MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radovan Švarc

$\mathbb{R}^3$ nemá druhou odmocninu

Katedra Matematické Analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 7.7.2018 Radovan Švarc

Rád bych poděkoval Mgr. Benjaminu Vejnarovi, PhD. za ochotu a trpělivost, a Martině Petrákové za mentální podporu.

Název práce: $\mathbb{R}^3$ nemá druhou odmocninu

Autor: Radovan Švarc

Katedra: Katedra Matematické Analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Katedra Matematické Analýzy

Abstrakt: Cílem práce je dokázat, že prostor $\mathbb{R}^3$ se standardní topologií není homeomorfní druhé mocnině žádného topologického prostoru a toto tvrzení pak vhodným způsobem zobecnit. Práce toto tvrzení odvodí dvěma různými způsoby. První způsob pracuje s pojmem orientace homeomorfismu z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$. Druhý přístup na problém pohlíží s pomocí takzvané malé induktivní dimenze topologického prostoru. Oba tyto pojmy jsou v práci důkladně zavedeny a jejich důležité vlastnosti popsány a z většiny dokázány.

Klíčová slova: Brouwerův stupeň, triangulace, malá induktivní dimenze

Title: No square root of $\mathbb{R}^3$

Author: Radovan Švarc

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The goal of the thesis is proving that the space $\mathbb{R}^3$ with standard topology is not homeomorphic to the second power of any topological space, and to properly generalise the statement. The statement is proved in two different ways in the thesis. The first approach works with the notion of orientation of a homeomorfism from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. The second approach views the problem through lens of so called small inductive dimension of a topological space. Both of those concepts are set up rigorously and their important properties are described and mostly proven.

Keywords: Brouwer degree, triangulation, small inductive dimension

Obsah

Úvod **2**

1 Orientace **3**

1.1 Brouwerův stupeň 3

1.2 Aplikace pro $\mathbb{R}^n$ 10

1.3 Lichá mocnina $\mathbb{R}$ nemá sudou odmocninu 12

2 Dimenze **13**

2.1 Malá induktivní dimenze 13

2.2 Dimenze $\mathbb{R}^n$ 18

2.3 Aplikace dimenze na odmocniny z $\mathbb{R}^n$ 21

Závěr **23**

Seznam použité literatury **24**

Úvod

Je zjevné, že pro daná přirozená d,n splňující $d \mid n$ existuje topologický prostor X takový, že X^d je homeomorfní prostoru $\mathbb{R}^n$se standartní topologií - stačí položit $X = \mathbb{R}^{\frac{n}{d}}$. Jak je to ale s případy, kdy d není dělitelem n?

Dle článku (Fokkink, 2002) to byl Jan Aarts, kdo přišel s otázkou, zdali lze $\mathbb{R}^3$ homeomorfně zobrazit na čtverec nějakého topologického prostoru. Tato otázka byla záporně zodpovězena v (Fokkink, 2002) a následně i v (Nadler, 2004).

V kapitole 1 si nejprve zavedeme pojem Brouwerova stupně. Díky němu budeme schopni zavést pojem orientace pro libovolný homeomorfismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Za pomoci pojmu orientace již budeme schopni dokázat nejen to, že $\mathbb{R}^3$ není druhá mocnina, ale dokonce že $\mathbb{R}^n$ není druhá mocnina pro žádné liché n.

V kapitole 2 si zadefinujeme pojem dimenze topologického prostoru a dokážeme si pro něj několik užitečných tvrzení. Nakonec pomocí této techniky ukážeme nejen to, že $\mathbb{R}^3$ nemá druhou odmocninu, ale že $\mathbb{R}^n$ nemá k-tou odmocninu pro $n = k + 1$ (samozřejmě s výjimkou případu $k = 1$) ani pro $k > n$.

Přestože oba dva důkazy jsou převzaty z literatury, zobecnění druhé kapitoly je původní.[1]

[1]článek (Nadler, 2004) dokazoval jen, že $\mathbb{R}^3$ není druhá mocnina

1. Orientace

1.1 Brouwerův stupeň

Následující podkapitola je z velké části (po lemma 1.1.3 a k tomu navíc lemmata 1.1.10 a 1.1.11) převzata z (Dugundji, 1978).

Definice 1.1.1. *Jako n-*simplex *(nebo jen* simplex*, bude-li n jasné z kontextu) budeme nazývat konvexní obal $(n{+}1)$-tice $A_0, A_1, \ldots, A_n$ bodů v $\mathbb{R}^n$. Tyto body nazýváme* vrcholy *simplexu, k-*stěnou *simplexu nazýváme konvexní obal $k{+}1$ prvkové množiny jeho vrcholů. Dále n-simplex σ nazýváme* degenerovaný*, pokud existuje nadrovina v $\mathbb{R}^n$ na které leží všechny vrcholy.* Orientovaným *simplexem nazýváme simplex s daným uspořádáním vrcholů. Zápisem $\sigma = (A_0, \ldots, A_n)$ myslíme, že σ je simplex s těmito vrcholy, zatímco zápisem $[\sigma] = [A_0, \ldots, A_n]$ myslíme, že $[\sigma]$ je orientovaný simplex s tímto uspořádáním vrcholů. Jako* orientovaný objem *$M[\sigma]$ orientovaného simplexu $[\sigma] = [A_0, \ldots, A_n]$ definujeme $\det(\breve{A}_0, \ldots, \breve{A}_n)$, kde pro $A = (x_1, \ldots, x_n)^T$ definujeme $\breve{A}$ jako $(X_1, \ldots, x_n, 1)^T$. Nakonec pod pojmem* znaménko *orientovaného simplexu $[\sigma]$ myslíme* $\operatorname{sign}(M[\sigma])$.

Poznámka. $M[\sigma] = 0$ právě tehdy, když je σ degenerovaný.

Lemma 1.1.1. *Nechť $[\sigma] = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ a $[\sigma'] = [A_0', A_1, \ldots, A_n]$ jsou nedegenerované simplexy a L je nadrovina procházející $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Potom $[\sigma]$ a $[\sigma']$ mají stejné znaménko právě tehdy, když se A_0 a A_0' nacházejí ve stejném poloprostoru určeném L.*

Důkaz. Body A_0 a A_0' leží v opačných poloprostorech určených L právě tehdy, když existuje $\lambda \in (0,1)$, takové, že $\lambda A_0 + (1-\lambda)A_0' \in L$. To je ekvivalentní s tím, že $\dot{\sigma} = (\lambda A_0 + (1-\lambda)A_0', A_1, \ldots, A_n)$ je degenerovaný, neboli s tím, že $M[\dot{\sigma}] = 0$. Z vlastností determinantu plyne vztah $M[\dot{\sigma}] = \lambda M[\sigma] + (1-\lambda)M[\sigma']$. Takové $\lambda \in (0,1)$, že $\lambda M[\sigma] + (1-\lambda)M[\sigma'] = 0$ ale existuje právě tehdy, když mají $M[\sigma]$ a $M[\sigma']$ různá znaménka, což je přesně to, co jsme chtěli.

Definice 1.1.2. *Buď $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jednotková n-rozměrná sféra se středem v počátku. Množinu $\{A_0, \ldots, A_n\} \subset S^n$ nazveme* malou*, pokud je její diametr ostře menší než* 1.

Poznámka. Konvexní obal malé množiny neobsahuje bod 0.

Definice 1.1.3. *Je-li $\{A_0, \ldots, A_n\} \subset S^n$ malá množina, pak projekci konvexního obalu této množiny z počátku na S^n nazýváme* sférickým n-simplexem *(či jen* sférickým simplexem*, bude-li n jasné z kontextu) s vrcholy $A_0, \ldots, A_n$. Dále* sférickou k-stěnou *tohoto sférického simplexu myslíme projekci konvexního obalu $(k+1)$-prvkové množiny vrcholů z počátku na S^n. Sférický simplex nazýváme* degenerovaným*, pokud jeho vrcholy leží na nadrovině procházející počátkem.* Orientovaným *sférickým simplexem máme na mysli sférický simplex s daným pořadím vrcholů. Zápis $\sigma = (A_0, \ldots, A_n)$, resp. $[\sigma] = [A_0, \ldots, A_n]$ značí sférický simplex s vrcholy $A_0, \ldots, A_n$, respektive orientovaný sférický simplex s tímto pořadím vrcholů. Nakonec* znaménkem *orientovaného sférického n-simplexu $[A_0, \ldots, A_n]$ myslíme znaménko orientovaného $(n+1)$-simplexu $[A_0, \ldots, A_n, 0]$.*

Definice 1.1.4. *Jako* triangulaci *sféry S^n myslíme konečnou množinu nedegenerovaných sférických simplexů pokrývajících S^n takovou, že každá sférická $(n-1)$-stěna je společnou sférickou stěnou právě jedné dvojice sférických simplexu z této množiny a zároveň průnik každých dvou sférických simplexů je buď prázdná množina, nebo jde o sférickou k-stěnu v obou těchto sférických simplexech.*

Definice 1.1.5. *Buď T triangulace S^n. Potom řádné T-zobrazení je zobrazení ϕ zobrazující vrcholy T do S^n tak, že kdykoliv $(A_0,\ldots,A_n) \in T$, pak množina $\{\phi(A_0),\ldots,\phi(A_n)\}$ je malá. Pro $\sigma = (A_0,\ldots,A_n)$, resp. $[\sigma] = [A_0,\ldots,A_n]$, definujeme $\phi(\sigma) = (\phi(A_0),\ldots,\phi(A_n))$, resp. $\phi[\sigma] = [\phi(A_0),\ldots,\phi(A_n)]$.*

Poznámka. Díky řádnosti ϕ je $\phi(\sigma)$ skutečně sférický simplex. Ovšem pozor, $\phi(T)$ nemusí být triangulace a znaménko $\phi[\sigma]$ se nemusí shodovat se znaménkem $[\sigma]$.

Definice 1.1.6. *Buď T triangulace S^n, ϕ řádné T-zobrazení a $\psi \in S^n$ takový, že neleží na hranici (vzhledem k podprostoru S^n) $\phi(\sigma)$ pro žádné $\sigma \in T$. Potom* stupeň *$D(\psi,T,\phi)$ bodu ψ vzhledem k T a ϕ definujeme následovně: Každý simplex triangulace T zorientujeme kladně. Počet $\sigma \in T$ takových, že $\psi \in \phi(\sigma)$ a $\psi[\sigma]$ má kladné, respektive záporné, znaménko označíme jako p, resp. n. Potom $D(\psi,T,\phi)$ definujeme jako $p - n$.*

Lemma 1.1.2. *Pro každé T, ϕ, ψ jako z předchozí definice existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $0 < \delta < \varepsilon$ platí, že kdykoliv φ je řádné T-zobrazení takové, že $|\phi(A) - \varphi(A)| < \delta$ pro všechny A vrcholy T, pak $D(\psi,T,\phi) = D(\psi,T,\varphi)$.*

Důkaz. Uvažme libovolný $(A_0,\ldots,A_n) = \sigma \in T$ takový, že $\phi(\sigma)$ je nedegenerovaný. Protože vzdálenost $\phi(A_0)$ od protilehlé stěny v $\phi(\sigma)$ je nenulová a závisí spojitě na poloze jejích vrcholů, existují kompaktní okolí kolem $\phi(A_1)$, ..., $\phi(A_n)$ taková, že $\phi(A_0)$ má kladnou vzdálenost od všech nadrovin daných body z těchto okolí. Protože tato vzdálenost je spojitá funkce na kompaktu, nabývá minima, a tedy existuje $\varepsilon_{\sigma,A_0} > 0$ takové, že pro kdykoliv se všechna $\phi(A_i)$ posunou o nanejvýše ε_{σ,A_0} od své původní pozice, bude $\phi(A_0)$ mít od protilehlé stěny stále kladnou vzdálenost, a tedy se nikdy nepřesune do protilehlého prostoru určeného touto nadrovinou. Pokud vezmeme $\varepsilon_1 > 0$, které je menší než všechna tato ε_{σ,A_0} pro všechny $\sigma \in T$, kde $\phi(\sigma)$ je nedegenerované, a všechny A_0 vrcholy σ. Tím zajistíme, že každý nedegenerovaný simplex si zachová stále stejnou orientaci, kdykoliv se všechny vrcholy pohnou nanejvýš o ε_1.

