahuje všechny prvky množiny Z s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny A. Značíme A'_Z.

- Pokud je z předchozího kontextu jasné, k jaké množině je doplněk vztažen, lze psát zkráceně A'.
- Pomocí Vennova diagramu znázorňujeme doplněk množiny A vzhledem k množině Z následovně (obr. 1.11), jedná se o vybarvenou oblast diagramu.



Obrázek 1.11

Poznámka. Odlišnost mezi rozdílem dvou množin a doplňkem je ta, že o doplňku hovoříme pouze v situaci, kdy je jedna množina podmnožinou druhé. V opačném případě hovoříme o rozdílu.

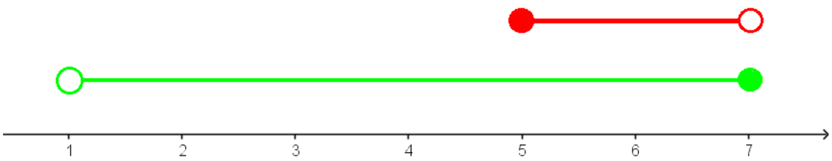
Použijme opět množinu žáků ve třídě, její podmnožiny F, M a uvažujme situaci, kdy množina M je podmnožinou množiny F. Tedy že každý žák, který má jedničku z matematiky, se současně učí francouzsky. Doplňkem množiny M vzhledem k množině F je množina žáků, kteří se učí francouzsky, ale nemají jedničku z matematiky.

Příklad 1.9. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$. Určete B'_A.

Řešení. Do množiny B'_A napíšeme všechny prvky množiny A, které nepatří do množiny B. Řešení je tedy následující.

$$B'_A = \{1{,}5\}$$

Příklad 1.10. Jsou dány množiny $C = (1, 7\rangle$ a $D = \langle 5, 7)$. Určete D'_C.



Obrázek 1.12

Řešení. Na obr. 1.12 jsou obě množiny graficky znázorněny. Do množiny D'_C napíšeme všechny prvky množiny C, které nepatří do množiny D. Z řešení tedy musíme vyloučit číslo 5, protože patří do množiny D a naopak zahrnout číslo 7, které patří do C, ale nepatří do D.

$$D'_C = (1, 5) \cup \{7\}$$

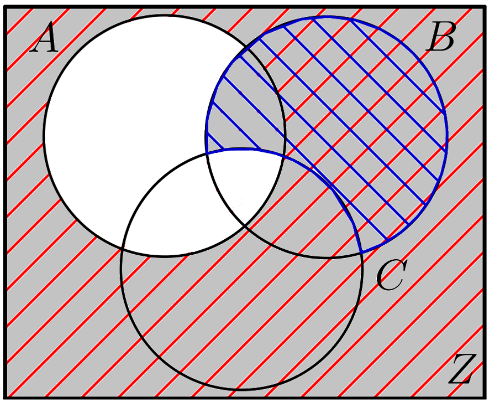
1.4.7 Ověřování vlastností množinových vztahů

Pomocí Vennových diagramů lze graficky ověřovat konkrétní množinové vztahy. Jedná se o rovnosti, na jejichž stranách stojí na první pohled odlišné množinové operace a je třeba ověřit, zda zadaná rovnost platí. Jakým způsobem tyto úlohy řešit, si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.11. S využitím Vennových diagramů ověřte, že pro libovolné množiny A, B, C platí: $A' \cup (B \cap C') = (A' \cup B) \cap (A \cap C)'$.

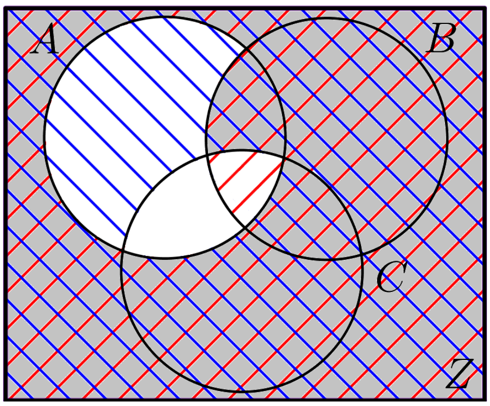
Řešení. Množiny a operace mezi nimi znázorníme Vennovým diagramem a na závěr diagramy porovnáme.

1. Nejprve zakreslíme množinu na levé straně rovnosti $A' \cup (B \cap C')$. Výsledná množina je znázorněna na obrázku 1.13 šedou barvou.



Obrázek 1.13

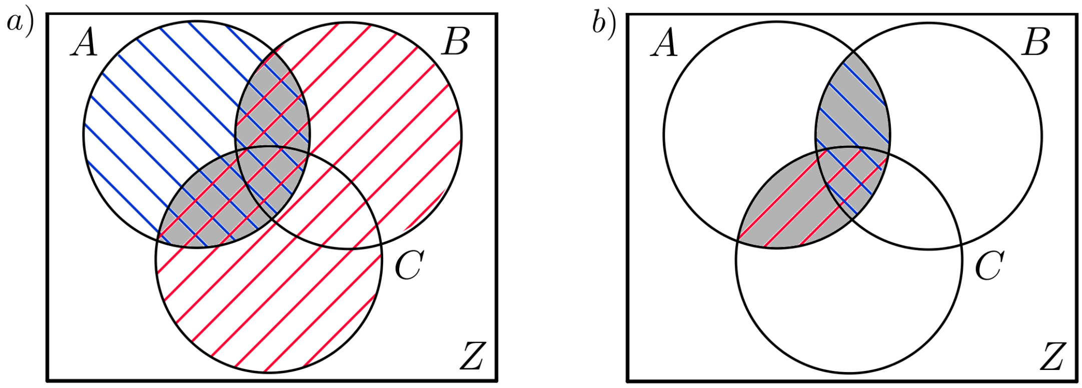
2. Dále zakreslíme množinu na pravé straně rovnosti $(A' \cup B) \cap (A \cap C)'$. Výsledná množina je znázorněna na obrázku 1.14 opět šedou barvou. Pokud vybarvené části diagramů porovnáme, vidíme, že jsou shodné, čímž jsme ověřili danou rovnost.



Obrázek 1.14

Příklad 1.12. S využitím Vennových diagramů ověřte, že pro libovolné množiny A, B, C platí $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, neboli platí distributivita průniku množin vůči sjednocení.

Řešení. Do samostatných diagramů opět postupně znázorníme množiny, které jsou zapsány na stranách rovnosti. Množina $A \cap (B \cup C)$ na levé straně rovnosti je znázorněna na obr. 1.15a šedou barvou. Množina $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ na pravé straně rovnosti je na obr. 1.15b znázorněna taktéž šedou barvou. Pokud výsledné části diagramů porovnáme, vidíme, že jsou shodné a tedy ověřili jsme **distributivitu průniku vůči sjednocení**.



Obrázek 1.15

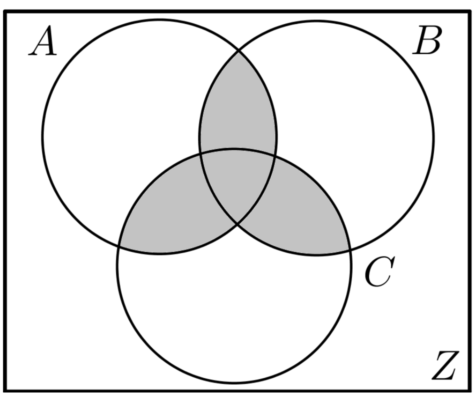
Tuto vlastnost budeme v následujícím textu dále používat.

Úloha 1.1. S využitím Vennových diagramů ukažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí (tzv. De Morganovy zákony):

$a)$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

$b)$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

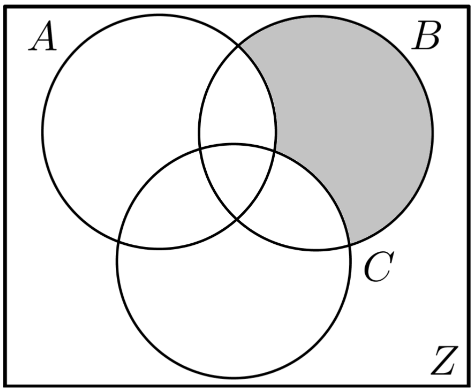
Příklad 1.13. Pomocí množinových operací symbolicky zapište množinu, která je znázorněna pomocí Vennova diagramu na obr. 1.16 šedou barvou.



Obrázek 1.16

Řešení. Způsobů, jak tuto množinu určit, existuje několik. Zřejmě nejintuitivnějším zápisem je $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Stejnou množinu bychom však mohli zapsat i jiným způsobem, například $[A \cap (B \cup C)] \cup [C \cap (A \cup B)]$. Skutečnost, že tyto zápisy určují stejnou množinu, lze ověřit pomocí distributivity průniku vůči sjednocení (viz předchozí příklad).

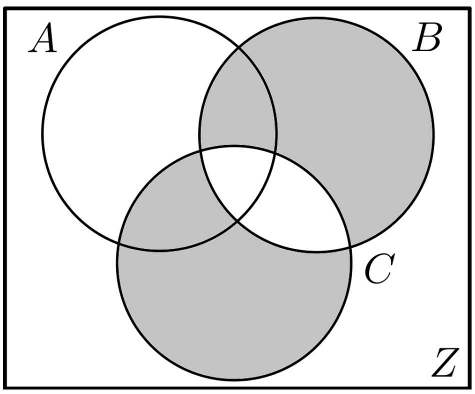
Příklad 1.14. Pomocí množinových operací symbolicky zapište množinu, která je znázorněna pomocí Vennova diagramu na obr. 1.17 šedou barvou.



Obrázek 1.17

Řešení. Opět si uvedeme dva možné způsoby zápisu. Vyžijeme-li rozdíl množin, pak lze zapsat danou množinu jako $B \setminus (A \cup C)$. Další možností je využít doplněk sjednocení množin A a C vzhledem k množině Z takto: $(A \cup C)' \cap B$.

Úloha 1.2. Pomocí množinových operací symbolicky zapište množinu, která je znázorněna na obr. 1.18 šedou barvou.



Obrázek 1.18

1.5 Kartézský součin

Dříve než zavedeme operaci zvanou kartézský součin množin, měli bychom definovat pojem uspořádané dvojice prvků.

Definice. *Uspořádaná dvojice prvků* je taková dvojice prvků, v níž záleží na jejich pořadí.

- Uspořádanou dvojici prvků a, b značíme $[a,\ b]$, tedy jako dvojici prvků v hranatých závorkách. Prvek a se nazývá *první složka* a prvek b se nazývá *druhá složka* uspořádané dvojice.

- Rovnost uspořádaných dvojic $[a,\ b]$ a $[c,\ d]$ nastává v případě, pokud jsou si zároveň rovny jejich první i druhé složky. Symbolicky zapisujeme:

$$[a,\ b] = [c,\ d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

- Pojem uspořádané dvojice lze zobecnit na uspořádanou n-tici tak, že uvažujeme n-tici prvků $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, $n \in \mathbb{N}$, ve které záleží na pořadí. Zapisujeme $[a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n]$.

Definice. Pro libovolné množiny A, B rozumíme *kartézským součinem* $A \times B$ množinu všech uspořádaných dvojic takových, že první prvek uspořádané dvojice je prvkem množiny A a druhý prvek uspořádané dvojice je prvek množiny B. Symbolicky zapisujeme:

$$A \times B = \{[a,\ b]\colon\ a \in A \wedge b \in B\}$$

- Rovnají-li se množiny A, B, tj. $A = B$, pak hovoříme o kartézské mocnině a zapisujeme:

$$A \times A = A^2$$

- Definici kartézského součinu dvou množin lze zobecnit na kartézský součin libovolného počtu množin tak, že pro pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[x_1,\ ...,\ x_n];\ x_i \in A_i,\ i = 1,\ ...,\ n\}$$

Poznámka. Je-li jedna z množin A, B prázdná, např. $B = \emptyset$, pak je kartézský součin také prázdná množina:

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

Příklad 1.15. Určete $A \times B \times C$, je-li $A = \{x\}, B = \{1, 2\}, C = \{a, b, c\}$.

Řešení. $A \times B \times C = \{[x, 1, a], [x, 1, b], [x, 1, c], [x, 2, a], [x, 2, b], [x, 2, c]\}$

Dále se budeme zabývat pouze kartézským součinem dvou neprázdných množin.

1.5.1 Vlastnosti kartézského součinu

Věta. Nechť A, B, C jsou libovolné množiny. Pro kartézský součin platí následující vlastnosti:

- není komutativní, tj.
$$A \times B \neq B \times A$$
- je distributivní vzhledem ke sjednocení a průniku množin, tj.
$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C)\\ C \times (A \cup B) &= (C \times A) \cup (C \times B)\\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C)\\ C \times (A \cap B) &= (C \times A) \cap (C \times B)\end{aligned}$$

Důkaz: KOMUTATIVITA
Jelikož prvky kartézského součinu dvou množin jsou uspořádané dvojice, je první vlastnost zřejmá. Zvolíme-li například množiny $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, tak potom

$$\begin{aligned}A \times B &= \{[a,\, 1],\, [a,\, 2],\, [b,\, 1],\, [b,\, 2]\},\\ B \times A &= \{[1,\, a],\, [2,\, a],\, [1,\, b],\, [2,\, b]\}.\end{aligned}$$

Porovnáme-li tyto kartézské součiny, tak vidíme, že nejsou stejné. Uspořádané dvojice jsou objekty, ve kterých záleží na pořadí, tj. $[a, 1] \neq [1, a]$. Kartézský součin $A \times B$ se nerovná kartézskému součinu $B \times A$, čímž jsme našli případ dvou množin, pro jejíž kartézský součin to neplatí. Dokázali jsme tak, že pro libovolné množiny kartézský součin není komutativní.

Pokud $A = B$, jedná se o speciální případ a kartézský součin těchto stejných množin je komutativní.

Důkaz: DISTRIBUTIVITA
Důkaz provedeme pouze pro první rovnost $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Důkaz pro ostatní případy by se provedl analogicky. Množinu L na levé straně rovnosti zapíšeme symbolicky dle definice kartézského součinu.

$$L = \{[a, b] : a \in (A \cup B) \wedge b \in C\}$$

Dále použijeme definici sjednocení a upravíme. V úpravách používáme distributivitu průniku množin vůči sjednocení (viz příklad 1.12).

$$L = \{[a,\, b]\colon (a \in A \vee a \in B) \wedge b \in C\} = \{[a,\, b]\colon (a \in A \wedge b \in C) \vee (a \in B \wedge b \in C)\}$$

Množinu P na pravé straně rovnosti nejprve upravíme dle definice sjednocení.

$$P = \{[a, b] : [a, b] \in (A \times C) \vee [a, b] \in B \times C\}$$

Dále využijeme definici kartézského součinu a množiny L a P porovnáme.

$$P = \{[a, b] : (a \in A \wedge b \in C) \vee (a \in B \wedge b \in C)\}$$

Množina L obsahuje všechny prvky jako množina P, tj. $L \subset P$ a obráceně $P \subset L$. Množina L je tedy rovna množině P, čímž jsme první rovnost distributivního zákona dokázali.

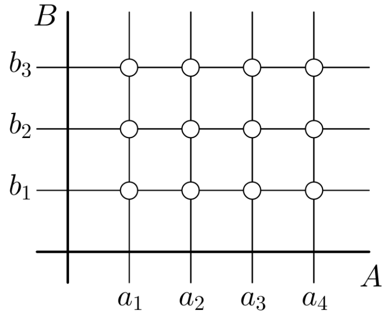
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

1.5.2 Grafické znázornění kartézského součinu

Existují různé způsoby, jak v rovině graficky znázornit kartézský součin $A \times B$. V následujícím textu si uvedeme graf kartézský a uzlový.

Kartézský graf

Kartézský graf kartézského součinu dvou množin konstruujeme s využitím kartézské soustavy souřadnic v rovině. Pomocí bodů vyneseme na osu x prvky první množiny a na osu y prvky druhé množiny. Vzniklými body pak vedeme kolmice k souřadnicové ose, na které leží. Průsečíky všech takto sestrojených kolmic představují obrazy uspořádaných dvojic. Tyto obrazy budeme znázorňovat pomocí kroužků. Na obr. 1.19 je pro názornost zkonstruován graf kartézského součinu $A \times B$, pro $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

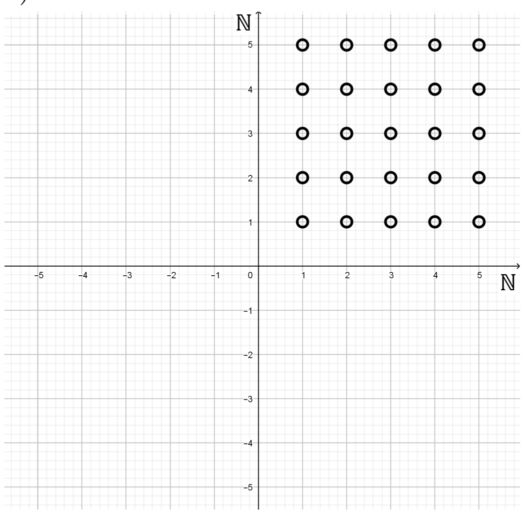


Obrázek 1.19

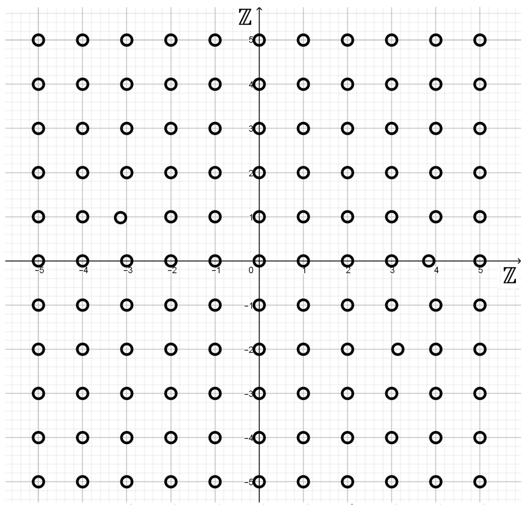
Příklad 1.13. Graficky znázorněte kartézské mocniny $\mathbb{N}^2$ a $\mathbb{Z}^2$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že řešení obsahuje nekonečně mnoho prvků, je na obr. 1.20*a* znázorněna pouze část grafu kartézské mocniny $\mathbb{N}^2$ a na obrázku 1.20*b* je znázorněna část grafu kartézské mocniny $\mathbb{Z}^2$.

a)



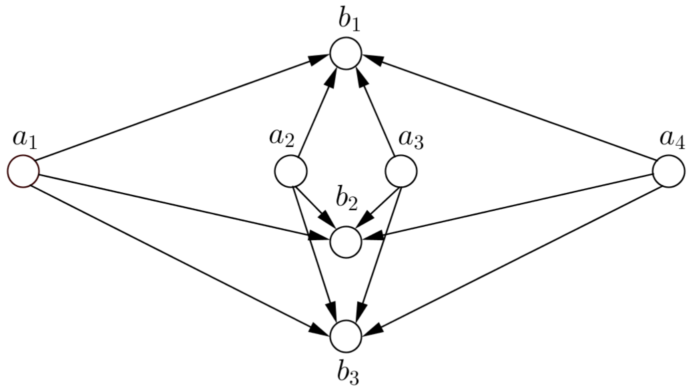
b)



Obrázek 1.20

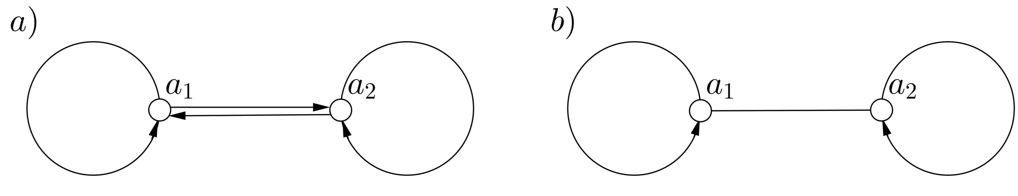
Uzlový graf

Uzlový graf je vhodný pro znázornění kartézského součinu množin s malým počtem prvků, a zejména pro zakreslování jeho částí. Způsob konstrukce je následující. Jelikož není vyloučeno, že se některé prvky vyskytují v obou množinách zároveň, určíme nejprve jejich sjednocení $A \cup B$. Poté každý prvek sjednocení znázorníme jako uzel (tj. jako kroužek). Dále zakreslíme mezi uzly orientované hrany (tj. orientované úsečky, resp. oblouky), jejichž orientace je dána pořadím prvků uspořádané dvojice (tj. šipky směřují od první složky k druhé složce). Pro názornost si opět uvedeme příklad. Na obr. 1.21 je znázorněn uzlový graf kartézského součinu $A \times B$, pro $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.



