MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zdeněk Silber

Konvexní množiny v duálních Banachových prostorech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
Studijní program: Matematika (N1101)
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu, prof. RNDr. Ondřeji Kalendovi, Ph.D., DSc. za trpělivost, cenné připomínky a konzultace, které významně pomohly při psaní této práce. Také bych mu chtěl poděkovat za životní příklad, a to jak v rovině matematické, tak v rovině lidské.

Název práce: Konvexní množiny v duálních Banachových prostorech

Autor: Zdeněk Silber

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Práce se zabývá oddělováním bodů a w^*-derivovanými množinami v duálech Banachových prostorů. Je v ní ukázáno, že v duálech reflexivních prostorů pro konvexní podmnožiny splývá w^*-derivovaná množina s w^*-uzávěrem a oddělování bodů s normujícností. Později je v práci ukázáno, že v duálu každého nereflexivního prostoru lze vždy najít konvexní množinu, jejíž w^*-derivovaná množina není w^*-uzavřená, tedy je tato vlastnost charakterizací reflexivních prostorů. Dále se práce zabývá w^*-derivovanými množinami v kvazireflexivních prostorech. Je v ní ukázáno, že v duálech kvazireflexivních prostorů splývá pro absolutně konvexní množiny w^*-derivovaná množina s w^*-uzávěrem a oddělování bodů s normujícností. Později je v ní ukázáno, že v duálu každého nekvazireflexivního prostoru existuje podprostor, který odděluje body, ale není normující, tedy je tato vlastnost charakterizací kvazireflexivních prostorů. Nakonec jsou v práci definovány w^*-derivované množiny vyšších řádů a je v ní ukázáno, že v duálu každého nekvazireflexivního separabilního Banachova prostoru existují podprostory všech spočetných nelimitních řádů a žádného jiného.

Klíčová slova: Duální Banachův prostor, oddělování bodů, normující podprostory, w^*-derivované množiny, kvazireflexivita

Title: Convex subsets of dual Banach spaces

Author: Zdeněk Silber

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The main topic of this thesis is separation of points and w^*-derived sets in dual Banach spaces. We show, that in duals of reflexive spaces w^*-derived set of a convex subset coincides with its w^*-closure. We also show, that subspace of a dual reflexive space is norming, if and only if it is total. Later we show, that in the dual of every non-reflexive space we can find a convex subset whose w^*-derived set is not w^*-closed. Hence, this statement is a characterisation of reflexive spaces. Next we show, that subspaces in duals of quasi-reflexive spaces are norming, if and only if they are total. Later we show, that in the dual of every non-quasi-reflexive space we can find a subspace which is total but not norming; thus, the previous statement is a characterisation of quasi-reflexive spaces. We also show, that for absolutely convex subsets of duals of quasi-reflexive spaces w^*-derived set coincides with w^*-closure. In the last section we define w^*-derived sets of higher orders and show, that in the dual of every non-quasi-reflexive separable Banach space there exist subspaces of order of each countable non-limit ordinal and no other.

Keywords: Dual Banach space, total subsets, norming subsets, w^*-derived sets, quasi-reflexivity

Obsah

Úvod

Z Krein-Šmulyanovy věty plyne, že konvexní podmnožina duálu Banachova prostoru je w^*-uzavřená, právě když jsou její průniky s uzavřenými koulemi relativně w^*-uzavřené. To však neznamená, že w^*-derivovaná množina, tj. množina všech limit omezených netů, je totéž co w^*-uzávěr. Právě w^*-derivované množiny budou hlavním tématem této práce.

w^*-derivované množiny úzce souvisejí s normujícími podprostory – podprostor duálu Banachova prostoru je normující, právě když jeho w^*-derivovaná množina je celý duální prostor. Také lze snadno nahlédnout, že w^*-derivované množiny v duálech separabilních prostorů splývají s w^*-sekvenciálními uzávěry.

V první části práce nejprve definujeme základní pojmy – oddělování bodů, normující podprostory, w^*-derivované množiny a Schauderovy báze. Dokážeme několik jejich základních vlastností a charakterizací, které budeme potřebovat dále v práci. Také ukážeme, že pro konvexní podmnožiny duálu reflexivního prostoru splývá w^*-derivovaná množina s w^*-uzávěrem.

Druhá kapitola práce se věnuje kvazireflexivním prostorům. Nejprve definujeme kvazireflexivitu jakožto zobecnění reflexivity. Ukážeme, že stejně jako u reflexivních prostorů se kvazireflexivita zachovává na uzavřené podprostory a faktorizace. Dále ukážeme, že v kvazireflexivních prostorech oddělování bodů splývá s normujícností. Z toho potom vyvodíme, že pro podprostory duálů kvazireflexivních prostorů je w^*-derivovaná množina totéž, co w^*-uzávěr. Toto tvrzení dále zobecníme z podprostorů na absolutně konvexní množiny.

Ve třetí kapitole dokážeme několik negativních výsledků. Nejprve ukážeme, že v duálech nereflexivních prostorů vždy existuje konvexní množina, jejíž w^*-derivovaná množina není w^*-uzavřená, což nám v kombinaci s výsledky první kapitoly dá další charakterizaci reflexivních prostorů. Dále ukážeme, že v duálech nekvazireflexivních prostorů vždy existuje podprostor, který odděluje body, ale není normující, což nám dá v kombinaci s výsledky druhé kapitoly charakterizaci kvazireflexivních prostorů. Nakonec ještě ukážeme, že za dalších předpokladů existuje podprostor, jehož w^*-derivovaná množina je vlastní normově hustý podprostor.

Ve čtvrté kapitole zadefinujeme w^*-derivované množiny vyšších řádů a definujeme řád množiny jako nejmenší ordinál takový, že w^*-derivovaná množina tohoto řádu je w^*-uzavřená. Ukážeme, že řády podprostorů duálů separabilních Banachových prostorů mohou být pouze spočetné nelimitní ordinály a že v duálu nekvazireflexivního prostoru můžeme najít podprostor každého z těchto řádů.

Hlavním přínosem této práce je podrobné rozpracování známých výsledků z literatury, hlavně z článků [3], [10] a [12]. Konkrétně, co se týče výsledků z článku [10], byl poupraven a doplněn důkaz Lemmatu 2.11, podrobně rozpracován a vysvětlen důkaz Věty 2.15, pomocných lemmat k Důsledku 3.4 a Vět 3.7

a 3.17. U Věty 3.17 byl zjednodušen důkaz nenormujícnosti množiny A. Co se týče článku [3], bylo podrobně rozpracováno Lemma 3.10 a rozpracován důkaz Věty 3.12, hlavně části využívající Tvrzení 2.6. Výsledky z článku [12] byly zpracovány a obohaceny o pomocná Lemmata 4.4 a 4.5 (přičemž se čerpalo z článků [4] a [5]). Věta 4.8 byla podrobně rozepsána a dovysvětlena.

Kapitola 1

Značení a základní pojmy

1.1 Použité značení

V této první sekci si nejprve shrneme značení, které budeme v práci používat.

Symbolem $\mathbb{F}$ budeme myslet těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

X vždy bude (ne nutně separabilní) Banachův prostor nad $\mathbb{F}$.

Uzavřenou jednotkovou kouli v X budeme značit B_X, otevřenou jednotkovou kouli U_X a sféru S_X.

Slabou topologii na X, tj. topologii generovanou duálem X^*, budeme značit w. Slabou* topologii na duálním prostoru X^*, tj. topologii generovanou preduálem X, budeme značit w^*. Obě tyto topologie jsou lokálně konvexní.

Na X^* můžeme uvažovat jak slabou (generovanou X^{**}), tak slabou* (generovanou X) topologii.

Silným uzávěrem množiny A myslíme normový uzávěr a značíme ho $\overline{A}$. Pokud budeme uvažovat uzávěr A v topologii τ, budeme ho značit $\overline{A}^{\tau}$. Výjimkou bude uzávěr ve w^* topologii, který budeme značit $\overline{A}^{*}$.

Fakt, že x je limitou netu $(x_\lambda)_\lambda$ v topologii τ, budeme zapisovat $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\tau} x$. Pokud bude z kontextu zřejmé, přes jakou dolů usměrněnou množinu limitu uvažujeme, budeme psát pouze $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$. Podobně jako u uzávěru, bude-li τ normová (resp. w^*) topologie, budeme psát $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{} x$ (resp. $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{*} x$).

Lineární obal množiny A budeme značit $\operatorname{span}(A)$, konvexní obal pak $\operatorname{conv}(A)$ a absolutně konvexní obal $\operatorname{aco}(A)$. Jádro operátoru T budeme značit $\operatorname{Ker}(T)$ a obraz $\operatorname{Range}(T)$. Občas budeme zkráceně psát $\operatorname{span} A$, resp. $\operatorname{Ker} T$ atp. Uzavřený lineární obal množiny A v nějaké topologii τ budeme značit $\overline{\operatorname{span}}^{\tau}(A)$, podobně pro konvexní a absolutně konvexní obaly.

Pokud píšeme $A \subset\subset X$, máme na mysli, že A je (ne nutně uzavřený) podprostor X.

Pro $A \subset X$ budeme uvažovat:

Anihilátor A, tj. $A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(a) = 0 \text{ pro každé } a \in A\}$.

Poláru A, tj. $A^\triangledown = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re}(x^*(a)) \leq 1 \text{ pro každé } a \in A\}$.

Absolutní poláru A, tj. $A^\circ = \{x^* \in X^* : |x^*(a)| \leq 1 \text{ pro každé } a \in A\}$.

Podobně pro $B \subset X^*$ budeme uvažovat:

Anihilátor B, tj. $B_\perp = \{x \in X : b(x) = 0 \text{ pro každé } b \in B\}$.

Poláru B, tj. $B_\triangle = \{x \in X : \mathrm{Re}(b(x)) \leq 1 \text{ pro každé } b \in B\}$.

Absolutní poláru B, tj. $B_\circ = \{x \in X : |b(x)| \leq 1 \text{ pro každé } b \in B\}$.

Pro $A \subset X^*$ můžeme uvažovat anihilátor (resp. poláru, absolutní poláru) $A^\perp$ v prostoru X^{**} i anihilátor (resp. poláru, absolutní poláru) $A_\perp$ v prostoru X.

Pro X, Y Banachovy a $T : X \longrightarrow Y$ spojité lineární zobrazení definujeme $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$, duální operátor k T, předpisem $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$, $y^* \in Y^*$, $x \in X$.

Pro zobrazení $f : A \longrightarrow B$ a $g : B \longrightarrow C$ budeme složení zobrazení f a g, tj. $x \longmapsto g(f(x))$, značit buď $g \circ f$ nebo zkráceně gf.

Pro X Banachův budeme uvažovat kanonické vnoření do druhého duálu X^{**}, obvykle značené $\varkappa$, které je definované rovností $\varkappa(x)(x^*) = x^*(x)$.

Jsou-li $A \subset X$, $B \subset X$, pak (Minkovského) součtem A a B rozumíme

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

Jsou-li A a B dokonce podprostory splňující $A + B = X$, $A \cap B = \{0\}$ a projekce X na A podél B (nebo projekce X na B podél A) je spojitá, píšeme $A \oplus B = X$.

1.2 Oddělování bodů a normující podmnožiny

Definice. Nechť $A \subset X^*$. Řekneme, že A *odděluje body* X, pokud

$$\forall x \in X,\ x \neq 0\ \exists f \in A : f(x) \neq 0.$$

Z této definice plyne, že A odděluje body X, právě když $\mathrm{span}(A)$ odděluje body X. Následující lemma nám dává charakterizaci množin oddělujících body.

Lemma 1.1. *Nechť $A \subset X^*$, potom A odděluje body X, právě když* $\mathrm{span}(A)$ *je w^*-hustý v X^*.*

Důkaz. Nechť A odděluje body X, potom $A_\perp = \{0\}$, tedy z věty o bipoláře

$$\overline{\mathrm{span}}^*(A) = (A_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X^*.$$

Nechť platí $\overline{\mathrm{span}}^*(A) = X^*$. Uvažujme $0 \neq x \in X$. Můžeme vzít funkcionál $f \in X^*$ takový, že $f(x) = 1$. Potom

$$U = \{x^* \in X^* : |x^*(x) - f(x)| < 1/2\}$$

je w^*-otevřené okolí f, a tedy protíná $\mathrm{span}(A)$. Mějme $a \in \mathrm{span}(A) \cap U$, potom $|a(x)| > 1/2$. Jelikož $a \in \mathrm{span}(A)$, dá se zapsat jako $a = \sum_{i=1}^n c_i a_i$ pro nějaká $a_i \in A$ a $c_i \in \mathbb{F}$. Tedy existuje $j \in \{1,...,n\}$, že $|a_j(x)| > 0$. Toto a_j nám svědčí o tom, že A odděluje body X. $\square$

Definice. Nechť $A \subset\subset X^*$. Pro $x \in X$ definujeme

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A; \|f\| = 1\}.$$

Nechť $c \geq 1$. Řekneme, že A je *c-normující*, pokud $q_A \geq c^{-1}\|.\|$.

Řekneme, že A je *normující*, pokud existuje $c \geq 1$ takové, že A je c-normující.

Řekneme, že $B \subset X^*$ je (c-)*normující*, pokud $\mathrm{span}(B)$ je (c-)normující.

V následující poznámce řekneme si několik jednoduchých vlastností q_A a normujících podprostorů.

Poznámka. Nechť $A \subset\subset X^*$, potom platí:

- $q_A \leq \|.\|$.
- q_A je pseudonorma na X. Pokud A odděluje body X, pak je q_A dokonce norma na X.
- Je-li A normující, pak odděluje body X.
- A je normující, právě když q_A je ekvivalentní norma na X.
- A je 1-normující, právě když $q_A = \|.\|$.

Normujícnost je jakési stejnoměrné oddělování bodů. V některých případech, např. když X je reflexivní, jsou tyto pojmy ekvivalentní (viz Důsledek 1.7). Nyní si ukážeme charakterizaci normujících podprostorů.

Lemma 1.2. *Nechť $A \subset\subset X^*$, $c \geq 1$. Potom A je c-normující, právě když $c^{-1}B_{X^*} \subset \overline{B_{X^*} \cap A}^*$.*

Důkaz. Platí následující ekvivalence:

$$A \text{ je } c\text{-normující na } X \iff q_A \geq c^{-1}\|.\| \iff$$
$$\iff (B_{X^*} \cap A)_\circ \subset cB_X \iff \overline{B_{X^*} \cap A}^* = ((B_{X^*} \cap A)_\circ)^\circ \supset c^{-1}B_X{}^\circ = c^{-1}B_{X^*}.$$

První ekvivalence platí přímo z definice. Pro druhou si stačí uvědomit, že

$$(B_{X^*} \cap A)_\circ = \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B_{X^*} \cap A\} = \{x \in X : q_A(x) \leq 1\}$$

Pro třetí ekvivalenci použijeme větu o bipoláře a základní polárový kalkulus. □

1.3 w^*-derivované množiny

Definice. Nechť $A \subset X^*$. Potom definujeme w^*-*derivovanou* množinu množiny A jako

$$A^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A \cap nB_{X^*}}^*.$$

$A^{(1)}$ je tedy množina všech w^*-limit omezených netů z A.

Poznámka. Je-li X separabilní, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná, tedy $A^{(1)}$ je množina všech w^*-limit omezených posloupností z A, ale z Banach-Steinhausovy věty je každá w^*-konvergentní posloupnost omezená, tedy $A^{(1)}$ je množina všech w^*-limit posloupností z A. Studium w^*-derivovaných množin nám tedy může přinést zajímavé výsledky týkající se w^*-sekvenciáních uzávěrů v duálech separabilních Banachových prostorů.

Následující lemma nám dá do souvislosti normující prostory a w^*-derivované množiny.

Lemma 1.3. *$A \subset\subset X^*$ je normující, právě když $A^{(1)} = X^*$.*

Důkaz. Použijeme charakterizaci normujících podprostorů z Lemmatu 1.2 Implikace vpravo je zřejmá z definice $A^{(1)}$. Pro implikaci vlevo použijeme Bairovu větu a získáme n, že $\overline{A \cap nB_{X^*}}^*$ má neprázdný vnitřek, z absolutní konvexity pak obsahuje nějaké okolí 0. $\square$

Nyní budeme chtít formulovat Krein-Šmulyanovu větu, k tomu se nám bude hodit následující definice.

Definice. Řekneme, že $A \subset X^*$ je *bw^*-otevřená*, pokud pro každé $r > 0$ je $A \cap rB_{X^*}$ relativně w^*-otevřená v rB_{X^*}.

Všechny bw^*-otevřené množiny tvoří topologii na X^*, tuto topologii nazveme *bw^*-topologie.*

Je zřejmé, že pro testování bw^*-otevřenosti A nám stačí testovat relativní w^*-otevřenost $A \cap nB_{X^*}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Nyní již můžeme formulovat Krein-Šmulyanovu větu. Její důkaz si můžete dohledat v [4, Theorem 3.92].

Věta 1.4. *Nechť $A \subset X^*$ je konvexní. Potom A je w^*-uzavřená, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A \cap nB_{X^*}$ w^*-uzavřená (tj. A je bw^*-uzavřená).*

Důsledek 1.5. *Nechť $A \subset X^*$ je konvexní, potom A je w^*-uzavřená, právě když $A = A^{(1)}$.*

Důkaz. Je-li A w^*-uzavřená, pak zřejmě $A = A^{(1)}$, konvexita není třeba.

Je-li A konvexní a $A = A^{(1)}$, pak z definice $A^{(1)}$ plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{A \cap nB_{X^*}}^* \subset A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A \cap nB_{X^*}$ w^*-uzavřená. Z Věty 1.4 nám potom plyne, že A je w^*-uzavřená. $\square$

Poznámka. Z Věty 1.4. plyne, že pro konvexní $A \subset X^*$ je $\overline{A}^{bw^*} = \overline{A}^*$. Ve třetí kapitole ale ukážeme, že se může stát, že

$$A^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A \cap nB_{X^*}}^* \subsetneq \overline{A}^*,$$

a to i pro $A \subset\subset X^*$. Nyní ukážeme, že k tomuto nemůže dojít, pokud je X reflexivní.

Tvrzení 1.6. *Nechť X je reflexivní, $A \subset X^*$ je konvexní. Potom $A^{(1)} = \overline{A}^*$.*

Důkaz. Pro reflexivní X platí $w = w^*$, tedy z Mazurovy věty plyne, že $\overline{A}^* = \overline{A}$ a $\overline{A \cap nB_{X^*}}^* = \overline{A \cap nB_{X^*}}$.

Tedy $A^{(1)}$ je množina všech limit omezených posloupností z A. Ale každá normově konvergentní posloupnost je omezená, tedy $A^{(1)}$ je množina všech limit posloupností z A, což je $\overline{A}$. $\square$

Důsledek 1.7. *Nechť X je reflexivní, $A \subset\subset X^*$. Potom A odděluje body X, právě když A je normující.*

Důkaz. Normující prostory vždy oddělují body.

Nechť A odděluje body X. Potom z Lemmatu 1.1 máme $\overline{A}^* = X^*$. Z Tvrzení 1.6 potom $A^{(1)} = X^*$, tedy z Lemmatu 1.3 je A normující. $\square$

1.4 Schauderovy báze

V této sekci definujeme Schauderovy báze Banachových prostorů a formulujeme několik jejich vlastností, které budeme později potřebovat.

Definice. Nechť X je Banachův a $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost.

Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je *Schauderova báze* X, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedna $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, posloupnost prvků $\mathbb{F}$, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je *bázová posloupnost*, pokud je to Schauderova báze prostoru $\overline{\operatorname{span}}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je *normalizovaná Schauderova báze* (resp. *normalizovaná bázová posloupnost*), pokud je to Schauderova báze (resp. bázová posloupnost) a navíc $\|x_n\| = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Všimněme si, že u Schauderovy báze narozdíl od algebraické báze záleží na uspořádání jejích prvků, řada totiž nemusí být bezpodmínečně konvergentní.