Dále pro každé $\sigma \in T$ takové, že $\phi(\sigma)$ neobsahuje, resp. obsahuje, bod ψ, existuje (protože vzdálenost ψ od $\phi(\sigma)$, resp. od jeho doplňku v S^n, je nenulová a spojitá) $\varepsilon_\sigma > 0$ takové, že kdykoliv se vrcholy $\phi(\sigma)$ pohnou nanejvýš o ε_σ, bude mít ψ od příslušného simplexu, resp. od jeho doplňku, kladnou vzdálenost. Minimem přes všechny degenerované simplexy dostáváme, že existuje $\varepsilon_2 > 0$ že kdykoliv se všechny vrcholy všech $\phi(\sigma)$ pohnou nejvýše o ε_2, bude ψ právě v těch samých simplexech jako předtím.

Volbou $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ máme hotovo.

Lemma 1.1.3. *Pro T triangulaci S^n a ϕ řádné T-zobrazení hodnota $D(\psi,T,\phi)$ nezávisí na ψ.*

Důkaz. Nechť ψ_1 a ψ_2 jsou dva body, pro které je $D(\psi_1, T, \phi)$ i $D(\psi_2, T, \phi)$ definováno. Díky lemmatu 1.1.2 existuje ε takové, že pro každé zobrazení φ vrcholů T do S^n, které splňuje $|\varphi(A) - \phi(A)| < \varepsilon$ pro všechny A vrcholy T, je φ řádné T-zobrazení (na to je třeba zvolit ε menší, než $\frac{1-\delta}{2}$, kde δ je maximum z diametrů $\phi(\sigma)$ pro všechny σ v T) a zároveň $D(\psi_1,T,\phi) = D(\psi_1,T,\varphi)$ a $D(\psi_2,T,\phi) = D(\psi_2,T,\varphi)$. Protože φ si můžeme zvolit tak, aby se $\varphi(\sigma)$ byl nedegenerovaný pro všechny $\sigma \in T$, můžeme předpokládat, že tuto vlastnost splňuje i ϕ.

Spojme ψ_1 a ψ_2 křivkou na S^n, která neprochází žádnou k-stěnou $\phi(\sigma)$ pro žádné $\sigma \in T$ a žádné $k < n-1$ a ani žádným průnikem dvou a více různých $(n-1)$-stěn. Hodnota $D(\cdot, T,\phi)$ se může změnit jen v místě, kde křivka prochází nějakou $(n-1)$-stěnou. Díky nedegenerovanosti tuto stěnu sdílí právě jedna dvojice $\phi(\sigma_1)$ a $\phi(\sigma_2)$. Konkrétně σ_1 a σ_2 mají tvar $\sigma_1 = (A_0^1,A_1,\ldots,A_n)$, $\sigma_2 = (A_0^2,A_1\ldots,A_n)$. Protože A_0^1 a A_0^2 leží v různých poloprostorech určených nadrovinou procházející skrze množinu $\{A_1,\ldots,A_n\}$, jsou $[\sigma_1]$ a $[\sigma_2]$ opačně orientované. Označme si jako L nadrovinu procházející $\{\phi(A_1),\ldots,\phi(A_n),0\}$. Nyní mohou nastat dva případy:

1 Pokud $\phi(A_0^1)$ a $\phi(A_0^2)$ leží v různých poloprostorech určených L, jsou díky lemmatu 1.1.1 $\phi[\sigma_1]$ a $\phi[\sigma_2]$ opačně orientované. To ale znamená, že pokud obě σ_1 i σ_2 přeorientujeme na kladnou orientaci, budou mít i $\phi[\sigma_1]$ a $\phi[\sigma_2]$ stejné znaménko. Protože $\phi(A_0^1)$ a $\phi(A_0^2)$ leží na opačných stranách L, nezmění se hodnota $D(\cdot,T,\phi)$ při průchodu srze L, protože se vždy započítává právě jednou z nich, vždy stejným znaménkem, a nic jiného se nemění.

2 Pokud $\phi(A_0^1)$ a $\phi(A_0^2)$ leží ve stejném poloprostoru určeném L, jsou $\phi[\sigma_1]$ a $\phi[\sigma_2]$ stejně orientované. To ale znamená, že pokud obě σ_1 i σ_2 přeorientujeme na kladnou orientaci, budou mít $\phi[\sigma_1]$ a $\phi[\sigma_2]$ různé znaménko. Protože $\phi(A_0^1)$ a $\phi(A_0^2)$ leží na stejné straně od L, nezmění se hodnota $D(\cdot,T,\phi)$ při průchodu srze L, protože na jedné straně se nezapočítává ani jedno, a na druhé se započítává obojí a protože mají různá znaménka, tak se vyruší.

Definice 1.1.7. *Pro T triangulaci S^n a ϕ řádné T-zobrazení značíme jako $D(T,\phi)$* stupeň *T a ϕ, definovaný jako $D(\psi,T,\phi)$, kde ψ je libovolný bod S^n, který neleží na hranici $\phi(\sigma)$ pro žádné $\sigma \in T$.*

Definice 1.1.8. *Nechť T je triangulace S^n a $p \in S^n$. Pro každý simplex σ, v němž p leží, vezmeme nejmenší množinu P_1, ..., P_k vrcholů σ takovou, že p leží v konvexním obalu P_1, ... P_k. Zbylé vrcholy σ si označíme jako Q_0, ..., Q_{n-k}. Nechť $\sigma_i = (P_1,\ldots,P_{i-1},p,P_{i+1},\ldots,P_k,Q_0,\ldots,Q_{n-k})$. Pro každé takové σ odebereme σ z T a místo něj do T přidáme σ_1, ..., σ_k. Tuto novou triangulaci nazveme* přidáním p do T*, a značíme jako $T + p$.*

Lemma 1.1.4. *$T + p$ je skutečně triangulace.*

Důkaz. Uvažujeme-li příslušné simplexy vzniklé doplněním počátku, stačí nám namísto sférických simplexů uvažovat jen simplexy.

Uvažme P_1, ..., P_k z 1.1.8 pro nějaké dané σ, ve kterém p leží. Protože T je triangulace, je pro všechna taková $\sigma \in T$, ve kterých p leží, P_1, ..., P_k nejmenší množina vrcholů σ, v jejichž konvexním obalu p leží. To znamená, že všechny dvojice σ_1, σ_2, v nichž leží, mají společnou stěnu danou $P_1, \ldots, P_k$ a tedy průnik jakýchkoliv dvou simplexů po přidání p, z nichž jeden je ze σ_1 a druhý ze σ_2, je jejich společná stěna tvořená nějakou konvexní kombinací p a některých bodů z $P_1, \ldots, P_k$.

BÚNO posuňme vše o vektor $-p$. Nyní chceme ještě ukázat, že každý simplex $\sigma = (A_0, \ldots, A_n)$ obsahující 0 se rozpadá na simplexy dobrým způsobem. BÚNO nechť $A_1, \ldots, A_k$ jsou body $P_1, \ldots, P_k$ z předchozího odstavce. Chceme ukázat, že každý bod uvnitř stěny $s = (A_1, \ldots, A_k)$ lze jednoznačně vyjádřit jako $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k + \alpha \cdot 0$, kde $\alpha, \alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha = 1$ a existuje i takové, že $\alpha_i = 0$. Jinými slovy chceme každý bod P stěny s jednoznačně zapsat jako $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$, kde α_i jsou nezáporná se součtem nanejvýš 1, z nichž alespoň jedno je nula.

Protože 0 je konvexní kombinací $A_1, \ldots, A_k$, a není bodem žádné menší stěny, je $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$, kde $\lambda_i > 0$ a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Nechť $P = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i A_i$ je konvexní kombinace určující P. Potom pokud $m = \min_{i=1\ldots k}\{\frac{\lambda'_i}{\lambda_i}$, pak $P = P - m \cdot 0$, takže $\alpha_i = \lambda'_i - m\lambda_i$ splňuje zadané podmínky.

Nechť takové zápisy existují dva, jeden s α_i, jeden s β_i. Nechť $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ a $\beta = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$. Potom

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + (1-\alpha)\lambda_i) A_i = P + (1-\alpha) \cdot 0 = P + (1-\beta) \cdot 0 = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i + (1-\beta)\lambda_i) A_i$$

jsou dva zápisy P jsko konvexní kombinace $A_1, \ldots, A_k$. Protože tento zápis je ale jednoznačný, musí být pro každé i $\alpha_i - \beta_i = (\alpha - \beta)\lambda_i$. Pokud $\alpha = \beta$ jsme hotovi. Pokud $\alpha \neq \beta$, pak BÚNO $\alpha > \beta$. Pak ale (díky $\lambda_i > 0$) je $\alpha_i > \beta_i$ pro všechna i. Ovšem existuje i_0 takové, že $0 = \alpha_{i_0} > \beta_i \geq 0$, což je spor.

Definice 1.1.9. *Je-li $P = (p_1, \ldots, p_k)$ konečná posloupnost bodů, pak* přidáním P do T *máme na mysli triangulaci* $T + P = (\ldots((T + p_1) + p_2) + \cdots + p_{k-1}) + p_k$.

Lemma 1.1.5. *Je-li T triangulace S^n, $p \in S^n$, ϕ řádné T-zobrazení, a ϕ' řádné $(T+p)$-zobrazení splývající s ϕ na vrcholech T, pak $D(T,\phi) = D(T+p,\phi')$.*

Důkaz. Protože ϕ' je řádné, nemůže žádný bod z nějakého okolí $-\phi'(p)$ ležet v žádném ze simplexů obsahujících $\phi'(p)$ ani v σ. Tedy stačí v tomto okolí vzít bod ψ, který neleží na stěně žádného ze simplexů $\phi'(T+p)$. Jemu příslušná množina simplexů je stejná jako pro $\phi(T)$, takže $D(T,\phi) = D(\psi,T,\phi) = D(\psi,T+p,\phi') = D(T+p,\phi)'$.

Důsledek 1.1.6. *Je-li T triangulace S^n, P je posloupnost bodů v S^n, ϕ řádné T-zobrazení, a ϕ' řádné $(T+P)$-zobrazení splývající s ϕ na vrcholech T, pak $D(T,\phi) = D(T+P,\phi')$.*

Lemma 1.1.7. *Uvažujme simplex $\sigma = (A_0, \ldots, A_n)$ s diametrem d. Nechť Q_i pro $1 \leq i \leq n$ je posloupnost všech těžišť $(n+2-i)$-stěn σ, v libovolném pořadí (σ bereme jako $(n+1)$-stěnu). Potom žádný ze simplexů $\{\sigma\} + Q_1 + \cdots + Q_n$ nemá diametr větší než $\frac{n}{n+1}d$.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí podle n.