Obrázek 1.21

Nyní si ukážeme, jak bude graficky vypadat situace pro kartézské součin, je-li $A = B$. Jako příklad vytvoříme kartézský součin $A \times A$, tedy kartézskou mocninu A^2, kde $A = \{a_1, a_2\}$. Pokud kartézský součin obsahuje dvojici $[a_1, a_2]$ a zároveň dvojici $[a_2, a_1]$, není nutné zakreslovat mezi příslušnými uzly dvě orietované hrany s opačnou orientací (viz obr. 1.22*a*). V těchto případech budeme znázorňovat obě uspořádané dvojice jako jedinou neorientovanou hranu (viz obr. 1.22*b*). Dále si všimněme, že pokud se první složka uspořádané dvojice rovná druhé složce, vyznačíme kolem uzlu smyčku.



Obrázek 1.22

2. Relace

Množiny, jejichž všechny prvky jsou uspořádané n-tice, $n \in \mathbb{N}$, se nazývají relace. Jedná se o speciální případy množin a tedy všechny operace, které jsou zavedeny pro množiny, jako je sjednocení a průnik, lze aplikovat i na relace.

Definice. *Relace R mezi množinami $A_1, A_2, \ldots, A_n$*, kde $n \in \mathbb{N}$, je libovolná neprázdná podmnožina R kartézského součinu $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$. Takové relaci říkáme *$n$-ární relace* a symbolicky zapisujeme:

$$R \subset A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$$

2.1 Binární relace

Definice. Každou neprázdnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$ nazveme *binární relací mezi množinami A, B*. Symbolicky zapisujeme

$$R \subset A \times B.$$

- Je-li $A = B$, budeme místo názvu binární relace mezi množinamí A, B používat označení *binární relace v množině A*.
- Je-li uspořádaná dvojice $[x,\ y] \in R$, říkáme, že *prvek x je v relaci s prvkem y* a zapisujeme xRy.

Poznámka. Binární relace je speciální typ n-nární relace pro $n = 2$. Mezi typické binární relace v oboru reálných čísel patří například relace menší než, větší než, rovnost apod. Uvažujeme-li například binární relaci „být menší než", jejímž prvkem je uspořádaná dvojice $[x,\ y]$, potom říkáme, že x je menší než y.

Binární relace nemusí reprezentovat jen matematické vztahy. Uvažujeme-li binární relaci v množině všech žáků ve třídě, může být takovou relací například „být starší než". Binární relace je potom množina všech uspořádaných dvojic žáků, ve kterých je první žák starší než druhý.

Příklad 2.1. Je dána binární relace $R = \{[x, y] \in \mathbb{N}^2, x < y \wedge y \leq 4\}$. Zapište relaci výčtem prvků.

Řešení. $R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]\}$

Stručně lze říkat, že relace R v množině $\mathbb{N}$ je zadaná předpisem $x < y \wedge y \leq 4$.

2.2 Inverzní relace

Definice. Nechť R je binární relace mezi množinami A a B, tj. $R \subset A \times B$. Relaci R^{-1} definovanou jako $R^{-1} = \{[b, a] \in B \times A : [a, b] \in R\}$ nazýváme *inverzní relací k relaci R*.

Poznámka. Inverzní relace obsahuje uspořádané dvojice, které mají opačné pořadí složek než původní relace. Například pro relaci M, která obsahuje uspořádanou dvojici [2, 4], bude inverzní relace M^{-1} obsahovat dvojici [4, 2].

Příklad 2.2. Množina $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ představuje množinu rodičů a množina $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ množinu dětí. Uvažujme následující relaci X „být rodič" mezi množinami R a D. Určete inverzní relaci k relaci X.

$$X = \{[r_1, d_1], [r_2, d_1], [r_3, d_2], [r_4, d_2], [r_3, d_3], [r_4, d_3]\}$$

Řešení. Inverzní relace k relaci X je $X^{-1} = \{[d, r] \in D \times R : [r, d] \in X\}$. Relace X^{-1} je množina uspořádaných dvojic [dítě, rodič].

$$X^{-1} = \{[d_1, r_1], [d_1, r_2], [d_2, r_3], [d_2, r_4], [d_3, r_3], [d_3, r_4]\}$$

Vytvořili jsme tak novou relaci „být dítětem", která je inverzní k relaci „být rodič".

2.3 Grafické znázornění binárních relací

Binární relace je podmnožinou kartézského součinu dvou množin, a tedy její grafické znázornění lze také reprezentovat kartézským a uzlovým grafem. Způsob konstrukce grafů binární relace je obdobný jako konstrukce grafů kartézského součinu. Zakresleny jsou však jen ty uspořádané dvojice kartézského součinu, které patří do dané relace.

Pro grafické znázornění binární relace, která je určena charakteristickou vlastností, budeme používat převážně graf kartézský. Způsob konstrukce je následující. Každou podmínku, kterou musí relace splňovat, zobrazíme do grafu zvlášť. Grafem binární relace je geometrický útvar v rovině, který splňuje všechny dílčí podmínky z charakteristické vlastnosti.

Dále se zaměříme na binární relace v množině $\mathbb{R}$ a naučíme se sestrojovat grafy těchto relací, které dále využijeme ve čtvrté kapitole.

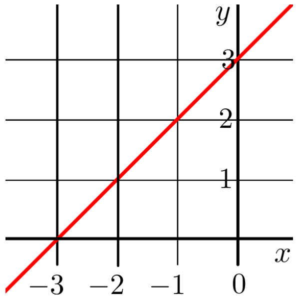
Příklad 2.3. Sestrojte graf binární relace $Z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x - y + 3 = 0\}$.

Řešení. Charakteristická vlastnost $x - y + 3 = 0$ je obecnou rovnicí přímky a ta je jednoznačně určena dvěma různými body. Potřebujeme tedy nalézt dva body, kterými přímka prochází. Obvykle zjišťujeme průsečíky P_x, P_y grafu s osou x, resp. y (pokud existují). Nejprve upravíme předpis přímky na tvar $y = x + 3$ a dále dosadíme nulu za souřadnici y, resp. x.

$$P_x : 0 = x + 3 \to x = -3, P_x = [-3, 0]$$

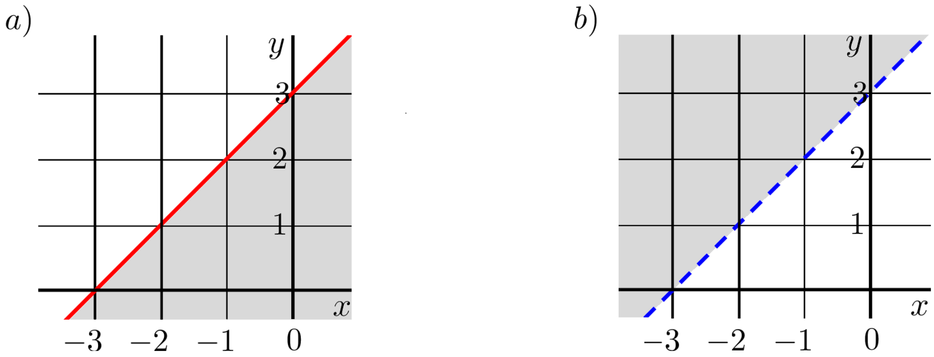
$$P_y : y = 0 + 3 \to y = 3, P_y = [0, 3]$$

Grafem relace je přímka na obr. 2.1.



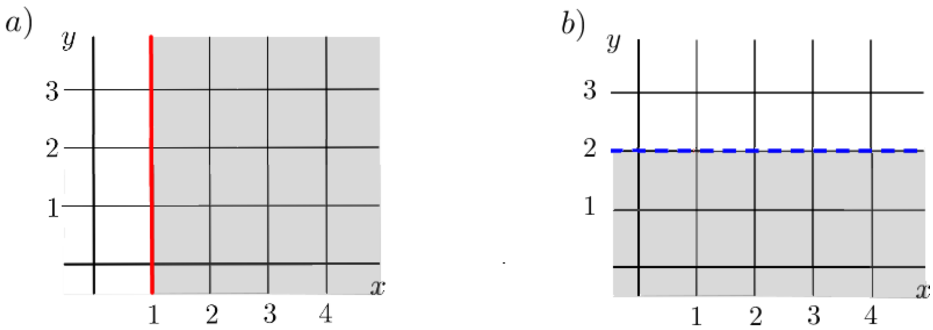
Obrázek 2.1

Pokud je charakteristická vlastnost zadaná pomocí jedné lineární nerovnice s neznámými x, y, pak je grafem relace polorovina. Pro její konstrukci je nejprve potřeba určit hraniční přímku, která rozdělí rovinu na dvě poloroviny. Grafem relace je ta polorovina, pro jejíž body platí, že jejich souřadnice splňují zadanou charakteristickou vlastnost. Například neostrá nerovnost $x-y+3 \geq 0$ vyjadřuje, že grafem relace je polorovina i s její hraniční přímkou $x-y+3=0$. (obr. 2.2a) Je-li v podmínce ostrá nerovnost, např. $x-y+3<0$, grafem relace je polorovina bez její hraniční přímky $x-y+3=0$ (obr. 2.2b).



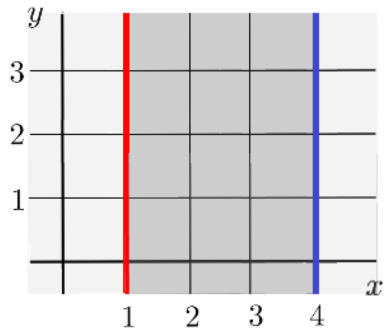
Obrázek 2.2

Pokud je charakteristická vlastnost zadaná pomocí lineární nerovnice o jedné neznámé, pak je grafem relace polorovina s hraniční přímkou rovnoběžnou s osou x, resp. y. Například je-li $x \geq 1$ je hraniční přímka rovnoběžná s osou y (obr. 2.3a) a je-li $y<2$ je hraniční přímka rovnoběžná s osou x (obr. 2.3b).



Obrázek 2.3

Poznámka. Pokud je charakteristická vlastnost relace zadaná pomocí dvou lineárních nerovnic, jejichž grafická řešení (tj. poloroviny) se částečně překrývají a jejichž hraniční přímky jsou rovnoběžné, vznikne geometrický útvar - rovinný pás. Relace, jejímž grafem je rovinný pás, je například $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \geq 1 \wedge x \leq 4\}$ (obr. 2.4).



Obrázek 2.4

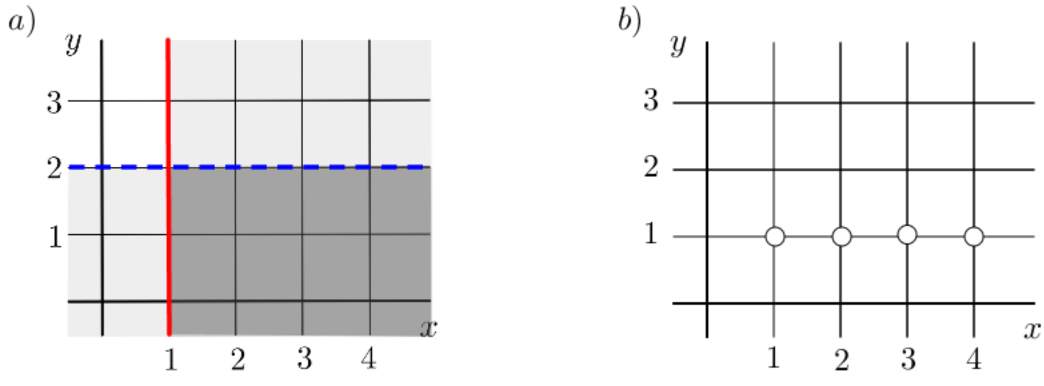
Příklad 2.4. Sestrojte grafy následujících binárních relací:

a) $U_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \geq 1 \wedge y < 2\}$

b) $U_2 = \{[x, y] \in \mathbb{N}^2, x \geq 1 \wedge y < 2\}$

Řešení. Grafem binární relace U_1, která je určena dvěma nerovnicemi o jedné reálné neznámé, je část roviny, která vznikne jako průnik dvou polorovin. Jedna polorovina s hraniční přímkou rovnoběžnou s osou y a druhá polorovina s hraniční přímkou rovnoběžnou s osou x (obr. 2.5*a*).

Grafem binární relace U_2 jsou jen ty body roviny, jejichž souřadnice patří do oboru přirozených čísel a splňující charakteristickou vlastnost relace (obr. 2.5*b*).



Obrázek 2.5

2.4 Vlastnosti binárních relací

Definice. Nechť R je binární relace v množině M. Relace R se nazývá v M:

- *reflexivní* právě tehdy, když každý prvek množiny M je v relaci sám se sebou. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall x \in M \text{ platí, že } xRx$$

- *antireflexivní* právě tehdy, když žádný prvek množiny M není v relaci sám se sebou. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall x \in M \text{ platí, že } \neg(xRx)$$

- *symetrická* právě tehdy, když obsahuje s každou uspořádanou dvojicí $[x,\ y]$, také uspořádanou dvojici $[y,\ x]$. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall x, y \in M \text{ platí, že } xRy \Rightarrow yRx$$

- *antisymetrická* právě tehdy, když obsahuje nejvýše jednu z uspořádaných dvojic $[x,\ y]$, $[y,\ x]$. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall x, y \in M \text{ platí, že } (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

- *tranzitivní* právě tehdy, když pro každé tři prvky x, y, z z množiny M platí následující vlastnost. Pokud relace obsahuje obě z uspořádaných dvojic $[x,\ y]$, $[y,\ z]$, potom obsahuje i uspořádanou dvojici $[x,\ z]$. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall x, y, z \in M \text{ platí, že } (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

Jednotlivé vlastnosti binárních relací snadno poznáme z jejich grafického znázornění. Nejprve je třeba připomenout, co rozumíme termínem hlavní diagonála kartézského grafu relace R. Je-li dána kartézská soustava souřadnic v rovině, potom *hlavní diagonála* je množina všech bodů $[x, x]$, kde $x \in M$.

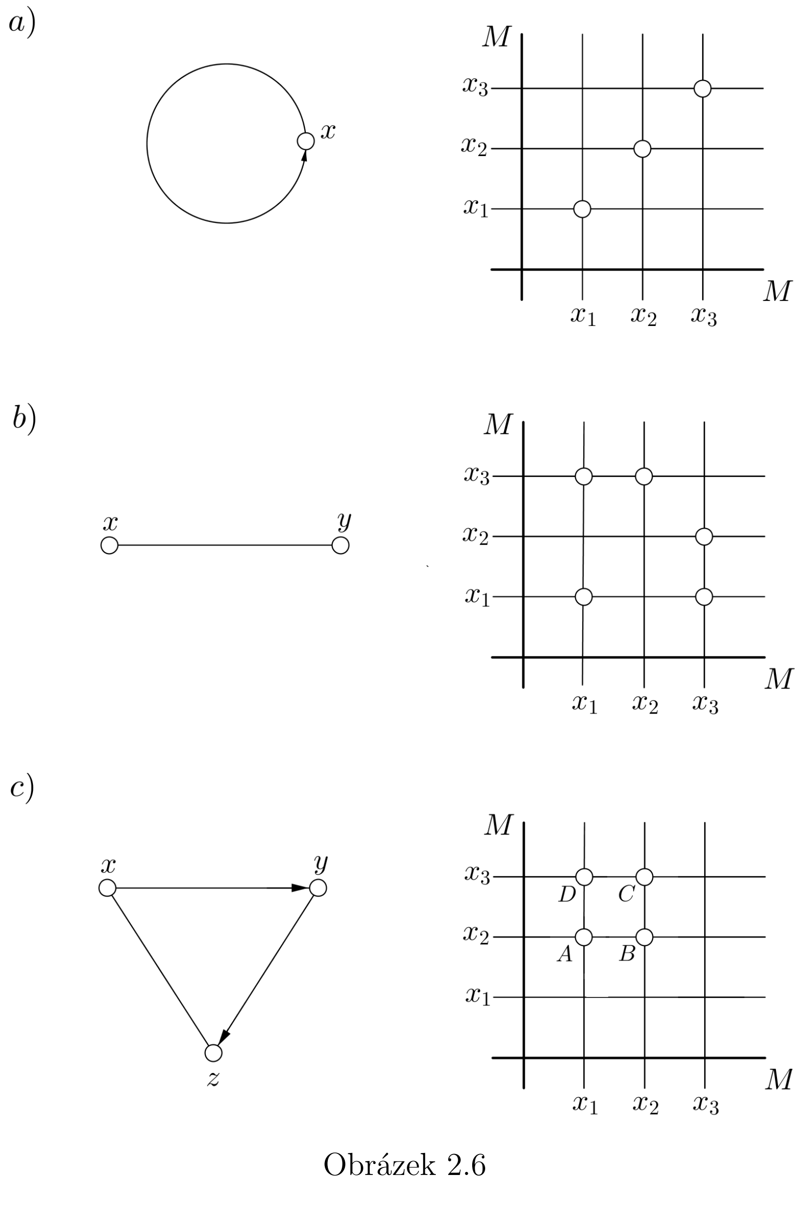
Reflexivní relace (obr. 2.6*a*) se v uzlovém grafu projeví tak, že každý uzel je opatřen smyčkou. V kartézském grafu reflexivní relace obsahuje všechny příslušné body hlavní diagonály.

Antireflexivní relace nemá ve svém uzlovém grafu žádný uzel opatřen smyčkou a kartézský graf neobsahuje žádný bod, který by náležel hlavní diagonále.

Symetrická relace (obr. 2.6*b*) se v uzlovém grafu projeví tak, že každé dva uzly jsou spojené neorientovanou hranou. Kartézský graf symetrické relace musí být osově souměrný podle hlavní diagonály.

Antisymetrická relace znázorněná uzlovým grafem neobsahuje žádné dva uzly spojené neorientovanou hranou. Kartézský graf antisymetrické relace obsahuje nejvýše jeden bod z každé dvojice (různých) bodů souměrně sdružených podle hlavní diagonály.