Klasické „báze“ prostorů c_0 a ℓ_p pro $p < \infty$ jsou Schauderovy báze. Ortonormální báze separabilních Hilbertových prostorů jsou Schauderovy báze.

Snadno můžeme nahlédnout, že Banachův prostor se Schauderovou bází musí být separabilní.

Nyní si zadefinujeme biortogonální systémy.

Definice. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X a $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X^*. Řekneme, že systém $((x_n)_{n=1}^{\infty},(x_n^*)_{n=1}^{\infty})$ je *biortogonální*, pokud pro každá $i,j \in \mathbb{N}$ je $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$, kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta.

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v X je *minimální*, pokud existuje nějaká posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ v X^* taková, že $((x_n)_{n=1}^{\infty},(x_n^*)_{n=1}^{\infty})$ tvoří biortogonální systém.

Nyní si formulujeme některá jednoduchá tvrzení o Schauderových bázích a jejich biortogonálních systémech.

Tvrzení 1.8. *Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je normalizovaná Schauderova báze X a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost souřadnicových funkcionálů báze $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n(\sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j) = c_n$. Potom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou stejně omezené lineární funkcionály a $((x_n)_{n=1}^{\infty},(a_n)_{n=1}^{\infty})$ tvoří biortogonální systém.*

Důkaz. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou stejně omezené z [9, Proposition 1.a.2] a zřejmě společně s $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tvoří biortogonální systém. $\square$

Tvrzení 1.9. *Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je normalizovaná Schauderova báze Banachova prostoru X a $((x_n)_{n=1}^{\infty},(a_n)_{n=1}^{\infty})$ tvoří biortogonální systém, potom $a_n \xrightarrow{*} 0$.*

Důkaz. Nechť $x \in X$, potom se dá jednoznačně reprezentovat jako $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$ pro nějakou posloupnost skalárů $(c_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom platí $c_n x_n \longrightarrow 0$, tedy i $|c_n| = \|c_n x_n\| \longrightarrow 0$, a tedy

$$a_n(x) = a_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j\right) = c_n \longrightarrow 0.$$

$\square$

Dále ukážeme, že biortogonální funkcionály k Schauderově bázi prostoru X tvoří w^*-Schauderovu bázi duálního prostoru X^*.

Lemma 1.10. *Nechť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je Schauderova báze X a $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ je posloupnost jejích biortogonálních funkcionálů. Potom každé $x^* \in X^*$ lze jednoznačně reprezentovat jako $x^* = w^* - \sum_{n=1}^\infty c_n x_n^*$.*

Důkaz. Mějme $x^* \in X^*$ a označme $c_n = x^*(x_n)$. Potom $x^* = w^* - \sum_{n=1}^\infty c_n x_n^*$. Vskutku, máme-li $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in X$, pak

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^*(x_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n c_n = \sum_{n=1}^\infty c_n x_n^*(x) = \left(w^* - \sum_{n=1}^\infty c_n x_n^*\right)(x).$$

Jednoznačnost dostaneme, jelikož $x^*(x_n) = \left(\sum_{n=1}^\infty c_n x_n^*\right)(x_n) = c_n$. □

Tvrzení 1.11. *Nechť X je Banachův prostor, $(u_n)_{n=1}^\infty$ je normalizovaná bázová posloupnost v X a $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ sčitatelná posloupnost kladných čísel. Označme $U = \overline{\operatorname{span}}\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ a $(u_n^*)_{n=1}^\infty$ biortogonální funkcionály k $(u_n)_{n=1}^\infty$. Potom množiny*

$$T = \{v^* \in U^*; |v^*(u_i)| \le \varepsilon_i \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \left\{v^* \in U^*; v^* = \sum_{k=1}^\infty a_k u_k^*, |a_k| \le \varepsilon_k\right\}$$

jsou si rovny a jsou kompaktní v U^*.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $T = S$. Mějme $v^* = \sum_{k=1}^\infty a_k u_k^* \in S$, potom platí $|v^*(u_i)| = |a_i| \le \varepsilon_i$, tedy $v^* \in T$ a $S \subset T$. Máme-li $v^* \in T$, potom díky Tvrzení 1.10 lze v^* napsat jako $v^* = w^* - \sum_{k=1}^\infty c_k u_k^*$. Platí $|c_k| = |v^*(u_k)| \le \varepsilon_k$, tedy je tato suma dokonce absolutně konvergentní v normě, $v^* \in S$ a $T = S$.

T je zřejmě uzavřená množina, tedy stačí ukázat, že S je totálně omezená. Mějme nějaké $\delta > 0$ a najděme konečnou δ-síť S. Jelikož $(u_k^*)_{k=1}^\infty$ jsou díky Tvrzení 1.8 stejně omezené, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^\infty \varepsilon_k \left\|u_k^*\right\| < \delta/2.$$

Množina $\left\{v^* \in U^*; v^* = \sum_{k=1}^N a_k u_k^*, |a_k| \le \varepsilon_k\right\}$ je omezená podmnožina prostoru konečné dimenze, tedy totálně omezená. Existuje tedy M, její konečná $\delta/2$-síť. Potom M je konečná δ-síť S. Vskutku, pro $v^* = \sum_{k=1}^\infty a_k u_k^* \in S$ najdeme $m \in M$ takové, že $\left\|\sum_{k=1}^N a_k u_k^* - m\right\| < \delta/2$. Potom

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k u_k^* - m\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^N a_k u_k^* - m\right\| + \left\|\sum_{k=N+1}^\infty a_k u_k^*\right\| \le \delta/2 + \sum_{k=N+1}^\infty \varepsilon_k \left\|u_k^*\right\| < \delta.$$

□

Kapitola 2

Kvazireflexivní prostory

Banachův prostor X je reflexivní, pokud je pomocí kanonického vnoření izometricky izomorfní svému druhému duálu X^{**}. Může se ale stát, že X je izometricky izomorfní X^{**}, i když X není reflexivní. Příkladem takového prostoru je Jamesův prostor [7].

Nyní si ukážeme definici kvazireflexivity, jakožto zobecnění reflexivity.

Definice. Řekneme, že Banachův prostor X je *kvazireflexivní*, pokud je kanonické vnoření X konečné kodimenze v X^{**}, tj.

$$\dim(X^{**}/\varkappa(X)) < \infty.$$

Z definice je zřejmé, že reflexivní prostory jsou také kvazireflexivní. Většina klasických Banachových prostorů ($L_p(\mu)$, $C(K)$, H_p) jsou buď reflexivní, nebo nejsou ani kvazireflexivní. Příkladem nereflexivního kvazireflexivního prostoru je již zmíněný Jamesův prostor [7].

2.1 Podprostory a kvocienty

Je známý fakt, že uzavřené podprostory a kvocienty podle uzavřených podprostorů reflexivních prostorů jsou reflexivní. Ukážeme, že totéž platí i pro kvazireflexivní prostory. Toto tvrzení a některé další zajímavé vlastnosti kvazireflexivních prostorů můžete najít v [1].

Nejprve si dokážeme některá tvrzení a kvocientech a faktorizacích, která budeme později potřebovat.

Lemma 2.1. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $T : X \longrightarrow Y$ spojité lineární zobrazení. Nechť $\varkappa : X \longrightarrow X^{**}$ a $\mu : Y \longrightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Potom $\mu \circ T = T^{**} \circ \varkappa$.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ a $y \in Y^*$, potom platí

$$T^{**}(\varkappa(x))(y) = \varkappa(x)(T^*(y)) = T^*(y)(x) = y(T(x)) = \mu(T(x))(y).$$

□

Lemma 2.2. *Nechť X a Y jsou Banachovy, $T : X \longrightarrow Y$ spojité lineární zobrazení a $Z \subset\subset \mathrm{Ker}(T)$ je uzavřený podprostor. Potom můžeme definovat spojité lineární zobrazení $\tilde{T} : X/Z \longrightarrow Y$ předpisem $\tilde{T}([x]) = T(x)$, kde $[x] = x + Z$. Je-li navíc $Z = \mathrm{Ker}(T)$, pak je T prosté. Je-li navíc $\mathrm{Range}(T)$ uzavřený v Y, pak $\tilde{T}$ je izomorfismus do.*

Důkaz. $\tilde{T}$ je dobře definované, jelikož pro $x - z \in Z \subset \operatorname{Ker}(T)$ je $Tx = Tz$, tedy $T([x])$ nezávisí na volbě reprezentanta $[x]$.

$\tilde{T}$ je zřejmě lineární.

Ukážeme, že $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Je-li $\|[x]\| < 1$, pak existuje $y \in [x]$ s $\|y\| < 1$. Potom platí
$$\|\tilde{T}([x])\| = \|T(y)\| \leq \|T\|.$$

Na druhou stranu
$$\|T\| = \|\tilde{T}q\| \leq \|\tilde{T}\|\|q\| \leq \|\tilde{T}\|,$$
kde $q : X \longrightarrow X/Z$ je kanonické kvocientové, tedy $\|q\| \leq 1$.

Je-li navíc $Z = \operatorname{Ker}(T)$, pak $\tilde{T}$ je prosté, jelikož $\tilde{T}([x]) = 0$ implikuje $T(x) = 0$, tedy $x \in \operatorname{Ker}(T)$ a $[x] = \operatorname{Ker}(T) = [0]$.

Je-li navíc $\operatorname{Range}(T)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru Y, potom je Banachův. Z věty o otevřeném zobrazení je $\tilde{T} : X/\operatorname{Ker}(T) \longrightarrow \operatorname{Range}(T)$ izomorfismus na. □

Definice. Operátor $\tilde{T}$ z minulého lemmatu budeme nazývat *faktorizací* T dle Z.

Lemma 2.3. *Nechť $Y \subset\subset X$ je uzavřený podprostor a q je kanonické kvocientové zobrazení X na X/Y. Potom duální operátor q^* je izometrie $(X/Y)^*$ na $Y^\perp$. Dále q^* je w^*-w^*-homeomorfismus.*

Důkaz. q^* je zřejmě spojité lineární zobrazení $(X/Y)^*$ do X^*.

q^* je do $Y^\perp$: Mějme $f \in (X/Y)^*$, $y \in Y$. Potom
$$(q^*(f))(y) = f(q(y)) = f([0]) = 0,$$
kde $[0] = 0 + Y$. Tedy $q^*(f) \in Y^\perp$.

q^* je na $Y^\perp$: Nechť $y \in Y^\perp$, potom $Y \subset \operatorname{Ker}(y)$. Definujeme $\tilde{y}$ jako v Lemmatu 2.2, potom $y = \tilde{y}q = q^*(\tilde{y})$.

q^* je izometrie: Mějme $f \in (X/Y)^*$, potom
$$q^*(f)(U_X) = f(q(U_X)) = f(U_{X/Y}).$$
Tedy z definice normy plyne $\|q^*(f)\| = \|f\|$.

q^* je w^*-w^*-homeomorfismus: Fixujme $x \in X$. Potom pro $f \in Y^*$ platí
$$q^*f(x) = f(q(x)) = f([x]),$$
a tedy $f \longmapsto q^*f(x)$ je w^*-spojité. Jelikož x bylo libovolné, q^* je w^*-w^*-spojité. Na druhou stranu fixujeme-li $y = [x] \in Y$. Potom pro $f \in Y^\perp$ platí
$$(q^*)^{-1}f(y) = f(x),$$
tedy $f \longmapsto (q^*)^{-1}f(y)$ je w^*-spojité. Jelikož y bylo libovolné, $(q^*)^{-1}$ je w^*-w^*-spojité. □

Lemma 2.4. *Nechť $Y \subset\subset X$ a $j : Y \longrightarrow X$ je identické vnoření. Potom duální operátor $j^* : X^* \longrightarrow Y^*$ je restrikce, tj. $j^*(x^*) = x^*|Y$ pro $x^* \in X^*$.*

Důkaz. Mějme $x^* \in X^*$ a $y \in Y$. Potom $j^*(x^*)(y) = x^*(j(y)) = x^*(y)$. □

Lemma 2.5. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T : X \longrightarrow Y$ je spojité lineární zobrazení. Potom* $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Range}(T)^\perp$.

Důkaz. Mějme $y^* \in \mathrm{Ker}(T^*)$ a $x \in X$, potom $y^*(Tx) = T^*(y^*)(x) = 0$, tedy $y^* \in \mathrm{Range}(T)^\perp$.

Na druhou stranu mějme $y^* \in \mathrm{Range}(T)^\perp$ a $y \in Y$. Potom platí $T^*(y^*)(y) = y^*(Ty) = 0$, tedy $y^* \in \mathrm{Ker}(T^*)$. $\square$

Nyní už máme všechno potřebné abychom dokázali následující tvrzení, které bylo převzato z [1].

Tvrzení 2.6. *Nechť X je kvazireflexivní a $Y \subset\subset X$ je uzavřený podprostor. Potom Y i X/Y jsou kvazireflexivní. Navíc platí, že kodimenze kanonického obrazu X v X^{**} je součtem kodimenzí kanonických obrazů Y v Y^{**} a X/Y v $(X/Y)^{**}$.*

Důkaz. Označme $\varkappa : X \longrightarrow X^{**}$, $\sigma : Y \longrightarrow Y^{**}$ a $\mu : X/Y \longrightarrow (X/Y)^{**}$ kanonická vnoření do druhého duálu, $q : X \longrightarrow X/Y$, $p : X^{**} \longrightarrow X^{**}/\varkappa(X)$ a $r : (X/Y)^{**} \longrightarrow (X/Y)^{**}/\mu(X/Y)$ kanonická kvocientová zobrazení, $j : Y \longrightarrow X$ izometrické vnoření. Situace je ilustrována v následujícím diagramu.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\sigma"] & X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varkappa"] & X/Y \arrow[d, "\mu"] \\
Y^{**} \arrow[r, "j^{**}"] \arrow[d] \arrow[dr, "pj^{**}"] & X^{**} \arrow[r, "q^{**}"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "rq^{**}"] & (X/Y)^{**} \arrow[d, "r"] \\
Y^{**}/\sigma(Y) \arrow[r, dashed, "\widetilde{pj^{**}}"] & X^{**}/\varkappa(X) \arrow[r, dashed, "\widetilde{rq^{**}}"] & (X/Y)^{**}/\mu(X/Y)
\end{tikzcd}$$

Stačí ukázat, že existuje prosté lineární zobrazení $Y^{**}/\sigma(Y)$ do $X^{**}/\varkappa(X)$ a lineární zobrazení $X^{**}/\varkappa(X)$ na $(X/Y)^{**}/\mu((X/Y))$. Tato hledaná zobrazení budou $\widetilde{pj^{**}}$ a $\widetilde{rq^{**}}$ (ve smyslu faktorizace z Lemmatu 2.2.).

Kvazireflexivita Y

Ukážeme, že jádro pj^{**} je $\sigma(Y)$. Potom z Lemmatu 2.2 bude $\widetilde{pj^{**}}$, faktorizace pj^{**} dle jeho jádra, prosté zobrazení $Y^{**}/\sigma(Y)$ do $X^{**}/\varkappa(X)$. Tedy bude platit

$$\dim(Y^{**}/\sigma(Y)) \leq \dim(X^{**}/\varkappa(X)) < \infty$$

a Y bude kvazireflexivní.

$\mathrm{Ker}(pj^{**}) = \sigma(Y)$, jelikož platí následující rovnosti:

$$\mathrm{Ker}(pj^{**}) = (j^{**})^{-1}(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Range}(j^{**})) =$$
$$= (j^{**})^{-1}(\varkappa(X) \cap Y^{\perp\perp}) = (j^{**})^{-1}(\varkappa(Y)) = \sigma(Y).$$

První rovnost je zřejmá, pro druhou si stačí uvědomit, že $\mathrm{Ker}(p) = \varkappa(X)$ a $\mathrm{Range}(j^{**}) = Y^{\perp\perp}$. Fakt, že $\mathrm{Ker}(p) = \varkappa(X)$ je zřejmý, tedy stačí ukázat, že $\mathrm{Range}(j^{**}) = Y^{\perp\perp}$. Mějme $y^{**} \in Y^{**}$ a $x^* \in Y^\perp$, potom díky Lemmatu 2.4 platí $j^{**}(y^{**})(x^*) = (y^{**})(x^*|Y) = 0$, tedy $j^{**}(y^{**}) \in Y^{\perp\perp}$. Na druhou stranu mějme $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$ a uvažujme $y^{**} \in Y^{**}$ definované rovností $y^{**}(y^*) = x^{**}(x^*)$, pro $y^* \in Y^*$ a x^* nějaké Hahn-Banachovo rozšíření y^*. Tato definice nezávisí na volbě

x^*: Nechť x_1^*, x_2^* jsou dvě rozšíření y^*, potom $x_1^* - x_2^* \in Y^\perp$. Tedy $x^{**}(x_1^* - x_2^*) = 0$. Dále zřejmě $j^{**}(y^{**}) = x^{**}$. Třetí rovnost platí, jelikož $\varkappa(X) \cap Y^{\perp\perp} = \varkappa(Y)$: Je-li $x^{**} \in \varkappa(Y)$, pak zřejmě také $x^{**} \in \varkappa(X) \cap Y^{\perp\perp}$. Na druhou stranu, mějme $x^{**} \in \varkappa(X) \backslash \varkappa(Y)$. Potom existuje $x \in X \backslash Y$, že $\varkappa(x) = x^{**}$. Z Hahn-Banachovy věty existuje $x^* \in X^*$ takové, že $x^*(x) = 1$ a $x^*|Y = 0$. Potom zřejmě $x^* \in Y^\perp$ a $x^{**}(x^*) \neq 0$, tedy $x^{**} \notin Y^{\perp\perp}$. Z Lemmatu 2.1 pro $y \in Y$ platí

$$j^{**}\sigma(y) = \varkappa j(y) = \varkappa(y),$$

tedy máme dokázanou čtvrtou rovnost.

Kvazireflexivita X/Y

Ukážeme, že platí $\operatorname{Ker}(rq^{**}) \subset \varkappa(X)$, a tedy je $\widetilde{rq^{**}}$, faktorizace rq^{**} dle $\varkappa(X)$, dobře definovaná.

Jádro rq^{**} je $\varkappa(X) + Y^{\perp\perp}$, jelikož platí následující rovnosti:

$$\operatorname{Ker}(rq^{**}) = (q^{**})^{-1}\operatorname{Ker}(r) = (q^{**})^{-1}(\mu(X/Y)) = \varkappa(X) + Y^{\perp\perp}$$

První dvě rovnosti jsou zřejmé. Pro třetí rovnost nám stačí ukázat rovnosti $q^{**}(\varkappa(X)) = \mu(X/Y)$ a $\operatorname{Ker}(q^{**}) = Y^{\perp\perp}$. Z Lemmat 2.4 a 2.3 plyne rovnost

$$\operatorname{Ker}(q^{**}) = \operatorname{Range}(q^*)^\perp = Y^{\perp\perp}.$$

Díky Lemmatu 2.1 platí $\mu q = q^{**}\varkappa$, tedy $q^{**}(\varkappa(X)) = \mu(X/Y)$.

Dále je rq^{**} (a tedy i $\widetilde{rq^{**}}$) na, jelikož jde o složení dvou zobrazení, která jsou na.

Tedy $\widetilde{rq^{**}}$ je lineární zobrazení $X^{**}/\varkappa(X)$ na $(X/Y)^{**}/\mu(X/Y)$ a platí

$$\dim((X/Y)^{**}/\mu(X/Y)) \leq \dim(X^{**}/\varkappa(X)) < \infty.$$

Součet kodimenzí

Stačí ukázat platnost rovností

$$\operatorname{Range}(\widetilde{pj^{**}}) = (\varkappa(X) + Y^{\perp\perp})/\varkappa(X)$$
$$\operatorname{Ker}(rq^{**}) = \varkappa(X) + Y^{\perp\perp}.$$

Potom bude platit

$$\dim(Y/\sigma(Y)) = \dim((\varkappa(X) + Y^{\perp\perp})/\varkappa(X)),$$
$$\dim((X/Y)^{**}/\mu(X/Y)) = \dim(X^{**}/(\varkappa(X) + Y^{\perp\perp})).$$

První rovnost je zřejmá, jelikož lineární bijekce zachovává dimenzi. Druhou rovnost získáme po faktorizaci rq^{**} dle jeho jádra - opět dostaneme lineární bijekci.