Pro $n = 1$ je σ úsečka AB, takže $\{\sigma\} + Q_1$ je dvojice úseček AM, MB, kde M je střed AB. Zjevně AM i BM mají vůči AB poloviční diametr.

Nyní nechť je tvrzení splněno pro $n-1$ a dokážeme ho pro n. Jako T_i označme těžiště n-stěny neobsahující A_i, a jako T označíme těžiště σ. Protože $T_i = \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{j=0}^{n} A_j\right) - A_i\right)$ a $T = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} A_j\right)$, je $A_i - T = \frac{n}{n+1}(A_i - T_i)$, takže $|A_i - T| < \frac{n}{n+1}d$.

Nyní přidání T do σ nám rozdělí σ na $n+1$ simplexů σ_i, kde σ_i nemá A_i jako svůj vrchol. Z předchozího plyne, že všechny hrany vycházející z T nemají délku větší než $\frac{n}{n+1}d$. Dále díky indukčnímu předpokladu po přidání $Q_2, \ldots, Q_n$ bude n-stěna protilehlá T v σ_i rozřezaná na části, které budou mít všechny diametry nanejvýše $\frac{n-1}{n}d < \frac{n}{n+1}d$, takže po přidání T, které od žádného kusu žádné z těchto částí není vzdálenější než $\frac{n}{n+1}d$ dostáváme, že každý simplex, na který se rozpadne σ_i bude skutečně mít dostatečně malý diametr, a tedy i každý simplex z $\{\sigma\} + Q_1 + \cdots + Q_n$ má dostatečně malý diametr.

Lemma 1.1.8. *Pro každou triangulaci T a každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost P bodů z S^n taková, že diametr všech sférických simplexů $\sigma \in T + P$ je menší než ε.*

Důkaz. Označme d největší diametr n-simplexu v T (tedy nejde o sférické simplexy, ale skutečně o simplexy dané jako konvexní obaly $(n+1)$-tice bodů v $\mathbb{R}^{n+1}$). Protože počátek má od všech těchto simplexů nenulovou délku, existuje díky stejnoměrné spojitosti $\delta > 0$ takové, že pokud přidáváním bodů do n-simplexů v T získáme množinu simplexů s diametry nanejvýše δ, pak příslušné sférické simplexy mají diametr nejvýše ε. Nechť P_i je posloupnost těžišť všech $(n+2-i)$-stěn všech simplexů v T (v nějakém pořadí). Potom přidání $T+P_1+\cdots+P_n$ bude mít všechny simplexy s diametrem nanejvýše $\frac{n}{n+1}d$. Zopakováním analogického postupu k-krát nám dá triangulaci s diametrem nanejvýše $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k d$, tedy pro dostatečně velké k bude tento diametr menší než δ. Proto mají i sférické simplexy diametr menší než ε.

Definice 1.1.10. *Je-li $f : S^n \to S^n$ spojité zobrazení, T triangulace S^n, a ϕ_f řádné T-zobrazení, které vrcholům T přiřazuje jejich obraz v f, pak definujeme jako $D(T,f) = D(T,\phi_f)$* stupeň f v T.

Poznámka. Protože S^n je kompakt, je na něm f stejnoměrně spojité. Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x-y| < \delta$, pak $|f(x) - f(y)| < 1$. Proto je $D(T,f)$ určitě definované pro T, jehož všechny simplexy mají diametr menší, než δ.

Poznámka. Přestože následující lemmata platí pro obecná spojitá zobrazení, my se pro stručnost omezíme jen na homeomorfismy, abysme si ušetřili trochu práce, protože důkazy pro ně nám budou stačit.

Lemma 1.1.9. *Je-li $f : S^n \to S^n$ homeomorfismus a T_1, T_2 jsou dvě triangulace S^n, na kterých je stupeň f definován, potom $D(T_1,f) = D(T_2,f)$.*

Důkaz. Nechť $\psi \in S^n$ je takové, že pro žádné $\sigma \in T_1 \cup T_2$ neleží ψ na hranici σ ani $f(\psi)$ na hranici $\phi_f(\sigma)$. Nechť B_1 je koule se středem v ψ, která neprotíná hranici žádného simplexu z T_1 ani T_2. Nechť σ je simplex ležící ve vnitřku B_1, a v jehož vnitřku leží ψ. Existuje B koule se středem ψ a poloměrem r ležící ve vnitřku σ. Protože f^{-1} je spojité v $f(\psi)$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pokud $|f(\psi) - f(x)| < \varepsilon$, pak $|\psi - x| < r$. Nakonec protože f je spojité na kompaktu, je stejnoměrně spojité, takže existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - y| < \delta$, pak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Buď P_1 posloupnost bodů S^n taková, že $(T_1 + \sigma) + P_1$ má všechny simplexy s diametrem menším než δ, kde zápisem $T_1 + \sigma$ myslíme postupné přidávání vrcholů σ v nějakém předepsaném pořadí. Nyní nechť P_2 je posloupnost bodů S^n taková, že v $((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2$ mají všechny simplexy diametr menší než δ. Protože přidáváním bodů se největší diametr simplexu nezvětší, mají i v $((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2$ všechny simplexy diametr menší než δ.

Nyní pokud je $\sigma' \in ((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2$ takový, že $f(\psi) \in \phi_f(\sigma')$, pak protože diametr σ' je menší než δ, je diametr $\phi_f(\sigma')$ menší než ε. Protože $f(\psi) \in \phi_f(\sigma')$, leží všechny vrcholy $\phi_f(\psi)$ ve vzdálenosti nanejvýš ε od ψ, a tedy všechny vrcholy σ' leží ve vzdálenosti nanejvýš r od ψ a tedy všechny vrcholy σ' leží uvnitř σ.

Analogicky pokud $\sigma'' \in ((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2$, pak všechny vrcholy σ'' leží uvnitř σ.

To znamená, že simplexy v obrazu $((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2$, resp. $((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2$, překrývající $f(\psi)$ závisí jenom na simplexech uvnitř σ. Ale protože v σ není žádný z bodů T_1 ani T_2, jsou simplexy uvnitř σ stejné pro $((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2$ jako pro $((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2$. Proto je $D(T_1, f) = D(T_1, \phi_f) = D(((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2, \phi_f) = D(f(\psi), ((T_1 + \sigma) + P_1) + P_2, \phi_f) = D(f(\psi), ((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2, \phi_f) = D(((T_2 + \sigma) + P_1) + P_2, \phi_f) = D(T_2, \phi_f) = D(T_2, f)$.

Definice 1.1.11. *Jako* Brouwerův stupeň *homeomorfismu* $f : S^n \to S^n$ *označíme* $D(f) = D(T, f)$ *pro libovolnou triangulaci* T*, pro kterou je* $D(T, f)$ *definováno.*

Definice 1.1.12. *Dvě spojitá zobrazení* $f, g : X \to Y$ *nazveme* homotopická, *pokud existuje spojité zobrazení* $\Phi : X \times I \to Y$ *(kde* $I = [0,1]$*) takové, že* $\Phi(x, 0) = f(x)$ *a* $\Phi(x, 1) = g(x)$*.*

Lemma 1.1.10. *Je-li* $h : S^n \to S^n$ *homeomorfismus a* $f : S^n \to S^n$ *je homotopické s* h*, je pro každou triangulaci* T *s dostatečně malým maximálním diametrem* $D(T, f) = D(h)$*.*

Důkaz. Nechť Φ je zobrazení dané touto homotopií. Protože $S^n \times I$ je kompakt, existuje $\delta_0 > 0$ takové, že pokud mají $x, y \in X$ vzdálenost menší než δ_0, pak $|\Phi(t, x) - \Phi(t, y)| < 1$ pro všechna $t \in I$. Tudíž položíme-li $f_t(x) = \Phi(x, t)$ a pokud T je triangulace S^n taková, že největší simplex v ní má diametr menší než δ_0, pak příslušné zobrazení ϕ_{f_t} je řádné T-zobrazení.

Buď $t_0 \in I$. Nechť $\psi \in S^n$ je takové, že neleží na hranách žádného $\phi_{f_{t_0}}(\sigma)$ pro žádné $\sigma \in T$. Dle lemmatu 1.1.2 existuje ε takové, že kdykoliv je ϕ řádné T-zobrazení a $|\phi(A) - \phi_{f_{t_0}}(A)| < \varepsilon$ pro každý A vrchol T, pak $D(\psi, T, \phi) = D(\psi, T, \phi_{f_{t_0}})$. Ze stejnoměrné spojitosti plyne, že existuje $\delta \in (0, \delta_0)$ takové, že pokud $|t - t_0| < \delta$, pak $|f_t(x) - f_{t_0}(x)| < \varepsilon$ pro všechna x, a tedy $D(T, f_t) = D(T, f_{t_0})$ pro všechna $t \in I$ splňující $|t - t_0| < \delta$. Tedy funkce $q(t) = D(f_t)$ je spojitá v t_0 pro každé $t_0 \in I$, a tedy je spojitá v celém I. Protože ale může nabývat jen celočíselných hodnot, musí být konstantní, takže $g(0) = g(1)$, čili $D(h) = D(T,h) = D(T,f)$.

Lemma 1.1.11. *Nechť $f : S^n \to S^n$ je spojité zobrazení a T je nějaká triangulace S^n taková, že ϕ_f je řádné T-zobrazení. Nechť λ_f je zobrazení definované tak, že pokud $x \in S^n$ leží ve sférickém simplexu $(A_0, \ldots, A_n) = \sigma \in T$ a $p(x)$ je projekce x z počátku na simplex $(A_0, \ldots, A_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ a platí $p(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ kde $\lambda_i \geq 0$ a $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, pak $\lambda_f(x) = \pi(\sum_{i=0}^n \lambda_i f(A_i))$, kde π je projekce z počátku na S^n. Potom λ_f a f jsou homotopická zobrazení.*

Důkaz. Položme $\Phi(x,t) = \pi(t\lambda_f(x) + (1-t)f(x))$. Zjevně $\Phi(x,0) = f(x)$, $\Phi(x,1) = \lambda_f(x)$. Protože π je spojité na $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (poněvadž $\pi(x) = \frac{x}{|x|}$), stačí ukázat, že úsečka $t\lambda_f(x) + (1-t)f(x)$ neprochází počátkem, čili že pro žádné $x \in S^n$ neplatí $f(x) = -\lambda_f(x)$.

Buď $x \in \sigma = (A_0, \ldots, A_n) \in T$. Protože ϕ_f je řádné T-zobrazení, je $|\lambda_f(x) - \lambda_f(A_0)| < 1$ a $|f(x) - f(A_0)| < 1$. Tedy z $f(A_0) = \phi_f(A_0)$ plyne $|f(x) - \phi_f(x)| < 2$, takže $f(x)$ a $\phi_f(x)$ nejsou pro žádné x protilehlé body.

Lemma 1.1.12. *Jsou-li $f,g : S^n \to S^n$ homeomorfismy, pak platí $D(f \circ g) = D(f)D(g)$.*

Důkaz. Položme λ_f a λ_g jako v předchozím lemmatu.[1] Nechť $\Phi_f(x,t)$, resp. $\Phi_g(x,t)$, je funkce převádějící f na λ_f, resp. g na λ_g. Potom pokud $\Phi(x,t)$ je definováno jako $f \circ \Phi_g(x,2t)$ pro $t \in [0,\frac{1}{2}]$ a jako $\Phi_f(\lambda_g(x),2t-1)$ pro $t \in [\frac{1}{2},1]$, máme zjevně spojité zobrazení na $S^n \times I$ převádějící $f \circ g$ na $\lambda_f \circ \lambda_g$ a tedy tato dvě zobrazení jsou homotopická. Stačí tedy dokázat $D(\lambda_f \circ \lambda_g) = D(\lambda_f)D(\lambda_g)$.