Tranzitivní relace (obr. 2.2c) se v uzlovém grafu rozpozná následovně. Pokud lze z nějakého uzlu x dospět do uzlu z po šipkách přes uzel y, musí existovat orientovaná hrana vedoucí přímo z uzlu x do uzlu z. V kartézském grafu se tranzitivní relace popisují obtížněji. Relace je tranzitivní, pokud pro každý rovnoběžník A, B, C, D takový, že jeho strany AB a CD jsou rovnoběžné s osou x a strany BC a AD rovnoběžné s osou y, platí následující. Pokud vrcholy A, C patří do grafu relace a zároveň vrchol B leží na hlavní diagonále, potom je vrchol D rovněž obrazem prvku dané relace. Mezi rovnoběžníky počítáme i degenerované útvary. Může se tak jednat o úsečku, které vznikne tak, že vrchol A splyne s vrcholem D a současně vrchol B splyne s vrcholem C (nebo obráceně). Případně úsečku, která vznikne pokud vrchol A splyne s vrcholem B a současně vrchol D splyne s vrcholem C (nebo obráceně). Jestliže splynou všechny čtyři vrcholy, potom se bude jednat o jeden jediný bod.



Obrázek 2.6

Mnoho relací již ze školské matematiky známe, aniž si to uvědomujeme. Například v oboru reálných čísel relace rovnosti a nerovnosti nebo v oboru přirozených čísel relace dělitelnosti. Na následujících příkladech si ukážeme vlastnosti těchto relací, které jsou definovány v úvodu kapitoly 2.4.

Příklad 2.4. Určete vlastnosti relace, která je relací rovnosti v množině celých čísel.

Řešení. Postupně budeme zkoumat jednotlivé vlastnosti relace dle definic. Není vždy nutné zkoumat všech pět výše uvedených vlastností. Pokud zjistíme, že je relace reflexivní, je jasné, že nemůže být antireflexivní. Podobně ukáže-li se, že je relace symetrická, nemůže být současně antisymetrická.

- $\forall\ a \in \mathbb{Z}$ platí, že $a = a$. *je reflexivní*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ platí, že $a = b \Rightarrow b = a$ *je symetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$ platí, že $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$ *je tranzitivní*

Příklad 2.5. Určete vlastnosti relace „je větší nebo rovno než" v množině přirozených čísel.

Řešení. Postupovat budeme obdobně jako v předchozím příkladu.

- $\forall\ a \in \mathbb{N}$ platí, že $a \geq a$ *je reflexivní*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$ neplatí, že $a \geq b \Rightarrow b \geq a$ *není symetrická*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $(a \geq b \wedge b \geq a) \Rightarrow a = b$ *je antisymetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ platí, že $(a \geq b \wedge b \geq c) \Rightarrow a \geq c$ *je tranzitivní*

Příklad 2.6. Určete vlastnosti relace $|a| \leq b$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $|a|$ značí absolutní hodnotu z čísla a.

Řešení. Postupovat budeme obdobně jako v předchozích příkladech.

- $\forall\ a \in \mathbb{R}$ neplatí, že $|a| \leq a$ *není reflexivní*

  (Například absolutní hodnota čísla -3 je 3, ale číslo 3 není menší nebo rovno číslu -3.)

- $\forall x \in \mathbb{R}$ neplatí, že $|a| > a$ *není antireflexivní*

  (Například absolutní hodnota čísla 3 je 3, ale číslo 3 není větší než číslo 3.)

- $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ neplatí, že $|a| \leq b \Rightarrow |b| \leq a$ *není symetrická*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ platí, že $(|a| \leq b \wedge |b| \leq a) \Rightarrow a = b$ *je antisymetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že $(|a| \leq b \wedge |b| \leq c) \Rightarrow |a| \leq c$ *je tranzitivní*

Příklad 2.7. Určete vlastnosti relace „je nejméně tak starý jako" v množině L, kde L je neprázdná množina lidí ve věku 15 - 26 let.

Řešení. Označme věk osoby x jako $|x|$.

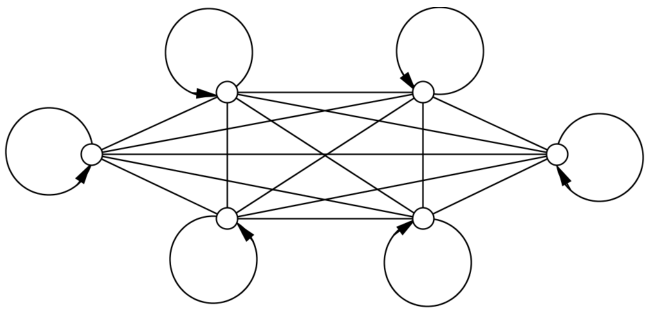
- $\forall\ a \in L$ platí, že $|a| \geq |a|$ *je reflexivní*
- $\forall\ a, b \in L$ neplatí, že $|a| \geq |b| \Rightarrow |b| \geq |a|$ *není symetrická*
- $\forall\ a, b \in L$ platí, že $(|a| \geq |b| \wedge |b| \geq |a|) \Rightarrow |a| = |b|$. *je antisymetrická*
- $\forall\ a, b, c \in L$ platí, že $(|a| \geq |b| \wedge |b| \geq |c|) \Rightarrow |a| \geq |c|$ *je tranzitivní*

2.5 Speciální typy relací

Ve školské matematice se uplatňují především takové relace, které mají současně několik z výše uvedených vlastností. Příkladem takových relací je ekvivalence, ostré (resp. neostré) uspořádání a zobrazení, resp. funkce.

2.5.1 Ekvivalence

Definice. Relace E v množině M se nazývá *ekvivalence* právě tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Uzlovým grafem znázorňujeme následovně (obr. 2.7).

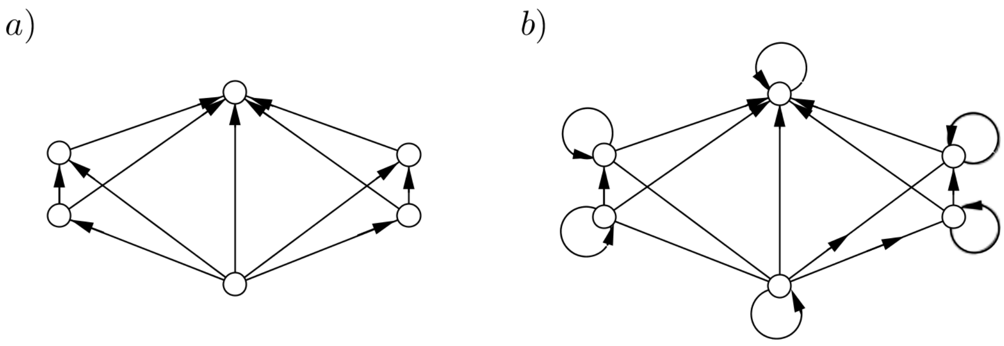


Obrázek 2.7

Poznámka. Relace rovnosti čísel v množině $\mathbb{Z}$ z předešlého příkladu č. 2.4, je příkladem ekvivalence.

2.5.2 Uspořádání

Definice. Relace U v množině M se nazývá *ostré uspořádání* právě tehdy, když je zároveň antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní (obr. 2.8a). Relace, která je současně reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá *neostré uspořádání* (obr. 2.8b).



Obrázek 2.8

Poznámka. Relace „je nejméně tak starý jako"v množině L z předešlého příkladu č. 2.7, je příkladem neostrého uspořádání. Příkladem ostrého uspořádání by byla relace „je starší než".

Příklad 2.8. Zjistěte, které relace jsou ekvivalence a které uspořádání.
(a) Relace $a|b$ (a dělí b) pro $a, b \in \mathbb{N}$,

(b) Relace $a \equiv b$ mod n (čísla a, b jsou kongruentní modulo n), $n \in \mathbb{N}$

(c) Relace „je menší nebo rovno" v množině $\mathbb{R}$.

Řešení. Postupovat budeme obdobně jako v příkladu 2.4, tj. budeme zkoumat jednotlivé vlastnosti relace dle definic.

(a) Nejprve připomeneme, co znamená $a|b$, pro $a, b \in \mathbb{N}$. Přirozené číslo a dělí přirozené číslo b, jestliže existuje takové přirozené číslo k, pro které platí, že $b = ka$.

- $\forall\ a \in \mathbb{N}$ platí, že $a|a$ — *je reflexivní*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$ neplatí, že $a|b \Rightarrow b|a$ — *není symetrická*

  (Například číslo 3 dělí číslo 6, ale neplatí, že číslo 6 dělí číslo 3.)
- $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $(a|b \wedge b|a) \Rightarrow a = b$ — *je antisymetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ platí, že $(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$ — *je tranzitivní*

Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, jedná se o ***neostré uspořádání***.

(b) Nejprve připomeneme, co znamená $a \equiv b \pmod{n}$. Čísla a, b jsou kongruentní modulo n, $n \in \mathbb{N}$ právě tehdy, když $a = b + nk$, pro nějaké celé číslo k. Jinými slovy čísla a, b jsou kongruentní modulo n, mají-li stejný zbytek po dělení číslem n. Značím $a \equiv b \pmod{n}$.

- $\forall\ a \in \mathbb{Z}$ platí, že $a \equiv a \pmod{n}$ — *je reflexivní*

- $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ platí, že $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ *je symetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$ platí, že $a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ *je tranzitivní*

Relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní, jedná se o ***ekvivalenci***.

(c)

- $\forall\ a \in \mathbb{R}$ platí, že $a \leq a$ *je reflexivní*
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ neplatí, že $a \leq b \Rightarrow b \leq a$ *není symetrická*

  (Například číslo 3 je menší nebo rovno 6, ale neplatí, že číslo šest je menší nebo rovno 3.)
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ platí, že $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b.$ *je antisymetrická*
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c.$ *je tranzitivní*

Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, jedná se o ***neostré uspořádání***.

Úloha 2.1. Doplňte relaci $E = \{[6,8],[8,4],[6,6],[8,8]\}$ v množině A minimálním počtem uspořádaných dvojic, abychom dostali relaci ekvivalence, je-li:

$a)$ $A = \{4, 6, 8\}$
$b)$ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

2.6 Konstrukce oboru racionálních čísel

Již jsme si ukázali, že příkladem ekvivalence je rovnost dvou reálných čísel. Při konstrukci racionálních čísel se využívá relace rovnosti dvou zlomků. Na základní škole jsme se nejdříve setkali s přirozenými a celými čísly a později se k nim připojila i čísla racionální. Jejich zavedení úzce souviselo s praktickým životem, například polovina koláče, třetina dortu atp. V odborné matematice se racionální čísla zavádí jako uspořádané dvojice dvou celých čísel (čitatele a jmenovatele), jejichž druhá složka je nenulová.

$$\text{Uspořádaná dvojice } [a, b] \text{, kde } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ určuje zlomek } \tfrac{a}{b}.$$

Není složité nahlédnout, že existuje více uspořádaných dvojic, které určují stejné racionální číslo. Například uspořádané dvojice [1, 2] a [2, 4] určují racionální číslo jedna polovina. Je tedy velice důležité nezaměňovat pojem zlomek s pojmem racionální číslo. Jedno racionální číslo může být vyjádřeno pomocí nekonečně mnoha zlomků. Tento problém vyřešíme pomocí binárních relací. Konkrétně pomocí relace ekvivalence, tzv. ekvivalence zlomků.

Definujeme relaci ekvivalence R mezi množinami $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ předpisem $[a,b]R[c,d]$ právě tehdy, když $ad = bc$. Nejprve ověříme, zda se opravdu jedná o relaci ekvivalence, tj. zda-li je relace reflexivní, symetrická a tranzitivní. Reflexivita je zřejmá, každý prvek je v relaci sám se sebou $ab = ab$. Symetrie plyne z komutativity násobení $ab = ba$ a tranzitivitu ověříme. Pokud $[a,b]R[c,d]$ a zároveň $[c,d]R[e,f]$, tak musí platit, že $[a,b]R[e,f]$. Rozepíšeme si nejprve jednotlivé vztahy a po vyřešení soustavy rovnic je zřejmé, že uvedený vztah platí.

$$(ab = cd \wedge cd = ef) \Rightarrow ab = ef$$

Nyní řekneme, že všechny uspořádané dvojice, které jsou spolu v relaci, určují stejné racionální číslo.

Toto je jen část zavedení racionálních čísel, abychom konstrukci dokončili, museli bychom definovat další pojmy a operace. Tomu se však v této práci věnovat nebudeme.

2.7 Využití binárních relací v geometrii na SŠ

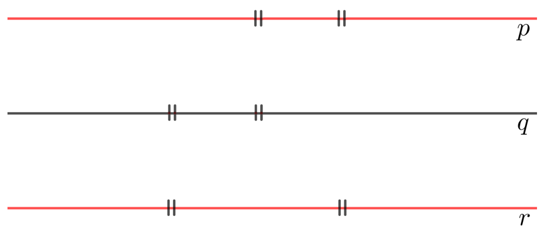
Aniž bychom si to možná uvědomovali, s relacemi se setkáváme i v geometrii. Například rovnoběžnost a kolmost přímek v rovině je příkladem relace. Dalšími příklady, které si uvedeme, budou shodnost a podobnost trojúhelníků v rovině.

2.7.1 Rovnoběžnost

Rovnoběžnost dvou přímek v rovině je binární relace v množině všech přímek roviny, která má následující vlastnosti.

- je reflexivní
- je symetrická
- je tranzitivní

Rovnoběžné přímky se nazývají takové přímky, které buď nemají žádný společný bod, nebo mají všechny body společné. První dvě vlastnosti jsou tedy zřejmé. Každá přímka je rovnoběžná sama se sebou (reflexivita), neboť má sama se sebou všechny body společné. Dále víme, že pokud jsou p a q dvě různé rovnoběžné přímky, tak nemají žádný společný bod a nezáleží na pořadí těchto přímek. Každé dvě přímky si jsou tedy rovnoběžné navzájem (symetrie).



Obrázek 2.9

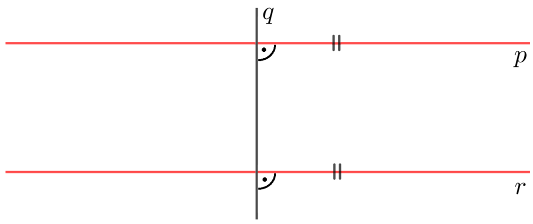
Na obrázku 2.9 se můžeme přesvědčit i o poslední vlastnosti, tj. relace je tranzitivní. Uvažujeme-li tři různé přímky p, q, r a jsou-li přímky p, q rovnoběžné a současně i přímky q, r rovnoběžné, pak žádné dvě přímky nemají společný bod (tedy ani přímky p, r nemají společný bod), tj. přímky p, r jsou rovnoběžné.

2.7.2 Kolmost

Kolmost dvou přímek v rovině je binární relace v množině všech přímek roviny, která má následující vlastnosti.

- je antireflexivní
- je symetrická

Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, je-li jejich odchylka 90 stupňů. Relace je tedy antireflexivní, protože pro všechny přímky v rovině platí, že **nejsou** v relaci samy se sebou. Odchylka dvou totožných přímek je 0°, nikoliv 90°. Dále je relace symetrická, protože při určování odchylky dvou přímek nezáleží na jejich pořadí. Na následujícím obrázku 2.10 je patrné, proč tato relace není tranzitivní. Je-li přímka p kolmá k přímce q a současně přímka q kolmá k přímce r, potom přímky p a r nemusí být kolmé.



Obrázek 2.10

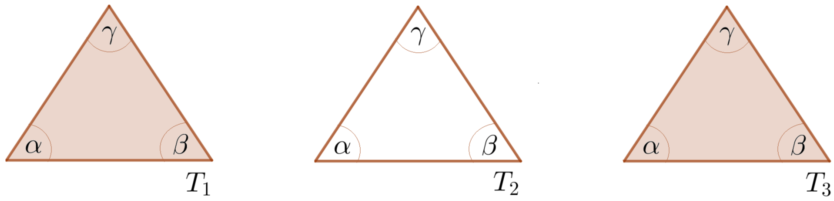
2.7.3 Shodnost

Shodnost dvou trojúhelníků v rovině je binární relace v množině všech trojúhelníků roviny, která má následující vlastnosti.

- je reflexivní
- je symetrická
- je tranzitivní

Na obrázku 2.11 jsou znázorněny tři shodné trojúhelníky. Shodné trojúhelníky mají stejné délky odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si vnitřních úhlů. O výše uvedených vlastnostech tedy není těžké rozhodnout. Každý trojúhelník je shodný sám se sebou, tj. relace je reflexivní. Dále platí symetrie, protože u shodnosti nezáleží na pořadí trojúhelníků. Pokud je trojúhelník T_1 shodný s T_2, potom je i trojúhelník T_2 shodný s T_1.

O poslední vlastnosti, tj. relace je tranzitivní, se přesvědčíme na následujícím obrázku 2.11. Jestliže jsou trojúhelníky T_1 a T_2 shodné (tj. mají stejné délky odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si vnitřních úhlů) a zároveň jsou shodné i trojúhelníky T_2 a T_3, tak potom jsou shodné i trojúhelníky T_1 a T_3.



Obrázek 2.11

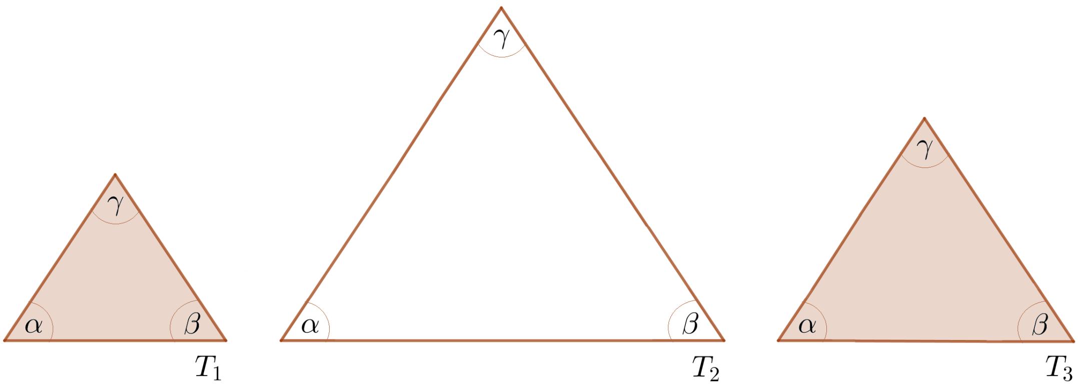
2.7.4 Podobnost

Podobnost dvou trojúhelníků v rovině je binární relace v množině všech trojúhelníků roviny, která má následující vlastnosti.

- je reflexivní
- je symetrická
- je tranzitivní

Na obrázku 2.12 jsou znázorněny tři podobné trojúhelníky. Podobné trojúhelníky se nazývají takové trojúhelníky, které mají stejné poměry délek odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si úhlů. Každý trojúhelník je tedy podobný sám se sebou, tj. relace je reflexivní. Dále platí symetrie, protože pokud jsou stejné poměry délek odpovídajících si stran trojúhelníku T_1 s T_2, potom jsou stejné i poměry délek odpovídajících si stran trojúhelníku T_2 s T_1.

O poslední vlastnosti, tj. relace je tranzitivní, se přesvědčíme na následujícím obrázku 2.12. Jestliže jsou trojúhelníky T_1 a T_2 podobné (tj. mají stejné poměry délek odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si úhlů) a zároveň jsou podobné trojúhelníky T_2 a T_3, pak jsou podobné i trojúhelníky T_1 a T_3.



Obrázek 2.12

Poznámka. Jak plyne z výše uvedených vlastností, rovnoběžnost přímek v rovině a shodnost i podobnost trojúhelníků v rovině jsou relace ekvivalence.