Tedy platí i závěr tvrzení, jelikož

$$\dim(X^{**}/\varkappa(X)) = \dim(X^{**}/(\varkappa(X) + Y^{\perp\perp})) + \dim((\varkappa(X) + Y^{\perp\perp})/\varkappa(X)).$$

Platí následující rovnosti:

$$\operatorname{Range}(\widetilde{pj^{**}}) = \operatorname{Range}(pj^{**}) = p(\operatorname{Range}(j^{**})) = p(Y^{\perp\perp}).$$

První dvě rovnosti jsou zřejmé a to, že $\operatorname{Range}(j^{**}) = Y^{\perp\perp}$, jsme již ukázali výše.

To, že $\operatorname{Ker}(rq^{**}) = \varkappa(X) + Y^{\perp\perp}$ jsme již dokázali výše. □

Speciálním důsledkem Tvrzení 2.6 je známý fakt, že uzavřené podprostory a kvocienty reflexivních prostorů jsou reflexivní.

2.2 Oddělování bodů v kvazireflexivních prostorech

Nyní ukážeme, že stejně jako v reflexivních prostorech (viz. Důsledek 1.7) je v kvazireflexivních prostorech pro podprostory oddělování bodů ekvivalentní s normujícností.

Nejprve dokážeme tvrzení o zachování normujícnosti na w^*-husté podprostory konečné kodimenze, které bylo převzato z [8].

Tvrzení 2.7. *Nechť $S \subset\subset X^*$ je normující a $\tilde{S} \subset\subset S$ je w^*-hustý konečné kodimenze v S. Potom $\tilde{S}$ je normující.*

Důkaz. Je-li $\tilde{S}$ dokonce normově hustý v S, pak je normující z duálního vyjádření normy. Nechť tedy $\tilde{S}$ není normově hustý v S. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\tilde{S}$ je uzavřený v S, jinak ho nahradíme jeho uzávěrem. Tvrzení také stačí dokázat pro $\dim(S/\tilde{S}) = 1$, obecné znění pak dostaneme indukcí. Nechť tedy existuje $\xi \in X^{**}$ takové, že $\tilde{S} = S \cap \operatorname{Ker} \xi$.

Sporem ukážeme, že $\xi|B_{X^*} \cap S$ není w^*-spojité v 0. Kdyby bylo, tak je $\xi|nB_{X^*} \cap S$ w^*-spojité pro každé $n \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že S je 1-normující, potom $\overline{S \cap nB_{X^*}}^* = nB_{X^*}$.

Ukážeme, že $\xi|S \cap nB_{X^*}$ lze w^*-spojitě rozšířit na nB_{X^*} pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Pro $x^* \in nB_{X^*}$ definujeme $\eta(x^*)$ pomocí rovnosti

$$\{\eta(x^*)\} = \bigcap \{\overline{\xi\left((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*}\right)}; U\ w^*\text{-okolí } 0\}.$$

Tato definice je korektní dle Cantorova principu, jelikož diametry množin, přes které děláme průniky jdou k nule, jak nyní ukážeme. Fixujme $\varepsilon > 0$. Existuje U, absolutně konvexní w^*-okolí 0 takové, že pro každé $y^* \in U \cap S \cap 2nB_{X^*}$ je $|\xi(y^*)| < \varepsilon$. Najdeme absolutně konvexní w^*-okolí nuly V splňující $V + V \subset U$. Mějme x_1^*, $x_2^* \in (x^* + V) \cap S \cap nB_{X^*}$, potom

$$|\xi(x_1^*) - \xi(x_2^*)| = |\xi(x_1^* - x_2^*)| < \varepsilon,$$

jelikož $x_1^* - x_2^* \in (V + V) \cap S \cap 2nB_{X^*} = U \cap S \cap 2nB_{X^*}$.

Dále je definice η nezávislá na n, jelikož pro $n < m$ je

$$\bigcap \{\overline{\xi\left((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*}\right)}\} \subset \bigcap \{\overline{\xi\left((x^* + U) \cap S \cap mB_{X^*}\right)}\},$$

obě tyto množiny jsou jednobodové, a tedy jsou si rovny.

Ukážeme, že takto definované η je w^*-spojité na každé nB_{X^*}. Mějme net $(x_\alpha^*) \subset nB_{X^*}$ a $x^* \in nB_{X^*}$ takové, že $x_\alpha^* \xrightarrow{*} x^*$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje U, w^*-okolí 0 takové, že

$$\operatorname{diam} \xi((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*}) < \varepsilon.$$

Dále existuje α_0 takové, že pro každé $\alpha > \alpha_0$ platí $x_\alpha^* \in x^* + U$. Z w^*-hustoty S potom pro $\alpha > \alpha_0$ je

$$((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*}) \cap (x_\alpha^* + W) \neq \emptyset$$

pro každé W, w^*-okolí 0. Pro $\alpha > \alpha_0$ najdeme W_α, w^*-okolí 0, které splňuje $x^*_\alpha + W_\alpha \subset x^* + U$. Potom

$$|\eta(x^*) - \eta(x^*_\alpha)| = \operatorname{diam}\{\eta(x^*); \eta(x^*_\alpha)\} \leq \operatorname{diam} \overline{\xi((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*})} < \varepsilon,$$

jelikož $\{\eta(x^*)\} \subset \overline{\xi((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*})}$ a

$$\{\eta(x^*_\alpha)\} \subset \overline{\xi((x^*_\alpha + W_\alpha) \cap S \cap nB_{X^*})} \subset \overline{\xi((x^* + U) \cap S \cap nB_{X^*})}.$$

Tedy $\eta|nB_{X^*}$ je w^*-spojité pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Dále je η lineární: mějme $x^*, y^* \in X^*$ a $a, b \in \mathbb{F}$. Potom z 1-normujícnosti S pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ existují nety (x^*_α), (y^*_α) prvků $S \cap nB_{X^*}$ splňující $x^*_\alpha \xrightarrow{*} x^*$, $y^*_\alpha \xrightarrow{*} y^*$. Potom z w^*-spojitosti η na nB_{X^*} a linearity η na S platí

$$a\eta(x^*) + b\eta(y^*) = \lim_\alpha (a\eta(x^*_\alpha) + b\eta(y^*_\alpha)) = \lim_\alpha \eta(ax^*_\alpha + by^*_\alpha) = \eta(ax^* + by^*).$$

Tedy η je bw^*-spojité. Z Banach-Dieudonného věty [4, Corollary 3.94] potom dostaneme $\eta \in X$.

Dále $\eta \in \tilde{S}^\perp$, jelikož $\xi \in \tilde{S}^\perp$ a $(\eta - \xi)(\tilde{S}) = \{0\}$. Jelikož $\tilde{S}$ je w^*-hustý v X^*, odděluje body X a $\tilde{S}^\perp \cap X = \{0\}$. Tedy $\eta = 0$. Potom ale $\xi|S = \eta|S = 0$, tedy $S \subset \operatorname{Ker} \xi$ a $\tilde{S} = S$, což je spor.

Tedy $\xi|B_{X^*} \cap S$ není w^*-spojité v 0, tj.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \, U \; w^*\text{-okolí } 0 \; \exists f \in U \cap S \cap B_{X^*} : |\xi(f)| \geq \varepsilon.$$

S je normující, tedy

$$\exists c > 0 \; \forall x \in X \; \exists g \in S \cap B_{X^*} : |g(x)| \geq c\|x\|.$$

Fixujeme takové c a ε a ukážeme, že $\tilde{S}$ je normující.

Nechť $x \in X \backslash \{0\}$. Vezmeme $g \in B_{X^*} \cap S$, že $|g(x)| \geq c\|x\|$. Dále x je w^*-spojitý, jakožto funkcionál na X^*, tedy existuje U, w^*-okolí 0, že pro každé $f \in U$ platí $|f(x)| \leq \frac{c\varepsilon}{2\|\xi\|}\|x\|$.

Existuje $f \in U \cap S \cap B_{X^*}$, že $|\xi(f)| \geq \varepsilon$. Položme $h := g - \frac{\xi(g)}{\xi(f)} f$. Potom $h \in \tilde{S}$, jelikož f, $g \in S$, a $\xi(h) = 0$. Dále platí:

$$\|h\| \leq \|g\| + \frac{\xi(g)}{\xi(f)}\|f\| \leq 1 + \frac{\|\xi\|}{\varepsilon}.$$

Dále máme

$$|h(x)| \geq |g(x)| - \left|\frac{\xi(g)}{\xi(f)} f(x)\right| \geq c\|x\| - \frac{\|\xi\|}{\varepsilon}|f(x)| \geq \frac{c}{2}\|x\|$$

Pro $x \in X \backslash \{0\}$ jsme našli $h \in \tilde{S}$, že $|h(x)| \geq c/2 \; \|x\|$. Uvažujme $\tilde{h} = \frac{h}{1 + \frac{\|\xi\|}{\varepsilon}}$, potom $\|\tilde{h}\| \leq 1$ a platí

$$|\tilde{h}(x)| = \frac{|h(x)|}{1 + \frac{\|\xi\|}{\varepsilon}} \geq \frac{c}{2(1 + \frac{\|\xi\|}{\varepsilon})}\|x\|.$$

Tedy $\tilde{S}$ je normující. □

Nyní máme vše potřebné, abychom ukázali ekvivalenci oddělování bodů a normujícnosti v kvazireflexivních prostorech.

Tvrzení 2.8. *Nechť X je kvazireflexivní, $A \subset\subset X^*$, potom A je normující, právě když A odděluje body X.*

Důkaz. Normující podprostory vždy oddělují body, pro druhou implikaci pak použijeme Tvrzení 2.7.

Ukážeme, že $A^\perp$ je konečné dimenze. Nechť X je kodimenze n v X^{**}, potom každý podprostor X^{**} dimenze alespoň $n+1$ protíná $X \backslash \{0\}$. Dále A odděluje body X, tedy $A^\perp \cap X = \{0\}$. Tedy dimenze $A^\perp$ je nejvýše n. Fixujme $y_1,...,y_k$ nějakou bázi $A^\perp$, kde $k \leq n$.

Z Hahn-Banachovy věty pro lokálně konvexní prostory aplikované na (X^{**},w^*) můžeme najít $x_1^*,...,x_k^* \in X^*$, že $y_i(x_j^*) = \delta_{i,j}$, kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta: Uvažujme zobrazení $T_j \in (A^\perp)^*$ definované předpisem $T_j(\sum_{i=1}^n a_i y_i) = a_j$ pro $j = 1,...,k$. Potom T_j jsou normově spojité. Na konečnědimenzionálním $A^\perp$ splývá normová a w^* topologie, tedy T_j jsou i w^*-spojité a můžeme použít Hahn-Banachovu větu k získání x_j^*, w^*-spojitých rozšíření T_j na X^{**}. Tato zobrazení jsou w^*-spojitá, tedy je můžeme ztotožnit s prvky X^*.

Definujme $B = \operatorname{span}(A \cup \{x_1^*,...,x_k^*\})$ a ukážeme, že B je slabě hustý v X^*. Platí $B^\perp \subset A^\perp \cap (\operatorname{span}\{x_1^*,...,x_k^*\})^\perp = \{0\}$, jelikož $A^\perp = \operatorname{span}\{y_1,...,y_k\}$ a pro $y = \sum_{i=1}^k a_i y_i \in A^\perp$ je $x_i^*(y) = a_i$. Potom z věty o bipoláře plyne

$$\overline{B}^w = (B^\perp)_\perp = X^*.$$

Z Mazurovy věty plyne, že B je dokonce normově hustý podprostor X^*, tedy je normující z duálního vyjádření normy.

Nakonec díky Lemmatu 1.1 je A w^*-hustý podprostor X^*. Navíc je konečné kodimenze v normujícím B, tedy z Tvrzení 2.7 plyne, že je normující. □

Poznámka. Z Tvrzení 2.7 a 2.8 a jejich důkazů plynou následující tvrzení:

1. Nechť X je kvazireflexivní a $A \subset\subset X^*$ je normově uzavřený podprostor oddělující body. Potom A je konečné kodimenze v X^*.

2. Nechť $\xi \in X^{**} \backslash \varkappa(X)$, pak $\operatorname{Ker}(\xi)$ je normující.

Důkaz. Podobně jako v důkazu Tvrzení 2.8 dostaneme, že $A^\perp$ je konečné dimenze n. Kdyby A nebyl konečné kodimenze v X^*, mohli bychom najít lineárně nezávislou $\{x_1^*,...,x_{n+1}^*\} \subset X^* \setminus A$.

Použitím Hahn-Banachovy věty najdeme pro $k = 1,...,n+1$ funkcionály $x_k^{**} \in X^{**}$ oddělující x_k^* od $A \oplus \operatorname{span}\{x_j^*; j \neq k\}$. Potom $\{x_1^{**},...,x_{n+1}^{**}\}$ je lineárně nezávislá posloupnost v $A^\perp$, což je spor a dostáváme první bod.

K důkazu druhého bodu stačí dle Tvrzení 2.7 ukázat, že $\operatorname{Ker}(\xi)$ je w^*-hustý podprostor konečné kodimenze. Jelikož $\xi \neq 0 \in \varkappa(X)$, máme, že kodimenze $\operatorname{Ker}(\xi)$ je 1. Kdyby $\operatorname{Ker}(\xi)$ nebylo w^*-husté, tak z Lemmatu 1.1 neodděluje body X, tedy existuje $0 \neq x \in X$, že pro každé $x^* \in \operatorname{Ker}(\xi)$ platí $x^*(x) = 0$. Potom ale $\operatorname{Ker}(\varkappa(x)) \supset \operatorname{Ker}(\xi)$, tedy $\varkappa(x) = c\xi$, což je spor s $\xi \notin \varkappa(X)$.

□

2.3 w^*-derivované množiny v kvazireflexivních prostorech

V minulé kapitole jsme ve Větě 1.6 ukázali, že pro X reflexivní a A konvexní platí $A^{(1)} = \overline{A}^*$. Nyní ukážeme podobné tvrzení pro kvazireflexivní prostory.

Věta 2.9. *Nechť X je kvazireflexivní a $A \subset\subset X^*$. Potom $A^{(1)} = \overline{A}^*$.*

Důkaz. Uvažujme $Y = X/(A_\perp)$. Z Tvrzení 2.6 je to opět kvazireflexivní prostor. Z Lemmatu 2.2 je Y^* izometricky izomorfní $(A_\perp)^\perp$ přes zobrazení $T : f \longmapsto f \circ q$, kde q je kanonické kvocientové zobrazení. Z věty o bipoláře pak $(A_\perp)^\perp = \overline{A}^*$.

Z Lemmatu 2.3 plyne, že T je w^*-w^*-homeomorfismus.

Ukážeme, že $T^{-1}(A)$ odděluje body Y. Nechť $y = [x] \in Y$. A odděluje body X, můžeme tedy najít $a \in A$, že $a(x) = 1$. Potom $(T^{-1}a)(y) = 1$.

Tedy $T^{-1}(A)$ odděluje body kvazireflexivního Y a z Věty 2.8. dostáváme $(T^{-1}(A))^{(1)} = Y^*$. Jelikož T je w^*-w^*-homeomorfismus, máme

$$A^{(1)} = T(T^{-1}(A^{(1)})) = T((T^{-1}(A))^{(1)}) = T(Y^*) = \overline{A}^*.$$

□

Ve Větě 2.9 nám nestačí pouze konvexita A, protipříkladem se budeme zabývat později ve třetí kapitole. Tuto větu však můžeme ještě zobecnit pro absolutně konvexní množiny. Použijeme postupu z [10].

Nejprve si formulujeme známé tvrzení o lokální reflexivitě. Důkaz tohoto tvrzení si můžete dohledat v [11, Theorem 10.18.].

Lemma 2.10. *Nechť Y je Banachův a $E \subset\subset Y^{**}$, $F \subset\subset Y^*$ jsou podprostory konečné dimenze. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje T, izomorfismus E na $\mathrm{Range}(T) \subset\subset Y$, takový, že $\|T\| < 1 + \varepsilon$, $\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$, $T|(E \cap \varkappa(Y)) = \varkappa^{-1}$ a pro každé $f \in F$, $e \in E$ platí $f(Te) = ef$.*

Dále budeme potřebovat následující lemma z [10]. Připomeneme, že indexovaný systém $\{x_i; i \in I\}$ je *konečně nenulový*, pokud $x_i = 0$ pro všechny indexy $i \in I$, až na konečně mnoho.

Následující lemma je převzato z [10] a používá některé myšlenky z [13].

Lemma 2.11. *Nechť X je konečnědimenzionální Banachův prostor nad $\mathbb{F}$. Nechť $(m_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \subset X$ je net, který splňuje $\limsup_\alpha \|m_\alpha\| = \infty$. Potom existuje $C > 0$ a $\alpha' \in \Omega$ takové, že pro každé $\alpha_0 > \alpha'$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje konečně nenulový systém $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \subset \mathbb{R}$, který splňuje $a_\alpha = 0$ pro $\alpha < \alpha_0$, $\sum_\alpha |a_\alpha| \le 1$, $a_{\alpha_0} = 1 - \varepsilon$ a $\|\sum_\alpha a_\alpha m_\alpha\| \le C$.*

Důkaz. Důkaz nejprve provedeme pro prostor nad $\mathbb{R}$.

Pro $\alpha \in \Omega$ definujeme $M_\alpha = \overline{\mathrm{aco}}\{m_\beta; \beta > \alpha\}$. Definujeme

$$L_\alpha = \{x \in M_\alpha; \mathrm{span}\{x\} \subset M_\alpha\}.$$

Potom L_α je lineární podprostor. Zřejmě pro $x \in L_\alpha$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda x \in L_\alpha$. Dále, máme-li x,$y \in L_\alpha$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, pak $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \in M_\alpha$ z absolutní konvexity M_α. Tedy $x + y \in L_\alpha$.

Dále každý z podprostorů L_α je netriviální. Označme $Y_\alpha = \operatorname{span}(M_\alpha)$. Nechť p je Minkowského funkcionál M_α v Y_α (tj. $p(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda M_\alpha\}$ pro $x \in Y_\alpha$). Jelikož M_α je absolutně konvexní, p je pseudonorma. Kdyby L_α bylo triviální, pak by p byla dokonce norma. Vskutku, pro $0 \neq x \in Y_\alpha$ by platilo $0 \neq \sup\{\lambda > 0; \lambda x \in M_\alpha\} < \infty$, tedy

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda M_\alpha\} = (\sup\{\lambda > 0; \lambda x \in M_\alpha\})^{-1} \neq 0.$$

Potom, jelikož na konečnědimenzionálních prostorech jsou všechny normy ekvivalentní, musí být M_α omezená, což ale není. Tedy L_α jsou netriviální.

Dále pro $\alpha_1 < \alpha_2$ platí $L_{\alpha_2} \subset L_{\alpha_1}$. Jelikož jsme v konečnědimenzionálním X, existuje α', že pro $\alpha > \alpha'$ je $L_\alpha = L_{\alpha'}$. Označme $L = L_{\alpha'} = \bigcap_\alpha L_\alpha$ a Z doplňkový podprostor k L (tj. takové $Z \subset\subset X$, že $L \oplus Z = X$). Pro $\alpha > \alpha'$ definujeme $K_\alpha = M_\alpha \cap Z$. Zřejmě $0 \in K_\alpha \subset K_{\alpha'}$. K_α jsou absolutně konvexní uzavřené množiny. Dále jsou omezené, jelikož jsou absolutně konvexní a neobsahují žádnou přímku. Označme $C = \max\{\|x\|; x \in K_{\alpha'}\}$.