Buď T triangulace taková, že λ_f, i $\lambda_f \circ \lambda_g$ mají řádné T-zobrazení. Buď $\psi \in S^n$. Nechť $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} = \lambda_g^{-1}\{\psi\}$. Každé ψ_i leží v k_i kladně zorientovaných a z_i záporně zorientovaných obrazech simplexů z T, přičemž $k_i - z_i = D(\lambda_f)$ pro každé i. Protože záleží jen na okolí ψ_i pro každé i,[2] můžeme každý z těchto simplexů doplnit na triangulaci, pro kterou položíme λ_g stejné v uvažovaném simplexu a v ostatních simplexech zobrazíme vrcholy takovým způsobem, že obraz žádného z nich neobsahuje ψ. To pak znamená, že každý se zobrazí buď na simplex se stejným znaménkem, nebo na simplex s opačným znaménkem - podle $D(g)$. Potom ovšem součet všech těchto znamének je roven $D(f)D(g)$.

Důsledek 1.1.13. *: Je-li $f : S^n \to S^n$ homeomorfismus, pak $D(f) = 1$ nebo $D(f) = -1$.*

Důkaz. Pokud f je homeomorfismus, je i f^{-1} homeomorfismus, takže $1 = D(\mathrm{id}) = D(f \circ f^{-1}) = D(f)D(f^{-1})$. Tedy, $D(f) \mid 1$ a tedy $D(f) = 1$ nebo $D(f) = -1$.

---

[1] Samořejmě, λ_f a λ_g musejí být definovány vzhledem k nějaké triangulaci. Ale protože, jak jsme ukázali, pro stupeň na triangulaci nezáleží, budou definována vůči libovolné triangulaci (λ_g dokonce vůči několika různým triangulacím - pro jednoduchost budeme tato zobrazení označovat stejně).

[2] To, že záleží jenom na okolí bodu plyne z důkazu 1.1.9.

1.2 Aplikace pro $\mathbb{R}^n$

Lemma 1.2.1. *$\mathbb{R}^n$ je homeomorfní S^n bez jednoho bodu.*

Důkaz. Položme $f_n : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ dané jako

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+\dots+x_n^2+1},\dots,\frac{2x_n}{x_1^2+\dots+x_n^2+1},\frac{x_1^2+\dots+x_n^2-1}{x_1^2+\dots+x_n^2+1}\right).$$

To, že f_n žádný bod $\mathbb{R}^n$ nezobrazí na $(0,\dots,0,1)$ plyne z toho, že $\frac{x_1^2+\dots+x_n^2-1}{x_1^2+\dots+x_n^2+1} \neq 1$. To, že f_n zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do S^n plyne z rovnosti

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n (2x_i)^2\right) + \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - 1\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n 4x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + 1\\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + 1\\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + 1\right)^2.\end{aligned}$$

Dále položme $g_n : S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ dané jako

$$g_n(y_1,\dots,y_n,y_{n+1}) = \left(\frac{y_1}{1-y_{n+1}},\dots,\frac{y_n}{1-y_{n+1}}\right).$$

Protože f_n i g_n jsou po jednotlivých složkách racionální funkce definované na celém svém definičním oboru, jsou obě dvě spojité.

Dále pro $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}g_n \circ f_n(x_1,\dots,x_n) &= g_n\left(\frac{2x_1}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1},\dots,\frac{2x_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1},\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2-1}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1}\right)\\ &= \left(\frac{\frac{2x_1}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1}}{\frac{2}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1}},\dots,\frac{\frac{2x_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1}}{\frac{2}{\sum_{i=1}^n x_i^2+1}}\right)\\ &= (x_1,\dots,x_n),\end{aligned}$$

tedy $g_n \circ f_n$ je identita na $\mathbb{R}^n$.

Nakonec s využitím rovnosti

$$\begin{aligned}\frac{y_1^2}{(1-y_{n+1})^2} + \dots + \frac{y_n^2}{(1-y_{n+1})^2} &= \frac{1-y_{n+1}^2}{(1-y_{n+1})^2}\\ &= \frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}\end{aligned}$$

pro $(y_1,\dots,y_n,y_{n+1}) \in S^n \setminus \{(0,\dots,0,1\}$ dostáváme

$$\begin{aligned}f_n \circ g_n(y_1,\dots,y_n,y_{n+1}) &= f_n\left(\frac{y_1}{1-y_{n+1}},\dots,\frac{y_n}{1-y_{n+1}}\right)\\ &= \left(\frac{2\frac{y_1}{1-y_{n+1}}}{\frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}+1},\dots,\frac{2\frac{y_n}{1-y_{n+1}}}{\frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}+1},\frac{\frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}-1}{\frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}+1}\right)\\ &= (y_1,\dots,y_n,y_{n+1}),\end{aligned}$$

tedy $f_n \circ g_n$ je identita na $S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$.

Z toho již plyne, že f_n je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ na $S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ a g_n je jeho inverz.

Lemma 1.2.2. *Buď $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismus. Označme si $P = (0,\dots,0,1)$. Potom $p : S^n \to S^n$ dané pro $A \in S^n \setminus \{P\}$ vztahem $p(A) = f_n \circ h \circ g_n(A)$ a dodefinované vztahem $p(P) = P$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Položíme-li $q(A) = f_n \circ h^{-1} \circ g_n(A)$ pro $A \in S^n \setminus \{P\}$ a $q(P) = P$, vidíme, že $p \circ q = q \circ p$ je identita na S^n. Stačí tedy ukázat, že p a q jsou spojité. Protože p a q se liší jen výměnou h za h^{-1}, stačí spojitost dokázat pro p.

Na $S^n \setminus \{P\}$ je p složením tří spojitých funkcí, a tedy je spojité. Stačí tedy ukázat, že je spojité i v bodě P.

Buď $1 > \varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že pokud pro $(y_1,\dots,y_{n+1}) \in S^n$ platí $|(y_1,\dots,y_{n+1}) - P| < \delta$, potom $|p(y_1,\dots,y_{n+1}) - P| < \varepsilon$. Pro $(y_1,\dots,y_{n+1}) = P$ je to zjevné, dále nechť $(y_1,\dots,y_{n+1}) \neq P$.

Buď $\delta_1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Potom pokud $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $|(x_1,\dots,x_n)| > \delta_1$, pak je

$$
\begin{aligned}
|f(x_1,\dots,x_n) - P| &= \sqrt{\frac{4\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1+\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} + \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1} - 1\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}} \\
&< \frac{2}{\sqrt{1+\delta_1^2}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nyní uzavřený kruh B v $\mathbb{R}^n$ o poloměru δ_1 se středem v počátku je kompakt. To znamená, že (protože h^{-1} je spojité) $h^{-1}(B)$ je kompakt a tedy je omezený. Proto existuje δ_2 takové, že pokud $|(x_1,\dots,x_n)| > \delta_2$, pak $|h(x_1,\dots,x_n)| > \delta_1$.

Nakonec pokud zvolíme $\delta < \frac{2}{\delta_2^2+1}$, pak pro $(y_1,\dots,y_{n+1}) \in S^n$ mající od P vzdálenost menší než δ díky identitě

$$
\frac{y_1^2}{(1-y_{n+1})^2} + \dots + \frac{y_n^2}{(1-y_{n+1})^2} = \frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}
$$

platí

$$
\begin{aligned}
|g(y_1,\dots,y_{n+1})| &= \sqrt{\frac{y_1^2}{(1-y_{n+1})^2} + \dots + \frac{y_n^2}{(1-y_{n+1})^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{1-y_{n+1}} - 1} \\
&> \sqrt{\frac{2}{\delta} - 1} \\
&> \delta_2.
\end{aligned}
$$

Složením těchto pozorování máme hotovo.

Definice 1.2.1. *Jako* orientaci *homeomorfismu* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definujeme stupeň homeomorfismu* p *z lemmatu 1.2.2.*

Poznámka. Pokud $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou homeomorfismy, pak orientace $f \circ g$ je rovna součinu orientací f a g.

Důsledek 1.2.3. *Buď* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *homeomorfismus. Potom* $h \circ h$ *má kladnou orientaci.*

1.3 Lichá mocnina $\mathbb{R}$ nemá sudou odmocninu

Lemma 1.3.1. *Nechť* $n \geq 3$ *je přirozené číslo,* $1 \leq i < j \leq n$ *jsou přirozená čísla a* $\pi_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je homeomorfismus definovaný předpisem* $\pi_{i,j}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$. *Potom* $\pi_{i,j}$ *má zápornou orientaci.*

Důkaz. BÚNO budeme předpokládat, že $i = 1$ a $j = 2$. Zobrazení $\pi_{1,2}$ budeme zkráceně zapisovat pouze jako π. Zobrazení p určené zobrazením π jako v 1.2.2 splňuje $p(x_0,\dots,x_n) = (x_1,x_0,x_2,\dots,x_n)$, kde $(x_0,\dots,x_n) \in S^n$

Položme jako T triangulaci S^n obsahující $\sigma = (A_0,\dots,A_n)$, kde A_i je dané jako $\frac{1}{\sqrt{3}}(e_0 + e_1 + e_i)$, kde $e_i = (x_0,\dots,x_n)$, $x_i = 1$, a $x_j = 0$ pro $j \neq i$. Buď ψ bod ve vnitřku σ. Potom ψ leží pouze ve vnitřku $\phi_p(\sigma)$. Protože $\phi_p[\sigma] = [A_1,A_0,A_2,\dots,A_n]$, je $D(p) = -1$ a tedy π má zápornou orientaci.

Důsledek 1.3.2. *Nechť* $n \geq 3$ *je liché přirozené číslo a* $\tau : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *je homeomorfismus definovaný předpisem* $\tau(x_1,\dots,x_{2n}) = (x_{n+1},\dots,x_{2n},x_1,\dots,x_n)$. *Potom* τ *má záporné znaménko.*

Důkaz. Stačí si všimnout, že $\tau = \pi_{1,n+1} \circ \pi_{2,n+2} \circ \cdots \circ \pi_{n,2n}$, tedy je to složení lichého počtu záporných zobrazení. Protože znaménko orientace je multiplikativní, jsme hotovi.

Následující důkaz je převzatý z (Fokkink, 2002).

Věta 1.3.3. *Je-li* k *sudé přirozené číslo a* n *liché přirozené číslo, potom neexistuje topologický prostor* X *takový, že* X^k *je homeomorfní* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Pro spor nechť X je prostor takový, že X^k je homeomorfní $\mathbb{R}^n$. Označme si $Y := X^{\frac{k}{2}}$. Tedy platí, že Y^2 je homeomorfní $\mathbb{R}^n$. Nechť $h : Y^2 \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfismus mezi Y^2 a $\mathbb{R}^n$.

Označme si jako $g : Y^4 \to \mathbb{R}^{2n}$ zobrazení dané pro $a,b,c,d \in Y$ jako $g(a,b,c,d) = (h(a,b),h(c,d))$. Protože h je homeomorfismus, je g také homeomorfismus.