3. Zobrazení

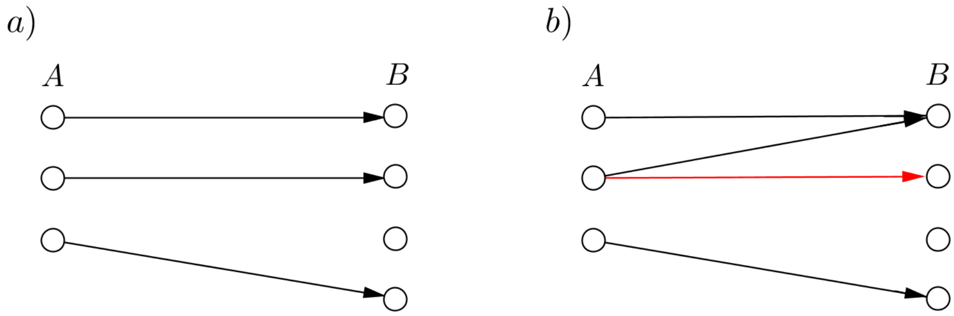
Definice. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Binární relace f mezi množinami A, B se nazývá zobrazení množiny A do množiny B právě tehdy, když ke každému prvku x z množiny A existuje právě jedno y z množiny B takové, že uspořádaná dvojice $[x, y]$ patří do relace f. Značíme $f : A \to B$ a symbolicky zapisujeme:

$$\forall x \in A\ \exists! y \in B\colon [x,\ y] \in f.$$

- Množina A se nazývá *definiční obor zobrazení*. Zapisujeme symbolem $D(f)$.
- Množina B se nazývá *obor hodnot zobrazení*. Zapisujeme symbolem $H(f)$.
- Namísto symbolu $[x,\ y] \in f$ můžeme psát $y = f(x)$.
- Je-li uspořádaná dvojice $[x,\ y]$ prvkem zobrazení f, potom první složku x této uspořádané dvojice budeme nazývat *vzorem* a druhou složku y *obrazem* prvku x v zobrazení f.

Poznámka. Je-li speciálně $A = B$, budeme zobrazení množiny A do množiny B nazývat *zobrazení v množině A*.

Zda-li daná relace je zobrazení, snadno poznáme z jejího uzlového grafu. Z každého uzlu množiny A musí vycházet právě jedna orientovaná hrana. Uzlové grafy na obr. 3.1 ilustrují relaci, která je (resp. není) zobrazení. Pro dvě množiny A a B je na obr. 3.1a znázorněno zobrazení množiny A do množiny B. Relace na obr. 3.1b není zobrazení. Pokud bychom ovšem odstranili červeně vyznačenou orientovanou hranu, potom by se jednalo o zobrazení množiny A do množiny B.



Obrázek 3.1

Příklad 3.1. Jsou dány množiny $A = \{1,\ 2\ ,3\}$, $B = \{4,\ 8,\ 10\}$. Rozhodněte, zda relace $R = \{[1,\ 4],\ [2,\ 8],\ [2,\ 10],\ [3,\ 4]\}$ je zobrazení množiny A do množiny B.

Řešení. Naším úkolem je zjistit, zda daná relace splňuje definici zobrazení, tedy zda ke každému prvku množiny A existuje právě jeden prvek z množiny B. Zkoumáme-li postupně jednotlivé prvky, zjišťujeme, že podmínka není splněna pro prvek 2. Prvek 2 tvoří uspořádanou dvojici s prvkem 8 a zároveň s prvkem 10. Relace R tedy není zobrazení množiny A do množiny B.

Příklad 3.2. Určete definiční obor a obor hodnot zobrazení f:

$$f : \{[0, 3], [3, 19], [5, 6], [10, 5], [17, 20]\}$$

Řešení.

$$D(f) = \{0, 3, 5, 10, 17\}, H(f) = \{3, 5, 6, 19, 20\}$$

Poznámka. Na střední škole se setkáváme například s geometrickými zobrazeními, konkrétně se shodným a podobným zobrazením v rovině.

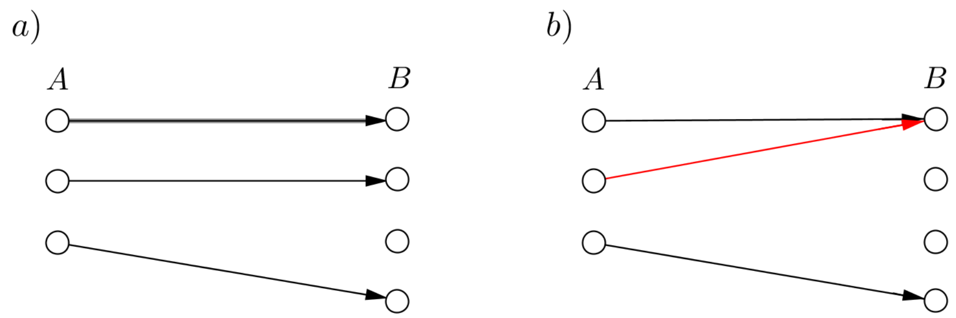
3.1 Vlastnosti zobrazení

Základními vlastnostmi zobrazení je injektivnost, surjektivnost a bijektivnost.

Definice. *Zobrazení* f: $A \to B$ nazveme *prosté* (*injektivní zobrazení*) množiny A do množiny B právě tehdy, když každé dva různé vzory mají různé obrazy v zobrazení f. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall a_1,\ a_2 \in A\colon\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Zda-li se jedná o injektivní zobrazení snadno poznáme z uzlového grafu. Do každého uzlu množiny B může vstupovat nejvýše jedna orientovaná hrana. Uzlové grafy na obr. 3.2 ilustrují zobrazení, které je (resp. není) prosté.



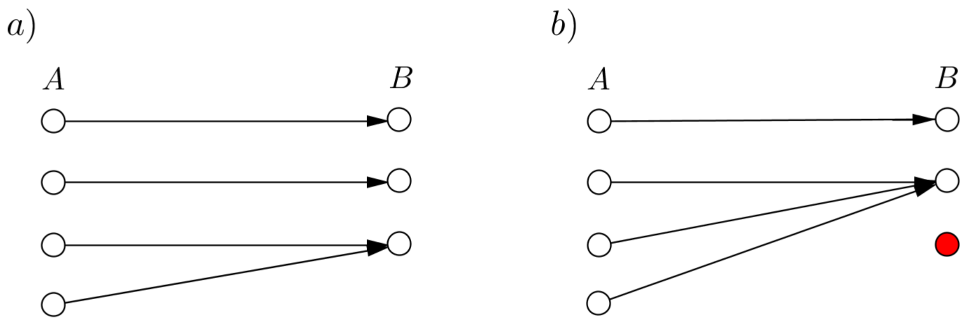
Obrázek 3.2

Pro dvě množiny A a B je na obr. 3.2a znázorněno prosté zobrazení množiny A do množiny B. Zobrazení na obr. 3.2b není prosté. Pokud by červeně orientovaná hrana vstupovala do druhého či třetího uzlu, potom by se i v tomto případě jednalo o prosté zobrazení množiny A do množiny B.

Definice. Zobrazení f: $A \to B$ nazveme *zobrazení* A *„na"* B (*surjektivní*), jestliže každý prvek množiny B má alespoň jeden vzor. Symbolicky zapisujeme:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A\colon\ f(a) = b.$$

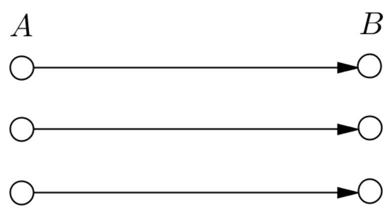
Uzlové grafy na obr. 3.3 ilustrují zobrazení, které je (resp. není) surjektivní. Aby bylo zobrazení surjektivní, musí do každého uzlu množiny B vstupovat aspoň jedna orientovaná hrana. Pro dvě množiny A a B je na obr. 3.3a znázorněno surjektivní zobrazení množiny A na množinu B. Zobrazení na obr. 3.3b není



Obrázek 3.3

surjektivní. Do červeně vyznačeného uzlu nevstupuje žádná orientovaná hrana. Pokud bychom tento prvek množiny B odstranili, potom by se i v tomto případě jednalo o surjektivní zobrazení množiny A na množinu B.

Definice. *Zobrazení* $f\colon A \to B$ nazveme *vzájemně jednoznačné* (*bijektivní zobrazení*), právě tehdy, když f je prosté a zároveň „na“, tj. injektivní a surjektivní.



Obrázek 3.4

Uzlový graf na obr. 3.4 ilustruje bijektivní zobrazení. Do každého uzlu směřuje právě jedna orientovaná hrana.

Příklad 3.3. Jsou dány množiny $C = \{1,\ 2,\ 7\}$, $D = \{5,\ 9\}$. Najděte všechna zobrazení $f\colon C \to D$ a rozhodněte, zda jsou injektivní, surjektivní nebo bijektivní.

Řešení. Nejprve se podíváme, jak bude vypadat kartézský součin množin C, D.

$$C \times D = \{[1,\ 5],\ [1,\ 9],\ [2,\ 5],\ [2,\ 9],\ [7,\ 5],\ [7,\ 9]\}$$

Nyní dle definice najdeme všechny zobrazení f. Tedy všechny podmnožiny kartézského součinu $C \times D$, které vyhovují vlastnostem zobrazení.

$$f_1 : \{[1,\ 5],\ [2,\ 5],\ [7,\ 5]\}$$

$$f_2 : \{[1,\ 5],\ [2,\ 5],\ [7,\ 9]\}$$

$$f_3 : \{[1,\ 9],\ [2,\ 5],\ [7,\ 5]\}$$

$$f_4 : \{[1,\ 9],\ [2,\ 5],\ [7,\ 9]\}$$

$$f_5 : \{[1,\ 5],\ [2,\ 9],\ [7,\ 5]\}$$

$$f_6 : \{[1,\ 5],\ [2,\ 9],\ [7,\ 9]\}$$

$$f_7 : \{[1,\ 9],\ [2,\ 9],\ [7,\ 9]\}$$

$$f_8 : \{[1,\ 9],\ [2,\ 9],\ [7,\ 5]\}$$

Zobrazení f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 jsou surjektivní a nejsou injektivní. Zobrazení f_1 a f_7 nejsou ani surjektivní ani injektivní. Z toho plyne, že žádné ze zobrazení není bijektivní.

Příklad 3.4. Jsou dány množiny $A = \{5,\ 8\}$, $B = \{a,\ c\}$. Najděte všechna bijektivní zobrazení $f\colon A \to B$.

Řešení. Zobrazení f je bijektivní pokud každému obrazu odpovídá právě jeden vzor.

$$f_1 : \{[5,\ a],\ [8,\ c]\}$$

$$f_2 : \{[5,\ c],\ [8,\ a]\}$$

V následující kapitole se budeme krátce věnovat speciálním typům zobrazení - funkcím. Vztahy mezi binární relací, zobrazením a funkcí shrneme pomocí následujícího schématu (obr. 3.5). Toto schéma zachycuje, že každá funkce je zobrazení a každé zobrazení je binární relace. Obráceně to však neplatí. Existují příklady binárních relací, které nejsou zobrazení (viz příklad 3.1 a 3.5) a také příklady zobrazení, které nejsou funkce. Například geometrická zobrazení v rovině, jejichž předpis libovolnému bodu X roviny přiřazuje jako jeho obraz právě jeden bod X' téže roviny, není funkce, neboť jde o zobrazení v rovině, ne v množině reálných čísel.

Obrázek 3.5

3.2 Inverzní zobrazení

Definice. Nechť relace f je prosté zobrazení množiny A do B. Zobrazení f^{-1} definované jako inverzní relace k relaci f nazveme *inverzní zobrazení*.

Poznámka. Předpoklad, že zobrazení f je injektivní, je důležitý. Pokud by nebylo injektivní, potom by inverzní zobrazení vůbec nebylo zobrazením, jen relací.

Pro inverzní zobrazení platí:

$$D(f^{-1}) = H(f)$$

$$H(f^{-1}) = D(f)$$

3.3 Funkce a funkce inverzní

Definice. Každé zobrazení f: $A \to B$, kde A, $B \subset \mathbb{R}$ se nazývá *funkce.*

- Množina A se nazývá *definiční obor funkce.* Zapisujeme symbolem $D(f)$.
- Množina všech y z B, ke kterým existuje x z A tak, že $[x, y] \in f$, se nazývá *obor hodnot funkce f.* Označujeme symbolem $H(f)$.
- Číslo $f(x_0)$ se nazývá *funkční hodnota funkce* f v bodě x_0, $x_0 \in A$.

Poznámka. Jelikož je funkce speciálním případem zobrazení, odpovídá definiční obor a obor hodnot funkce definičnímu oboru a oboru hodnot tohoto zobrazení.

Příklad 3.5. Rozhodněte, zda relace $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x \geq -1 \land y^2 = x + 1\}$ je funkce.

Řešení. Naším úkolem je zjistit, zda relace R splňuje definici funkce. Tedy zda ke každému reálnému x existuje právě jedno y takové, že $[x,\ y] \in R$. Budeme řešit rovnici:

$$y^2 = x + 1$$

$$y = \pm\sqrt{x+1}$$

Pro $x = -1$ je $y = 0$ a podmínka je splněna. Problém nastává pro $x > -1$. V tomto případě nabývá x dvou různých hodnot y. Relace R proto není funkcí.

Inverzní funkce

Definice. Nechť f je prostá funkce na množině D, která je podmnožinou $\mathbb{R}$. Funkci f^{-1} definovanou jako inverzní zobrazení k zobrazení f nazveme inverzní funkce k funkci f.

3.4 Elementární funkce

V této kapitole připomeneme nejjednodušší elementární funkce a jejich grafy, které budeme dále užívat při řešení úloh v kapitole 4 a 5.

3.4.1 Lineární funkce

Definice. *Lineární funkce* je každá funkce f s $D(f) = \mathbb{R}$, která je dána předpisem

$$f : y = ax + b,$$

- kde a, b jsou reálná čísla.

Grafem lineární funkce je přímka.

3.4.2 Lineární lomená funkce

Definice. *Lineární lomená funkce* je každá funkce f s $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\text{-}\frac{d}{c}\}$, která je dána předpisem

$$f:\ y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

- kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Grafem lineární lomené funkce je hyperbola.

3.4.3 Kvadratická funkce

Definice. *Kvadratická funkce* je každá funkce f s $D(f) = \mathbb{R}$, která je dána předpisem

$$f : y = ax^2 + bx + c,$$

- kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$.

Grafem kvadratické funkce je parabola.

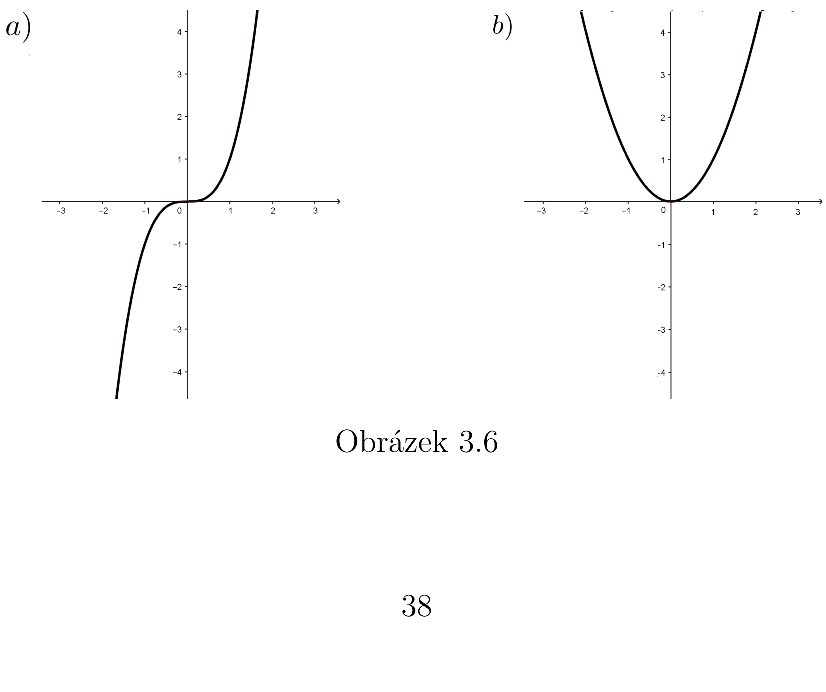
3.4.4 Mocninná funkce s přirozeným exponentem

Definice. *Mocninná funkce s přirozeným exponentem* n je každá funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, která je dána předpisem

$$f : y = x^n,$$

- kde n je přirozené číslo, $n \neq 1$. (pro $n = 1$ se jedná o lineární funkci $y = x$)

Tvar grafu této funkce se liší v závislosti na tom, zda je n liché, např. $y = x^3$ (obr. 3.6a) nebo sudé, např. $y = x^2$ (obr. 3.6b).



Obrázek 3.6

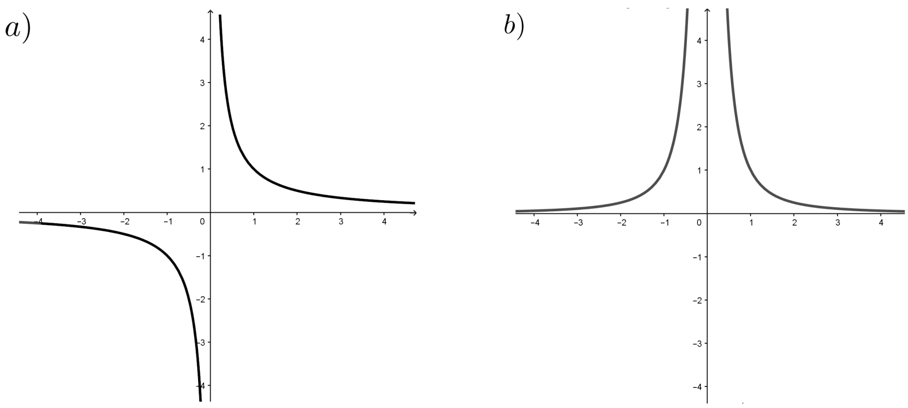
3.4.5 Mocninná funkce s celým záporným exponentem

Definice. *Mocninná funkce s celým záporným exponentem* je každá funkce f s $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, která je dána předpisem

$$f : y = x^n,$$

- kde n je záporné celé číslo.

Tvar grafu této funkce se liší v závislosti na tom, zda je n liché, např. $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ (obr. 3.7a) nebo sudé, např. $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (obr. 3.7b).



Obrázek 3.7

3.4.6 Funkce druhá a třetí odmocnina

Druhá a třetí odmocnina

Než zavedeme funkci druhá a třetí odmocnina, nejprve si připomeneme, co je druhá a třetí odmocnina z daného čísla.

Definice. *Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla* x je takové nezáporné reálné číslo y, pro které platí: $y^2 = x$. Píšeme $y = \sqrt{x}$.

Definice. *Třetí odmocnina z nezáporného reálného čísla* x je takové nezáporné reálné číslo y, pro které platí: $y^3 = x$. Píšeme $y = \sqrt[3]{x}$.

Funkce druhá a třetí odmocnina

Omezíme-li pro funkci $f : y = x^2$, definiční obor jen na tu část, kde je funkce prostá, konkrétně $D(f) = \langle 0,\infty)$, můžeme určit funkci inverzní.