Nechť $\alpha_0 > \alpha'$ a $\varepsilon > 0$. Potom $m_{\alpha_0} = k_{\alpha_0} + \ell_{\alpha_0}$, kde $k_{\alpha_0} \in K_{\alpha_0} \subset K_{\alpha'}$ a $\ell_{\alpha_0} \in L$. Vektor $-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ell_{\alpha_0} \in L + \{0\} \subset M_{\alpha_0} = \overline{\operatorname{aco}}\{m_\beta; \beta > \alpha_0\}$, tedy existuje absolutně konvexní kombinace $\sum_{\alpha > \alpha_0} b_\alpha m_\alpha$ (tj. $\sum_{\alpha>\alpha_0} |b_\alpha| \leq 1$, $|b_\alpha| \leq 1$ a $b_\alpha \neq 0$ jen pro konečně mnoho α) taková, že $\| \sum_{\alpha>\alpha_0} b_\alpha m_\alpha + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ell_{\alpha_0}\| \leq C$.

(a_α) definujeme takto: $a_{\alpha_0} = 1 - \varepsilon$, $a_\alpha = \varepsilon b_\alpha$ pro $\alpha > \alpha_0$ a $a_\alpha = 0$ pro ostatní α. Tedy platí

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha m_\alpha = (1-\varepsilon)k_{\alpha_0} + (1-\varepsilon)\ell_{\alpha_0} + \varepsilon \sum_{\alpha>\alpha_0} b_\alpha m_\alpha.$$

Máme odhad

$$\left\|\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha m_\alpha\right\| \leq \|(1-\varepsilon)k_{\alpha_0}\| + \left\|(1-\varepsilon)\ell_{\alpha_0} + \varepsilon \sum_{\alpha>\alpha_0} b_\alpha m_\alpha\right\| \leq$$

$$\leq (1-\varepsilon)\|k_{\alpha_0}\| + \varepsilon \left\|\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ell_{\alpha_0} + \sum_{\alpha>\alpha_0} b_\alpha m_\alpha\right\| \leq (1-\varepsilon)C + \varepsilon C = C.$$

Tedy máme větu dokázanou v prostoru nad $\mathbb{R}$. Závěr pro komplexní prostor dostaneme aplikováním reálného případu na reálnou verzi komplexního prostoru. □

Ještě dokážeme lemma, které nám ukáže, že anihilátor topologického doplňku $\varkappa(X)$ v X^{**} odděluje body X, a tedy je normující.

Lemma 2.12. *Nechť X je kvazireflexivní a $F \subset\subset X^{**}$ je podprostor konečné dimenze splňující $X^{**} = \varkappa(X) \oplus F$. Potom $F_\perp \subset\subset X^*$ je normující pro X.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že je-li $x^{**} \in X^{**}$ nulové na $F_\perp$, pak $x^{**} \in F$. Existuje $\{f_1,...,f_n\}$, že $F = \operatorname{span}\{f_1,...,f_n\}$. Potom $F_\perp = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} x^{**}$, a tedy $x^{**} \in \operatorname{span}\{f_1,...,f_n\} = F$.

Dále platí $\varkappa(F_{\perp\perp}) = (F_\perp)^\perp \cap \varkappa(X) = \{0\}$, jelikož $(F_\perp)^\perp \subset F$. Potom i $F_{\perp\perp} = \{0\}$.

Tedy $F_\perp$ odděluje body X a dle Tvrzení 2.8 je normující. □

Dále budeme potřebovat tento známý důsledek Mazurovy věty.

Lemma 2.13. *Nechť $(x_\alpha)_\alpha$ je net v X a $x_\alpha \xrightarrow{w} x \in X$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ a každé α_0 existuje y, konvexní kombinace prvků $\{x_\alpha; \alpha > \alpha_0\}$, která splňuje $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Důkaz. Fixujme $\varepsilon > 0$ a α_0. Potom z Mazurovy věty

$$x \in \overline{\{x_\alpha; \alpha > \alpha_0\}}^w \subset \overline{\operatorname{conv}\{x_\alpha; \alpha > \alpha_0\}}^w = \overline{\operatorname{conv}\{x_\alpha; \alpha > \alpha_0\}}.$$

Tedy existuje $y \in \operatorname{conv}\{x_\alpha; \alpha > \alpha_0\}$ takové, že $\|x - y\| < \varepsilon$. □

Ještě budeme potřebovat následující lemma o přeindexování netů v topologickém vektorovém prostoru.

Lemma 2.14. *Nechť $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ je net v topologickém vektorovém prostoru (X,τ). Nechť existuje $x \in X$, že $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$. Potom existuje net $(y_U)_U$ sestávající z prvků množiny $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ a přirozeně indexovaný systémem τ-okolí 0, tj $y_U \in x + U$, takový, že $y_U \xrightarrow{\tau} x$.*

Důkaz. Jelikož $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, pak pro každé U, τ-okolí 0, existuje $\alpha \in A$ takové, že $x_\alpha \in x + U$. Vezmeme za y_U nějaké takové x_α. Potom zřejmě $y_U \xrightarrow{\tau} x$. □

Nyní už máme vše potřebné k důkazu následující věty.

Věta 2.15. *Nechť X je kvazireflexivní a $A \subset X^*$ je absolutně konvexní. Potom $A^{(1)} = \overline{A}^*$.*

Důkaz. Podle Důsledku 1.5 stačí ukázat, že $(A^{(1)})^{(1)} = A^{(1)}$. Mějme tedy nějaké $x^* \in (A^{(1)})^{(1)}$ a ukážeme, že $x^* \in A^{(1)}$.

Jelikož $x^* \in (A^{(1)})^{(1)}$, existuje omezený net $(x^*_\alpha)_\alpha \subset A^{(1)}$ splňující $x^*_\alpha \xrightarrow{*} x^*$. Dále pro každé α platí $x^*_\alpha \in A^{(1)}$, tedy existují omezené nety $(x^*_{\alpha,\beta})_\beta \subset A$ takové, že $x^*_{\alpha,\beta} \xrightarrow[\beta]{*} x^*_\alpha$. Z Lemmatu 2.14 bez újmy na obecnosti α a β probíhají $\mathcal{U}$, systém w^*-okolí 0 v X^*, tj. $x^*_U \in x^* + U$, $x^*_{\alpha,U} \in x^*_\alpha + U$ pro každé $U \in \mathcal{U}$.

Z kvazireflexivity X existuje konečnědimenzionální $F \subset\subset X^{**}$ takový, že $X^{**} = \varkappa(X) \oplus F$. Dále, jelikož F je konečné dimenze a $(x^*_{\alpha,\beta})_\beta$ jsou omezené nety, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje net $(v_\alpha)_\alpha \subset F^*$ takový, že $\varkappa_{X^*}(x^*_{\alpha,\beta})|F \xrightarrow[\beta]{} v_\alpha$ silně.

Podobně jako v Lemmatu 2.14 můžeme předpokládat, že pro každé α probíhá β stejnou množinu, a to $\mathcal{U} \times \mathbb{N}$. ($x^*_{\alpha,\beta} \xrightarrow[\beta]{*} x^*_\alpha$ a $\varkappa_{X^*}(x^*_{\alpha,\beta})|F \xrightarrow[\beta]{} v_\alpha$, tedy pro (U,n) existuje $y_{U,n} \in \{x^*_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ splňující $y_{U,n} \in x^*_\alpha + U$ a $\|\varkappa(y_{U,n})|F - v_\alpha\| \leq 1/n$.)

Dále rozlišíme dva případy – $\operatorname{limsup}_\alpha \|v_\alpha\| < \infty$, potom můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že i $\sup_\alpha \|v_\alpha\| < \infty$, jinak přejdeme k subnetu, a $\operatorname{limsup}_\alpha \|v_\alpha\| = \infty$.

Krok 1: $\sup_\alpha \|v_\alpha\| < \infty$ (zde by stačito, aby A byla konvexní).

Použijeme Lemma 2.10 na X^*, $\varepsilon = 1$ a podprostory $F \subset\subset X^{**}$, $F^* \subset\subset X^{***}$ (X^{***} můžeme ztotožnit s $\varkappa(X)^* \oplus F^*$ přes zobrazení $f \longmapsto (f|\varkappa(X), f|F)$, tj. $\varkappa(X)^* = F^\perp$, $F^* = \varkappa(X)^\perp$) a získáme operátor $T : F^* \longrightarrow X^*$.

Definujme $\ell_\alpha = T(v_\alpha) - x^*_\alpha$. Označme $C_1 = \sup_\alpha \|T(v_\alpha)\| + \sup_\alpha \|x^*_\alpha\| < \infty$. Díky Lemmatu 2.12 existuje $C_2 \geq 1$ takové, že $F_\perp$ je C_2-normující. Potom pro $C = C_1 C_2$ díky Lemmatu 1.2 platí $C_1 B_{X^*} \subset \overline{C B_{X^*} \cap F_\perp}^*$. Tedy existuje net $(u_{\alpha,\delta})_\delta \subset F_\perp$, pro který platí $u_{\alpha,\delta} \xrightarrow[\delta]{*} \ell_\alpha$ a $\sup_\delta \|u_{\alpha,\delta}\| \leq C$. Dle Lemmatu 2.14 bez újmy na obecnosti δ probíhá $\mathcal{U}$. Všimněme si, že C_1, C_2 a C nezávisí na α.

Definujme $\ell_{\alpha,\delta} = \ell_\alpha - u_{\alpha,\delta}$. Potom platí:

- Pro každé α a δ je $\|\ell_{\alpha,\delta}\| \leq C_1 + C$, tedy jsou nety $(\ell_{\alpha,\delta})_\delta$ stejně omezené nezávisle na α.
- Pro každé $f \in F$ je $f(\ell_{\alpha,\delta}) = v_\alpha(f) - f(x^*_\alpha)$, jelikož

$$f(\ell_{\alpha,\delta}) = f(\ell_\alpha) = f(T(v_\alpha)) - f(x^*_\alpha) = v_\alpha(f) - f(x^*_\alpha).$$

- $\ell_{\alpha,\delta} \xrightarrow[\delta]{*} 0$, jelikož $u_{\alpha,\delta} \xrightarrow[\delta]{*} \ell_\alpha$.

Potom kombinovaný net $(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha - \ell_{\alpha,\delta})_{(\beta,\delta)}$, kde definujeme uspořádání $(\beta_1,\delta_1) < (\beta_2,\delta_2)$, právě když $\beta_1 < \beta_2$ a $\delta_1 < \delta_2$, konverguje slabě k nule v prostoru X^*. Vskutku, pro $f \in F$ máme

$$f(x^*_{\alpha,\beta}) - f(x^*_\alpha) - f(\ell_{\alpha,\delta}) = f(x^*_{\alpha,\beta}) - v_\alpha(f) \xrightarrow[\beta]{} 0$$

a pro $x \in X$ máme

$$x^*_{\alpha,\beta}(x) - x^*_\alpha(x) - \ell_{\alpha,\delta}(x) \xrightarrow[(\beta,\delta)]{} x^*_\alpha(x) - x^*_\alpha(x) - 0 = 0.$$

Tedy dle Lemmatu 2.13 pro každé $\varepsilon > 0$ a β_0 existuje

$$\sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha - \ell_{\alpha,\delta}),$$

konvexní kombinace prvků $(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha - \ell_{\alpha,\delta})_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0}$ (kde $a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,\varepsilon)$ jsou její koeficienty), splňující

$$\left\| \sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha - \ell_{\alpha,\delta}) \right\| < \varepsilon.$$

Potom díky konvexitě A jsou nety $(\sum a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)x^*_{\alpha,\beta})_{\beta_0}$ z A a platí

$$\sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)x^*_{\alpha,\beta} \xrightarrow[\beta_0]{*} x^*_\alpha.$$

Pro důkaz této konvergence mějme nějaké U, konvexní w^*-okolí 0. Potom pro $\beta > \beta_0 > U$ je $x^*_{\alpha,\beta} \in x^*_\alpha + U$, tedy existuje $y^*_{\alpha,\beta} \in U$ takové, že $x^*_{\alpha,\beta} = x^*_\alpha + y^*_{\alpha,\beta}$. Potom z konvexity U plyne

$$\sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)x^*_{\alpha,\beta} = x^*_\alpha + \sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)y^*_{\alpha,\beta} \in x^*_\alpha + U.$$

Dále jsou tyto nety stejně omezené nezávisle na α, jelikož pro každé β_0 platí

$$\left\| \sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)x^*_{\alpha,\beta} \right\| \leq \left\| \sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha - \ell_{\alpha,\delta}) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{(\beta,\delta);\beta>\beta_0} a_{\beta,\alpha,\delta}(\beta_0,1)(x^*_\alpha + \ell_{\alpha,\delta}) \right\| \leq 1 + \sup_\alpha \|x^*_\alpha\| + \sup_{\alpha,\delta} \|\ell_{\alpha,\delta}\|.$$

Tedy existuje konstanta $K > 0$ taková, že $x^*_\alpha \in \overline{A \cap KB_{X^*}}^*$ pro každé α. Ale $x^*_\alpha \xrightarrow{*} x^*$, tedy i $x^* \in \overline{A \cap KB_{X^*}}^*$ a $x^* \in A^{(1)}$.

Krok 2: $\limsup_\alpha \|v_\alpha\| = \infty$ (zde už nám pouze konvexita A nestačí).

Aplikujeme Lemma 2.11 na neomezený net $(v_\alpha - \varkappa_{X^*}(x^*_\alpha)|F)_\alpha$ a najdeme $C > 0$ takové, že pro dost velká α (bez újmy na obecnosti všechna α, jinak přejdeme k subnetu) a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje lineární kombinace s pouze konečně mnoha nenulovými koeficienty

$$k_{\alpha,\varepsilon} = (1-\varepsilon)(v_\alpha - \varkappa_{X^*}(x^*_\alpha)|F) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(v_\delta - \varkappa_{X^*}(x^*_\delta)|F)$$

splňující $\|k_{\alpha,\varepsilon}\| \le C$ a $\sum\limits_{\delta>\alpha} |a_{\alpha,\varepsilon,\delta}| \le \varepsilon$.

Uvažujme operátor $T : F^* \longrightarrow X^*$ jako v Kroku 1. Podobným způsobem najdeme $w_{\alpha,\varepsilon,\gamma} \in F_\perp$, stejně omezené nezávisle na α a ε a splňující $w_{\alpha,\varepsilon,\gamma} \xrightarrow[\gamma]{*} T(k_{\alpha,\varepsilon})$. Položíme $p_{\alpha,\varepsilon,\gamma} = T(k_{\alpha,\varepsilon}) - w_{\alpha,\varepsilon,\gamma}$. Potom jsou nety $(p_{\alpha,\varepsilon,\gamma})_\gamma$ stejně omezené nezávisle na α a ε a splňují $p_{\alpha,\varepsilon,\gamma} \xrightarrow[\gamma]{*} 0$ a $f(p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}) = k_{\alpha,\varepsilon}(f)$ pro $f \in F$.

Tedy kombinovaný net

$$\left((1-\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(x^*_{\delta,\beta} - x^*_\delta) - p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}\right)_{(\beta,\gamma)}$$

konverguje slabě k 0. Vskutku pro $f \in F$ je $f(p_{\alpha,\varepsilon,\delta}) = k_{\alpha,\varepsilon}(f)$, tedy platí

$$f\left((1-\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(x^*_{\delta,\beta} - x^*_\delta) - p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}\right) =$$
$$= (1-\varepsilon)\left(f(x^*_{\alpha,\beta}) - v_\alpha(f)\right) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\left(f(x^*_{\delta,\beta}) - v_\delta(f)\right) \xrightarrow[(\beta,\gamma)]{} 0.$$

A pro $x \in X$ platí

$$\varkappa(x)\left((1-\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(x^*_{\delta,\beta} - x^*_\delta) - p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}\right) \xrightarrow[(\beta,\gamma)]{}$$
$$\xrightarrow[(\beta,\gamma)]{} (1-\varepsilon)(x_\alpha(x) - x_\alpha(x)) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(x^*_\delta(x) - x^*_\delta(x)) - 0 = 0.$$

Opět použijeme Lemma 2.13 a pro každé β_0 a $\omega > 0$ najdeme konvexní kombinaci prvků netu výše s $\beta > \beta_0,\gamma$ (kde $d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,\omega)$ jsou její koeficienty) splňující

$$\left\|\sum_{(\beta,\gamma);\beta>\beta_0} d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,\omega)\left((1-\varepsilon)(x^*_{\alpha,\beta} - x^*_\alpha) + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}(x^*_{\delta,\beta} - x^*_\delta) - p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}\right)\right\| \le \omega.$$

Potom ze stejných důvodů jako v Kroku 1 net

$$\left(\sum_{(\beta,\gamma);\beta>\beta_0} d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,1)\left((1-\varepsilon)x^*_{\alpha,\beta} + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\ x^*_{\delta,\beta}\right)\right)_{\beta_0}$$

w^*-konverguje k $(1-\varepsilon)x^*_\alpha + \sum\limits_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\ x^*_\delta$. Jelikož A je absolutně konvexní, jsou prvky tohoto netu v A. Dále jsou prvky tohoto netu stejně omezené nezávisle na α a ε:

$$\left\| \sum_{(\beta,\gamma);\beta>\beta_0} d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,1) \left((1-\varepsilon)x^*_{\alpha,\beta} + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\ x^*_{\delta,\beta} \right) \right\| \leq$$

$$\leq 1 + \left\| \sum_{(\beta,\gamma);\beta>\beta_0} d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,1) \left((1-\varepsilon)x^*_{\alpha} + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\ x^*_{\delta} + p_{\alpha,\varepsilon,\gamma} \right) \right\| \leq$$

$$\leq 1 + \sup \|x^*_\alpha\| + \sup \|p_{\alpha,\varepsilon,\gamma}\|.$$

Potom net

$$\left(\sum_{(\beta,\gamma);\beta>\beta_0} d_{\alpha,\varepsilon,\beta,\gamma}(\beta_0,1) \left((1-\varepsilon)x^*_{\alpha,\beta} + \sum_{\delta>\alpha} a_{\alpha,\varepsilon,\delta}\ x^*_{\delta,\beta} \right) \right)_{(\beta_0,\varepsilon)}$$

s uspořádáním $(\beta_1,\varepsilon_1) > (\beta_2,\varepsilon_2)$, právě když $\beta_1 > \beta_2$ a $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ w^*-konverguje k x^*_α. Ale prvky tohoto netu jsou omezené nezávisle na α, tedy stejně jako v Kroku 1 dostaneme $x^* \in A^{(1)}$. □

Kapitola 3

Negativní výsledky

V předchozích kapitolách jsme v Tvrzení 1.6 a Větě 2.15 ukázali, že za některých podmínek pro $A \subset X^*$ platí $A^{(1)} = \overline{A}^*$. V této kapitole naopak ukážeme několik příkladů, kdy $A^{(1)} \neq \overline{A}^*$.

Na následujícím příkladu si ilustrujeme, že podmínka konvexity ve Větě 1.4 a Důsledku 1.5 je nutná.

Příklad 3.1. Nechť $p \in (1, \infty)$ a q je sdružený exponent k p (tj. $1/p + 1/q = 1$). Uvažujme reflexivní prostor $X = \ell^p$ a jeho duál $X^* = \ell^q$. Potom v X^* existuje vlastní w^*-hustá podmnožina, která je bw^*-uzavřená.

Důkaz. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jsou kanonické vektory v X, resp. X^*. Ukážeme, že platí:

(1) $a_n e_n^* \xrightarrow{*} 0$, právě když $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Implikace vpravo platí díky Banach-Steinhausově větě. Pro implikaci vlevo mějme $x = (x_1, x_2, ...) \in X$, potom $a_n e_n^*(x) = a_n x_n \longrightarrow 0$.