Nechť $\mu : Y^4 \to Y^4$ je zobrazení dané pro každé $a,b,c,d \in Y$ jako $\mu(a,b,c,d) = (b,c,d,a)$. To je homeomorfismus a tedy zobrazení $\phi := g \circ \mu \circ g^{-1}$ je homeomorfismus z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$. To díky lemmatu znamená, že $\phi^2 = g \circ \mu^2 \circ g^{-1}$ je homeomorfismus s kladnou orientací. Ale protože $\mu^2(a,b,c,d) = (c,d,a,b)$ pro všechna $a,b,c,d \in Y$, je $\phi^2(x_1,\dots,x_{2n}) = (x_{n+1},\dots,x_{2n},x_1,\dots,x_n)$. Toto zobrazení ovšem má díky důsledku 1.3.2 zápornou orientaci. To je hledaný spor.

2. Dimenze

Úmluva. V podkapitolách 1 a 2 bude X vždy značit separabilní metrický prostor s metrikou ρ.

Definice a tvrzení prvních dvou podkapitol jsou převzatá z (Engelking, 1978).

2.1 Malá induktivní dimenze

Definice 2.1.1. *Jako malou induktivní dimenzi* $\operatorname{ind} X$ *prostoru* X *nazveme buď celé číslo větší rovno* -1 *nebo* ∞*, splňující následující:*

1. $\operatorname{ind} X = -1$ *právě tehdy, když* $X = \emptyset$*.*

2. *Pokud pro každý bod* $x \in X$ *a každé okolí* V *bodu* x *existuje otevřená množina* U *taková, že* $x \in U \subset V$ *a* $\operatorname{ind}(\partial U) \leq n - 1$*, potom* $\operatorname{ind} X \leq n$*.*

3. *Pokud* $\operatorname{ind} X \leq n$ *a* $\operatorname{ind} X \not\leq n - 1$*, pak* $\operatorname{ind} X = n$*.*

4. *Pokud* $\operatorname{ind} X \not\leq n$ *pro všechna* $n = -1,0,1,\ldots,$ *pak* $\operatorname{ind} X = \infty$*.*

Poznámka. Pokud $X \cong Y$, pak $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$.

Lemma 2.1.1. *Pokud* Y *je podprostor* X*, pak* $\operatorname{ind} Y \leq \operatorname{ind} X$*.*

Důkaz. Pokud je $\operatorname{ind} X = \infty$, je tvrzení zjevné. Nechť tedy je $\operatorname{ind} X = n < \infty$. Budeme postupovat indukcí podle n.

Pokud je $n = -1$, pak $X = \emptyset$ a tedy $Y = \emptyset$, což zpětně dává $\operatorname{ind} Y = -1$.

Nyní nechť je $n \geq 0$ a tvrzení pro pravdivé pro prostory s dimenzí menší než n. Buď $x \in Y$ a U (BÚNO otevřené) okolí x v Y. Jako W si označme otevřenou množinu v X takovou, že $U = Y \cap W$. Protože $\operatorname{ind} X = n$, existuje otevřená $V \subset X$ taková, že $x \in V \subset W$ a $\operatorname{ind}(\partial_X V) \leq n-1$. Potom je $\partial_Y(V \cap Y) \subset \partial_X(V)$. Proto z indukčního předpokladu je $\partial_Y(V \cap Y) \leq n - 1$. Protože $V \cap Y \subset U$, znamená to, že $\operatorname{ind}(Y) \leq n$.

Lemma 2.1.2. *Následující tři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\operatorname{ind} X \leq 0$

2. *X má bázi tvořenou z obojetných množin*

3. *Pro každou dvojici disjunktních uzavřených množin A, B existuje obojetná množina W taková, že $A \subset W \subset X \setminus B$.*

Důkaz.

$1 \Rightarrow 2$: Pokud je $\operatorname{ind} X \leq 0$, pak pro každou U otevřenou a každé $x \in$ existuje otevřené V takové, že $x \in V \subset U$ a $\partial V = \emptyset$. Pak ale z otevřenosti V plyne, že $X \setminus V$ je uzavřené, takže $\emptyset = \partial V = \overline{V} \cap (\overline{X \setminus V}) = \overline{V} \cap (X \setminus V)$, tedy $\overline{V} \subset V$, neboli $V = \overline{V}$. Takže V je uzavřená, a tedy obojetná. Pokud nyní vezmeme množinu těchto V pro všechny dvojice x, U, dostaneme bázi složenou z obojetných množin.

$2 \Rightarrow 3$: Pokud X má bázi složenou z obojetných množin, pak pro každý $x \in X$ existuje obojetná množina W_x taková, že $A \cap W_x = \emptyset$ nebo $B \cap W_x = \emptyset$. Protože X je separabilní metrický prostor, má spočetnou bázi $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ (např. všechny otevřené koule se středem v bodech spočetné husté množiny a racionálním poloměrem). Proto když zadefinujeme W_i jako nějakou W_x obsahující U_i pokud taková W_x existuje, a libovolnou W_x jinak, pak W_i je spočetné pokrytí X obojetnými množinami takové, že $W_i \cap A = \emptyset$ nebo $W_i \cap B = \emptyset$. Položme $V_i = W_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} W_j$. Potom V_i tvoří pokrytí X disjunktními otevřenými množinami. Stačí vzít $U = \cup\{V_i : A \cap V_i \neq \emptyset\}$. Z disjunktnosti posloupnosti V_i je $X \setminus U = \cup\{V_i : A \cap V_i = \emptyset\}$, takže U je obojetná množina. Navíc díky tomu, že V_i je pokrytí a tomu, že není zároveň $V_i \cap A \neq \emptyset$ a $V_i \cap B \neq \emptyset$, je $A \subset U \subset X \setminus B$.

$3 \Rightarrow 1$: Je-li $x \in X$ a U okolí x, pak z uzavřenosti a disjunktnosti $\{x\}$ a $X \setminus U$ existuje obojetná V taková, že $x \in V \subset U$. Pak ale V i $X \setminus V$ jsou uzavřené, tedy $\partial V = \overline{V} \cap (\overline{X \setminus V}) = V \cap (X \setminus V) = \emptyset$.

Lemma 2.1.3. *Pokud X má podprostor Z splňující $\operatorname{ind} Z \leq 0$ a A, B jsou disjunktní uzavřené množiny v X, existují disjunktní otevřené množiny U, V takové, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $Z \subset U \cup V$.*

Důkaz. Existují disjunktní otevřené množiny U_1, V_1 takové, že $A \subset U_1$, $B \subset V_1$ a $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$. Protože $\overline{U_1} \cap Z$ a $\overline{V_1} \cap Z$ jsou disjunktní uzavřené množiny v Z, existuje dle lemmatu 2.1.2 množina $W \subset Z$ obojetná v Z taková, že $\overline{U_1} \subset W \subset Z \setminus \overline{V_1}$. Protože W i $Z \setminus W$ jsou otevřené v Z, existují takové otevřené U_2,$V_2 \subset X$, že $W = U_2 \cap Z$, $Z \setminus W = V_2 \cap Z$. Protože $U_1 \cup U_2$ a $V_1 \cup V_2$ by tyto vlastnosti stále splňovaly, můžeme předpokládat, že $U_1 \subset U_2$, $V_1 \subset V_2$. Nyní položme $U = (U_2 \setminus \overline{V_2}) \cup U_1$, $V = (V_2 \setminus \overline{U_2}) \cup V_1$. Tyto množiny splňují:

1. $\underline{A \subset U}$: Plyne přímo z $A \subset U_1 \subset U$.

2. $\underline{B \subset V}$: Plyne přímo z $B \subset V_1 \subset V$.

3. $\underline{U \text{ a } V \text{ jsou otevřené}}$: Obě dvě jsou sjednocením dvou otevřených množin.

4. $\underline{U \cap V = \emptyset}$: Protože $(U_2 \setminus V_2) \cap (V_2 \setminus U_2) = \emptyset$, je i $(U_2 \setminus \overline{V_2}) \cap (V_2 \setminus \overline{U_2}) = \emptyset$. Protože $U_1 \subset U_2$, je $U_1 \cap (V_2 \setminus U_2) = \emptyset$, tedy i $U_1 \cap (V_2 \setminus \overline{U_2}) = \emptyset$. Analogicky $V_1 \cap (U_2 \setminus \overline{V_2}) = \emptyset$. Nakonec $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ z definice U_1 a V_1. Tím pádem $U \cap V = \emptyset$.

5. $\underline{Z \subset U \cup V}$: Buď $z \in Z$. Protože $U_2 \cap Z = W$ a $V_2 \cap Z = Z \setminus W$, je $Z \subset U_2 \cup V_2$ a $Z \cap U_2 \cap V_2 = \emptyset$. Tedy buď $z \in U_2 \setminus V_2$, nebo $z \in V_2 \setminus U_2$. BÚNO $z \in V_2 \setminus U_2$. Pokud $z \in \overline{U_2}$, pak $z \in \overline{U_2} \cap Z = \overline{W} \cap Z = W \subset U_2$, což je spor s tím, že $z \notin U_2$. Takže $z \notin \overline{U_2}$, tedy $z \in V$.

Lemma 2.1.4. *Pokud X splňuje* $\operatorname{ind} X \leq n$, *potom existuje jeho spočetná báze $\mathcal{B}$ taková, že pro každé $B \in \mathcal{B}$ je* $\operatorname{ind}(\partial B) \leq n - 1$.

Důkaz. Protože $\operatorname{ind} X \leq n$, existuje pro každou dvojici (x,U), kde $x \in U \subset X$ a U je otevřená množina, otevřené $V_{x,U}$ takové, že $x \in V_{x,U} \subset U$ a $\operatorname{ind}(\partial V_{x,U}) \leq n-1$. Tedy pokud jako $\mathcal{V}$ označíme množinu všech těchto $V_{x,U}$, pak $\mathcal{V}$ je báze splňující podmínku ze zadání. Nyní nám stačí říci, že existuje spočetná báze $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$.

Protože X je separabilní metrický prostor, tak uvážíme-li nějakou jeho spočetnou hustou množinu H, potom množina všech otevřených koulí se středem v H a racionálním poloměrem tvoří bázi. Tím dostáváme spočetnou bázi

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots\}.$$

Nyní pro všechna přirozená i, j položme $B_{i,j}$ tak, že pokud existuje $V \in \mathcal{V}$ takové, že $C_i \subset V \subset C_j$, pak $B_{i,j} = V$ (je-li takových V více, volíme libovolné z nich), a pokud takové V neexistuje, položíme za $B_{i,j}$ libovolný prvek $\mathcal{V}$. Definujme

$$\mathcal{B} = \{B_{i,j} : i,j \in \mathbb{N}\}.$$

Zjevně $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{B}$ je spočetná. Zbývá ukázat, že $\mathcal{B}$ je báze. Tedy chceme ukázat, že pro každou otevřenou $U \subset X$ a každé $x \in U$ existuje $B_{i,j} \in \mathcal{B}$, že $x \in B_{i,j} \subset U$.

Mějme tedy $x \in U \subset X$, U otevřenou. Protože $\mathcal{C}$ je báze, existuje $C_j \in \mathcal{C}$, že $x \in C_j \subset U$. Protože $\mathcal{V}$ je báze, existuje $V \in \mathcal{V}$, že $x \in V \subset C_j$. Protože $\mathcal{C}$ je báze, existuje $C_i \in \mathcal{C}$, že $x \in C_i \subset V$. Potom ale díky existenci V platí, že $C_i \subset B_{i,j} \subset C_j$, takže $x \in B_{i,j} \subset U$.

