MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Fara

Rychlost konvergence tlumeného kmitání

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce doc. RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D., který měl spoustu užitečných postřehů a rad.

Název práce: Rychlost konvergence tlumeného kmitání

Autor: Jakub Fara

Katedra matematické analýzy: Katedra matematicé analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Studujeme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu $u''(t) + f(u'(t),t)u'(t) + |u|^{\beta}u = 0$, kde β je kladná konstanta a f kladná funkce. Tato rovnice fyzikálně popisuje jednorozměrné tlumené kmitání s časově proměnlivým odporem prostředí. Převedeme studovanou rovnici na systém dvou rovnic prvního řádu. To nám umožní dokázat existenci některých pozitivně invariantních množin, pomocí čehož odvodíme chování trajektorií určitých řešení tohoto systému. Díky tomu budeme schopni udělat odhady na rychlost poklesu energie pro neoscilující řešení. Dále v mnohých případech dokážeme určit, kdy bude řešení systému oscilovat pro libovolně velké časy, nebo naopak kdy oscilace přestanou.

Klíčová slova: tlumené kmitání, rychlost konvergence, ODR druhého řádu

Title: Speed of Convergence of Damped Oscilations

Author: Jakub Fara

Department of Mathematical Analysis: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Department of mathematical analysis

Abstract: We study solutions convergence of ordinary differential second order equation $u''(t) + f(u'(t),t)u'(t) + |u|^{\beta}u = 0$, where β is a positive constant and f is a positive function. Physical meaning of this equation is one-dimensional damped oscilation with time variable environment resistance. We convert this studied function to the system of two equations of the first order. It enables us to proof the existence of some positively invariant sets, hence we derive trajectory behaviour of solutions of this system. Thanks to that we will be able to do speed estimates of energy decrease for non-oscillation solution. Then in many cases we will be able to establish when the system solution for each time will oscillate or on the contrary when the oscillations will stop.

Keywords: damped oscillation, speed of convergence, second order ODE

Obsah

Úvod

V této práci budeme studovat rovnici tlumeného oscilátoru. Tato rovnice bude mít tvar

$$u'' + f(u',t)u' + |u|^{\beta}u = 0, \tag{1}$$

kde f je kladná funkce a β kladná konstanta. Budeme zde vycházet z článků [1] a [2], kde byla studována autonomní rovnice

$$u'' + |u'|^{\alpha}u' + |u|^{\beta}u = 0. \tag{2}$$

Závislot f na čase fyzikálně představuje proměnlivost odporu prostředí, ve kterém jsou kmity měřeny. Dále je možné tyto kmity vnímat jako vícerozměrné a rovnici (1) jako jednu složku. Pak časuvou závislost f lze chápat jako vliv ostatních složek na tlumení oscilátoru.

Podebně jako v článku [2] využijeme substituce, která převede rovnici (1) na soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. To nám umožní lépe studovat trajektorie řešení.

Pro tento systém ukážeme, kdy řešení nepřestane oscilovat kolem počátku a kdy naupak kmity vymizí. To bude záviset na srovnání funkce $f(\lambda,t)$ s funkcí $\lambda^{\frac{\beta}{\beta+2}}$, pro velké časy a λ blízké nuly. Což je zobecněním srovnání α s $\frac{\beta}{\beta+2}$ pro rovnici (2) v článcku [1].

V článku [2] byla dokázána věta zaručující existenci pozitivně invariantních množin pro autonomní systém. V této práci dokážeme obdoubnou větu pro námi studovaný neautonomní systém, avšak existenci těchto množin zaručíme jen pro velké časy.

Poté z tvaru některých trajektorií řešení studovaného systému dokážeme získat vztah mezi u a u'. Tím dostaneme odhady na rychlost poklesu energie podobné jako v článcích [1] a [2].

1. Neoscilující řešení

V této kapitole vyjmene z věty [2, Theorem 5.6.], kde byla dokázána existence invariantní množiny pro rovnici (2). Ukážeme, že tato věta pro dosti velké časy platí i pro námi studovanou rovnici (1). Poté ukážeme, že za určitých podmínek $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$, což pro autonomní rovnici (2) bylo splněno triviálně. Na základě těchto vět již bude snadné ukázat, ža žešení nemůže oscilovat kolem počátku, neboť by muselo skončit v nějaké pozitivně invariantní množině.
Nyní zavedeme některá značení.
Buď $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$, pak budeme značit $U(x,\delta)$ jako okolí bodu x o poloměru δ . Dále řekneme, že f je lokálně lipchitzovská, pokud pro všechny $x_0 \in \mathbb{R}$ existují $L > 0$, $\delta > 0$ takové, že pro všechny $x,y \in U(x_0,\delta)$ platí

$$|f(x,t) - f(y,t)| < L|x - y|.$$

V této práci budeme celou dobu uvažovat, že funkce f je kladná pro všechna $t \in (0, +\infty)$. Dále že $f \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ a lokálně lipchitzovská. Za těchto předpokladů bude řešení existovat, bude jednoznačné a bude splněna spojitá závislost na počáteční podmínce, což jsou přirozené požadavky, pro fyzikální úlohu tohoto typu. Dále uvažujme funkci energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(u'(t)\right)^2 + \frac{1}{\beta+2}|u(t)|^{\beta+2} \tag{1.1}$$