Definice. *Funkce druhá odmocnina* je inverzní k mocninné funkci $f : y = x^2$, $x \in \langle 0,\infty)$. Zapisujeme ve tvaru:

$$f^{-1} : y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Definice. *Funkce třetí odmocnina* je inverzní k mocninné funkci $f : y = x^3, x \in \mathbb{R}$. Zapisujeme ve tvaru:

$$f^{-1} : y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

Poznámka. Funkce daná předpisem $y = x^3$ je prostá na celém svém definičním oboru, proto pro určení funkce inverzní můžeme uvažovat definiční obor $\mathbb{R}$. Na rozdíl od druhé odmocniny je tedy možné zavést třetí odmocninu i pro záporná čísla. V tom případě ale nemůžeme pro výpočty hodnot používat pravidla pro počítání s odmocninami.

3.4.7 Funkce absolutní hodnota

Dříve než zavedeme funkci absolutní hodnota, připomeneme si pojem absolutní hodnota reálného čísla.

Definice. *Absolutní hodnota reálného čísla* x je číslo $|x|$, pro které platí:

Je-li $x \geq 0$, potom je $|x| = x$.

Je-li $x < 0$, potom je $|x| = -x$.

Definice. *Funkce absolutní hodnoty* je taková funkce f s $D(f) = \mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = |x|$.

Poznámka. Pokud by charakteristická vlastnost měla tvar $|y| = x$, jedná se o binární relaci, která není funkcí. Proměnná x nabývá dvou různých hodnot y, což nesplňuje definici funkce.

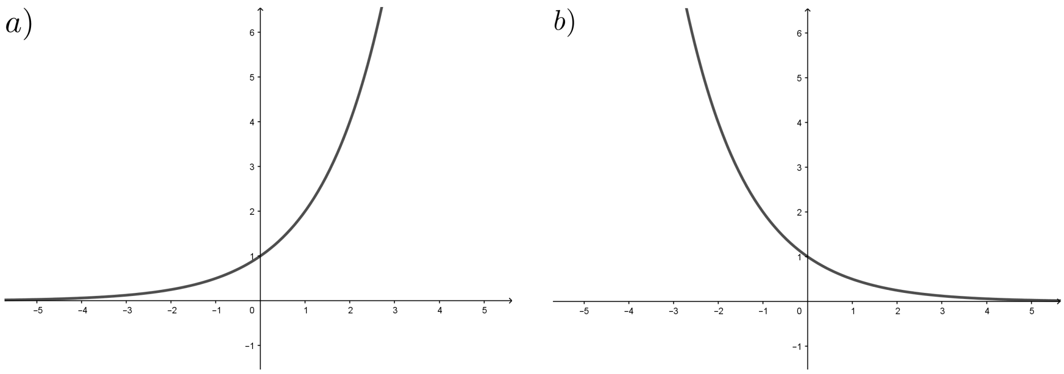
3.4.8 Exponenciální funkce

Definice. *Exponenciální funkce o základu* a je každá funkce f s $D(f) = \mathbb{R}$, která je dána předpisem

$$f : y = a^x,$$

- kde a je kladné reálné číslo, $a \neq 1$.

Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka. Tvar grafu této funkce se liší v závislosti na tom, zda $a > 1$, např. $y = 2^x$ (obr. 3.8a) nebo $0 < a < 1$, např. $y = (\frac{1}{2})^x$ (obr. 3.8b).



Obrázek 3.8

3.4.9 Logaritmická funkce

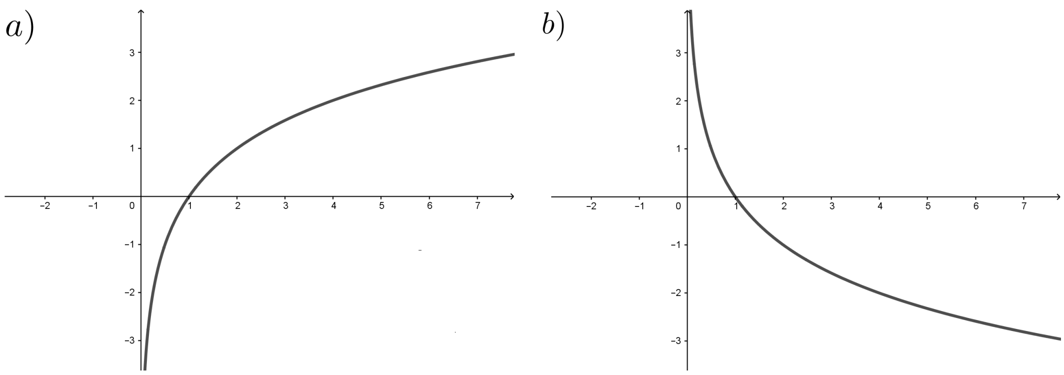
Definice. *Logaritmická funkce o základu a* je funkce f inverzní k exponenciální funkci s předpisem $y = a^x$, zapisujeme ve tvaru:

$$f : y = \log_a x,$$

- kde a je kladné reálné číslo, $a \neq 1$.

Poznámka. Platí: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Grafem logaritmické funkce je logaritmická křivka. Tvar grafu této funkce se liší v závislosti na tom, zda $a > 1$, např. $y = \log_2 x$ (obr. 3.9a) nebo $0 < a < 1$, např. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (obr. 3.9b).



Obrázek 3.9

Dále předpokládáme znalost sestrojování grafů uvedených funkcí.

4. Řešené příklady

Dále uvažujeme relace v $\mathbb{R}$, jejichž charakteristické vlastnosti jsou obvykle vyjádřeny ve tvaru rovnic nebo nerovnic o jedné či dvou neznámých $x, y \in \mathbb{R}$. Ke grafickému řešení úloh se využívají konstrukce přímek, parabol, hyperbol, exponenciálních křivek, logaritmických křivek a dalších grafů funkcí uvedených v kapitole 3. Dále se předpokládá znalost sestrojení kružnice dané středem a poloměrem.

Pokud předpis relace obsahuje více podmínek, postupujeme následovně (viz příklad 2.4). Vypíšeme si postupně všechny podmínky a krok po kroku každou graficky znázorníme. Grafem binární relace je množina všech bodů $[x, y]$ v rovině, které splňují všechny dílčí podmínky. Pro větší názornost jsou dílčí podmínky v řešení úloh a odpovídající části grafu relace vyznačeny stejnou barvou.

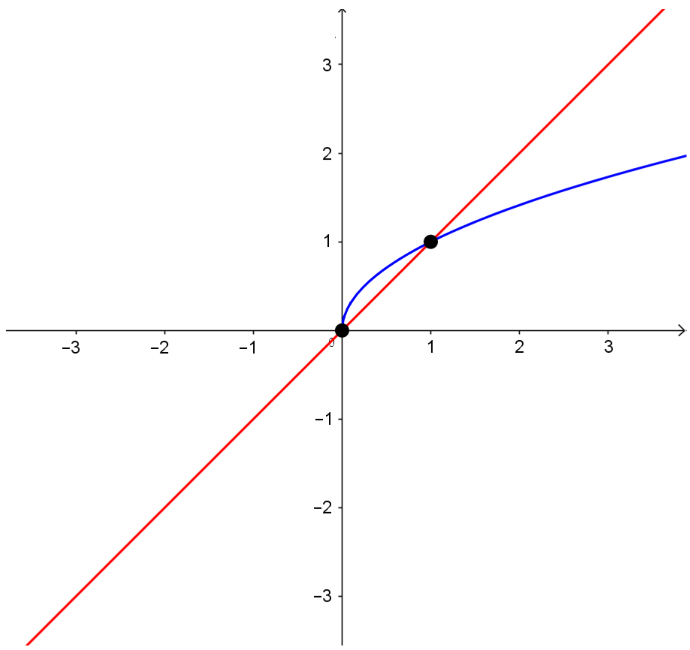
Příklad 4.1. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = x \wedge y = \sqrt{x}\}.$$

Řešení. Postupně znázorníme množiny:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = x\} \text{ a } \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = \sqrt{x}\}.$$

Nejprve sestrojíme graf funkce dané předpisem $y = x$. Jedná se o přímku na obrázku 4.1. Následně sestrojíme graf funkce dané předpisem $y = \sqrt{x}$. Řešením je průnik těchto křivek, tj. $A = \{[0, 0], [1, 1]\}$. Na obrázku 4.1 je tato relace znázorněna plnými černými kolečky.

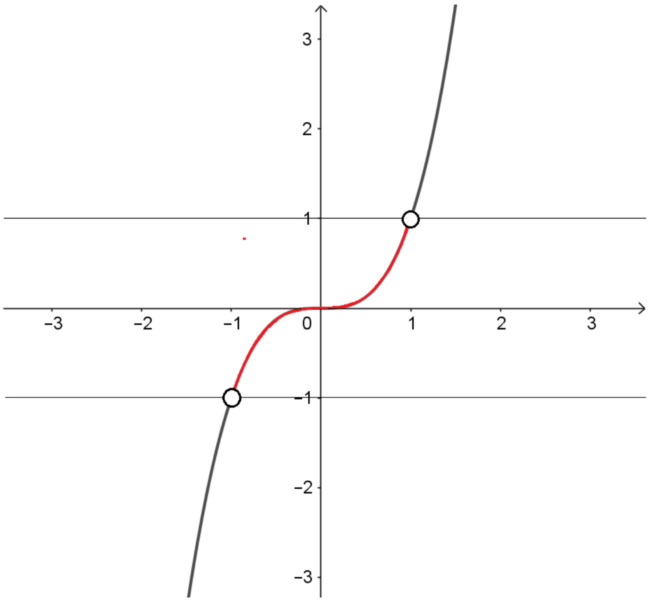


Obrázek 4.1

Příklad 4.2. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = x^3 \ \wedge \ -1 < y < 1\}.$$

Řešení. Sestrojíme graf funkce dané předpisem $y = x^3$. Řešením je ta část křivky (obr 4.2), pro jejíž body platí, že jejich y-ová souřadnice je z intervalu $(-1, 1)$.

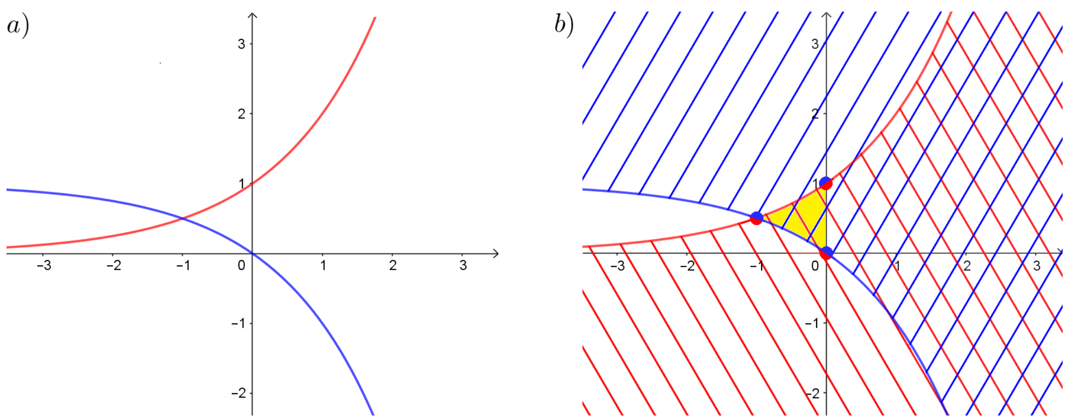


Obrázek 4.2

Příklad 4.3. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \ y \leq 2^x \ \wedge \ y \geq -2^x + 1 \ \wedge \ -1 \leq x \leq 0\}.$$

Řešení. Charakteristická vlastnost se skládá ze tří podmínek. Nejprve sestrojíme hraniční křivky dané předpisem $y = 2^x$ a $y = -2^x + 1$ (obr. 4.3a). Dále zakreslíme ty části roviny, pro jejíchž body platí, že jejich souřadnice splňují podmínky $y \leq 2^x$ a $y \geq -2^x+1$. Řešením je průnik těchto částí roviny pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$. Na obrázku 4.3$b$ je graf relace C znázorněn žlutou barvou. Do grafu patří i vyznačené "vrcholové"body a hranice útvaru.

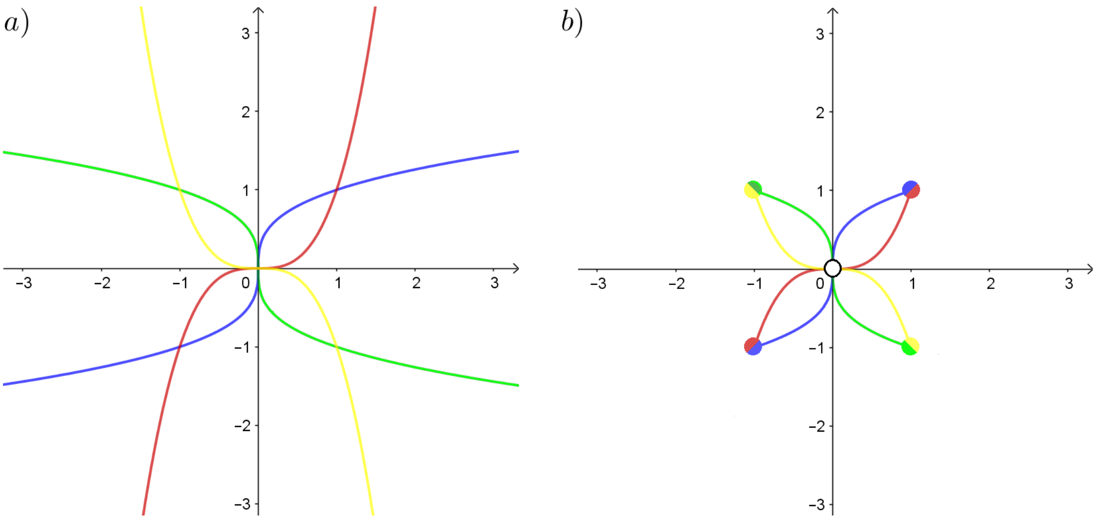


Obrázek 4.3

Příklad 4.4. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$D = \{[x, y] \in \langle -1,1\rangle^2,\ y = x^3 \ \vee\ y = -x^3 \ \vee\ y = \sqrt[3]{x} \ \vee\ y = -\sqrt[3]{x} \wedge x \neq 0\}.$$

Řešení. Charakteristická vlastnost se skládá ze čtyř podmínek. Nejprve sestrojíme grafy funkcí $y = x^3$ a $y = -x^3$. Tyto křivky jsou souměrné sdružené podle počátku. Dále zakreslíme grafy funkcí $y = \sqrt[3]{x}$ a $y = -\sqrt[3]{x}$. Tyto křivky jsou také souměrně sdružené podle počátku. Vzhledem k tomu, že je charakteristická vlastnost binární relace D zadaná pomocí logické spojky *nebo*, řešením je sjednocení těchto křivek (obr. 4.4*a*). Binární relace D je podmnožinou kartézského součinu $\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$, a proto musíme řešení omezit jen pro $x, y \in \langle -1,1\rangle$. Graf binární relace D je sestrojen na obr. 4.4*b*. Na závěr ještě musíme uvážit podmínku, že $x \neq 0$ a tedy vyloučit bod $[0, 0]$ z grafického řešení relace D. Tento bod je proto na obrázku 4.4*b* znázorněn pomocí prázdného kolečka.



Obrázek 4.4

Příklad 4.5. Sestrojte graf binární relace $E = (E_1 \cup E_2) \cap E_3$.

$$E_1 = \{[x, y] \in (R^+)^2, y \geq \tfrac{1}{x}\},$$
$$E_2 = \{[x, y] \in (R^-)^2, y \leq \tfrac{1}{x}\},$$
$$E_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 4\}.$$

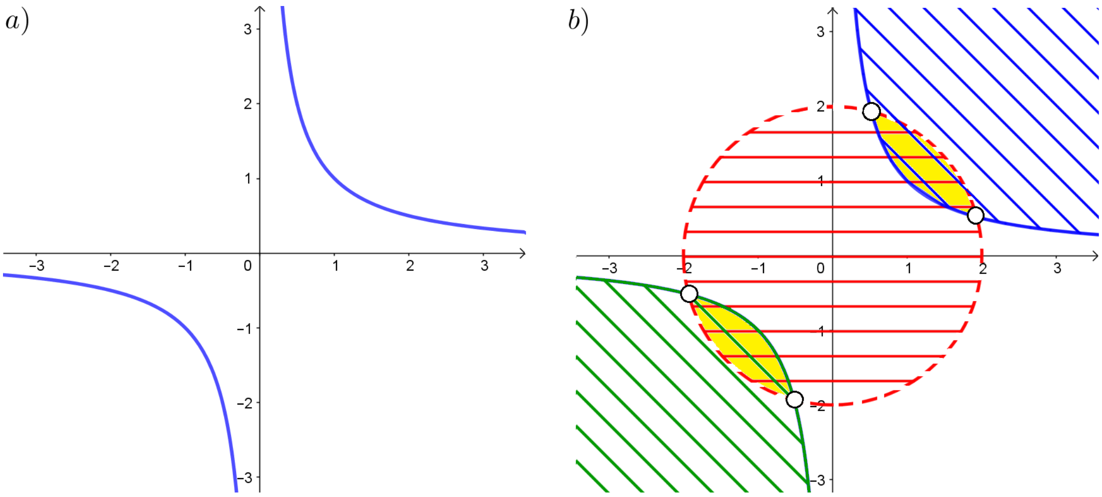
Řešení. Nejprve znázorníme relace E_1 a E_2, k čemuž využijeme graf lineární lomené funkce dané předpisem $y = \frac{1}{x}$. Grafem této funkce je hyperbola na obrázku 4.5*a*. Dále vyšrafujeme jen ty části roviny, které splňují zadané charakteristické vlastnosti (obr. 4.5*b*). Pro kladná x vyznačíme tu část roviny, pro která je $y \geq \frac{1}{x}$ a pro záporná x tu část roviny, pro které je $y \leq \frac{1}{x}$.

Nyní znázorníme relaci E_3. K řešení využijeme znalosti kuželoseček, a to konkrétně rovnici kružnice ve středovém tvaru.

Rovnici kružnice k se středem $S = [m, n]$ a poloměrem r je možné zapsat ve tvaru:

$$k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Grafem binární relace E_3, určené předpisem $x^2 + y^2 < 4$ jsou vnitřní body kruhu, jehož hranici tvoří kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Vzhledem k tomu, že je charakteristické vlastnost binární relace E_3, určená pomocí ostré nerovnosti, nepatří body kružnice do výsledné relace E. Binární relace E, která vznikne jako průnik relace E_1, E_2 a E_3 je na obr. 4.5b znázorněna žlutou barvou.



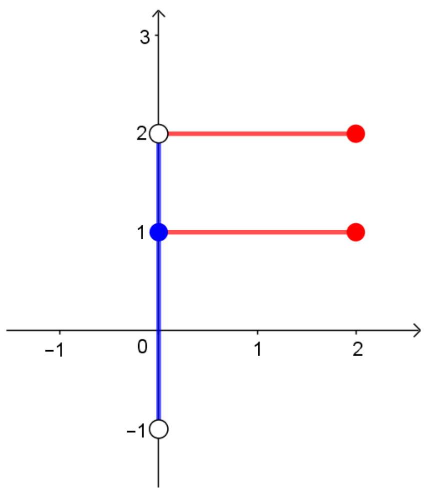
Obrázek 4.5

Příklad 4.6. Sestrojte graf binární relace $F = F_1 \cup F_2$.

$$F_1 = \{[x, y] \in (0, 2\rangle^2, y = 1 \vee y = 2\},$$

$$F_2 = \{[x, y] \in (-1, 2)^2, x = 0\}.$$

Řešení. Grafem binární relace F_1 jsou dvě rovnoběžné úsečky. Jejich krajní body [0, 1] a [0, 2] nepatří do grafu binární relace F_1, a naopak body [2, 1] a [2, 2] do F_1 patří. Grafem binární relace F_2 je úsečka (bez krajních bodů), která prochází bodem [0, 1] a je na předchozí dvě úsečky kolmá. Graf binární relace F vznikne jako sjednocení grafů relace F_1 a F_2 (obr. 4.6).