(2) $0 \in \overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^{bw^*}$, právě když $\liminf |a_n| < \infty$.

Nejprve ukážeme implikaci vlevo. Nechť $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je omezená podposloupnost posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, potom $a_{n_k} e_{n_k}^* \xrightarrow{*} 0$ dle **(1)**. Potom i $a_{n_k} e_{n_k}^* \xrightarrow{bw^*} 0$, jak nyní ukážeme. Nechť U je bw^*-otevřené okolí 0 a $s = \sup |a_n|$. Potom existuje w^*-otevřené V takové, že $U \cap sB_{X^*} = V \cap sB_{X^*}$. V je w^*-otevřené okolí 0, tedy existuje k_0, že pro každé $k > k_0$ je $a_{n_k} e_{n_k}^* \in V$. Jelikož $\|a_{n_k} e_{n_k}^*\| \leq s$, máme $a_{n_k} e_{n_k}^* \in V \cap sB_{X^*} = U \cap sB_{X^*} \subset U$.

Na druhou stranu, pokud platí $\liminf |a_n| = \infty$, pak $\lim |a_n| = \infty$. Tedy $\{n : |a_n| \leq r\}$ je konečná pro každé $r > 0$. Potom $\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}$ je bw^*-uzavřená, jelikož $\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\} \cap rB_{X^*}$ je konečná, a tedy w^*-uzavřená pro každé $r > 0$. Dále zřejmě $0 \notin \{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}$.

(3) $0 \in \overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^*$, právě když $(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \notin X$.

Kdyby $(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \in X$, pak $(a_k e_k^*)(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty} = 1$ (ve smyslu duality ℓ_p a ℓ_q) pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy $\{x^* \in X^* : x^*(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty} < 1\}$ je w^*-okolí 0, které neprotíná $\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}$ a $0 \notin \overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^*$.

Na druhou stranu, pokud $0 \notin \overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^*$, pak existují $x^1, ..., x^t \in X$ takové, že $U = \{x^* \in X^* : |x^*(x^j)| < 1; j = 1, ..., t\}$ neprotíná $\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}$. Označme

$x_j = |x_j^1| + ... + |x_j^t| \in \mathbb{R}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Potom $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in X$. Dále pro $x^* = (x_1^*, x_2^*, ...) \in X^*$ platí implikace $\sum_j |x_j^* x_j| < 1 \implies x^* \in U$. Dále jelikož $a_n e_n^* \notin U$, platí $|a_n x_n| \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $|a_n^{-1}| \leq |x_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $(a_n^{-1})_{n=1}^\infty \in X$.

Podmínky v **(2)** a **(3)** nejsou ekvivalentní, např. pro $a_n = n^{1/p}$ máme nekonvexní množinu $\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}$, pro kterou $\overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^* \neq \overline{\{a_n e_n^*; n \in \mathbb{N}\}}^{bw^*}$.

Fixujme tuto volbu $(a_n)_{n=1}^\infty$ a najděme w^*-hustou množinu $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X^*$. Potom

$$C = \{x_n + a_k e_k^*; k,n \in \mathbb{N}; \|x_n + a_k e_k^*\| > n\}$$

je spočetná množina, která je w^*-hustá, jak nyní ukážeme. Fixujme $n \in \mathbb{N}$, potom $\|x_n + a_k e_k^*\| \xrightarrow{k} \infty$, tedy $x_n + a_k e_k^* \in C$ pro dostatečně velká k. Potom ale $x_n \in \overline{C}^*$ pro každé n, tedy $\overline{C}^* = X^*$.

C je bw^*-uzavřená. Fixujme $r > 0$ a ukážeme, že $C \cap rB_{X^*}$ je konečná, tedy w^*-uzavřená. Z definice C pro $n \geq r$ platí $\|x_n + a_k e_k^*\| > r$. Pro fixní $n < r$ platí $\|x_n + a_k e_k^*\| \xrightarrow{k} \infty$, tedy pro velká k je $x_n + a_k e_k^* \notin rB_{X^*}$.

Tedy jsme našli C, vlastní w^*-hustou podmnožinu X^*, která je bw^*-uzavřená. □

3.1 Konvexní množiny v duálech nereflexivních prostorů

V této sekci si ukážeme, že Tvrzení 1.6 neplatí pro nereflexivní prostory. Dokonce ukážeme, že duál každého nereflexivního prostoru obsahuje konvexní množinu A takovou, že $A^{(1)} \neq \overline{A}^*$. Použijeme opět postupu z [10].

Nejprve si dokážeme lemmata, která nám pomůžou přenášet výsledky z podprostorů na celé prostory. Následující lemma bylo převzato z [10].

Lemma 3.2. *Nechť $Z \subset\subset X$, $E : Z \to X$ identické vnoření. Nechť $A \subset Z^*$. Potom pro $D = (E^*)^{-1}(A)$ platí $D^{(1)} = (E^*)^{-1}(A^{(1)})$.*

Důkaz. Dle Lemmatu 2.4 je E^* restrikce na Z, tedy D je množina všech rozšíření funkcí z A na X.

Ukážeme, že $E^*(D^{(1)}) \subset A^{(1)}$. E^* je duální operátor, tedy w^*-w^*-spojité.

Dále nechť $x \in E^*(D^{(1)})$, tedy existuje omezený net $(y_\lambda) \subset D$ w^*-konvergující k y takový, že $x = E^*(y)$. Označme $x_\lambda = E^*(y_\lambda)$, potom (x_λ) je omezený net v A a platí $x_\lambda = E^*(y_\lambda) \xrightarrow{*} E^*(y) = x$. Tedy $x \in A^{(1)}$.

Pro druhou inkuzi si nejprve uvědomíme, že $f \in (E^*)^{-1}(A^{(1)})$, právě když existuje $(a_\lambda) \subset A$ omezený net splňující $a_\lambda \xrightarrow{*} E^*(f)$. Fixujme takovéto (a_λ) a najděme $h_\lambda \in (E^*)^{-1}(\{a_\lambda\})$ splňující $\|h_\lambda\| = \|a_\lambda\|$ (tj. Hahn-Banachovo rozšíření a_λ na X).

Potom $(h_\lambda) \subset D$ je omezený net v X^*. Z Banach-Alaogluovy věty můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $h_\lambda \xrightarrow{*} h$ pro nějaké h. Potom $f = h$ na Z. Uvažujme $f_\lambda = h_\lambda + (f - h)$, potom platí:

- $E^*(f_\lambda) = a_\lambda + E^*(f) - E^*(h) = a_\lambda + \lim^* a_\lambda - \lim^* E^*(h_\lambda) = a_\lambda \in A$, tedy $f_\lambda \in D$.

- $f_\lambda \xrightarrow{*} h + f - h = f$.
- $\|f_\lambda\| \le \|h_\lambda\| + \|f - h\|$, tedy (f_λ) je omezený.

Dohromady dostáváme, že $f \in D^{(1)}$. □

Pro další tvrzení se nám bude hodit zavézt následující značení. Je-li $Z \subset\subset X$ a $A \subset Z$, potom anihilátor (resp. poláru, absolutní poláru) A jakožto podmnožiny Z budeme značit $A^{\perp_{Z^*}}$. Anihilátor (reps. poláru, absolutní poláru) A jakožto podmnožiny X budeme značit $A^{\perp_{X^*}}$. Podobně budeme značit anihilátory (resp. poláry, absolutní poláry) podmnožin duálních prostorů.

Lemma 3.3. *Nechť $Z \subset\subset X$ je uzavřený podprostor, $A \subset Z^*$ je konvexní množina. Definujeme E a D jako v Lemmatu 3.2. Potom D je konvexní a $\overline{D}^* = (E^*)^{-1}(\overline{A}^*)$.*

Důkaz. Dle Lemmatu 2.4 je E^* restrikce na Z, tedy D množina všech rozšíření funkcí z A na X. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 \in A$ (a tedy i $0 \in D$). D je vzor konvexní množiny přes lineární zobrazení, tedy je konvexní.

Ukážeme, že

$$D_{\triangle_X} = \{x \in X : \mathrm{Re}(d(x)) \le 1 \text{ pro každé } d \in D\} =$$

$$= E(\{z \in Z : \mathrm{Re}(a(z)) \le 1 \text{ pro každé } a \in A\}) = E(A_{\triangle_Z})$$

Jelikož D je množina rozšíření funkcí z A, platí $D_{\triangle_X} \supset E(A_{\triangle_Z})$. Pro druhou inkluzi mějme $x \in D_{\triangle_X}$. Potom stačí ukázat, že $x \in Z$. Pak totiž pro každé $a \in A$ vezmeme jeho libovolné rozšíření $d \in D$ a platí $\mathrm{Re}(a(x)) = \mathrm{Re}(d(x)) \le 1$. Kdyby $x \notin Z$, pak by existovalo $x^* \in X^*$, že $x^*(x) = 2$ a $x^*|Z = a$ pro nějaké $a \in A$ – díky Hahan-Banachově větě existuje funkcionál y^* splňující $y^*(x) = 1$, $y^*|Z = 0$ a funkcionál z^*, který je rozšířením nějakého $a \in A$, potom stačí vzít $x^* = z^* + (2 - z^*(x))y^*$. Potom $x^* \notin D$, ale z Lemmatu 2.4 plyne, že $E^*(x^*) = x^*|Z = a \in A$, což nám dává spor s $D = (E^*)^{-1}(A)$.

Dále platí

$$\overline{D}^* = (D_{\triangle_X})^{\triangle_{X^*}} = (E(A_{\triangle_Z}))^{\triangle_{X^*}} \supset (E^*)^{-1}((A_{\triangle_Z})^{\triangle_{Z^*}}) = (E^*)^{-1}(\overline{A}^*).$$

První a poslední rovnost plynou z věty o bipoláře, protože A i D jsou konvexní a obsahují 0. Druhou rovnost jsme již dokázali výše. Pro důkaz inkluze mějme $x^* \in (E^*)^{-1}((A_{\triangle_Z})^{\triangle_{Z^*}})$, potom $x^*|Z \in (A_{\triangle_Z})^{\triangle_{Z^*}}$, tj. pro každé $z \in A_{\triangle_Z} \subset Z$ je $\mathrm{Re}(x^*(z)) \le 1$. To ale znamená, že $x^* \in (E(A_{\triangle_Z}))^{\triangle_{X^*}}$, tedy $(E(A_{\triangle_Z}))^{\triangle_{X^*}} \supset (E^*)^{-1}((A_{\triangle_Z})^{\triangle_{Z^*}})$. Tedy platí $\overline{D}^* \supset (E^*)^{-1}(\overline{A}^*)$.

Opačná inkluze plyne z w^*-w^*-spojitosti duálního zobrazení E^*, tedy máme $\overline{D}^* = (E^*)^{-1}(\overline{A}^*)$. □

Lemmata 3.2 a 3.3 nám dávají hledané přenesení z podprostoru.

Důsledek 3.4. *Nechť $Z \subset\subset X$ je uzavřený podprostor, $A \subset Z^*$ je konvexní množina splňující $A^{(1)} \neq \overline{A}^*$. Nechť $E : Z \longrightarrow X$ je identické vnoření a $D = (E^*)^{-1}(A)$. Potom D je konvexní a platí $D^{(1)} \neq \overline{D}^*$.*

Důkaz. Z Lemmat 3.2 a 3.3 platí

$$\overline{D}^* = (E^*)^{-1}(\overline{A}^*) \supsetneq (E^*)^{-1}(A^{(1)}) = D^{(1)}.$$

□

Je známým faktem, že každý nekonečnědimenzionální Banachův prostor obsahuje nějakou bázovou posloupnost. My budeme potřebovat zesílený výsledek pro nereflexivní prostory převzatý z [14].

Lemma 3.5. *Nechť X je nereflexivní Banachův prostor, potom existuje normalizovaná bázová posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ taková, že posloupnost částečných součtů $(\sum_{i=1}^{k} z_i)_{k=1}^{\infty}$ je omezená.*

Příklad 3.6. Posloupnost kanonických vektorů $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ v nereflexivních prostorech c_0 nebo ℓ_∞ vyhovuje Lemmatu 3.5. Tato posloupnost však nemá omezené částečné součty v ℓ_1.

Příkladem posloupnosti vyhovující Lemmatu 3.5 pro ℓ_1 je posloupnost definovaná následovně:

- $z_1 = e_1$,
- $z_n = -\left(\sum_{k=1}^{2^{n-2}} 2^{-n+1} e_k\right) + \left(\sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} 2^{-n+1} e_k\right)$ pro $n > 1$,

tj. $z_1 = (1,0,...)$, $z_2 = (-1/2,1/2,0,...)$, $z_3 = (-1/4,-1/4,1/4,1/4,0,...)$ atp. Potom zřejmě $\|z_n\| = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} z_k \right\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |2^{-n+1}| = 1,$$

tedy vskutku $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje Lemmatu 3.5 pro nereflexivní prostor ℓ_1.

Posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ nevyhovuje Lemmatu 3.5 pro ℓ_p, $p \in (1,\infty)$, a to ani po znormování. To není náhoda – ve článku [14] je ukázáno, že v Lemmatu 3.5 platí dokonce ekvivalence.

Nyní můžeme dokázat hlavní větu této sekce. Tato věta byla převzata z [10].

Věta 3.7. *Nechť X je nereflexivní Banachův prostor. Potom existuje konvexní $A \subset X^*$, pro kterou platí $A^{(1)} \neq \overline{A}^*$.*

Důkaz. Dle Lemmatu 3.5 existuje $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$, normalizovaná bázová posloupnost taková, že $(\sum_{i=1}^{k} z_i)_{k=1}^{\infty}$ je omezená. Označme $Z = \overline{\operatorname{span}}\{z_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Díky Důsledku 3.4 nám stačí nalézt konvexní $A \subset Z^*$ splňující $A^{(1)} \neq \overline{A}^*$.

Z je separabilní, tedy pro $A \subset Z$ je z Banach-Steinhausovy věty $A^{(1)}$ w^*-sekvenciální uzávěr A (viz poznámka pod definicí w^*-derivovaných množin na začátku sekce 1.3).

Označme $(z_n^*)_{n=1}^{\infty}$ biortogonální funkcionály k $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ a vezměme nějaké rostoucí posloupnosti nezáporných čísel $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$, které splňují $\alpha_n \longrightarrow 1$, $\beta_n \longrightarrow \infty$. Rozdělíme $\mathbb{N}$ na spočetně podposloupností $\mathbb{N}_j$ (tj. $\mathbb{N} = \bigcup \mathbb{N}_j$, $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $\mathbb{N}_j$ jsou nekonečné). Označme

$$A = \operatorname{conv}\{\alpha_j z_0^* + \beta_j z_k^*; j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_j\}.$$

Ukážeme, že $A^{(1)}$ není ani silně uzavřená.

Platí $\alpha_j z_0^* \in A^{(1)}$, jelikož díky Tvrzení 1.9 $\alpha_j z_0^* + \beta_j z_k^* \xrightarrow[k\in\mathbb{N}_j]{*} \alpha_j z_0^*$.

Ukážeme, že $z_0^* \notin A^{(1)}$. Pro spor předpokládejme opak. Potom existuje omezená posloupnost $(y_m^*)_{m=1}^\infty \subset A$ splňující $y_m^* \xrightarrow{*} z_0^*$. Podle definice A potom platí

$$y_m^* = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)(\alpha_j z_0^* + \beta_j z_k^*),$$

kde $a_{j,k}(m)$ jsou koeficienty konvexní kombinace.

Platí

$$y_m^*(z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)(\alpha_j z_0^*(z_0) + \beta_j z_k^*(z_0)) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\alpha_j.$$

Dále $y_m^* \xrightarrow{*} z_0^*$, tedy

$$1 = z_0^*(z_0) = \lim_{m\to\infty} y_m^*(z_0) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\alpha_j.$$

Pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ ukážeme, že platí

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) = 0.$$

Z faktu, že $\alpha_j \nearrow 1$, plyne

$$1 = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\alpha_j + \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\alpha_j \right) \leq$$

$$\leq \liminf_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} \alpha_\ell a_{j,k}(m) + \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) \right) =$$

$$= \liminf_{m\to\infty} \left(1 + (\alpha_\ell - 1) \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) \right).$$

Tedy, jelikož $\alpha_\ell - 1 < 0$, platí

$$\limsup_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) = 0$$

Tedy také pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=\ell}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) = 1.$$

Jelikož je posloupnost $(\sum_{i=1}^{k} z_i)_{k=1}^\infty$ omezená, z Banach-Alaogluovy věty plyne, že existuje z^{**}, w^*-hromadný bod jejího kanonického vnoření do Z^{**}.

Dále pro $i > 0$ platí $y_m^*(z_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\beta_j \delta_{i,k}$, tedy

$$y_m^* \left(\sum_{i=1}^{\ell} z_i \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} \left(a_{j,k}(m)\beta_j \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{i,k} \right).$$

Speciálně pro $\ell > \max\{k; a_{j,k}(m) \neq 0 \text{ pro nějaké } j\}$ je pak

$$y_m^* \left(\sum_{i=1}^{\ell} z_i \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\beta_j.$$

Tedy $z^{**}(y_m^*) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\beta_j$ a pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ platí

$$\limsup_{m \longrightarrow \infty} z^{**}(y_m^*) = \limsup_{m \longrightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} a_{j,k}(m)\beta_j \geq \beta_\ell \limsup_{m \longrightarrow \infty} \sum_{j=\ell}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_j} a_{j,k}(m) = \beta_\ell.$$

Ale ℓ bylo libovolné, tedy y_m^* musí být neomezená, což je spor.
Dohromady $z_0^* = \lim \alpha_j z_0^* \in \overline{A^{(1)}} \setminus A^{(1)}$ a $A^{(1)}$ není (w^*-)uzavřená. □

Důsledek 3.8. *Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každou konvexní množinu $A \subset X^*$ platí $A^{(1)} = \overline{A}^*$*

Důkaz. Plyne z Vět 1.6 a 3.7. □

3.2 Podprostory v duálech nekvazireflexivních prostorů

V této sekci zmíníme, že Věta 2.9 obecně neplatí pro nekvazireflexivní prostory. Následující věta se dá dokázat pomocí Věty 4.8, my zde ale předvedeme důkaz z [3]. Nejprve si dokážeme několik pomocných lemmat.

Lemma 3.9. *Nechť X je normově separabilní Banachův prostor, potom X^* je w^*-separabilní.*

Důkaz. Mějme $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spočetnou hustou podmnožinu S_X. Díky Hahn-Banachově větě najdeme $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset S_{X^*}$ splňující $x_n^*(x_n) = 1$. Potom $((x_n^*)_{n=1}^{\infty})_\perp = \{0\}$. Vskutku, nechť pro nějaké $x \in X$ platí $x_n^*(x) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť pro spor bez újmy na obecnosti $\|x\| = 1$. Existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_N - x\| < 1/2$. Potom $\|x_N^*(x_N - x)\| < 1/2$, tedy $\|x_N^*(x)\| \geq 1/2$, což je spor. Tedy dle věty o bipoláře je $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ lineárně w^*-hustá v X^* a X^* je w^*-separabilní. □

Lemma 3.10. *Nechť X je Banachův prostor. Nechť dále existují uzavřené nekonečnědimenzionální podprostory $Y \subset\subset X$ a $Z \subset\subset X^{**}$ splňující*

$$Z \cap (Y^{\perp\perp} + \varkappa_X(X)) = \{0\}.$$

Potom existuje podprostor $A \subset\subset X^*$, který odděluje body X, ale není normující pro X.

Důkaz. Nejprve si připomeneme, že $Y^{\perp\perp}$ můžeme ztotožnit s Y^{**} (přes zobrazení j^{**}, kde j je původní identické vnoření Y do X, viz důkaz Tvrzení 2.6).