Derivováním této funkce dostáváme

$$E'(t) = u''(t)u'(t) + \operatorname{sgn}(u(t))|u(t)|^{\beta+1}u'(t) \tag{1.2}$$

A pokud u splňuje rovnici (1), tak

$$E'(t) = -f(u'(t),t)(u'(t))^2 - |u(t)|^{\beta}u(t)u'(t) + \operatorname{sgn}(u(t))|u(t)|^{\beta+1}u'(t)$$

a po úpravě

$$E'(t) = -f(u'(t),t)\left(u'(t)\right)^2 \le 0. \tag{1.3}$$

Z předchozího vidíme, že energie s rostoucím časem klesá a tedy řešení budou opravdu tlumená. Nyní převedme rovnici (1) na soustavu dvou diferenciálních rovnic pomocí souřadnic

$$x = \sqrt{\frac{2}{\beta+2}}|u|^{\frac{\beta}{2}}u, \tag{1.4}$$

$$y(t) = u'(t) \tag{1.5}$$

Zderivováním dostáváme:

$$x'(t) = \sqrt{\frac{\beta+2}{2}}|u(t)|^{\frac{\beta}{2}}u'(t), \tag{1.6}$$

A po vyjádření

$$|u(t)| = \left(\frac{\beta+2}{2}\right)^{\frac{1}{(\beta+2)}}|x|^{\frac{2}{\beta+2}} \tag{1.7}$$

a následném dosazení (1.5), (1.7) do (1.6) dává

$$x'(t) = c|x(t)|^{\frac{\beta}{\beta+2}} y(t), \tag{1.8}$$

kde $c = \left(\frac{\beta+2}{2}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}$. Dále

$$y'(t) = u''(t),$$

po dosazení rovnice (1) to jest

$$y'(t) = -f(u'(t),t)u'(t) - |u(t)|^{\beta} u(t).$$

Nyní opět dosadíme rovnosti (1.5),(1.7) a dostáváme

$$y' = -f(y,t)y - c|x|^{\frac{\beta}{\beta+2}} x. \tag{1.9}$$

Dále pro pohodlnější zápis definujeme vektorové pole $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$F(x,y,t) = (F_1(x,y), F_2(x,y,t)) = (c|x|^{\frac{\beta}{\beta+2}} y, -f(y,t)y - c|x|^{\frac{\beta}{\beta+2}} x).$$

Definice 1. *Nechť je $x_0 \in \mathbb{R}$ a δ, $t_0 > 0$, pak definujeme množinu $\mathfrak{U}(x_0,\delta,t_0)$ předpisem*

$$\mathfrak{U}(x_0,\delta,t_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (t_0, +\infty)$$

Z následujícím lemmatu bude zřejmé, že řešení soustavy (1.8), (1.9) nemůže konvergovat k nenulovému bodu. Toho bude za potřebí pro dokázání věty, zaručující, že $E(t)$ se bude blížit nule pro časy jdoucí do nekonečna.

Lemma 1. *Buď $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $(p,q) \neq (0,0)$. Něcht existuje okolí $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ a $C > 0$ takové, že $f \leq C$ na $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$. Pak existuje $U((p,q),\rho)$ takové, že každé řešení rovnic* (1.8),(1.9) *procházející $U((p,q),\rho)$, toto okolí opustí v konečném čase.*

Důkaz. Lemma dokážeme sporem. Buď nejprve $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ a $q \neq 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $q > 0$. Potom existuje $U((p,q),\rho)$ tak, aby pro nějaké $K > 0$ bylo $y > K$ pro $y \in U(q,\rho)$ Předpokládejme, že existuje t_0 a řešení soustavy (x,y) tak, aby pro všechna $t > t_0$ bylo $(x(t),y(t)) \in U((p,q),\rho)$. Protože $y(t) = u'(t)$, tak je u monotóní pro $t > t_0$. Navíc je u omezená, neboť je x omezená. Proto $\lim_{t\to+\infty} u(t) =: u_\infty < +\infty$. Dále platí

$$\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)dt = u_\infty - u(t_0) < +\infty \tag{1.10}$$

Na druhou stranu

$$\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)dt = \int_{t_0}^{+\infty} y(t)dt \geq \int_{t_0}^{+\infty} K dt = +\infty \tag{1.11}$$

A vztahy (1.10) a (1.11) dávají spor.

Nechť je nyní $q = 0$. Pak dle předpokladu je $p \neq 0$, tedy existuje $\mathfrak{U}(q,\delta_1,t_1)$, takové že $f \leq C$ na $\mathfrak{U}(q,\delta_1,t_1)$ a pro všecna $x \in U(p,\delta_1)$ je $x \geq K$. Potom existuje $\rho < \delta_1$ a konstanta $C_1 > 0$ taková, že pro $t \geq \max\{t_1,t_0\}$ je

$$|y'(t)| < \left| -f(y,t)y - |x|^{\frac{\beta}{\beta+2}} x \right| > C_1. \tag{1.12}$$

Proto je $y(t)$ monotóní, tedy limita $y(t)$ existuje a je konečná. Pak spor dostaneme stejně jako výše pro $E(t)$.