Lemma 2.1.5. *Nechť F_1, F_2, ... jsou uzavřené podmnožiny prostoru X takové, že $\cup_{i=1}^{\infty} F_i = X$ a* $\operatorname{ind} F_i \leq n$. *Potom* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Důkaz. Pro $n = -1$ a $n = \infty$ je tvrzení zjevné. Dále předpokládejme, že n je nezáporné celé číslo.

Budeme postupovat indukcí podle n.

Nejprve nechť $n = 0$. Chceme ukázat, že X má bázi z obojetných množin. Na to stačí ukázat, že pro každé $x \in X$ a každou uzavřenou F, ve které x neleží, existují otevřené množiny U, V takové, že $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$. Pak totiž pro každou otevřenou G a každé x v ní stačí vzít $F = X \setminus G$ a pak U je obojetná podmnožina G obsahující x, takže stačí vzít tyto U pro všechna x, G.

Položme $F_0 = \emptyset$, a za U_0, resp. V_0, položíme množinu bodů ve vzdálenosti menší než $\frac{\rho(x,F)}{3}$ od x, resp. od F. Indukcí sestrojíme posloupnost otevřených množin U_i, V_i takovou, že pro všechna $i \geq 0$ je $U_i \subset U_{i+1}$, $V_i \subset V_{i+1}$, $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$,

$F_i \subset U_i \cup V_i$. S takto definovanými posloupnostmi množin nám stačí položit $U = \cup_{i=0}^{\infty} U_i$, $V = \cup_{i=0}^{\infty} V_i$.

Množiny U_0 a V_0 zjevně splňují podmínky pro $i = 0$. Předpokládejme, že taková posloupnost množin existuje až po $k-1$. Sestrojíme U_k a V_k.

Množiny $\overline{U_{k-1}} \cap F_k$ a $\overline{V_{k-1}} \cap F_k$ jsou disjunktní a uzavřené. Protože $\operatorname{ind} F_k \leq 0$, existuje v F_k obojetná množina W taková, že $\overline{U_{k-1}} \cap F_k \subset W \subset F_k \setminus \overline{V_{k-1}}$. Protože F_k je uzavřená množina, jsou i množiny W a $F_k \setminus W$ uzavřené v X. Z toho plyne, že $\overline{U_{k-1}} \cup W$ a $\overline{V_{k-1}} \cup (F_k \setminus W)$ jsou uzavřené disjunktní množiny, takže existují otevřené množiny U_k, V_k takové, že $\overline{U_{k-1}} \cup W \subset U_k$, $\overline{V_{k-1}} \cup (F_k \setminus W) \subset V_k$, a $\overline{U_k} \cap \overline{V_k} = \emptyset$. Tyto množiny splňují zadané podmínky, čímž máme pro případ $n = 0$ hotovo.

Pro každé k umíme díky lemmatu 2.1.4 najít spočetnou bázi $\mathcal{B}_k$ prostoru F_k, že pro každé $V \in \mathcal{B}_k$ je $\operatorname{ind} \partial_{F_k} V \leq n-1$. Položme

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup \{\partial_{F_k} V : V \in \mathcal{B}_k\}.$$

Množina $\partial_{F_k} V$ je uzavřená v F_k, a protože F_k je sama uzavřená, je $\partial_{F_k} V$ uzavřená i v Y. Navíc $\mathcal{B}_k$ je spočetná množina a $\operatorname{ind} \partial_{F_k} V \leq n-1$, takže z indukčního předpokladu je $\operatorname{ind} Y \leq n-1$.

Buď $Z_k = F_k \setminus Y$. Protože $Z_k \subset F_k$, je $\mathcal{C} = \{B \cap Z_k : B \in \mathcal{B}_k\}$ báze Z_k. Ovšem pro $C \in \mathcal{C}$ daném jako $B \cap Z_k$, $B \in \mathcal{B}_k$, je potom $\partial_{Z_k} C = Z_k \cap \partial_{F_k} B \subset Z_k \cap Y = \emptyset$. To znamená, že $\mathcal{C}$ je báze Z_k tvořená z obojetných množin, tedy $\operatorname{ind} Z_k \leq 0$.

Položme

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

Protože $Z_k = Z \cap F_k$, je Z_k uzavřená množina v Z, takže z platnosti tvrzení pro $n = 0$ máme $\operatorname{ind} Z \leq 0$.

Máme tedy dvojici množin Y a Z splňující $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ a $\operatorname{ind} Z \leq 0$ a chceme ukázat, že $X = Y \cup Z$ splňuje $\operatorname{ind} X \leq n$.

Buď $x \in X$ a $U \subset X$ nějaké (BÚNO otevřené) okolí x. Protože $X \setminus U$ je uzavřená množina, ve které neleží x, existují z lemmatu 2.1.3 disjunktní otevřené množiny P, Q takové, že $x \in P$, $X \setminus U \in Q$ a $Z \subset P \cup Q$. Máme tedy $x \in P \subset X \setminus Q \subset U$. Protože P a Q jsou disjunktní otevřené množiny, je $\partial P \cap (P \cup Q) = \emptyset$, tedy $\partial P \cap Z = \emptyset$. Protože $X = Y \cup Z$, musí být $\partial P \subset Y$ a tedy z lemmatu 2.1.1 je $\operatorname{ind}(\partial P) \leq \operatorname{ind} Y \leq n-1$. Takže pro každé $x \in X$ a každé jeho otevřené okolí U existuje otevřená množina P taková, že $x \in P \subset U$ a $\operatorname{ind}(\partial P) \leq n-1$. Z toho plyne, že $X \leq n$, čímž jsme hotovi.

Lemma 2.1.6. *Jsou-li X, Y separabilní metrické prostory, z nichž alespoň jeden je neprázdný, platí*

$$\operatorname{ind}(X \times Y) \leq \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y.$$

Důkaz. Pokud $\operatorname{ind} X$ nebo $\operatorname{ind} Y$ je rovno ∞, je tvrzení zjevné. Dále tedy předpokládejme, že $\operatorname{ind} X, \operatorname{ind} Y$ jsou celá čísla větší rovna -1, z nichž alespoň jedno je nezáporné. Budeme postupovat indukcí podle součtu $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$.

Je-li $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y = -1$, je buď $X = \emptyset$, nebo $Y = \emptyset$, tedy $X \times Y = \emptyset$ a tedy $\operatorname{ind}(X \times Y) = -1$.

Dále nechť $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y = n$ pro $n \geq 0$ a tvrzení již je dokázáno pro $-1, \ldots, n-1$. Buď $(x,y) \in X \times Y$ a nechť U je nějaké okolí tohoto bodu. Pak existují takové otevřené množiny $V \subset X$, $W \subset Y$, že $(x,y) \in V \times W \subset U$. Nechť $x \in A \subset V$, $y \in B \subset W$ jsou takové otevřené množiny, že $\operatorname{ind}(\partial A) \leq \operatorname{ind} X - 1$, $\operatorname{ind}(\partial B) \leq \operatorname{ind} Y - 1$. Pak z indukčního předpokladu platí $\operatorname{ind}((\partial A) \times Y) \leq n-1$, $\operatorname{ind}(X \times (\partial B)) \leq n-1$, a tedy díky lemmatu 2.1.5 je

$$\operatorname{ind}(((\partial A) \times Y) \cup (X \times (\partial B))) \leq n-1.$$

Ale protože

$$\partial(A \times B) \subset ((\partial A) \times Y) \cup (X \times (\partial B)),$$

jsme díky lemmatu 2.1.1 hotovi.

Lemma 2.1.7. *Pro nezáporné celé n platí, že $\operatorname{ind} X \leq n$ právě tehdy, když existují $Y,Z \subset X$, že $X = Y \cup Z$, $\operatorname{ind} Y \leq n-1$, $\operatorname{ind} Z \leq 0$.*

Důkaz. Jeden směr byl již dokázán na konci důkazu lemmatu 2.1.5. Chceme ukázat druhý směr, tj. že pokud $\operatorname{ind} X \leq n$, pak existují Y, Z splňující zadané podmínky.

Díky lemmatu 2.1.4 umíme najít spočetnou bázi $\mathcal{B}$ prostoru X, že pro každé $V \in \mathcal{B}$ je $\operatorname{ind}(\partial V) \leq n-1$. Položme

$$Y = \bigcup \{\partial V : V \in \mathcal{B}\}.$$

Množina ∂V je uzavřená v X a tedy i v Y. Navíc $\mathcal{B}$ je spočetná množina a $\operatorname{ind}(\partial V) \leq n-1$, takže z lemmatu 2.1.5 je $\operatorname{ind} Y \leq n-1$.

Buď $Z = X \setminus Y$. Protože $Z \subset X$, je $\mathcal{C} = \{B \cap Z : B \in \mathcal{B}\}$ báze Z. Ovšem pro $C \in \mathcal{C}$ daném jako $B \cap Z$, $B \in \mathcal{B}$, je potom $\partial_Z C = Z \cap \partial B \subset Z \cap Y = \emptyset$. To znamená, že $\mathcal{C}$ je báze Z tvořená z obojetných množin, tedy $\operatorname{ind} Z \leq 0$.

Důsledek 2.1.8. *Pro nezáporné celé n platí, že $\operatorname{ind} X \leq n$ právě tehdy, když existují $X_0, \ldots, X_n \subset X$, že $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$ a $\operatorname{ind} X_i \leq 0$ pro každé i.*

Důkaz. Plyne z lemmatu 2.1.7 jednoduchou indukcí.

Důsledek 2.1.9. *Pokud X, Y je dvojice separabilních metrických prostorů, pak*

$$\operatorname{ind}(X \cup Y) \leq \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 1.$$

Důkaz. Je-li $\operatorname{ind} X$ nebo $\operatorname{ind} Y$ rovno -1 nebo ∞, je tvrzení zjevné. V opačném případě díky důsledku 2.1.8 existují množiny $X_0, \ldots, X_{\operatorname{ind} X}$ a $Y_0, \ldots, Y_{\operatorname{ind} Y}$ takové, že $\operatorname{ind} X_i \leq 0$, $\operatorname{ind} Y_i \leq 0$, $X = \bigcup_{i=0}^{\operatorname{ind} X} X_i$ a $Y = \bigcup_{i=0}^{\operatorname{ind} Y} Y_i$. Potom je ale $X \cup Y$ sjednocením $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 2$ prostorů s dimenzí nanejvýše 0, tedy z důsledku 2.1.8 je $\operatorname{ind}(X \cup Y) \leq \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 1$.

Důsledek 2.1.10. *Nechť $T \subset X$ má nezápornou celou dimenzi n. Potom pro každou dvojici $A,B \subset X$ disjunktních množin uzavřených v X existuje dvojice disjunktních otevřených množin U, V taková, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $\operatorname{ind}(T \cap (X \setminus (U \cup V))) \leq n - 1$.*

Důkaz. Z lemmatu 2.1.7 existují $Y,Z \subset T$, že $T = Y \cup Z$, $\operatorname{ind} Y \leq n - 1$ a $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Položíme-li za U, V množiny z 2.1.3, platí $Z \subset U \cup V$, takže $T \cap (X \setminus (U \cup V)) \subset Y$, tedy z 2.1.1 je $\operatorname{ind}(T \cap (X \setminus (U \cup V))) \leq n - 1$.

2.2 Dimenze $\mathbb{R}^n$

Jako I budeme značit interval $[0,1]$.

Lemma 2.2.1. $\operatorname{ind}(I^n) = n$.