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Y je separabilní, jinak ho patřičně zmenšíme. Díky Lemmatu 3.9 existuje posloupnost $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ jednotkových vektorů v Y^*, která odděluje body Y. Nechť $(z_n)_{n=1}^\infty$ je nějaká normalizovaná bázová posloupnost v Z a $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost kladných čísel, která splňuje $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \leq 1/2$. Definujeme zobrazení $T : Y^{**} \longrightarrow Z$ předpisem

$$T(y^{**}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n y^{**}(y_n^*) z_n.$$

Potom $\|T\| \leq 1/2$, $T|Y$ je prosté a T je kompaktní (T je normová limita konečnědimenzionálních zobrazení – svých částečných součtů).

Nechť

$$U = \{j^{**}(y^{**}) + Ty^{**}; y^{**} \in Y^{**}\}.$$

Ukážeme, že U je w^*-uzavřené v X^{**}. Díky Důsledku 1.5 stačí ukázat uzavřenost na w^*-limity omezených netů. Mějme tedy omezený net $(u_\alpha) \subset U$, který w^*-konverguje k $u \in X^{**}$. Potom existuje net $(y_\alpha^{**}) \subset Y^{**}$ takový, že

$$u_\alpha = j^{**}(y_\alpha^{**}) + Ty_\alpha^{**} \xrightarrow{*} u.$$

Net (y_α^{**}) je omezený – kdyby pro nějaké α platilo $\|y_\alpha^{**}\| \geq 3 \sup_\alpha \|u_\alpha\|$, potom by

$$\|u_\alpha\| \geq \|y_\alpha^{**}\| - \|Ty_\alpha^{**}\| \geq \|y_\alpha^{**}\| - 1/2 \|y_\alpha^{**}\| = 1/2 \|y_\alpha^{**}\| \geq 3/2 \|u_\alpha\|.$$

Potom z kompaktnosti T můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat (jinak přejdeme k podnetu), že existuje $z \in Z$ takové, že $Ty_\alpha^{**} \longrightarrow z$. Potom zřejmě $j^{**}(y_\alpha^{**}) \xrightarrow{*} j^{**}(y^{**}) = u - z \in Y^{\perp\perp}$ díky w^*-uzavřenosti $Y^{\perp\perp}$ v X^{**}. Dále zřejmě platí $z = Ty^{**}$. Tedy $u = j^{**}(y^{**}) + Ty^{**} \in U$.

Nechť $M = U_\perp \subset\subset X^*$. Jelikož díky větě o bipoláře $M^\perp = U \subset Z + Y^{\perp\perp}$, dostáváme dle předpokladu $U \cap \varkappa_X(X) = \{0\}$, a tedy M odděluje body X.

M ale není normující pro X. Nechť $\varepsilon > 0$, potom z kompaktnosti T existuje $y \in S_Y$ takové, že $\|T(\varkappa_Y(y))\| \leq \varepsilon$. Potom ale z definice M je pro každé $f \in M$

$$|f(y)| = |(T(\varkappa_Y(y))(f)| \leq \varepsilon \|f\|,$$

tedy M nemůže být normující. □

Důkaz následujícího lemmatu si můžete dohledat v [3, Lemma 2].

Lemma 3.11. *Nechť X je nereflexivní Banachův prostor, potom existuje nekonečnědimenzionální podprostor $Y \subset\subset X$ takový, že X/Y je nereflexivní.*

Věta 3.12. *Nechť X je nekvazireflexivní Banachův prostor. Potom existuje podprostor $A \subset\subset X^*$, který odděluje body, ale není normující.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že X obsahuje nekonečněrozměrný reflexivní podprostor $Y \subset\subset X$. Díky nekvazireflexivitě X existuje podprostor $Z \subset\subset X^{**}$ nekonečné dimenze takový, že

$$Z \cap (\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp}) = Z \cap \varkappa_X(X) = \{0\}$$

a tvrzení věty platí díky Lemmatu 3.10.

Dále předpokládejme, že X neobsahuje žádný nekonečnědimenzionální reflexivní podprostor. Za pomoci Lemmatu 3.11 zkonstruujeme posloupnost podprostorů $X = X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ takovou, že X_k/X_{k+1} není reflexivní. Pro $k \in \mathbb{N}$ vezmeme $y_k \in X_k \setminus X_{k+1}$ a definujeme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{y_k; k \in \mathbb{N}\}$.

Stačí dokázat, že $\dim(X^{**}/(\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp})) = \infty$, potom existuje $Z \subset\subset X^{**}$, které společně s Y splňuje podmínky Lemmatu 3.10, které nám pak dá závěr věty.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$Y = \operatorname{span}\{y_1,\ldots,y_k\} \oplus \overline{\operatorname{span}}\{y_{k+1},\ldots\},$$

tedy, jelikož $\overline{\operatorname{span}}\{y_{k+1},\ldots\} \subset (X_{k+1} \cap Y) \subset Y$, platí

$$Y^{**} = \operatorname{span}\{\varkappa_Y(y_1),\ldots,\varkappa_Y(y_k)\} \oplus (\overline{\operatorname{span}}\{y_{k+1},\ldots\})^{\perp\perp} \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{span}\{\varkappa_Y(y_1),\ldots,\varkappa_Y(y_k)\} + (X_{k+1} \cap Y)^{\perp\perp} \subseteq Y^{**},$$

kde anihilátory bereme v Y^* respektive v Y^{**}.

Potom za pomoci Lemmatu 2.1 platí

$$\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp} = \varkappa_X(X) + (X_{k+1} \cap Y)^{\perp\perp} \subset \varkappa_X(X) + X_{k+1}^{\perp\perp},$$

kde anihilátory bereme v X^* respektive v X^{**}.

Indukcí dokážeme, že $\dim((X/X_k)^{**}/(X/X_k)) \geq k$. Budeme hojně používat Tvrzení 2.6, konkrétně část o součtu dimenzí. Pro jednoduchost zavedeme řád Banachova prostoru jako $\operatorname{ORD}(X) = \dim(X^{**}/\varkappa(X))$. Tedy X je reflexivní (kvazireflexivní), právě když $\operatorname{ORD}(X) = 0$ ($\operatorname{ORD}(X) < \infty$).

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{ORD}(X_k/X_{k+1}) \geq 1$, jelikož tento prostor není reflexivní. Ukážeme, že pro každé $k \in \{2,3,\ldots\}$ je $\operatorname{ORD}(X/X_k) \geq k-1$. Pro $k = 2$ je $\operatorname{ORD}(X/X_2) = \operatorname{ORD}(X_1/X_2) \geq 1$. Nyní uvažujme $k+1$. Buďto X/X_{k+1} není kvazireflexivní, potom $\operatorname{ORD}(X/X_{k+1}) = \infty > k$, nebo X/X_{k+1} je kvazireflexivní a můžeme použít Tvrzení 2.6. Potom platí

$$\operatorname{ORD}(X/X_{k+1}) = \operatorname{ORD}\left((X/X_{k+1})/(X_k/X_{k+1})\right) + \operatorname{ORD}(X_k/X_{k+1}) =$$

$$= \operatorname{ORD}(X/X_k) + \operatorname{ORD}(X_k/X_{k+1}) \geq (k-1) + 1 = k.$$

Tedy z důkazu Tvrzení 2.6 plyne

$$\dim(X^{**}/(\varkappa_X(X) + X_k^{\perp\perp})) = \dim((X/X_k)^{**}/(X/X_k)) \geq k-1.$$

Tedy, jelikož $\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp} \subset \varkappa_X(X) + X_k^{\perp\perp}$, pro každé $k \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\dim(X^{**}/(\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp})) \geq \dim(X^{**}/(\varkappa_X(X) + X_k^{\perp\perp})) \geq k-1,$$

tedy $\dim(X^{**}/(\varkappa_X(X) + Y^{\perp\perp})) = \infty$ a věta je dokázána. □

Důsledek 3.13. *Banachův prostor je kvazireflexivní, právě když jeho duál neobsahuje žádný nenormující podprostor, který odděluje body.*

Důkaz. Plyne z Vět 2.9 a 3.12. □

Dále ukážeme, že za některých dalších předpokladů obsahuje duální Banachův prostor X^* podprostor A takový, že $A^{(1)}$ je vlastní dokonce normově hustý podprostor X^*. Použijeme opět postupu z [10].

Díky Lemmatu 3.2 umíme přenášet ostrou inkluzi $A^{(1)} \subsetneq X^*$ z podprostorů ne celé prostory. Nyní si ukážeme, že můžeme přenést i normovou hustotu.

Lemma 3.14. *Nechť X je Banachův prostor a $W \subset\subset X$ jeho uzavřený podprostor. Označme $E : W \longrightarrow X$ identické vnoření. Nechť A je normově hustá množina v W^*, potom $D = (E^*)^{-1}(A)$ je normově hustá v X^*.*

Důkaz. Zobrazení E^* je spojité, lineární a na, tedy dle věty o otevřeném zobrazení je otevřené. Kdyby D nebyla hustá v X^*, existovala by otevřená neprázdná množina $U \subset X^*$ taková, že $U \cap D = \emptyset$. Potom ale $E^*(U)$ je neprázdná otevřená množina v W^*, která neprotíná A, tedy A není husté v W^*, což je spor. □

Nyní formulujeme jednoduché pozorování o slabších normách na Banachových prostorech.

Lemma 3.15. *Nechť $(X,\|.\|_1)$ je Banachův prostor a $\|.\|_2$ je ostře slabší norma na X. Potom $(X,\|.\|_2)$ není úplný.*

Důkaz. Identita $N : (X,\|.\|_1) \longrightarrow (X,\|.\|_2)$ je spojitá, prostá a na. Kdyby $(X,\|.\|_2)$ byl úplný, pak by z věty o otevřeném zobrazení bylo N izomorfismus. Pak by ale $\|.\|_2$ byla ekvivalentní s $\|.\|_1$, což je spor. □

Poznámka. Označme $n_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Potom $\{\{n_m + i\}_{m=i}^{\infty}\}_{i=0}^{\infty}$ tvoří disjunktní rozklad $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\{n_m + 0\}_{m=0}^{\infty}$	$\{n_m + 1\}_{m=1}^{\infty}$	$\{n_m + 2\}_{m=2}^{\infty}$	$\{n_m + 3\}_{m=3}^{\infty}$	$\{n_m + 4\}_{m=4}^{\infty}$
0				
1	2			
3	4	5		
6	7	8	9	
10	11	12	13	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dále budeme potřebovat následující lemma, jehož důkaz si můžete dohledat v [10, Lemma 2].

Lemma 3.16. *Nechť X je nekvazireflexivní Banachův prostor, který obsahuje nekonečnědimenzionální podprostor se separabilním duálem. Potom existuje minimální lineárně nezávislý systém*

$$\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$$

splňující následující podmínky:

1. *Systém $\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ a jeho biortogonální funkcionály $\{u_i^*\}_{i=0}^{\infty} \cup \{x_i^*\}_{i=0}^{\infty}$ jsou stejně omezené.*
2. *$\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je Schauderova báze $U = \overline{\operatorname{span}}\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ a platí $U^* = \overline{\operatorname{span}}\{u_i^*|U\}_{i=0}^{\infty}$.*
3. *Pro $n_k = \frac{k(k+1)}{2}$ je množina $\{\sum_{p=j}^{k} x_{n_p+j}; 0 \leq j \leq k \leq \infty\}$ omezená.*

Věta 3.17. *V duálním prostoru X^* existuje podprostor $A \subset\subset X^*$ takový, že $A^{(1)}$ je vlastní normově hustý podprostor X^*, právě když X je nekvazireflexivní Banachův prostor obsahující nekonečnědimenzionální podprostor se separabilním duálem.*

Důkaz. **Implikace vpravo**

Nechť existuje $A \subset\subset X^*$ taková, že $A^{(1)}$ je vlastní normově hustý podprostor X^*. Potom z Lemmatu 1.1 plyne, že A odděluje body X, dále z Lemmatu 1.3 plyne, že A není normující. Tedy dle Lemmatu 2.8 nemůže být X kvazireflexivní.

Nyní ukážeme, že X obsahuje nějaký nekonečnědimenzionální podprostor se separabilním duálem.

q_A je norma, jelikož A odděluje body X. Jelikož A není normující, z Lemmatu 3.15 plyne, že (X,q_A) není úplný. Definujeme tedy X_A jako jeho zúplnění. Uvažujme identitu $N : X \longrightarrow X_A$. Jelikož $N(X)$ není uzavřené v X_A, dle [9, Proposition 2.c.4] můžeme najít separabilní podprostor nekonečné dimenze $Z \subset\subset X$ takový, že $N|Z$ je kompaktní. Potom je $R = (N|Z)^*(B_{X_A^*})$ normově kompaktní v Z^* díky Schauderově větě.

Mějme identické vnoření $E : Z \longrightarrow X$. Potom jsou duální operátory $E^* : X^* \longrightarrow Z^*$ a $N^* : X_A^* \longrightarrow X^*$ restrikce (viz Lemma 2.4, pro E^* to máme přímo, pro N^* si uvědomíme, že v důkazu Lemmatu 2.4 nám stačilo, aby zobrazení j byla spojitá identita, ne nutně izometrie). Dále $N|Z = N \circ E$. Tedy platí $R = (E^* \circ N^*)(B_{X_A^*})$.

Ukážeme, že platí $A \cap B_{X^*} \subset N^*(B_{X_A^*})$. Mějme $x^* \in A \cap B_{X^*}$. Jelikož $x^* \in A$, je q_A-spojité. Dále platí $\|x^*\|_{(X,q_A)^*} \leq 1$ – případ $x^* = 0$ je zřejmý, je-li $x^* \neq 0$, pak pro $x \in X$ splňující $q_A(x) \leq 1$ platí

$$|x^*(x)| = \|x^*\| \left| \frac{x^*}{\|x^*\|}(x) \right| \leq \|x^*\| \, q_A(x) \leq 1.$$

Tedy $\|x^*\|_{(X,q_A)^*} \leq 1$ a x^* lze rozšířit na prvek $B_{X_A^*}$.

Tedy dostáváme $E^*(A \cap B_{X^*}) \subset (E^* \circ N^*)(B_{X_A^*}) = R$. Potom ale platí $E^*(A^{(1)}) \subset \operatorname{span}(R)$. Podprostor $\operatorname{span}(R) \subset\subset Z^*$ je separabilní a obsahuje hustou $E^*(A^{(1)})$. Tedy Z^* je separabilní.

Implikace vlevo

Mějme X, nekvazireflexivní Banachův prostor s nekonečnědimenzionálním podprostorem se separabilním duálem. Označme $n_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Vezměme systém $(\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{x_i\}_{i=0}^{\infty})$ z Lemmatu 3.16 a označme

$$W = \overline{\operatorname{span}}\,(\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{x_i\}_{i=0}^{\infty}) \subset\subset X.$$

W je separabilní, tedy pro každou podmnožinu $B \subset W^*$ je $B^{(1)}$ w^*-sekvenciální uzávěr B (viz poznámka pod definicí w^*-derivovaných množin na začátku sekce 1.3).

Díky třetí podmínce Lemmatu 3.16 existují h_j, w^*-hromadné body množin $\{\varkappa(\sum_{i=j}^{k} x_{n_i+j})\}_{k=j}^{\infty}$.

Vezměme $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, nějakou sčitatelnou posloupnost kladných čísel a označme

$$K = \{\varkappa(u_i) + a_i h_i; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset W^{**}$$

a $A = K_{\perp}$.

Díky Lemmatům 3.2 a 3.14 stačí ukázat, že $A^{(1)} \neq W^*$, ale přitom $A^{(1)}$ je normově hustá ve W^*.

Pro každé i je $u_i^* \in A^{(1)}$, jelikož pro $j \geq i$ je $u_i^* - (a_i)^{-1} x_{n_j+i}^* \in K_\perp$. Pro $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ totiž platí

$$(\varkappa(u_\ell) + a_\ell h_\ell)(u_i^* - (a_i)^{-1} x_{n_j+i}^*) = \delta_{i,\ell} - \frac{a_\ell}{a_i} x_{n_j+i}^*(h_\ell),$$

kde $\delta_{i,\ell}$ je Kroneckerovo delta. Dále rozlišíme dva případy:

Případ $i = \ell$. Potom h_i je w^*-hromadný bod množiny $\{\varkappa(\sum_{m=i}^k x_{n_m+i})\}_{k=i}^\infty$ a platí $x_{n_j+i}^*(\sum_{m=i}^k x_{n_m+i}) = 1$ pro každé $k \geq j$, tedy

$$\delta_{i,\ell} - \frac{a_\ell}{a_i} x_{n_j+i}^*(h_\ell) = 1 - 1 = 0.$$

Případ $i \neq \ell$. h_i je w^*-hromadný bod množiny $\{\varkappa(\sum_{m=i}^k x_{n_m+i})\}_{k=i}^\infty$ a platí $x_{n_j+i}^*(\sum_{m=i}^k x_{n_m+i}) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ (z disjunktnosti množin $\{n_m + i\}_{m=i}^\infty$ pro různá i), tedy

$$\delta_{i,\ell} - \frac{a_\ell}{a_i} x_{n_j+i}^*(h_\ell) = 0 - 0 = 0.$$

Platí $u_i^* - (a_i)^{-1} x_{n_j+i}^* \xrightarrow[j]{*} u_i^*$, jelikož $(a_i)^{-1} x_{n_j+i}^* \xrightarrow[j]{*} 0$, tedy $u_i^* \in A^{(1)}$.

Dále ukážeme, že pro $y^* \in U^\perp$ platí $y^* - \sum_i a_i h_i(y^*) u_i^* \in A$, tedy $y^* \in \overline{A^{(1)}}$. Řada $\sum_i a_i h_i(y^*) u_i^*$ je normově konvergentní ze stejné omezenosti $\{h_i; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ a $\{u_i^*; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ a sčitatelnosti $(a_i)_{i=0}^\infty$. Mějme $\varkappa(u_\ell) + a_\ell h_\ell \in K$, potom

$$(\varkappa(u_\ell) + a_\ell h_\ell)(y^* - \sum_i a_i h_i(y^*) u_i^*) = -\sum_i a_i h_i(y^*) \delta_{i,\ell} + a_\ell h_\ell(y^*) = 0,$$

jelikož pro každou dvojici i,j je $h_i(u_j^*) = 0$.

Tedy existuje $a \in A$ takové, že

$$y^* = \lim_k \left(a + \sum_{i=0}^k a_i h_i(y^*) u_i^* \right).$$

Jelikož $u_i^* \in A^{(1)}$ pro každé i, dostáváme $y^* \in \overline{A^{(1)}}$.

Dále ukážeme, že A není normující pro W. Z podmínky 1. Lemmatu 3.16 plyne, že existují $c_1 > 0$ a $c_2 > 0$ takové, že pro každé $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $\|u_i\| \geq c_1$, $\|h_i\| \leq c_2$. Vskutku, kdyby $(u_i)_{i=0}^\infty$ nebyly odražené od nuly, jejich biortogonální funkcionály by nemohly být stejně omezené. $(h_i)_{i=0}^\infty$ jsou w^*-hromadné body stejně omezených množin, tedy jsou také stejně omezené. Pro $f \in A$ platí

$$|f(u_i)| = |a_i h_i| \leq |a_i| c_2 \longrightarrow 0,$$

tedy $q_A(u_i) \longrightarrow 0$, ale $(u_i)_{i=0}^\infty$ je odražená od nuly, a tedy k ní nekonverguje v normě. Tedy A není normující. Dle Lemmatu 1.3 pak $A^{(1)} \neq W^*$.

$\square$

Kapitola 4

w^*-derivované množiny vyšších řádů

V minulé kapitole jsme ukázali, že pro $A \subset X^*$ platí $A^{(1)} \subset \overline{A}^*$ a obecně neplatí rovnost. Vyvstává tedy přirozená otázka – kdy platí $A^{(1)} = \left(A^{(1)}\right)^{(1)}$? Už máme vše připravené, abychom na tuto otázku odpověděli v některých jednoduchých speciálních případech.