Obrázek 4.6

Příklad 4.7. Sestrojte graf binární relace $G = H \cup I$.

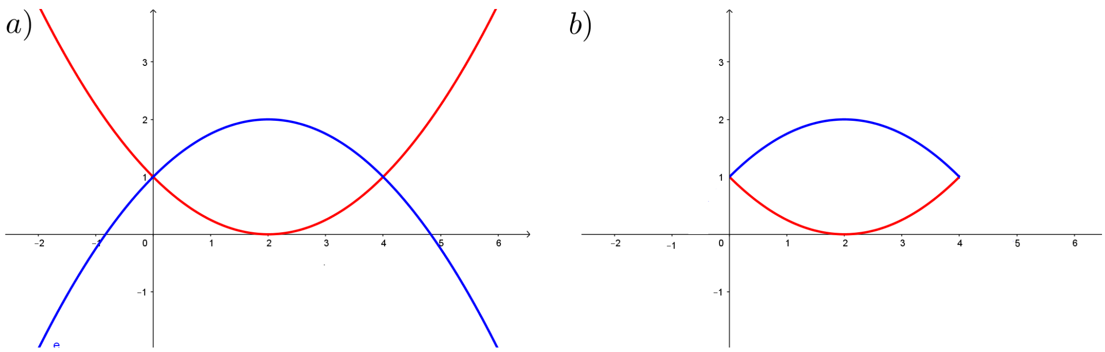
$$H = \{[x,y] \in \langle 0,4\rangle \times \mathbb{R}, y = 0{,}25(x-2)^2 \vee y = -0{,}25(x-2)^2 + 2\},$$

$$I = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, (x-2)^2 + (y-1)^2 = 0{,}16 \vee [2,1]\}.$$

Řešení. Nejprve znázorníme binární relaci H. Charakteristická vlastnost relace H je složena ze dvou podmínek, jejichž grafickým znázorněním jsou paraboly s předpisy:

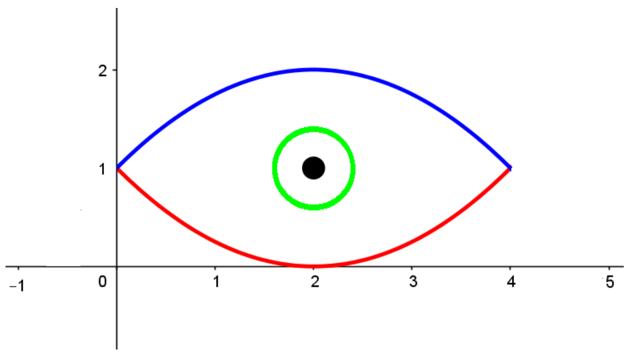
- $p_1 : y = 0{,}25(x-2)^2$
- $p_2 : y = -0{,}25(x-2)^2 + 2$

Oba předpisy jsou již ve vrcholovém tvaru, lze tedy jednoduše určit vrcholy parabol $V_1 = [2,0]$ a $V_2 = [2,2]$. Nyní najdeme průsečíky s osou x, resp. y (pokud existují) a paraboly sestrojíme (obr 4.7a). Dále si musíme uvědomit, že do výsledného grafu relace H budou patřit jen části parabol, pro jejichž body platí, že jejich souřadnice jsou podmnožinou kartézského součinu $\langle 0,4\rangle \times \mathbb{R}$ (obr. 4.7b).



Obrázek 4.7

Abychom graficky znázornili relaci G, musíme nyní do výsledného grafu relace H znázornit relaci I. Relace I se skládá ze dvou podmínek. Grafickým znázorněním první podmínky je kružnice se středem $S = [2,1]$ a poloměrem 0,4 (podrobněji v příkladu 4.5). Grafickým znázorněním druhé podmínky je bod [2, 1], tedy střed sestrojené kružnice. Na obrázku 4.8 je sestrojen výsledný graf relace G (tj. sjednocení grafů relací H, I)



Obrázek 4.8

Příklad 4.8. Sestrojte graf binární relace $J = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, |y| \leq 2\}$.

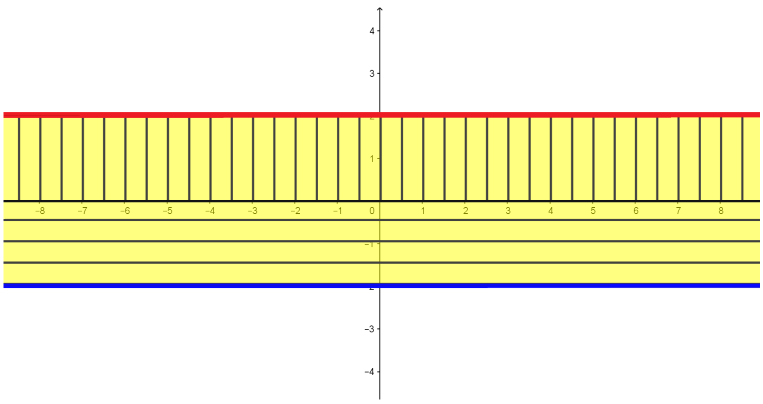
Řešení. U příkladů, které v zadání obsahují absolutní hodnotu, postupujeme tak, že rozdělíme řešení do několika intervalů. Dle definice absolutní hodnoty platí následující úvahy. Je-li:

- $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$, potom je předpis relace $y \leq 2$,
- $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$, potom je předpis relace $-y \leq 2 \Rightarrow \ y \geq -2$.

Při práci s absolutní hodnotou si musíme uvědomit, že získané nerovnice budeme řešit pouze na konkrétním intervalu. Binární relaci rozdělíme na dvě podmnožiny a postupně je znázorníme:

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \wedge y \leq 2\}, \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, y < 0 \wedge y \geq -2\}.$$

Znázorněním první množiny je rovinný pás včetně hraničních přímek určený průnikem poloroviny $y \leq 2$ a poloroviny $y \geq 0$. Na obrázku 4.9 se jedná o svisle vyšrafovanou část. Znázorněním druhé množiny je rovinný pás určený průnikem poloroviny $y \geq -2$ a poloroviny $y < 0$. Na obrázku 4.9 se jedná o vodorovně vyšrafovanou část. Grafem binární relace J je sjednocení těchto rovinných pásů, tj. rovinný pás včetně hraničních přímek $y = 2$ a $y = -2$.



Obrázek 4.9

Příklad 4.9. Sestrojte graf binární relace $K = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, |y| \leq 2 \wedge |x| \leq 2\}$.

Řešení. Binární relace K se od binární relace J z předchozího příkladu liší jednou přidanou podmínkou. Použijeme tedy řešení z příkladu 4.8 a přidáme podmínku $|x| \leq 2$. Binární relaci s touto charakteristickou vlastností označíme K_1.

$$K_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 2\}$$

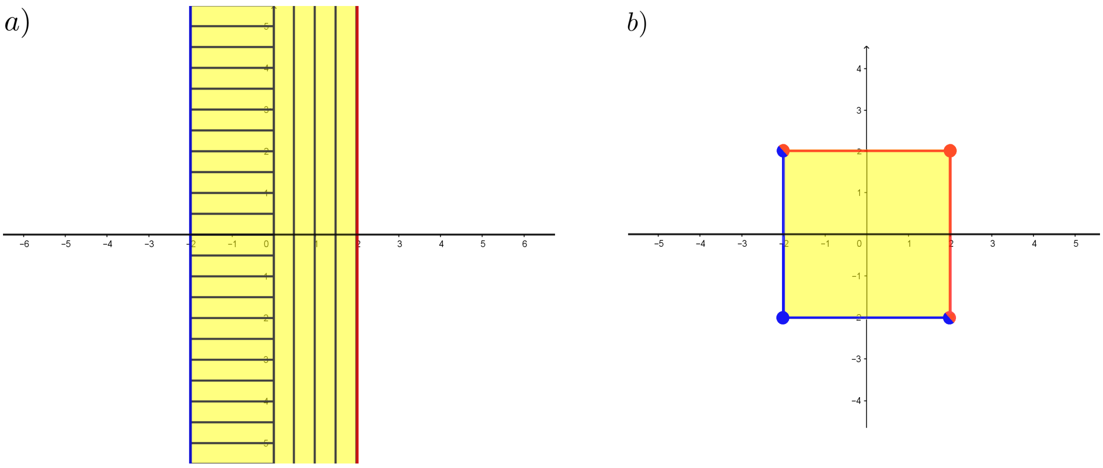
Opět relaci K_1 vyjádříme jako sjednocení dvou binárních relací.

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \wedge x \leq 2\}, \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x < 0 \wedge x \geq -2\}.$$

Znázorněním první množiny je rovinný pás určený průnikem poloroviny $x \geq 0$ a poloroviny $x \leq 2$. Znázorněním druhé množiny je rovinný pás určený průnikem poloroviny $x < 0$ a poloroviny $x \geq -2$.

Grafem binární relace K_1 je sjednocení těchto rovinných pásů, tj. rovinný pás včetně hraničních přímek $x = 2$ a $x = -2$ (obr. 4.10a).

Grafem binární relace K je průnik grafů relací G a K_1. Jedná se o čtverec s vrcholy $[2, 2], [-2, 2], [-2, -2], [2, -2]$ (obr. 4.10b).

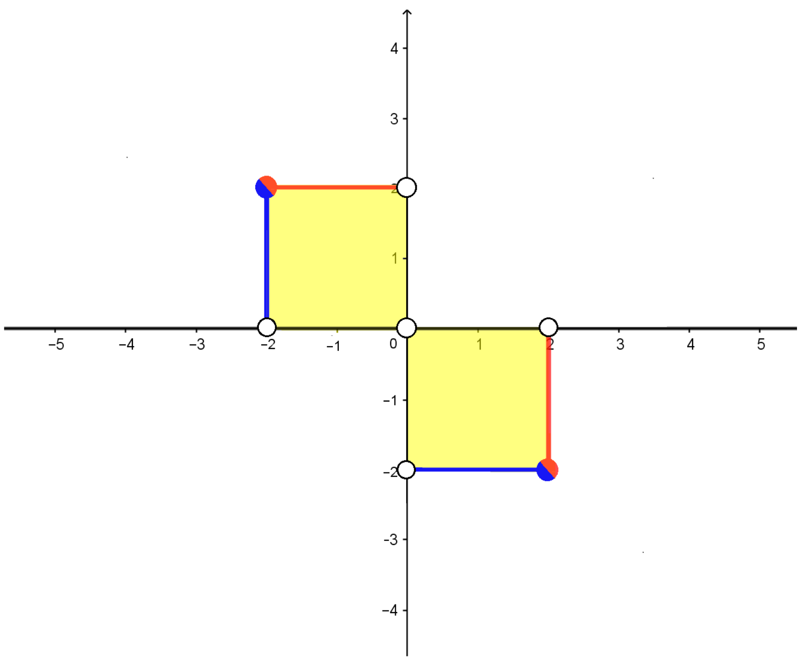


Obrázek 4.10

Příklad 4.10. Sestrojte graf binární relace $L = K \cap M$, je-li:

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)\}.$$

Řešení. Grafem binární relace L je jen ta část grafu binární relace K z předešlého příkladu, kde je splněna podmínka $(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)$. Tedy jen ta část roviny, pro jejíž body platí, že jejich x-ová a y-ová souřadnice se liší znaménkem (obr. 4.11).



Obrázek 4.11

Příklad 4.11. Sestrojte graf binární relace $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, |y| \leq 2 \wedge y^2 \geq |x|\}$.

Řešení. Charakteristická vlastnost relace je složena ze dvou podmínek, přičemž první podmínka se již objevila v příkladu 4.8 a 4.9. Použijeme tedy řešení z předchozích příkladů a přidáme podmínku $y^2 = |x|$.

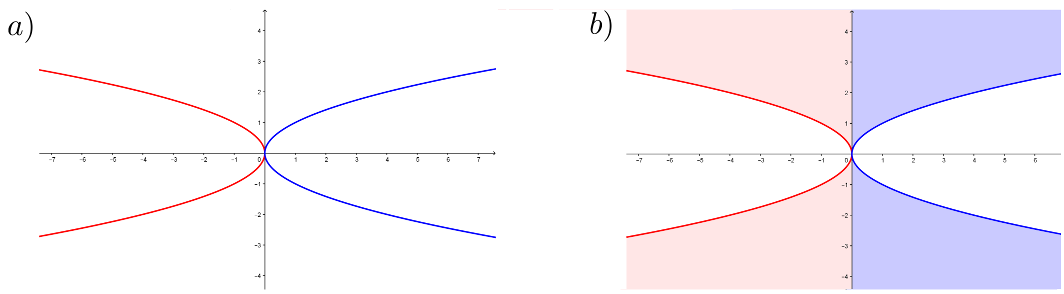
U příkladů, které v zadání obsahují absolutní hodnotu, postupujeme tak, že rozdělíme řešení do několika intervalů (podrobněji v příkladu 4.8). Dle definice absolutní hodnoty platí následující úvahy. Je-li:

- $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, potom je předpis relace $y^2 \geq x$,
- $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, potom je předpis relace $y^2 \geq -x$.

Na základě těchto úvah, rozdělíme množinu $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y^2 \geq |x|\}$ na dvě podmnožiny a postupně je znázorníme:

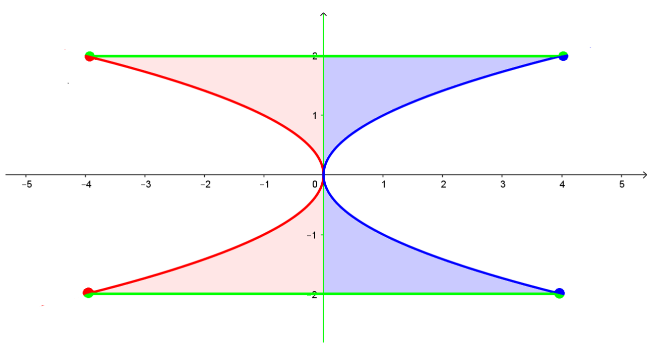
$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \wedge y^2 \geq x\}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x < 0 \wedge y^2 \geq -x\}.$$

Nejprve sestrojíme hraniční křivky určené předpisy $y^2 = x$ a $y^2 = -x$. Jedná se o paraboly souměrně sdružené podle osy y (obr. 4.12a). Dále znázorníme jen ty části roviny, které splňují zadané charakteristické vlastnosti. Pro nezáporná x vyznačíme tu část roviny, pro která je $y^2 \geq x$ a pro záporná x tu část roviny, pro které je $y^2 \geq -x$ (obr. 4.12b).



Obrázek 4.12

Na závěr ještě musíme uvážit podmínku $|y| \leq 2$, jejímž znázorněním je rovinný pás (obr. 4.9). Grafem binární relace N je rovinný útvar na obrázku 4.13.



Obrázek 4.13

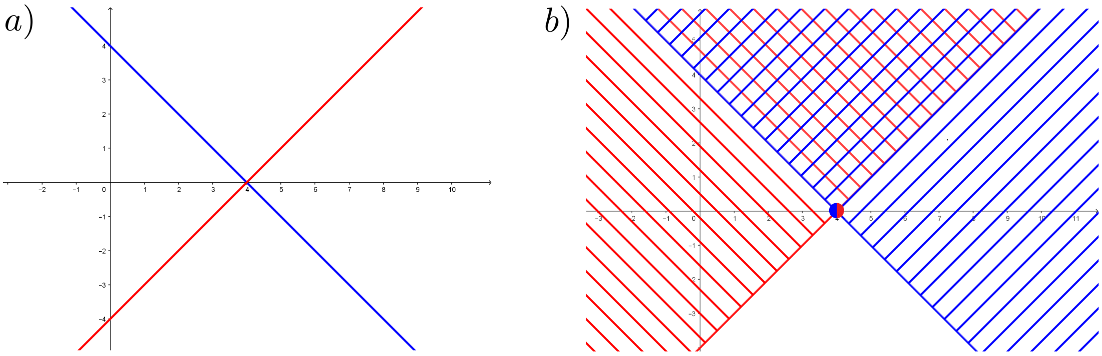
Příklad 4.12. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y \geq -x + 4 \wedge y \geq x - 4\}.$$

Relaci vyjádříme jako sjednocení dvou binárních relací a postupně znázorníme grafy těchto dílčích relací:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y \geq -x + 4\}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y \geq x - 4\}.$$

Nejprve znázorníme první množinu, jejímž grafem je polorovina. Zkonstruujeme hraniční přímku $y = -x + 4$ (obr. 4.14a) a vyznačíme polorovinu, tj. množinu bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici $y \geq -x + 4$ (obr. 4.14b). Následně znázorníme druhou množinu tak, že sestrojíme přímku $y = x - 4$ (obr. 4.14a) a opět vyznačíme konkrétní polorovinu, jejíž body vyhovují počáteční podmínce $y \geq x - 4$ (obr. 4.14b). Řešením je průnik těchto polorovin, tj. „dvojitě vyšrafovaná" část na obrázku 4.14b (úhel).

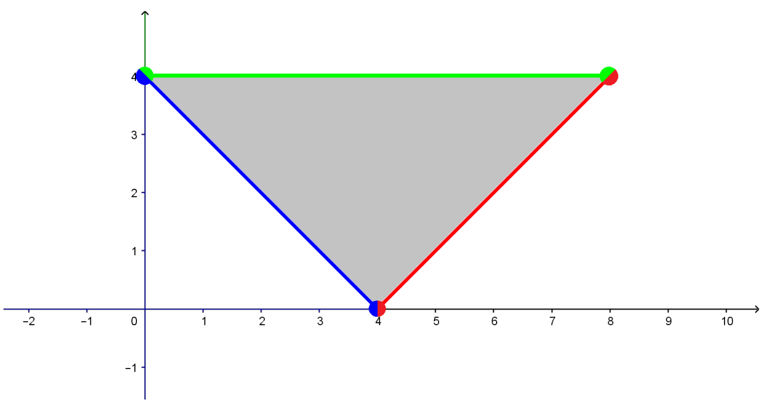


Obrázek 4.14

Příklad 4.13. Graficky znázorněte následující binární relaci:

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y \geq -x + 4 \wedge y \geq x - 4 \wedge y \leq 4\}.$$

Binární relace P se od binární relace O z předchozího příkladu liší jednou přidanou podmínkou. Použijeme tedy řešení z příkladu 4.12 a přidáme podmínku $y \leq 4$. Grafem binární relace P je trojúhelník s vrcholy $[4, 0], [8, 4], [0, 4]$ (obr. 4.15).