Důkaz. Pro každé $x \in U \subset I$, kde U je otevřená v I, existuje otevřená koule V se středem v x splňující $V \subset U$. Množina ∂V je nanejvýše dvoubodová, tedy $\operatorname{ind}(\partial V) \leq 0$, takže $\operatorname{ind} I \leq 1$. Proto díky lemmatu 2.1.6 dostáváme $\operatorname{ind}(I^n) \leq n \operatorname{ind}(I) \leq n$.

Nyní pro spor předpokládejme, že $\operatorname{ind}(I^n) \leq n - 1$. Označme si jako A_i, resp. B_i, množinu $\{(x_1, \ldots ,x_n) \in I^n : x_i = 0\}$, resp. $\{(x_1, \ldots ,x_n) \in I^n : x_i = 1\}$. Pomocí n-krát zopakovaného použití důsledku 2.1.10, kde v i-tém kroku bereme uzavřené množiny A_i, B_i a za T položíme v prvním kroku I^n a v i-tém množinu $\cap_{k=1}^{i-1} L_k$, sestrojíme posloupnost $L_1, \ldots, L_n$ takovou, že pro každé i existují otevřené $U_i,V_i \subset I^n$ splňující $A_i \subset U_i$, $B_i \subset V_i$, $U_i \cap V_i = \emptyset$, $U_i \cup V_i = I^n \setminus L_i$ a $\operatorname{ind}\left(\bigcap_{k=1}^{i} L_k\right) \leq n - i - 1$. To potom speciálně znamená, že $\bigcap_{k=1}^{n} L_k = \emptyset$.

Nyní pro každé i od 1 do n definujeme funkci z $f_i : I^n \to I$ danou vztahem

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i) + d(x,A_i)}\right)$$

pro $x \in I^n \setminus V_i$ a

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i) + d(x,B_i)}\right)$$

pro $x \in I^n \setminus U_i$, kde $d(x,X)$značí vzdálenost bodu x od X. Tato funkce je dobře definovaná, protože $(I^n \setminus V_i) \cap (I^n \setminus U_i) = L_i$ a pro $x \in L_i$ je $f_i(x) = \frac{1}{2}$ nezávisle na to, kterým postupem hodnotu počítáme. Navíc, protože $I^n \setminus U_i$ i $I^n \setminus V_i$ jsou uzavřené množiny a na každé z nich je f_i spojité, je f_i spojité i na $(I^n \setminus U_i) \cup (I^n \setminus V_i) = I^n$.

Nyní nechť $f : I^n \to I^n$ je definováno jako $f(x) = (f_1(x), \ldots ,f_n(x))$. Do bodu $\frac{1}{2}$ se bod x zobrazením f_i dostane právě tehdy, když $x \in L_i$. Takže díky tomu, že $\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$, se žádný bod I^n nezobrazí do bodu $a = (\frac{1}{2}, \ldots ,\frac{1}{2})$. Nechť $g : I^n \setminus \{a\} \to I^n$ je projekce z a na stěny I^n. Potom $g \circ f$ je spojité zobrazení I^n do I^n a protože I^n je homeomorfní uzavřené n-rozměrné kouli, má $g \circ f$ z Brouwerovy věty o pevném bodě pevný bod x. Protože $g \circ f$ zobrazuje I^n na stěny I^n, musí i x leže na stěně I^n, tedy leží na nějakém A_i nebo nějakém B_i. BÚNO nechť leží na A_i pro nějaké i. Potom ale $f_i(x) = 1$, takže $f(x) \in B_i$, tedy $g \circ f(x) \in B_i$. Ale protože $A_i \cap B_i = \emptyset$, nemůže x být pevným bodem, což je spor.

Důsledek 2.2.2. $\operatorname{ind}(\mathbb{R}^n) = n$

Důkaz. Pro každé $x \in U \subset \mathbb{R}$, kde U je okolí x v $\mathbb{R}$, existuje otevřená koule V se středem v x splňující $V \subset U$. Množina ∂V je dvoubodová, tedy $\operatorname{ind}(\partial V) \leq 0$, takže $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$. Proto díky lemmatu 2.1.6 dostáváme $\operatorname{ind}(\mathbb{R}^n) \leq n \operatorname{ind} \mathbb{R} \leq n$. Naopak protože $I^n \subset \mathbb{R}^n$, je z lemmatu 2.1.1 $\operatorname{ind}(\mathbb{R}^n) \geq \operatorname{ind}(I^n) = n$. Z toho dostáváme $\operatorname{ind}(\mathbb{R}^n) = n$.

Lemma 2.2.3. $\operatorname{ind} \mathbb{Q} = 0$*,* $\operatorname{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$*.*

Důkaz. Obě dvě tyto množiny jsou neprázdné, tedy mají nezápornou dimenzi. Zároveň z hustoty $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ máme, že $\{(a,b) \cap \mathbb{Q} : a < b, a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, resp. $\{(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : a < b, a,b \in \mathbb{Q}\}$, je báze $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tvořená obojetnými množinami, tedy díky lemmatu 2.1.2 máme hotovo.

Lemma 2.2.4. *Pro podprostor $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ daný jako množina těch bodů, které mají právě k souřadnic racionálních, platí* $\operatorname{ind} Q_k \leq 0$*.*

Důkaz. Nechť F je dané jako součin (v nějakém pořadí) k množin tvaru $\{q\}$, kde q je nějaké racionální číslo (ne nutně pro všechny tyto množiny stejné) a $n - k$ množin $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zřejmě Q_k je sjednocením všech množin tohoto tvaru, a těchto množin je pouze spočetně mnoho. Tedy díky lemmatu 2.1.5 stačí ukázat, že každé takové F je uzavřené v Q_k a splňuje $\operatorname{ind} F \leq 0$.

Pokud pro jednoduchost BÚNO $F = \{q_1\} \times \cdots \times \{q_k\} \cdot (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{n-k}$, vezměme libovolné $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q_k$. Pokud $x \in \overline{F}$, musí být $x_1 = q_1, \ldots, x_k = q_k$, jinak by x mělo od F kladnou vzdálenost. Ovšem potom je x na prvních k pozicích racionální, tedy z $x \in Q_k$ plyne, že na zbylých $n - k$ musí být iracionální. Proto $x \in F$ pro každé $x \in \overline{F}$, takže F je uzavřená.

Protože F je homeomorfní $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$, z lemmatu 2.1.6 plyne $\operatorname{ind} F = \operatorname{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n \leq n \operatorname{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, což jsme chtěli.

Lemma 2.2.5. *Má-li hustá množina $A \subset \mathbb{R}^n$ prázdný vnitřek a $B \subset \mathbb{R}^n$ je homeomorfní A, má i B prázdný vnitřek.*

Důkaz. Homeomorfismus B na A si označme jako h. Pro spor nechť U je neprázdná otevřená podmnožina B. Můžeme předpokládat, že $\overline{U}$ je kompaktní. Protože $h(U)$ je neprázdná otevřená v A, existuje neprázdná otevřená $V \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $h(U) = A \cap V$. Protože h je spojité zobrazení, je $h(\overline{U})$ kompaktní, takže $h(\overline{U})$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Zároveň z hustoty A plyne $\overline{V} = \overline{A \cap V}$, takže $V \subset \overline{V} = \overline{A \cap V} = \overline{h(U)} \subset h(\overline{U}) \subset A$, což je spor.

Lemma 2.2.6. *Má-li množina $A \subset \mathbb{R}^n$ prázdný vnitřek, pak existuje $B \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfní A, které splňuje $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že množina A je hustá v $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{Q}^n$ je spočetná množina, dají se její prvky seřadit jako q_1, q_2, ...

Nechť $A_1 = A$. Indukcí vytvoříme posloupnost $A_0, A_1, \ldots$ a které jsou homeomorfní (s homeomorfismy $h_i : A_i \to A_{i+1}$) takové, že pro všechna $i \leq 0$ a všechna $x,y \in A_i$, platí

1. $|x - h_i(x)| \leq \frac{1}{3^{i+1}}$
2. $|x - y| \leq |h_i(x) - h_i(y)|$
3. Pokud $i \geq 1$, pak $|q_i - h_i(x)| \geq \frac{1}{4 \cdot 3^i}$

Nechť $A_1 = A_0$ a h_0 je identické zobrazení. Pak pro $i = 0$ jsou zjevně podmínky splněny. Nyní nechť již máme $A_0, \ldots, A_k$ a $h_0, \ldots, h_{k-1}$, které splňují zadané podmínky. Protože A_k je homeomorfní A, má A_k prázdný vnitřek. Tedy existuje $a_k \in \mathbb{R}^n \setminus A_k$ takové, že $|a_k - q_k| < \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}$. Nechť h_k je zobrazení, který bod $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a_k\}$ posune o kladný násobek vektoru $x - a_k$ délky $r = \frac{1}{3^{k+1}}$. Za A_{k+1} položíme $h_k(A_k)$. Nyní chceme ukázat, že všechny podmínky opět platí.

Platnost $|x - h_k(x)| \leq \frac{1}{3^{k+1}}$ je zjevná. Pokud $x \neq y$ jsou dva body různé od a_k a cosinus úhlu $\angle x a_k y$ označíme c, pak z kosinové věty

$$\begin{aligned}
&|h_k(x) - h_k(y)|^2 - |x - y|^2 \\
&= \Big(|h_k(x) - a_k|^2 + |h_k(y) - a_k|^2 - 2c|h_k(x) - a_k||h_k(y) - a_k|\Big) - \\
&\qquad \Big(|x - a_k|^2 + |y - a_k|^2 - 2c|x - a_k||y - a_k|\Big) \\
&= \Big((|x - a_k| + r)^2 + (|y - a_k| + r)^2 - 2c(|x - a_k| + r)(|y - a_k| + r)\Big) - \\
&\qquad \Big(|x - a_k|^2 + |y - a_k|^2 - 2c|x - a_k||y - a_k|\Big) \\
&= 2(1 - c)r(r + |x - a_k| + |y - a_k|) \geq 0,
\end{aligned}$$

takže $|x - y| \leq |h_k(x) - h_k(y)|$. Dále $|q_k - h_k(x)| \geq |h_k(x) - a_k| - |a_k - q_k| \geq \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{1}{4 \cdot 3^k}$. Zbývá ukázat, že h_k je homeomorfismus. Díky vztahu $|x-y| \leq |h_k(x) - h_k(y)|$ je h_k prosté zobrazení. Z $|x - y| \leq |h_k(x) - h_k(y)|$ plyne, že h_k^{-1} je spojité. Zároveň ze vztahu $|h_k(x) - h_k(y)|^2 = |x-y|^2 + 2(1-c)r(r+|x-a_k|+|y-a_k|)$ máme spojitost h_k, protože je-li y v dostatečně malém okolí x, pak $|x - y|$ je libovolně malé, $|x - a_k| + |y - a_k|$ je omezené a $1 - c$ je libovolně malé.

Nechť $f_i = h_{i-1} \circ \cdots \circ h_0 : A \to \mathbb{R}^n$. Platí $|f_i(x) - f_{i+k}(x)| \leq |f_i(x) - f_{i+1}(x)| + \cdots + |f_{i+k-1}(x) - f_{i+k}(x)| \leq \frac{1}{3^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{i+k}} \leq \frac{1}{3^{i+1}} + \cdots = \frac{1}{2 \cdot 3^i}$. Proto $f_i(x)$ je Cauchyovská posloupnost pro každé $x \in A$, takže konverguje k nějakému $f(x)$. Protože $f_k(x) \to f(x)$ a $|f_i(x) - f_{i+k}(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^i}$, je $|f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^i}$, takže f_i konverguje stejnoměrně. Proto je f spojité zobrazení.