Tvrzení 4.1. *Nechť $A \subset X^*$ a platí některá z následujících podmínek*

1. *A je w^*-uzavřená.*
2. *X je separabilní a A je sekvenciálně w^*-uzavřená.*

Potom platí $A = A^{(1)}$.

Důkaz. Platí-li první bod, dostaneme tvrzení z inkluze $A^{(1)} \subset \overline{A}^* = A$. Platí-li druhý, dostaneme tvrzení věty z faktu, že pro separabilní prostory je w^*-derivovaná množina w^*-sekvenciální uzávěr (viz poznámka na začátku sekce 1.3). □

Tvrzení 4.2. *Nechť $A \subset X^*$ a platí některá z následujících podmínek*

1. *X je reflexivní a A je konvexní.*
2. *X je kvazireflexivní a A je absolutně konvexní.*

Potom platí $A^{(1)} = (A^{(1)})^{(1)}$.

Důkaz. Toto tvrzení plyne přímo z Tvrzení 4.1, Tvrzení 1.6 a Věty 2.15. □

Otázku výše si můžeme ještě zobecnit. K tomu se nám bude hodit následující definice.

Definice. Nechť X je Banachův a $A \subset X^*$. Pro každý ordinál $\alpha > 1$ transfinitní indukcí definujeme $A^{(\alpha)}$, *w^*-derivovanou množinu* množiny A řádu α. Je-li α nelimitní ordinál, který je nástupce ordinálu $\alpha - 1$, definujeme $A^{(\alpha)}$ jako

$$A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha-1)}\right)^{(1)}.$$

Je-li α limitní ordinál, pak definujeme $A^{(\alpha)}$ jako

$$A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}.$$

Pro $\alpha = 0$ definujeme $A^{(0)} = A$.

Poznámka. w^*-derivovaná množina řádu α se dá napsat jako

$$A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \left(A^{(\beta)}\right)^{(1)},$$

nehledě na to, jestli je α limitní nebo ne.

Potom zřejmě pro $\alpha < \beta$ platí $A^{(\alpha)} \subset A^{(\beta)}$ a platí-li $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$, pak i $A^{(\alpha)} = A^{(\beta)}$ pro každé $\beta > \alpha$.

Definice. Nechť $A \subset X^*$, potom *řádem* množiny A myslíme nejmenší ordinál α splňující $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.

Naše zobecněná otázka tedy zní: Jaké jsou možné řády podprostorů v X^*? Pro kvazireflexivní prostory už na tuto otázku dokážeme odpovědět.

Tvrzení 4.3. *Nechť X je kvazireflexivní a $A \subset X^*$ absolutně konvexní. Potom řád A je 0, pokud A je w^*-uzavřená, nebo 1, pokud A není w^*-uzavřená.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Tvrzení 4.1 a 4.2. □

Zajímavější závěry dostaneme pro nekvazireflexivní prostory, omezíme se ale pouze na separabilní Banachovy prostory.

Ukážeme, že řády podprostorů duálů separabilních prostorů mohou být pouze spočetné nelimitní ordinály. Dále ukážeme, že v každém nekvazireflexivním separabilním Banachově prostoru existuje w^*-hustý podprostor libovolného z těchto řádů.

Následující lemma je převzato z [6, Lemma 2.12].

Lemma 4.4. *Nechť X je separabilní Banachův prostor a $A \subset X^*$. Potom existuje spočetný ordinál α takový, že $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ a ordinál α definujeme množiny $A_{\alpha,n} = \overline{A^{(\alpha)} \cap nB_{X^*}}^*$. Potom platí

$$A_{\alpha,n} \subset A^{(\alpha+1)} \cap nB_{X^*} \subset A_{\alpha+1,n}.$$

Dále $(A_{\alpha,n})_\alpha$ je rostoucí systém w^*-uzavřených množin ve w^*-kompaktním metrizovatelném prostoru nB_{X^*}, tedy existuje spočetný ordinál $\tilde{\alpha}(n)$ takový, že pro každé $\alpha' > \tilde{\alpha}(n)$ je $A_{\alpha',n} = A_{\tilde{\alpha}(n),n}$. Tedy díky inkluzím výše pro ordinály $\alpha' > \alpha(n) := \tilde{\alpha}(n) + 1$ platí

$$A^{(\alpha')} \cap nB_{X^*} = A^{(\alpha(n))} \cap nB_{X^*}.$$

Označme $\alpha = \sup\{\alpha(n); n \in \mathbb{N}\}$. Potom α je spočetný ordinál. Ukážeme, že $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$. Mějme tedy $x^* \in A^{(\alpha+1)}$. Potom existuje posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset A^{(\alpha)}$ taková, že $x_n^* \xrightarrow{*} x^*$. Z Banach-Steinhausovy věty je posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ omezená nějakým $N \in \mathbb{N}$. Potom $x^* \in A^{(\alpha+1)} \cap NB_{X^*} = A^{(\alpha)} \cap NB_{X^*}$, speciálně $x^* \in A^{(\alpha)}$, tedy máme tvrzení dokázáno. □

Následující lemma je převzato z [5, Lemma 1].

Lemma 4.5. *Nechť X je separabilní Banachův prostor, $A \subset\subset X^*$ a α spočetný limitní ordinál. Nechť pro každé $\beta < \alpha$ je $A^{(\beta)} \neq A^{(\beta+1)}$. Potom $A^{(\alpha)} \neq A^{(\alpha+1)}$.*

Důkaz. Pro ordinály $\beta < \alpha$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme $V_\beta^n = (nB_{A^{(\beta)}})^{(1)}$. potom množiny V_β^n jsou w^*-derivované množiny omezených množin, tedy w^*-uzavřené, tedy i normově uzavřené.

Dále zřejmě pro $\beta < \alpha$ platí $A^{(\beta+1)} = \bigcup_n V_\beta^n$, tedy platí $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_n V_\beta^n$. Kdyby platilo $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$, pak z Důsledku 1.5 je $A^{(\alpha)}$ w^*-uzavřená. Platí

$$\overline{A}^* = \overline{A^{(\alpha)}}^* = A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_n V_\beta^n.$$

Z Bairovy věty aplikované na úplný $\overline{A}^*$ a normové uzavřenosti množin V_β^n potom plyne existence ordinálu $\alpha_0 < \alpha$ a $N \in \mathbb{N}$ takových, že $V_{\alpha_0}^N$ má neprázdný vnitřek v $\overline{A}^*$. Potom ale $A^{(\alpha_0+1)}$ je podprostor $\overline{A}^*$ s neprázdným vnitřkem a $A^{(\alpha_0+1)} = A^{(\alpha_0+2)} = \overline{A}^*$, což je spor. □

Z Lemmat 4.4 a 4.5 plyne, že řád podprostoru duálu separabilního Banachova prostoru může být pouze spočetný nelimitní ordinál.

Článek [5] dále ukazuje existenci w^*-hustých podprostorů všech konečných řádů v duálu nekvazireflexivních separabilních Banachových prostorů. My zde však předvedeme postup z [12], který nám dá dokonce existenci podprostorů všech spočetných řádů. Nejprve dokážeme analogii Lemmatu 3.2 pro w^*-derivované množiny vyšších řádů.

Lemma 4.6. *Nechť X je Banachův prostor, $Z \subset\subset X$ a $E : Z \to X$ identické vnoření. Nechť $A \subset Z^*$, $D = (E^*)^{-1}(A)$ a α je ordinál. Potom $D^{(\alpha)} = (E^*)^{-1}(A^{(\alpha)})$.*

Důkaz. Důkaz provedeme transfinitní indukcí. Případ $\alpha = 1$ a indukční krok pro nelimitní ordinály máme z Lemmatu 3.2. Indukční krok pro limitní ordinály je zřejmý. □

Dále budeme potřebovat následující charakterizaci nekvazireflexivních prostorů z [2].

Lemma 4.7. *Nechť X je nekvazireflexivní Banachův prostor. Potom existuje bázová posloupnost $(z_n)_{n=0}^\infty$ v prostoru X splňující:*

1. *$\|z_n\| \leq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$(z_n)_{n=0}^\infty$ je odražená od nuly.*
3. *Pro $n_k = \frac{k(k+1)}{2}$ je množina $\{\sum_{p=j}^k z_{n_p+j}; 0 \leq j \leq k < \infty\}$ omezená.*

Nyní máme vše potřebné, abychom dokázali následující větu převzatou z [12].

Věta 4.8. *Nechť X je nekvazireflexivní separabilní Banachův prostor. Potom pro každý spočetný ordinál α existuje $D \subset\subset X^*$ takový, že $D^{(\alpha)} \neq D^{(\alpha+1)} = X^*$.*

Důkaz. Nechť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ je bázová posloupnost z Lemmatu 4.7.

Označme $Z = \overline{\operatorname{span}}(\{z_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$. Díky Lemmatu 4.6 stačí pro každý ordinál α nalézt podprostor $A \subset\subset Z^*$ splňující $A^{(\alpha)} \neq A^{(\alpha+1)} = Z^*$. Pro $i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $z_i^j = z_{(j+i-1)(j+i)/2+j}$. (Posloupnosti $(n_i^j)_{i=0}^{\infty}$, $j = 0,1,2,3,...$, kde $n_i^j = (j+i-1)(j+i)/2 + j$, tvoří disjunktní rozklad $\mathbb{N} \cup \{0\}$.) Biortogonální funkcionály k z_n (respektive k z_i^j) budeme značit $\tilde{z}_n$ (respektive $\tilde{z}_i^j$).

Z třetí podmínky Lemmatu 4.7 tedy platí

$$\sup_{j,m} \left\| \sum_{i=1}^{m} z_i^j \right\| = M_1 < \infty.$$

Z Banach-Alaogluovy věty tedy pro každé $j \in \mathbb{N}$ existuje $f_j \in Z^{**}$, w^*-hromadný bod kanonického vnoření množiny $\{\sum_{i=1}^{m} z_i^j\}_{m=1}^{\infty}$ do Z^{**}. Zřejmě platí $\|f_j\| \leq M_1$.

Budeme se zabývat vektory tvaru $g = af_j + z_s^r$ pro nějaké $a > 0$ a $r,s,j \in \mathbb{N}$, $r \neq j$. Toto vyjádření g je jednoznačné, jak nyní ukážeme.

Mějme $af_j + z_s^r = bf_i + z_n^m$, kde $a,b > 0$, $j \neq r$ a $i \neq m$. Je-li $z_s^r = z_n^m$, pak máme rovnost $af_j = bf_i$, testováním pomocí $\tilde{z}_1^i$ pak dostaneme $a\delta_{i,j} = b$, tedy z nenulovosti a a b plyne $i = j$ a $a = b$, z čehož nám plyne naše jednoznačnost.

Je-li $z_s^r \neq z_n^m$, pak, jelikož $r \neq j$, testováním pomocí $\tilde{z}_s^r$ dostaneme $1 = b\delta_{i,r}$. Tedy $i = r$ a $b = 1$. Symetricky dostaneme $j = m$ a $a = 1$. Máme tedy rovnost $af_m + z_s^r = f_r + z_n^m$. Testováním pomocí $\tilde{z}_\ell^r$, kde $\ell \neq s$, dostaneme $\delta_{m,r} = 1$, což nám dá spor s $m = j \neq r$.

Dále ukážeme, že pro každé takové $g_0 = af_j + z_s^r \in Z^{**}$, kde $a > 0$ a $r,s,j \in \mathbb{N}$, $r \neq j$, pro každý spočetný ordinál α a každou nekonečnou množinu $A \subset \mathbb{N} \setminus \{j,r\}$ existuje nejvýše spočetná množina $\Omega(g_0,\alpha,A) \subset Z^{**}$ splňující

1. Množina $K(g_0,\alpha,A) = (\Omega(g_0,\alpha,A))_\perp$ splňuje $(K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)} \subset \operatorname{Ker} g_0$.
2. Každé $h \in \Omega(g_0,\alpha,A)$ se dá napsat ve tvaru $h = a(h)f_{j(h)} + z_{s(h)}^{r(h)}$, kde $j(h),r(h) \in A \cup \{j,r\}$, $a(h) > 0$ a platí-li $j(h) = r$ nebo $r(h) = r$, pak $h = g_0$.
3. Řekneme, že vektor $v \in Z^*$ je typu $T(b,g_0,A)$ pro $b \in \mathbb{F}$, pokud se dá napsat jako
$$v = b\tilde{z}_s^r + u;\ u \in \operatorname{span}\{\tilde{z}_k^t; k \in \mathbb{N}, t \in A \cup \{j\}\} \qquad (T(b,g_0,A))$$
Nechť
$$Q(b,g_0,\alpha,A) = \{v \in K(g_0,\alpha,A);\ v \text{ je typu } T(b,g_0,A)\}.$$
Potom
$$\{v \in \operatorname{Ker} g_0;\ v \text{ je typu } T(b,g_0,A)\} \subset (Q(b,g_0,\alpha,A))^{(\alpha)}.$$

Tyto množiny zkonstruujeme transfinitní indukcí dle α.

Krok 1: $\alpha = 0$.

Fixujme takové g_0 a A (a tím i $a > 0$ a $j,r,s \in \mathbb{N}$). Položme $\Omega(g_0,0,A) = \{g_0\}$. Potom jsou podmínky 1.-3. splněny. Platnost podmínky 2. je zřejmá. Podmínky 1. a 3. plynou z faktu, že $K(g_0,0,A) = \operatorname{Ker} g_0$.

Krok 2: Nechť tvrzení věty platí pro každé $\beta \leq \alpha$. Ukážeme, že potom platí i pro $\alpha + 1$.

Fixujme takové g_0 a A (a tím i $a > 0$ a $j,r,s \in \mathbb{N}$). Množinu A si rozdělíme na spočetně nekonečných disjunktních podmnožin A_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nechť $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ je nějaká sčitatelná posloupnost kladných čísel. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkce $g_n \in Z^{**}$ jako

$$g_n = \varepsilon_n f_{p_0(n)} + z_n^j,$$

kde $p_0 : \mathbb{N} \longrightarrow A_0$ je nějaké bijekce. Jelikož $p_0(n) \in A_0$ a $j \notin A \supset A_0$, máme $p_0 \neq j$. Dále $A_n \subset \mathbb{N} \setminus \{p_0(n),j\}$, tedy dle indukčního předpokladu existují množiny $\Omega(g_n,\alpha,A_n)$ splňující podmínky 1.-3. Definujeme

$$\Omega(g_0,\alpha+1,A) = \{g_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(g_n,\alpha,A_n).$$

Tato množina je spočetné sjednocení spočetných množin, tudíž je spočetná. Ukážeme, že splňuje podmínky 1.-3.

Subkrok 2.1: Platnost podmínky 2.

Nejprve ukážeme platnost podmínky 2. Případ $h = g_0$ je zřejmý. Nechť $h \in \Omega(g_n,\alpha,A_n)$. Potom z indukčního předpokladu $h = a(h) f_{j(h)} + z_{s(h)}^{r(h)}$, kde $j(h),r(h) \in A_n \cup \{p_0(n),j\} \subset A \cup \{j\}$ a $a(h) > 0$, tedy platí první část podmínky 2. Je-li $j(h) = r$ nebo $r(h) = r$, pak nutně $h = g_0$ díky tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $r \notin A \cup \{j\}$.

Subkrok 2.2: Platnost podmínky 1.

Abychom dokázali platnost podmínky 1., transfinitní indukcí ukážeme, že pro každé $\beta \leq \alpha + 1$ platí

$$(K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta)} \subset \operatorname{Ker} g_0.$$

Pro $\beta = 0$ je

$$K(g_0,\alpha+1,A) = \operatorname{Ker} g_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K(g_n,\alpha,A_n) \subset \operatorname{Ker} g_0.$$

Je-li β limitní ordinál a inkluze platí pro každé $\beta' < \beta$, pak

$$(K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta)} = \bigcup_{\beta'<\beta} (K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta')} \subset \operatorname{Ker} g_0.$$

Zbývá tedy dokázat inkluzi pro nelimitní ordinál $\beta + 1$, za předpokladu, že platí pro každé $\beta' \leq \beta$. Mějme $\tilde{y} \in (K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta+1)}$, potom existuje posloupnost $(\tilde{y}_i)_{i=1}^{\infty} \subset (K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta)}$, která w^*-konverguje k $\tilde{y}$. Chceme ukázat, že $\tilde{y} \in \operatorname{Ker} g_0$. Z Lemmatu 1.10 víme, že $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ je w^*-Schauderova báze Z^*. Pro

$i,n \in \mathbb{N}$ označme $\alpha(i)^j_n = \tilde{y}_i(z^j_n)$. Jelikož $\beta < \alpha + 1$, dle indukčního předpokladu a 1. podmínky pro g_n je

$$(K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta)} = \left(\mathrm{Ker}(g_0) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K(g_n,\alpha,A_n)\right)^{(\beta)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}\, g_n,$$

tedy pro každé $i,n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 = g_n(\tilde{y}_i) = \varepsilon_n f_{p_0(n)}(\tilde{y}_i) + \alpha(i)^j_n.$$

Jelikož je posloupnost $(\tilde{y}_i)_{i=1}^{\infty}$ omezená díky Banach-Steinhausově větě, máme $\sup_i \|\tilde{y}_i\| = M_2 < \infty$, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\alpha(i)^j_n| \leq \varepsilon_n M_1 M_2.$$

Tedy je posloupnost $(\alpha(i)^j_n)_{n=1}^{\infty}$ sčitatelná díky sčitatelnosti $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom je suma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(i)^j_n \tilde{z}^j_n$ normově konvergentní, jelikož $(\tilde{z}_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Tedy můžeme provést rozklad $\tilde{y}_i = u_i + v_i$, kde $v_i = a_i \tilde{z}^r_s + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(i)^j_n \tilde{z}^j_n$, $a_i = \tilde{y}_i(z^r_s)$ a $u_i = \tilde{y}_i - v_i$. Tj. u_i je část dekompozice $\tilde{y}_i$ ve w^*-Schauderově bázi $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$, která neobsahuje vektory $\tilde{z}^r_s$ a $(\tilde{z}^j_n)_{n=0}^{\infty}$, a v_i je část jimi tvořená. Jelikož w^*-konvergence a konvergence po souřadnicích splývají na omezených množinách, můžeme udělat podobný rozklad $\tilde{y} = u + v$, přičemž $u_i \xrightarrow{*} u$ a $v_i \xrightarrow{*} v$.

Dále platí $g_0(u_i) = g_0(u) = 0$, jelikož u a $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ jsou části dekompozic které neobsahují vektory $\tilde{z}^r_s$ ani $(\tilde{z}^j_n)_{n=0}^{\infty}$ a na ostatních vektorech z $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ je g_0 nulová. Tedy $u,u_i \in \mathrm{Ker}\, g_0$.

Zbývá tedy ukázat, že $v \in \mathrm{Ker}\, g_0$. Jelikož $\tilde{y}_i, u_i \in \mathrm{Ker}\, g_0$, máme i $v_i \in \mathrm{Ker}\, g_0$. Označme

$$V = \left\{ \tilde{z} \in Z^* : \tilde{z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{z}^j_k + d\tilde{z}^r_s,\ |c_k| \leq \varepsilon_k M_1 M_2,\ |d| \leq M_1 M_2 \right\}.$$

Potom V je normově kompaktní díky Tvrzení 1.11 a pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $v_i \in V$. Na normově kompaktních množinách splývá normová a w^*-topologie, tedy v je nejen w^*-limita posloupnosti $(v_i)_{i=1}^{\infty}$, ale i normová limita. Tedy $v \in \mathrm{Ker}\, g_0$.

Tedy jsme ukázali, že pro $\beta \leq \alpha + 1$ je

$$(K(g_0,\alpha+1,A))^{(\beta)} \subset \mathrm{Ker}\, g_0,$$

volbou $\beta = \alpha + 1$ máme dokázanou 1. podmínku.