Obrázek 4.15

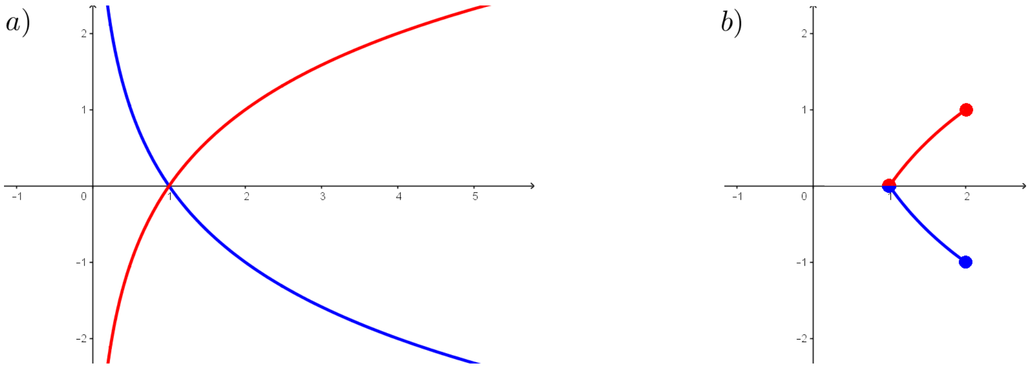
Příklad 4.14. Sestrojte graf binární relace $Q = R \cup S \cup T$, je-li:

$$R = \{[x, y] \in \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle, y = \log_{0,5} x \vee y = \log_2 x\},$$

$$S = \{[x, y] \in \langle 0, 2\rangle \times \mathbb{R}, |y| = 0{,}5x\},$$

$$T = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq 5 \wedge y = 0\}.$$

Řešení. Nejprve sestrojíme binární relaci R. Charakteristická vlastnost relace R se skládá ze dvou podmínek. Nejprve sestrojíme grafy funkcí $y = \log_{0,5} x$ a $y = \log_2 x$. Tyto křivky jsou souměrné sdružené podle osy x. Vzhledem k tomu, že je charakteristická vlastnost binární relace R zadaná pomocí logické spojky *nebo*, řešením je sjednocení těchto křivek (obr. 4.16a). Binární relace R je podmnožinou kartézského součinu $\langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, a proto musíme řešení omezit jen pro $x \in \langle 1, 2\rangle, y \in \langle 0, 1\rangle$. Graf binární relace R je sestrojen na obr. 4.16b.



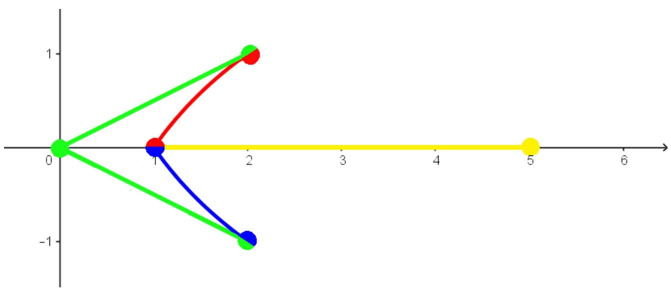
Obrázek 4.16

Řešení. Dále sestrojíme binární relaci S. U příkladů, které v zadání obsahují absolutní hodnotu, postupujeme tak, že rozdělíme řešení do několika intervalů (podobněji v příkladu 4.8). Binární relaci rozdělíme na dvě podmnožiny a postupně je znázorníme:

$$\{[x, y] \in \langle 0, 2\rangle \times \mathbb{R}, y \geq 0 \wedge y = 0{,}5x\}, \{[x, y] \in \langle 0, 2\rangle \times \mathbb{R}, y < 0 \wedge y = -0{,}5x\}.$$

Jedná se o dvě úsečky souměrné sdružené podle osy x (obr. 4.17).

Na závěr sestrojíme binární relaci T. Jedná se o množinu všech bodů osy x, které leží mezi body [1, 0], [5, 0], tj. úsečku na obr. 4.17. Grafem binární relace Q je sjednocení grafů relací R, S, T.



Obrázek 4.17

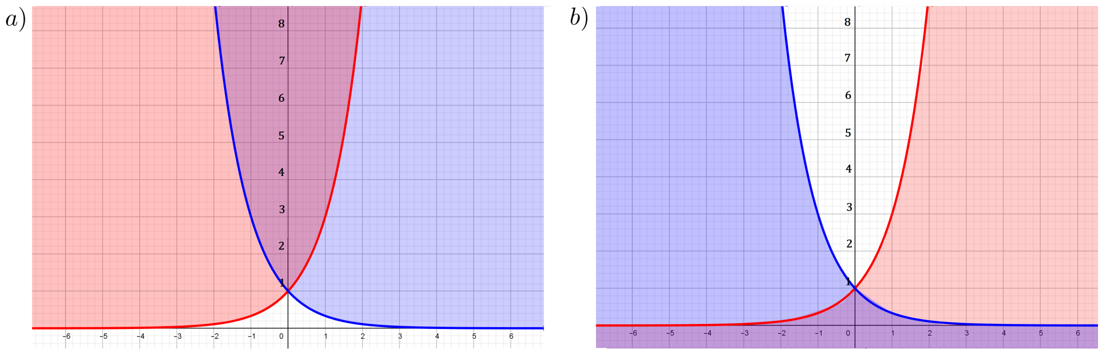
Příklad 4.15. Graficky znázorněte binární relaci $U = V \cup W$, je-li:

$$V = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 1, 6\rangle, y \geq 3^x \wedge y \geq 3^{-x}\},$$

$$W = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 0, 1\rangle, y \leq 3^x \wedge y \leq 3^{-x}\}.$$

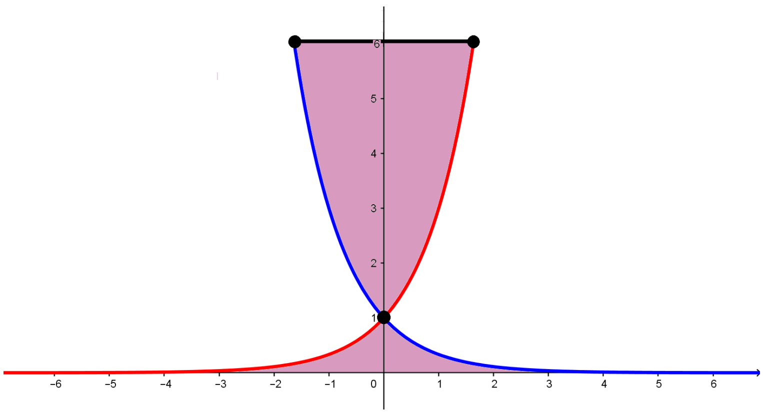
Řešení. Začneme tím, že znázorníme binární relaci V. Charakteristická vlastnost této relace se skládá ze dvou podmínek. Nejprve sestrojíme grafy funkcí $y = 3^x$ a $y = 3^{-x}$. Tyto křivky jsou souměrně sdružené podle osy y. Dále zakreslíme jen tu část roviny, pro jejíž body platí, že jejich souřadnice splňují zadané podmínky. Vzhledem k tomu, že je binární relace L zadaná pomocí logické spojky *a zároveň*, řešením je průnik těchto částí roviny (obr. 4.18a). Binární relace U je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \langle 1, 6\rangle$, a proto musíme řešení omezit jen na tu část roviny, jejíž body mají y-ovou souřadnici z intervalu $\langle 1, 6\rangle$.

Dále znázorníme binární relaci W. Charakteristická vlastnost této relace se skládá ze dvou podmínek. Nejprve opět sestrojíme grafy funkcí $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$ a vyznačíme jen tu část roviny, pro jejíž body platí, že jejich souřadnice splňují zadané podmínky. Vzhledem k tomu, že je binární relace V zadaná pomocí logické spojky *a zároveň*, řešením je průnik těchto částí roviny (obr. 4.18b). Binární relace V je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \langle 0, 1\rangle$, a proto musíme řešení omezit jen na tu část roviny, jejíž body mají y-ovou souřadnici z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.



Obrázek 4.18

Grafem binární relace U je sjednocení grafů relací V, W (obr. 4.19).



Obrázek 4.19

5. Neřešené úlohy

V následujících úlohách graficky znázorněte binární relace R_i.

Úloho 5.1. $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = 2x^3 \wedge y = 2x\}$.

Úloho 5.2. $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = |x| \wedge \; 0 < y \leq 1\}$.

Úloho 5.3. $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \; y \geq (\frac{1}{2})^x \; \wedge \; y \leq -(\frac{1}{2})^x + 1 \; \wedge \; 1 < x \leq 3\}$.

Úloho 5.4. $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y \leq -\frac{1}{2}|x| + 2 \wedge y \geq |x| - 4\}$.

Úloho 5.5. $R_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \in (0, 4\rangle \wedge y \in \langle 0, 4)\}$.

Úloho 5.6. $R_6 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y > (x-4)^2 - 9 \wedge y \leq -(x-4)^2 + 9\}$.

Úloho 5.7. $R_7 = A \cup B \cup C \cup D$, je-li:

$A = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 1, 9), y \geq 3^x \wedge y \geq (\frac{1}{3})^x\}$,
$B = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 0, 1\rangle, y \leq 3^x \wedge y \leq (\frac{1}{3})^x\}$,
$C = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 1, 6), y \geq 3^{x-5} \wedge y \geq (\frac{1}{3})^{x-5}\}$,
$D = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 0, 1\rangle, y \leq 3^{x-5} \wedge y \leq (\frac{1}{3})^{x-5}\}$.

Úloho 5.8. $R_8 = A \cup B$, je-li:

$A = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 0, \infty), |x| \leq 3 \wedge y \leq 8 - |x|\}$,
$B = \{[x, y] \in \langle 1, 2\rangle \times (-\infty, 8\rangle, y \geq 8 - x\}$.

Úloho 5.9. $R_9 = (A \backslash B) \cup C \cup D$, je-li:

$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 4 \wedge |y - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2} \wedge y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}\}$,
$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y-4)^2 < 4{,}84\}$,
$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + y^2 = 0{,}36\}$,
$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x+2)^2 + y^2 = 0{,}36\}$.

Úloho 5.10. $R_{10} = R_9 \cup A \cup B$, je-li:

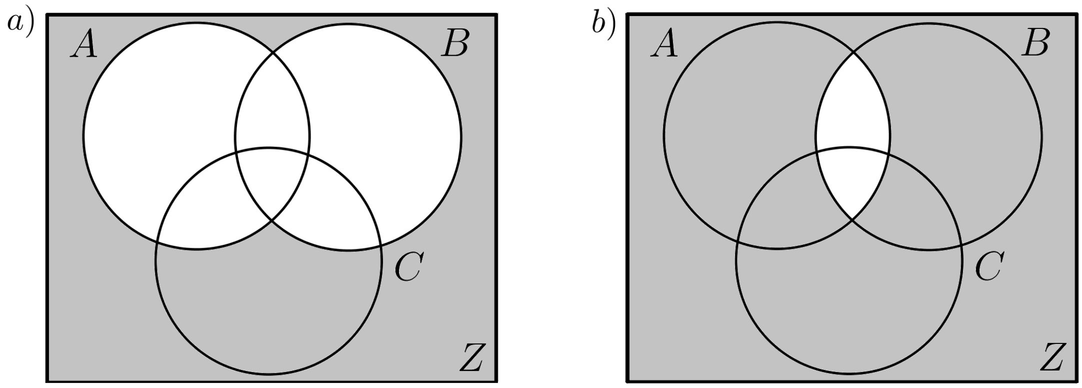
$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{7}{2})^2 \leq 0{,}49\}$, $B = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \langle 0, 3\rangle, |x+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

Úloho 5.11. $R_{11} = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$, je-li:

$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x = 0 \wedge y \in \langle -6, 5\rangle\}$,
$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 - 4 \leq y \leq \log_2 |x|\}\}$,
$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y-6)^2 \leq 1\}$,
$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y-4)^2 \leq 1\}$,
$E = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + (y-5)^2 \leq 1\}$,
$F = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y-5)^2 \leq 1\}$.

6. Výsledky úloh

Úloha 1.1. Množiny na obou stranách rovnosti mají stejné grafické znázornění:



Obrázek 6.1

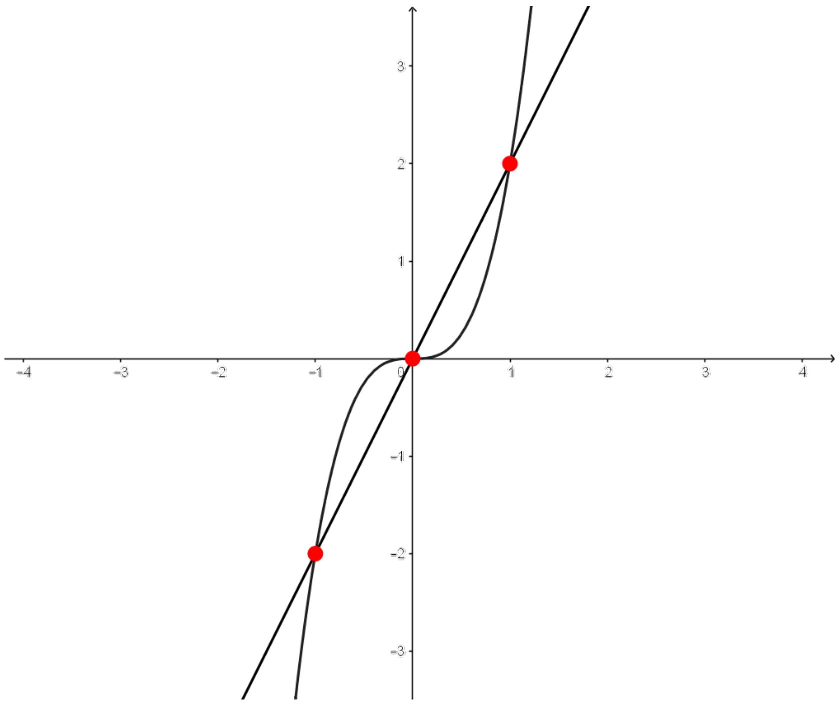
Úloha 1.2. Například $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$

Úloha 2.1. Relaci E doplníme o uspořádané dvojice:

$a)$ $[4,6], [4,8], [6,4], [8,6], [4,4]$ $\quad$ $b)$ $[4,6], [4,8], [6,4], [8,6], [4,4], [2,2]$

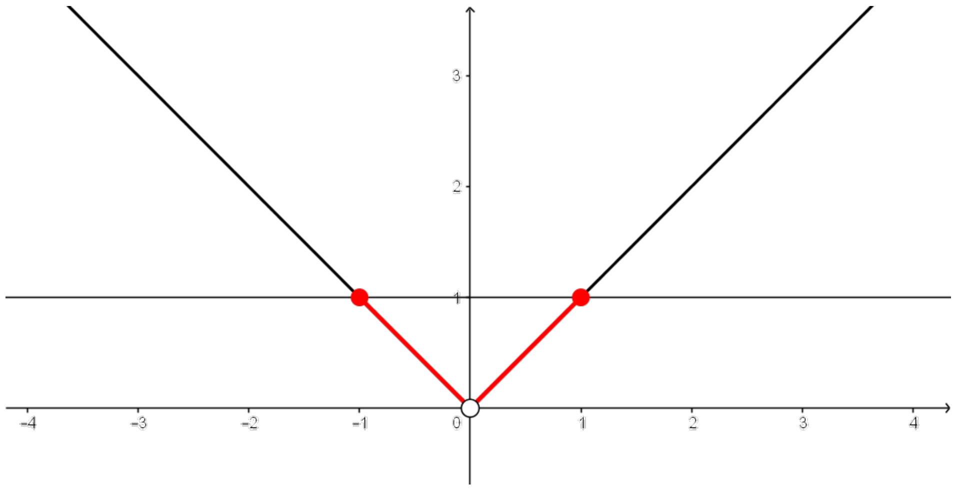
Binární relace R_i jsou znázorněny červenou barvou. V úlohách 5.1 - 5.4 jsou zakresleny i některé pomocné křivky.

Úloha 5.1.



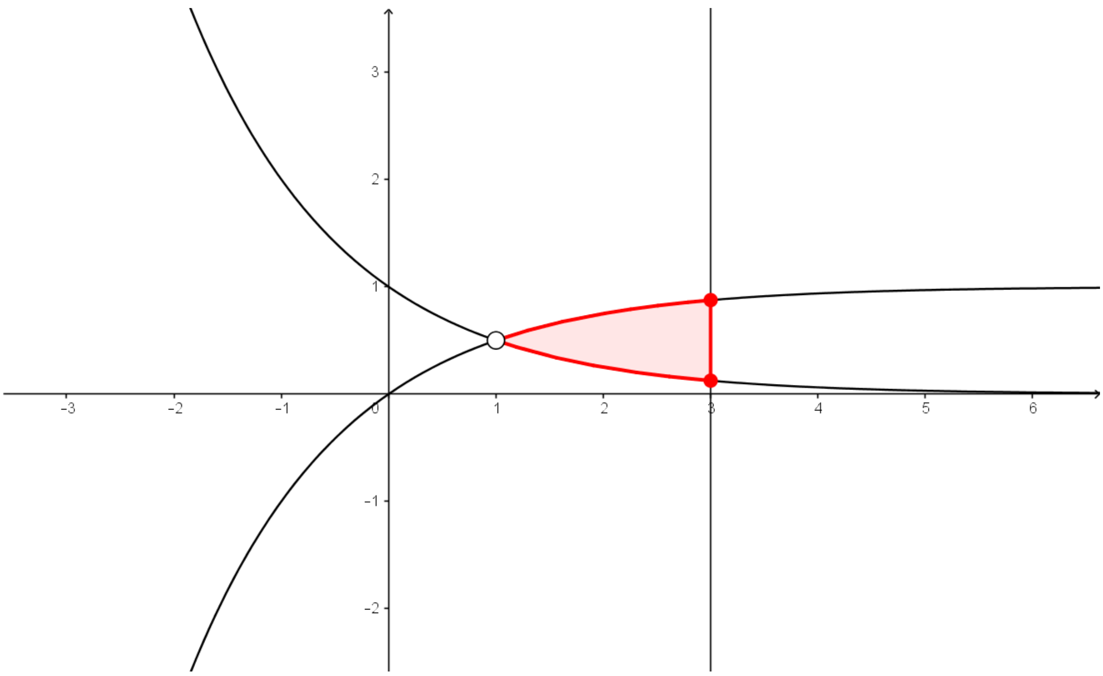
Obrázek 6.2

Úloha 5.2.



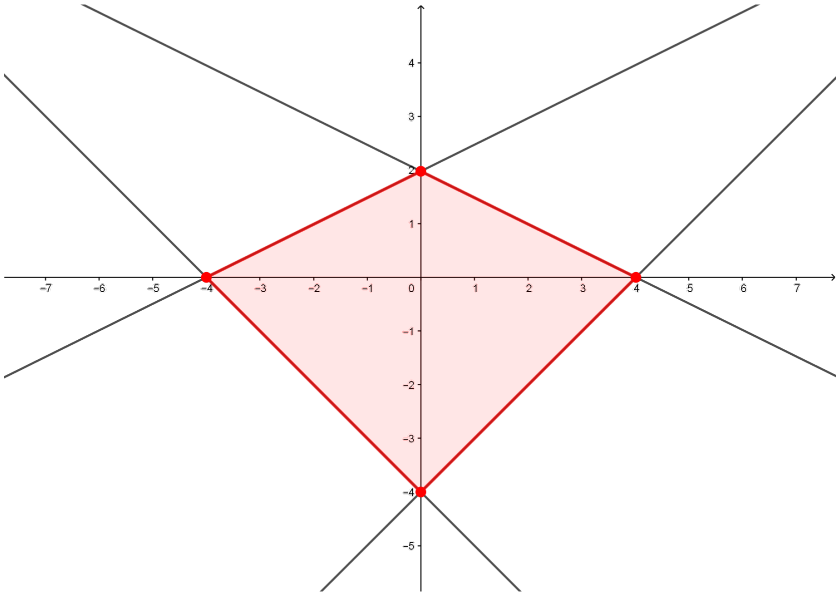
Obrázek 6.3

Úloha 5.3.