Protože $|x - y| \leq |h_k(x) - h_k(y)|$ pro každé $x,y \in A_k$ a každé k, máme plyne $|x-y| \leq |f_i(x) - f_i(y)|$ pro každé i, a tedy $|x-y| \leq |f(x) - f(y)|$. Proto je f prosté zobrazení a jeho inverz je spojitý. To znamená, že $B = f(A)$ je homeomorfní A. Zbývá ukázat, že $B \cap \mathbb{Q}^n = \emptyset$. Pro spor nechť $q_i \in \mathbb{Q}^n$ leží v B. Nechť $a \in A$ je takové, že $f(a) = q_i$. Protože $|q_i - f_{i+1}(a)| \geq \frac{1}{4 \cdot 3^i}$ a $|f_{i+1}(a) - f(a)| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{i+1}}$, je $0 = |q_i - f(a)| \geq |q_i - f_{i+1}(a)| - |f_{i+1}(a) - f(a)| \geq \frac{1}{4 \cdot 3^i} - \frac{1}{2 \cdot 3^{i+1}} = \frac{1}{4 \cdot 3^{i+1}} > 0$, což je spor.

Nakonec zbývá vyřešit případ, kdy A není husté v $\mathbb{R}^n$. Nechť $A' = A \cup (\mathbb{Q}^n \setminus (A \cup \mathbb{Q}^n)^\circ)$. Zjevně $A \subset A'$, takže ukážeme-li, že A' je hustá s prázdným vnitřkem, pak

A' je homeomorfní podmnožině $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, takže i A bude homeomorfní podmnožině $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$.

Buď $x \in \mathbb{R}^n$. Pokud $x \in \overline{A}$, pak $x \in \overline{A'}$. Pokud $x \notin \overline{A}$, pak existuje otevřená U obsahující x, která je disjunktní s A. Protože pro každé $y \in U$ a každé otevřené V splňující $y \in V \subset U$ je $V \not\subset \mathbb{Q}^n$ a $V \cap A = \emptyset$, je $U \cap (A \cup \mathbb{Q}^n) = \emptyset$, takže $U \cap A' = U \cap \mathbb{Q}^n$, z čehož plyne $x \in \overline{A'}$. Takže A' je hustá.

Nyní nechť $U \subset A'$ je otevřená množina. Protože $\mathbb{Q}^n \setminus (A \cup \mathbb{Q}^n)^\circ \subset \mathbb{Q}^n$, je $U \subset A \cup \mathbb{Q}^n$, takže z otevřenosti U je $U \subset (A \cup \mathbb{Q}^n)^\circ$. Potom ale $U \cap (\mathbb{Q}^n \setminus (A \cup \mathbb{Q}^n)^\circ) = \emptyset$, takže $U \subset A$. Protože A má prázdný vnitřek, musí být $U = \emptyset$, takže A' má prázdný vnitřek.

Lemma 2.2.7. *Je-li $X \subset \mathbb{R}^n$, pak $\operatorname{ind}(X) = n$ právě tehdy, když $X^\circ \neq \emptyset$.*

Důkaz. Pokud X nemá prázdný vnitřek, pak existuje $Y \subset X$ homeomorfní I^n, takže z lemmatu 2.1.1 je $n = \operatorname{ind}(I^n) \leq \operatorname{ind} X \leq \operatorname{ind}(\mathbb{R}^n) = n$, tedy $\operatorname{ind} X = n$.

Naopak, pokud X má prázdný vnitřek, pak díky předchozímu lemmatu je X homeomorfní nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, takže $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{ind}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n)$. Ovšem $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n = \bigcup_{i=0}^{n-1} Q_i$, kde Q_i je definováno jako v lemmatu 2.2.4. Toto lemma tvrdí, že $\operatorname{ind} Q_i \leq 0$. To ovšem v kombinaci s důsledkem 2.1.8 dává $\operatorname{ind} X \leq n-1$, což jsme chtěli.

2.3 Aplikace dimenze na odmocniny z $\mathbb{R}^n$

Pro dokončení důkazu použijeme bez důkazu následující tvrzení.

Lemma 2.3.1. *(Hurewicz, 1935) Jsou-li X, Y separabilní metrické prostory, X je neprázdný kompakt konečné dimenze a $\operatorname{ind} Y > 0$, pak $\operatorname{ind}(X \times Y) \geq \operatorname{ind} X + 1$.*

Poznámka. (viz Nadler, 1992) V T_2 prostorech, tedy speciálně v metrických prostorech, pojem křivkové a obloukové souvislosti splývá.

Důkazy následujících dvou tvrzení jsou zobecněním důkazu, že $\mathbb{R}^3$ nemá druhou odmocninu, naleznutelným v (Nadler, 2004).

Věta 2.3.2. *Pro žádný topologický prostor X a žádnou dvojici přirozených čísel $n > m$ neplatí $X^n \cong \mathbb{R}^m$.*

Důkaz. Pro spor nechť $X^n \cong \mathbb{R}^m$. Označme si jako h homeomorfismus z $\mathbb{R}^m$ do X^n.

Protože $\mathbb{R}^m$ je obloukově souvislý separabilní metrický prostor, je X^n obloukově souvislý separabilní metrický prostor, a tedy (protože X je homeomorfní podprostoru X^n) i X je obloukově souvislý metrický prostor. Protože X obsahuje více než jeden bod (jinak by X^n byl jednobodový a tudíž by nebyl homeomorfní s $\mathbb{R}^m$), existuje v X oblouk A. Z toho ovšem $\operatorname{ind}(A^n) = \operatorname{ind}(I^n) = n$.

Ale potom $m = \operatorname{ind}(\mathbb{R}^m) = \operatorname{ind}(X^n) \geq \operatorname{ind}(A^n) = n > m$, což je spor.

Věta 2.3.3. *Pro žádný topologický prostor X a žádné $n > 1$ neplatí $X^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$.*

Důkaz. Pro spor nechť $X^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$. Označme si jako h homeomorfismus z $\mathbb{R}^{n+1}$ do X^n a jako $\pi : X^n \to X$ projekci z X^n na první složku. Stejně jako v předchozím dostáváme, že X je obloukově souvislý separabilní metrický prostor.

Protože $n + 1 = \operatorname{ind}(\mathbb{R}^{n+1}) = \operatorname{ind}(X^n) \leq n \operatorname{ind}(X)$, je $\operatorname{ind}(X) \geq 2$.

Nechť B_r je uzavřená koule v $\mathbb{R}^{n+1}$ se středem v 0 a poloměrem r. Protože $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \mathbb{R}^{n+1}$, je $X = \pi \circ h(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \cup_{i=1}^{\infty} \pi \circ h(B_i)$. Protože B_i je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$, je $\pi \circ h(B_i)$ také kompakt a tedy jde o uzavřené množiny. Proto musí existovat i_0 takové, že $\operatorname{ind}(\pi \circ h(B_{i_0})) \geq 2$ - kdyby ne, bylo by $\operatorname{ind}(\pi \circ h(B_i)) \leq 1$ pro všechna i a tedy z lemmatu 2.1.5 také $2 \leq \operatorname{ind}(X) = \operatorname{ind}(\cup_{i=1}^{\infty} \pi \circ h(B_i)) \leq 1$, což je spor. Označme $K = \pi \circ h(B_{i_0})$.

Stejně jako v předchozí větě získáme $A \subset X$ homeomorfní I. Protože $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} I = 1 > 0$ a součin kompaktů je kompakt, dostáváme díky lemmatu 2.3.1 indukcí podle k vztah $\operatorname{ind}(K \times A^k) \geq k+2$ pro $k < n$ (pro $k = 0$ platí $\operatorname{ind}(K) \geq 2$, a je-li $\operatorname{ind}(K \times A^k) \geq k+2$, je $\operatorname{ind}(K \times A^{k+1}) = \operatorname{ind}((K \times A^k) \times A) \geq (k+2)+1 = k + 3$), tedy speciálně $\operatorname{ind}(K \times A^{n-1}) = n + 1$.

Dle lemmatu 2.2.7 musí $h^{-1}(K \times A^{n-1})$ obsahovat neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^{n+1}$, takže $K \times A^{n-1}$ obsahuje neprázdnou otevřenou podmnožinu X^n. Proto existují U, V_1, $\ldots$, V_{n-1} neprázdné otevřené podmnožiny X takové, že $U \times V_1 \times \cdots \times V_{n-1} \subset K \times A^{n-1}$. To speciálně znamená, že existuje neprázdná otevřená množina $V \subset A$ (například V_1).

Množina V^n je neprázdná otevřená v X^n, takže množina $h^{-1}(V^n)$ je neprázdná otevřená v $\mathbb{R}^{n+1}$, a proto z lemmatu 2.2.7 je $\operatorname{ind}(h^{-1}(V^n)) = n + 1$, tedy i $\operatorname{ind}(V^n) = n + 1$.

Protože ovšem $\operatorname{ind}(A) = 1$, dostáváme díky lemmatům 2.1.6 a 2.1.1 vztah

$$n = n \operatorname{ind}(A) \geq \operatorname{ind}(A^n) \geq \operatorname{ind}(V^n) = n + 1,$$

což je spor.

Závěr

V první kapitole jsme si nejprve pro homeomorfismus $f : S^n \to S^n$ zadefinovali pojem Brouwerova stupně. Následně jsme za pomoci homeomorfismu převádějící $\mathbb{R}^n$ na S^n bez jednoho bodu zadefinovali orientaci libovolného homeomorfismu $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dokázali jsme, že orientace splňuje vhodné vlastnosti (intuitivně očekávatelné od pojmu orientace) a s jejich pomocí jsme již mohli přímo ukázat, že pro žádné liché n neexistuje homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ na X^2.

V druhé kapitole jsme zavedli pojem malé indukční dimenze topologického prostoru. O ní jsme ukázali, že má několik příhodných vlastností (opět, vlastností intuitivně očekávatelných od pojmu dimenze). Poté, co jsme ukázali, že prostor $\mathbb{R}^n$ se z pohledu dimenze chová „správným způsobem“, bylo už vcelku jednoduché, za pomoci tvrzení z (Hurewicz, 1935), ukázat, že $\mathbb{R}^n$ není homeomorfní s X^k pro $k > n$. S velmi podobnou myšlenkou, ale trochou práce navíc jsme následně ukázali, že pro $k > 1$ není ani $\mathbb{R}^{k+1}$ homeomorfní s X^k pro žádný topologický prostor X.

Seznam použité literatury

DUGUNDJI, J. (1978). *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney. ISBN 0-205-00271-4.

ENGELKING, R. (1978). *Dimension theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford-New York; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw. ISBN 0-444-85176-3.

FOKKINK, R. (2002). $\mathbb{R}^3$ has no root. *Amer. Math. Monthly*, **109**(3), 285. ISSN 0002-9890.

HUREWICZ, W. (1935). Sur la dimension des produits cartesiens. *Ann. of Math. (2)*, **36**(1), 194–197. ISSN 0003-486X.

NADLER, JR., S. B. (1992). *Continuum theory: An introduction*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., New York. ISBN 0-8247-8659-9.

NADLER, JR., S. B. (2004). Another proof that $\mathbb{R}^3$ has no square root. *Amer. Math. Monthly*, **111**(6), 527–528. ISSN 0002-9890.