Subkrok 2.3: Platnost podmínky 3.

Zbývá dokázat platnost 3. podmínky. Nejprve si uvědomíme, že každý vektor $v = b\tilde{z}^r_s + u$ typu $T(b,g_0,A)$ se dá napsat jako

$$v = b\tilde{z}^r_s + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \tilde{z}^j_k + u_k\right);\ u_k \in \mathrm{span}\{\tilde{z}^t_\ell; \ell \in \mathbb{N}, t \in A_k \cup \{p_0(k)\}\},$$

kde $(a_k)_{k=1}^{m}$ jsou indexy lineární kombinace. Toto platí, jelikož

$$A \cup \{j\} = A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \{j\} = p_0(\mathbb{N}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \{j\}.$$

Dále ukážeme, že obsahuje-li množina M všechny vektory typu $T(b,g_0,A)$ z $\operatorname{Ker} g_0$, pak $M^{(1)}$ obsahuje všechny vektory typu $T(b,g_0,A)$. Nechť

$$v = b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m}(a_k\tilde{z}_k^j + u_k),$$

kde $u_k \in \operatorname{span}\{\tilde{z}_\ell^t; \ell \in \mathbb{N}, t \in a_k \cup \{p_0(k)\}\}$ je typu $T(b,g_0,A)$, potom

$$g_0(v) = abf_j(\tilde{z}_s^r)+b\tilde{z}_s^r(z_s^r)+\sum_{k=1}^{m} aa_kf_j(\tilde{z}_k^j)+af_j(u_k)+a_k\tilde{z}_k^j(z_s^r)+u_k(z_s^r) = b+\sum_{k=1}^{m} aa_k.$$

První rovnost je jen dosazení, druhá plyne z definice biortogonálního systému a faktu, že f_j je w^*-hromadný bod množiny $\{\sum_{k=1}^m z_k^j; m \in \mathbb{N}\}$, tedy $f_j(\tilde{z}_v^u) = \delta_{j,u}$, kde δ je Kroneckerovo delta. Je-li totiž $j = u$, pak pro $m \geq v$ je $\tilde{z}_v^u(\sum_{k=1}^m z_k^j) = 1$, tedy i $f_j(\tilde{z}_v^u) = 1$. Je-li naopak $j \neq u$, pak $\tilde{z}_v^u(\sum_{k=1}^m z_k^j) = 0$ pro každé m, tedy $f_j(\tilde{z}_v^u) = 0$, tedy i $f_j(u_k) = 0$. Tedy vektor v typu $T(b,g_0,A)$ je prvkem $\operatorname{Ker} g_0$, právě když $\sum_{k=1}^m a_k = -b/a$.

Stačí nám dokázat, že

$$(\{v; v \text{ je typu } T(b,g_0,A)\} \cap \operatorname{Ker} g_0)^{(1)} \supset \{v; v \text{ je typu } T(b,g_0,A)\}.$$

Mějme tedy $v = b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m \left(a_k\tilde{z}_k^j + u_k\right)$ typu $T(b,g_0,A)$. Označme $A = \sum_{k=1}^m a_k$. Definujeme vektory $v_\ell = v - (A + b/a)\tilde{z}_\ell^j$. Potom $v_\ell \in \operatorname{Ker} g_0$, jsou typu $T(b,g_0,A)$ a $v_\ell \xrightarrow{*} v$, což jsme chtěli dokázat.

Dále ukážeme, že pro každou konečnou posloupnost čísel $(a_k)_{k=1}^m$, která splňuje rovnost $g_0(b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m a_k\tilde{z}_k^j) = 0$, platí

$$b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m} Q(a_k,g_k,\alpha,A_k) \subset Q(b,g_0,\alpha+1,A).$$

Mějme tedy nějaké

$$v = b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m} v_k,$$

kde $v_k \in Q(a_k,g_k,\alpha,A_k)$ a ukažme, že $v \in K(g_0,\alpha+1,A)$ a je typu $T(b,g_0,A)$. Vektor v je typu $T(b,g_0,A)$, jelikož $A_k \subset A$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Výše jsme již ukázali, že

$$K(g_0,\alpha+1,A) = \operatorname{Ker} g_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K(g_n,\alpha,A_n).$$

Dále ukážeme, že $v \in \operatorname{Ker} g_0$. Jelikož v_k jsou typu $T(a_k,g_k,A_k)$, platí

$$g_0(v) = g_0\left(b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m} v_k\right) = g_0\left(b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m} a_k\tilde{z}_k^j\right) + g_0(u),$$

kde $(a_k)_{k=1}^m$ jsou koeficienty lineární kombinace a

$$u \in \operatorname{span}\{\tilde{z}_\ell^t; \ell \in \mathbb{N}, t \in A_k \cup \{p_0(k)\}, k \in \{1,...,m\}\} \subset \operatorname{span}\{\tilde{z}_\ell^t; \ell \in \mathbb{N}, t \in A\}.$$

Tedy, jelikož $r,j \notin A$, máme $g_0(u) = af_j(u) + u(z_s^r) = 0$, tedy $g_0(v) = 0$ a $v \in \operatorname{Ker} g_0$.

Nyní ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $v \in K(g_n,\alpha,A_n) = (\Omega(g_n,\alpha,A_n))_\perp$. Fixujme tedy $n \in \mathbb{N}$ a mějme nějaké $w \in \Omega(g_n,\alpha,A_n)$, potom z indukčního předpokladu a 2. podmínky platí $w = a' f_{j'} + z_{s'}^{r'}$ pro nějaké $a' > 0$ a $j',r' \in A_n \cup \{p_0(n),j\}$. Tedy platí

$$w(v) = a' b f_{j'}(\tilde{z}_s^r) + b\tilde{z}_s^r(z_{s'}^{r'}) + \sum_{k=1}^m w(v_k) = \sum_{k=1}^m w(v_k),$$

jelikož $j',r' \neq r$. Platí $w(v_n) = 0$, jelikož $w \in \Omega(g_n,\alpha,A_n)$ a $v_n \in K(g_n,\alpha,A_n) = (\Omega(g_n,\alpha,A_n))_\perp$. Pro $k \neq n$, rozlišíme dva případy. Platí-li $j' = j$ nebo $r' = j$, potom z 2. podmínky platí $w = g_n = \varepsilon_n f_{p_0(n)} + z_n^j$. v_k je typu $T(a_k,g_k,A_k)$, tedy se dá napsat jako $v_k = a_k \tilde{z}_k^j + \tilde{v}_k$, kde $\tilde{v}_k \in \operatorname{span}\{\tilde{z}_\ell^t; \ell \in \mathbb{N}, t \in a_k \cup \{p_0(k)\}\}$. Potom

$$w(v_k) = g_n(w_k) = \varepsilon_n a_k f_{p_0(n)}(\tilde{z}_k^j) + \varepsilon_n f_{p_0(n)}(\tilde{v}_k) + a_k \tilde{z}_k^j(z_n^j) + \tilde{v}_k(z_n^j) = 0.$$

Platí-li $j' \neq j$ a $r' \neq j$, potom

$$w(\tilde{v}_k) = a' a_k f_{j'}(\tilde{z}_k^j) + a' f_{j'}(\tilde{v}_k) + a_k \tilde{z}_k^j(z_{s'}^{r'}) + \tilde{v}_k(z_{s'}^{r'}) = a' a_k \delta_{j',j} + a_k \delta_{r',j} = 0.$$

Tedy $v \in \bigcup_{n=1}^\infty K(g_n,\alpha,A_n)$ a $v \in Q(b,g_0,\alpha+1,A)$.

Již jsme dokázali následující pozorování:

a) Každý vektor v typu $T(b,g_0,A)$ lze zapsat jako $v = b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m a_k \tilde{z}_k^j + u_k$, kde $u_k \in \operatorname{span}\{\tilde{z}_\ell^t; \ell \in \mathbb{N}, t \in A_k \cup \{p_0(k)\}\}$ a $(a_k)_k$ jsou indexy lineární kombinace.

b) Obsahuje-li nějaká množina M všechny vektory typu $T(b,g_0,A)$ z $\operatorname{Ker} g_0$, pak $M^{(1)}$ obsahuje všechny vektory typu $T(b,g_0,A)$.

c) Je-li $g_0(b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m a_k \tilde{z}_k^j) = 0$, pak

$$b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m Q(a_k,g_k,\alpha,A_k) \subset Q(b,g_0,\alpha+1,A).$$

Ukážeme, že z nich už plyne platnost podmínky 3. Mějme $v \in \operatorname{Ker} g_0$ typu $T(b,g_0,A)$. Potom díky a) je

$$v = b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m \left(a_k \tilde{z}_k^j + u_k\right).$$

Ukážeme, že $a_k \tilde{z}_k^j + u_k \in (Q(a_k,g_k,\alpha,A_k))^{(\alpha+1)}$. Z indukčního předpokladu platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ bod b) pro typ $T(a_k,g_k,A_k)$. Dále $M = (Q(a_k,g_k,\alpha,A_k))^{(\alpha)}$ obsahuje všechny vektory typu $T(a_k,g_k,A_k)$, které jsou v $\operatorname{Ker} g_k$ z indukčního předpokladu a 3. podmínky. Tedy dle b) pak

$$a_k \tilde{z}_k^j + u_k \in M^{(1)} = (Q(a_k,g_k,\alpha,A_k)^{(\alpha+1)},$$

jelikož je typu $T(a_k,g_k,A_k)$. Tedy dle c)

$$v \in b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^m (Q(a_k,g_k,\alpha,A_k))^{(\alpha+1)} \subset$$

$$\subset \left(b\tilde{z}_s^r + \sum_{k=1}^{m} Q(a_k,g_k,\alpha,A_k)\right)^{(\alpha+1)} \subset (Q(b,g_0,\alpha+1,A))^{(\alpha+1)}.$$

Tímto máme dokázanou podmínku 3. a indukční krok pro nelimitní ordinál $\alpha + 1$.

Krok 3: Nechť α je limitní ordinál a tvrzení platí pro každé $\beta < \alpha$.

Nyní dokážeme indukční krok pro limitní ordinál α. α je spočetný, tedy existují ordinály $\alpha_n < \alpha$ takové, že $\alpha = \lim \alpha_n$.

Zvolme A_n a g_n stejně jako v důkazu pro nelimitní ordinály. Dále definujeme $\Omega(g_0,\alpha,A) = \{g_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(g_n,\alpha_n,A_n)$. Důkaz dále probíhá prakticky stejně jako důkaz pro nelimitní ordinály, až na Subkrok 2.2, jehož důkaz zde nyní předvedeme.

Transfinitní indukcí dokážeme, že pro každé $\beta \leq \alpha$ platí

$$(K(g_0,\alpha,A))^{(\beta)} \subset \operatorname{Ker} g_0.$$

Případ $\beta = 0$ a limitní indukční krok se dokážou stejně jako v Kroku 2. Pro důkaz nelimitního indukčního kroku mějme opět $\tilde{y} \in (K(g_0,\alpha,A))^{(\beta+1)}$ a posloupnost $(\tilde{y}_i)_{i=1}^{\infty} \subset (K(g_0,\alpha,A))^{(\beta)}$, která w^*-konverguje k $\tilde{y}$. Pro $i,n \in \mathbb{N}$ označme $\alpha(i)_n^j = \tilde{y}_i(z_n^j)$. Potom pro taková $n \in \mathbb{N}$, že $\beta \leq \alpha_n$ díky indukčnímu předpokladu a podmínce 1. platí

$$(K(g_0,\alpha,A))^{(\beta)} \subset (K(g_n,\alpha_n,A_n))^{(\beta)} \subset (K(g_n,\alpha_n,A_n))^{(\alpha_n)} \subset \operatorname{Ker} g_n,$$

tedy pro taková n je

$$0 = g_n(\tilde{y}_i) = \varepsilon_n f_{p_0(n)}(\tilde{y}_i) + \alpha(i)_n^j$$

Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí

$$|\alpha(i)_n^j| \leq \varepsilon_n M_1 M_2,$$

kde M_2 je nějaká konstanta omezující posloupnost $(\tilde{y}_i)_{i=1}^{\infty}$, jejíž existence plyne z Banach-Steinhausovy věty.

Zbytek důkazu Subkroku 2.2 probíhá stejně jako v Kroku 2.

Tedy máme hotovou konstrukci množin $\Omega(g_0,\alpha,A)$.

Krok 4: Konstrukce hledaných množin.

Nyní ukážeme, že $K(g_0,\alpha,A)$ jsou podprostory Z^* splňující

$$(K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)} \neq (K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha+1)} = Z^*,$$

což nám dokáže tvrzení věty. Z 1. bodu plyne, že $(K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)} \neq Z^*$, jelikož $g_0 \neq 0$. Mějme nějaké $\tilde{z} \in Z^*$, dle Lemmatu 1.10 pak existuje jednoznačně určená posloupnost čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\tilde{z} = w^*-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{z}_k$. Potom zřejmě $a_k = \tilde{z}(z_k)$.

Vektory $\tilde{y}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{z}_k - \frac{1}{a} g_0(\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{z}_k)\tilde{z}_n^j$ se dají rozložit na $\tilde{y}_n = \tilde{y}_n^1 + \tilde{y}_n^2$, kde platí

$$\tilde{y}_n^1 \in \operatorname{span}\left(\{\tilde{z}_k^t; k \in \mathbb{N}, t \in A \cup \{j\}\} \cup \{\tilde{z}_s^r\}\right),$$

$$\tilde{y}_n^2 \in \operatorname{span}\left(\{\tilde{z}_n; n \in \mathbb{N}\} \setminus (\{\tilde{z}_k^t; k \in \mathbb{N}, t \in A \cup \{j\}\} \cup \{\tilde{z}_s^r\})\right).$$

$\tilde{y}_n^1$ je zřejmě typu $T(b,g_0,A)$ pro nějaké $b \in \mathbb{F}$. Dále platí

$$g_0(\tilde{y}_n^1) = g_0(\tilde{y}_n) = g_0\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{z}_k\right) - \frac{1}{a} g_0\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{z}_k\right) g_0(\tilde{z}_n^j) = 0,$$

tedy $\tilde{y}_n^1 \in \operatorname{Ker} g_0$ a dle 3. podmínky $\tilde{y}_n^1 \in (Q(b,g_0,\alpha,A))^{(\alpha)} \subset (K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)}$.

Dále díky 2. podmínce $\tilde{y}_n^2 \in K(g_0,\alpha,A)$, tedy i $\tilde{y}_n \in (K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)}$. Zřejmě platí $\tilde{y}_n \xrightarrow{*} \tilde{z}$, tedy $\tilde{z} \in (K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha+1)}$ a $(K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha+1)} = Z^*$, tedy

$$(K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha)} \neq (K(g_0,\alpha,A))^{(\alpha+1)} = Z^*$$

a větu máme dokázanou. $\square$

Závěr

V práci jsme ukázali charakterizace reflexivních a kvazireflexivních prostorů pomocí w^*-derivovaných množin jistých tříd množin v jejich duálním prostoru. Dále jsme ukázali souvislost mezi w^*-derivovanými množinami a normujícností podprostorů. Nakonec jsme ukázali, že v duálu separabilního nekvazireflexivního Banachova prostoru existují podprostory všech spočetných nelimitních řádů a žádného jiného.

V první kapitole jsme definovali pojmy oddělování bodů a normujících množin v duálních Banachových prostorech a dokázali jejich charakterizace (Lemma 1.1, Lemma 1.2). Poté jsme definovali w^*-derivované množiny a ukázali další charakterizaci normujících podprostorů (Lemma 1.3). Pomocí Krein-Šmulyanovy věty [4, Theorem 3.92] jsme ukázali, že konvexní množina duálního Banachova prostoru je w^*-uzavřená, právě když je rovna své w^*-derivované množině (Důsledek 1.5). Dále jsme ukázali, že v reflexivním prostoru pro konvexní množiny splývá w^*-uzávěr s w^*-derivovanou množinou (Tvrzení 1.6) a oddělování bodů s normujícností (Důsledek 1.7). Nakonec jsme ukázali několik tvrzení o Schauderových bázích.

Druhá kapitola se věnovala kvazireflexivním prostorům. Nejprve jsme ukázali, že uzavřené podprostory a kvocienty kvazireflexivních prostorů jsou opět kvazireflexivní (Tvrzení 2.6), použili jsme postupu z článku [1]. Poté jsme ukázali, že se normujícnost zachovává na podprostory konečné kodimenze (Tvrzení 2.7), použili jsme postupu z [8]. Ukázali jsme, že v duálech kvazireflexivních prostorů splývá oddělování bodů s normujícností (Tvrzení 2.8), z čehož jsme pak vyvodili, že pro podprostory duálu kvazireflexivního prostoru splývá w^*-derivovaná množina s w^*-uzávěrem (Věta 2.9). Toto tvrzení jsme ještě zobecněli pro absolutně konvexní množiny (Věta 2.15), přičemž jsme použili postupu z [10] a u pomocných tvrzení jsme čerpali z [11] a [13].

Ve třetí kapitole jsme ukázali některé negativní výsledky. Za pomoci výsledku z [14] jsme ukázali, že v duálu každého nereflexivního prostoru existuje konvexní množina, jejíž w^*-derivovaná množina není w^*-uzavřená (Věta 3.7), použili jsme postupu z [10]. Dále jsme ukázali, že v duálu nekvazireflexivních prostorů vždy existuje podprostor, který odděluje body, ale není normující (Věta 3.12), použili jsme postupu z [3]. Nakonec jsme ukázali, že za dalších předpokladů obsahuje duál nekvazireflexivního prostoru podprostor, jehož w^*-derivovaná množina je vlastní normově hustý podprostor (Věta 3.17), použili jsme postupu z [10].

Ve čtvrté kapitole jsme definovali w^*-derivované množiny vyšších řádů. Ukázali jsme, že v duálu separabilního B. prostoru mohou být řády jen spočetné nelimitní ordinály (Lemma 4.4, Lemma 4.5), čerpali jsme z [5] a [6]. Nakonec jsme za pomoci [2] a [12] ukázali, že v duálu nekvazireflexivního separabilního Banachova prostoru existují podprostory všech spočetných nelimitních řádů (Věta 4.8).

Literatura

[1] P. Civin and B. Yood, *Quasi-reflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), pp. 906-911.

[2] W. J. Davis, W. B. Johnson, *Basic sequences and norming subspaces in non-quasireflexive Banach spaces*, Isr. J. Math. 14 (1973), 353-367.

[3] W. J. Davis, J. Lindenstrauss, *On total nonnorming subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 10, 4231–4255.

[4] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer (2013), ISBN 3662416379.

[5] B. V. Godun, *$Weak^*$ derivatives of transfinite order of sets of linear functionals*, B.V. Sib Math J (1977).

[6] A. J. Humphreys, S. G. Simpson, *Separable Banach space theory needs strong set existence axioms*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 10, 4231–4255.

[7] R. C. James, *A Non-Reflexive Banach Space Isometric With Its Second Conjugate Space.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **37** (1951), no. 3, 174–77.

[8] O. Kalenda, *Note on Markushevich bases in subspaces and quotients of Banach spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **50** (2002), no. 2, 117–126.

[9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer Sciencea and Business Media, (2013) ISBN 3642665578.

[10] M. I. Ostrovskii, *$Weak^*$ closures and derived sets in dual Banach spaces*, Note Mat. **31** (2011), no. 1, 129–138.

[11] M. I. Ostrovskii, *Metric Embeddings: Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces*, Walter de Gruyter (2013), ISBN 3110264013.

[12] M. I. Ostrovskii, *w^*-derived sets of transfinite order of subspaces of dual Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Ser. A, (1987), no. 10, 9-12.

[13] R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, (1993), ISBN 0521352207.

[14] I. Singer, *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math., **21** (1961/1962), 351–369.