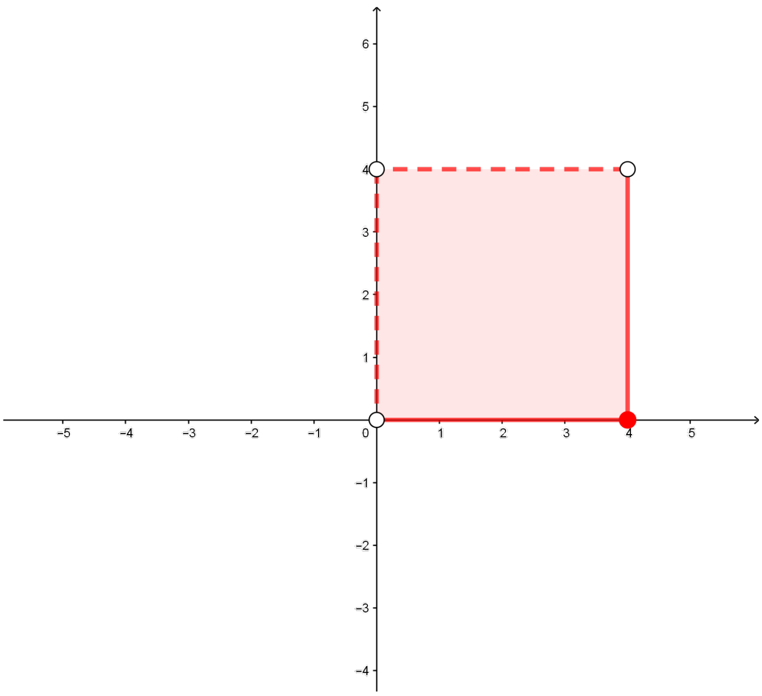
Obrázek 6.4

Úloha 5.4.



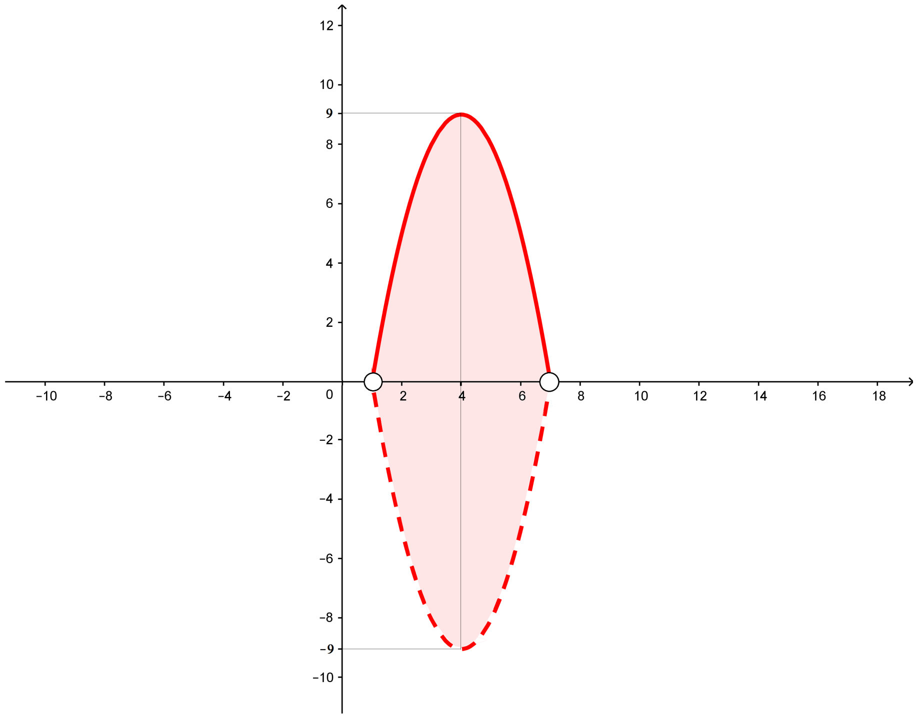
Obrázek 6.5

Úloha 5.5.



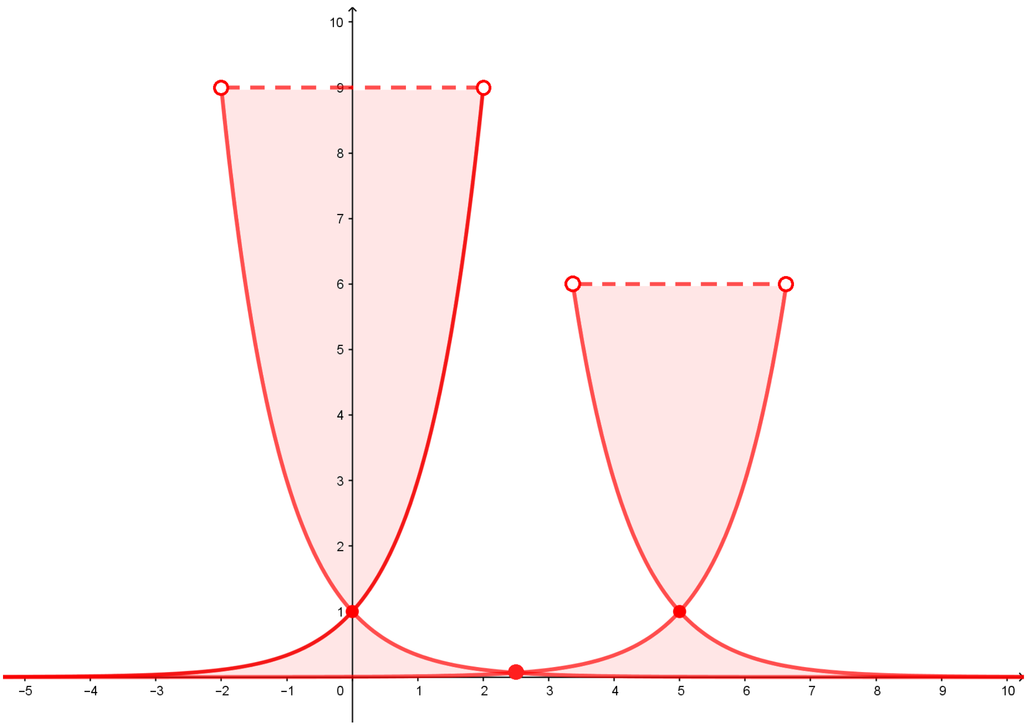
Obrázek 6.6

Úloha 5.6.



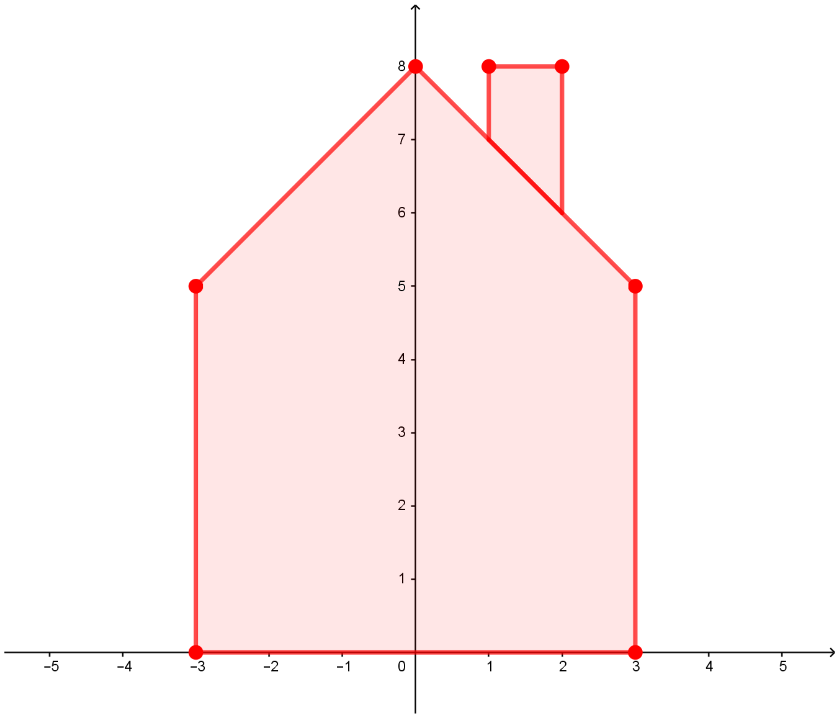
Obrázek 6.7

Úloha 5.7.



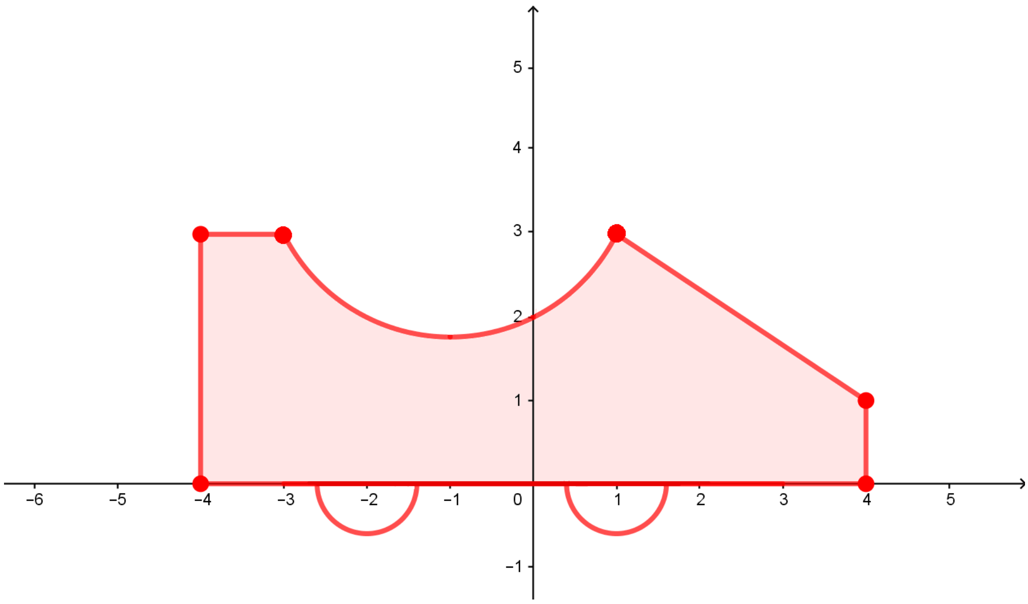
Obrázek 6.8

Úloha 5.8.



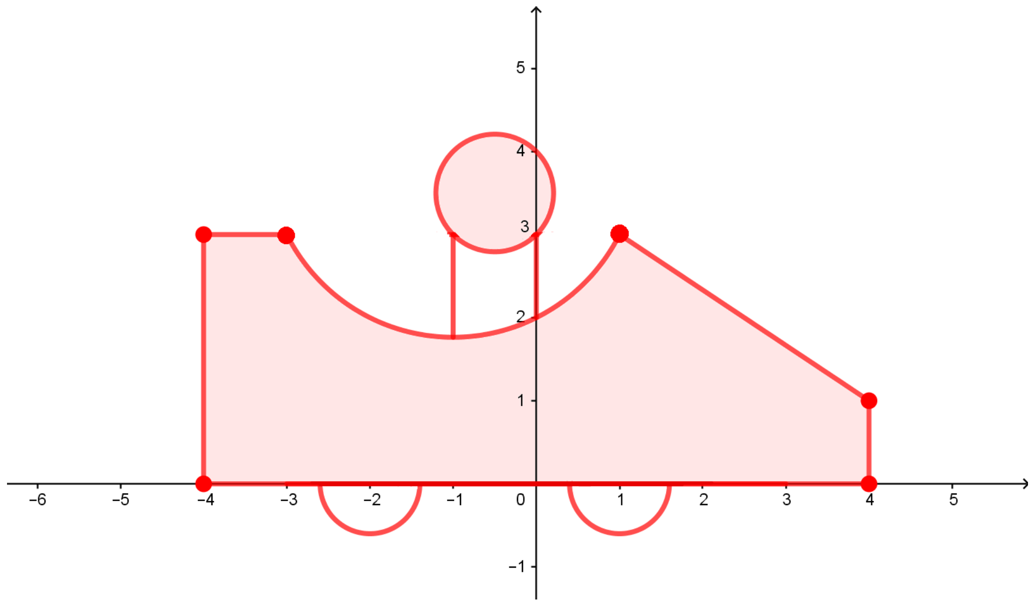
Obrázek 6.9

Úloha 5.9.



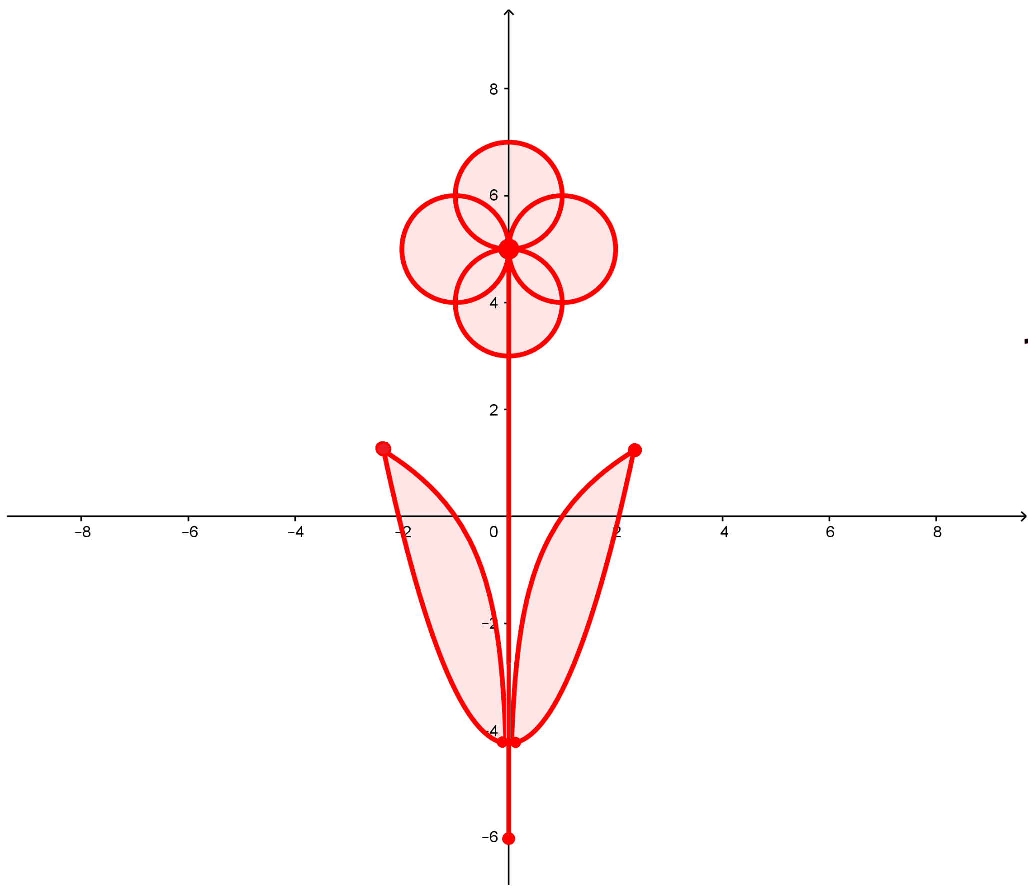
Obrázek 6.10

Úloha 5.10.



Obrázek 6.11

Úloha 5.11.



Obrázek 6.12

Závěr

Tato diplomová práce představuje pomocný učební materiál pro výuku binárních relací a zobrazení. Cílem práce bylo doplnit nabídku učebnic matematiky o tuto oblast, která je v současné výuce často opomíjena. Binární relace a jejich hlubší pochopení může studentům usnadnit chápání některých pojmů ve středoškolské matematice a prohloubit jejich matematické vnímání.

V práci byly představeny základní definice a vlastnosti binárních relací. Jedná se o učební text, který čtenáři poskytuje základní stavební kameny pro práci s relacemi. Jsou zde definovány i základní pojmy jako je množina, kartézský součin, zobrazení a funkce, aby studenti měli ucelený zdroj informací. Jádrem je soubor řešených příkladů a neřešených úloh, které trénují grafické zobrazení binárních relací.

Uplatnila jsem zde své zkušenosti s výukou matematiky na gymnáziu. Ve většině učebnic pro střední školy se autoři úmyslně vyhýbají definici pojmu funkce jakožto zobrazení a používají termín předpis. Práce s funkcemi dělá žákům často potíže a postupné zavedení tohoto pojmu pomocí binárních relací (resp. zobrazení) přispívá k lepšímu pochopení této problematiky. Věřím, že by se práce pro někoho mohla stát inspirací a přispět tak ke zlepšení kvality výuky.

Možným rozšířením do budoucna by mohlo být zavedení dalších způsobů znázornění binárních relací (např. maticový zápis) a grafické řešení rovnic a nerovnic, které obsahují goniometrické a cyklometrické funkce.

Seznam použité literatury

[1] Krupka, Peter. Polický, Zdeněk. Škaroupková, Blanka. Tarábková, Mária. Matematika pro střední školy - 1.díl. 1. vydání. Brno: Didaktis, 2012. ISBN 978-80-7358-196-1.

[2] Odvárko, Oldřich. Robová, Jarmila. Čtyřúhelníky pod mikroskopem. Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách. Praha: Prometheus, 2015, 5(24), s. 321-330. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/24/2405/mfi_240_321_330.pdf

[3] Odvárko, Oldřich. Hanula, Marián. Richtáríková, Soňa. Šedivý, Jaroslav. Úlohy o relacích a vektorové algebře. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. ISBN 14–478–72.

[4] Odvárko, Oldřich. Matematika pro gymnázia - Funkce. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1993. ISBN 80–85849–09–7.

[5] Odvárko, Oldřich. Šedivý, Jaroslav. Binární relace a operace 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978. ISBN 14–057–78.

[6] Šedivý, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. ISBN 14–889–69.

[7] Blažek, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. 4. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. ISBN 14–514–83.

[8] Polák, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9. přeprac. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978–80–7196–356–1.

[9] Calda, Emil. Rovnice ve škole neřešené. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80–85849–88–7.

[10] Odvárko, Oldřich. Kadleček, Jiří. Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2004. ISBN: 80-7196-276-7.

[11] Matoušek, Jiří. Nešetřil, Jaroslav. Kapitoly z diskrétní matematiky. 2. vydání. Praha: Karolinum, 2002. ISBN: 80-246-0084-6.

[12] Ročenky matematických olympiád.

Seznam použitých symbolů

Symbol	Význam
$=$	je rovno
$\neq$	není rovno, je různé od
$<$	je menší než
$\leq$	je menší nebo rovno
$>$	je větší než
$\geq$	je větší nebo rovno
$\wedge$	konjunkce; a zároveň
$\vee$	disjunkce; nebo
$\Rightarrow$	implikace; potom
$\Leftrightarrow$	ekvivalence; právě tehdy, když
$\neg$	negace; není pravda, že
$\forall$	pro všechna x
$\exists$	existuje x
$\exists!$	existuje právě jedno x
$\{\}$	složené závorky používané pro výčet prvků množiny
$\in$	je prvkem množiny
$\notin$	není prvkem množiny
$\cap$	průnik množin
$\cup$	sjednocení množin
$\subset$	podmnožina množiny
$\emptyset$	prázdná množina
$[a, b]$	uspořádaná dvojice prvků a, b
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
A^n	n-tá kartézská mocnina
aRb	prvek a je v relaci R s prvkem b
$f : A \to B$	zobrazení f množiny A do množiny B
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina všech reálných kladných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina všech reálných záporných čísel