$\square$

Poznámka. Kdyby podmínka, aby funkce f byla omezená na okolí nuly nebyla splněna, tak by mohlo tlumení být tak velké, že by řešení zkonvergovalo k nějakému bodu $(p,0), p \neq 0$. V takovém případě by řešení změnilo své znaménko pouze konečněkrát, ale pro jednoduchost takovýto případ vyloučíme.

V této větě ukážeme, že za podmínky, aby f byla odražená od nuly a nenastala situace z poznámky pod lemmatem (1), bude energie vždy konvergovat k nule a tedy bod $(0,0)$ bude „přitahovat“ všechna řešení.

Věta 2. *Nechť existuje okolí* $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ *a* $C_1 > 0$ *takové, že* $f \leq C_1$ *na* $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ *a nechť pro všechna* $\delta_2 > 0$ *existuje* C_2, $t_2 > 0$ *takové, že* $f \geq C_2$ *na* $(\mathbb{R} \setminus U(0,\delta_2)) \times (t_0, +\infty)$. *Pak pro každé řešení* $u(t)$ *rovnice* (1) *platí*

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$$

.

Důkaz. Z monotonie víme, že $\lim_{t\to+\infty} E(t)$ existuje. Pro spor předpokládejme, že je kladná a označme ji E_0.
Pak z definice limity pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje t_0, takové, že pro všechna $t > t_0$ platí

$$E(t) - E_0 < \varepsilon.$$

Tedy

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - E_0 < \varepsilon$$

a proto existuje bod $(p,q) \in \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p^2 + q^2 = 2E_0\} =: M$ a posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $(x(t_n),y(t_n)) \to (p,q)$ pro $n \to \infty$.
Buď nejprve $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost pro kterou jde $(x(t_n),y(t_n))$ k bodu $(p,0)$. Z Lemmatu 1 existuje $\rho > 0$ takové, že řešení opustí $U((p,q),\rho)$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$, tak že pro všechna $n > n_0$ existuje τ_n tak, aby

$$(x(\tau_n),y(\tau_n)) \in \partial U((p,q),\rho).$$

Zároveň $\partial U((p,q),\rho)$ je kompaktní množina, a tedy existuje konvergentní podposloupnost $\{\tau_{n_k}\}$, která má limitu v $\partial U((p,q),\rho) \cap M$. A tedy vždy existuje posloupnost jdoucí do $(\overline{p},\overline{q})$, $\overline{q} \neq 0$.
Nechť je tedy nyní $\{t_n\}_{n=3}^{\infty}$ posloupnost, pro kterou se $(x(t_n),y(t_n))$ blíží k bodu (p,q), $q \neq 0$. Pak existují $\delta > 0$ taková, že interval $[q-\delta,q+\delta]$ neobsahuje nulu. A tedy dle předpokladu existuje t_2, $C_2 > 0$ takové, že pro všechna $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(q,\delta,t_2)$ je

$$f(\lambda,t) \geq C_2$$

Navíc pro všechna $(x,y) \in U((p,q),\delta)$ a $t > t_2$ platí

$$(x',y').(x,y) = -f(y,t)y^2 < -C_2(q-\delta)^2 =: -\eta < 0$$

Proto z vlastností skalárního součinu pro všechna $(x,y) \in U((p,q),\delta)$ a $t > t_2$ platí

$$\cos(\theta) \parallel (x',y') \parallel\parallel (x,y) \parallel < -\eta,$$

kde θ je úhel mezi vektory (x',y') a (x,y). A protože $(0,0) \notin \overline{U((p,q),\delta)}$, pak $\| (x,y) \|$ a $\| (x',y') \|$ jsou odražené od nuly. Proto existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $(x,y) \in U((p,q),\delta)$ platí

$$\| (x',y') \| \| (x,y) \| > K.$$

A tedy pro všechna $t > t_2$ a $(x,y) \in U((p,q),\delta)$ máme odhad

$$\cos(\theta) < -\frac{\eta}{K} < 0$$

Označme nyní $\Theta_1(t)$, respektive $\Theta_2(t)$ přímky svírající s vektorem $(x(t),y(t))$ úhel θ, respektive $-\theta$ a procházející bodem $(x(t),y(t))$. Navíc $\Theta_1(t)$, $\Theta_1(t)$ pro dosti velká t protnou kružnici M. Řešení je tedy mezi přímkami $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$ a kružnicí M, označme tuto množinu $\Delta(t)$. Z Lemmatu 1 existuje $\rho > 0$ takové, že řešení opustí $U((p,q),\rho)$. Ale pro $n \in \mathbb{N}$ dosti velké, je $t_n > t_2$ a zároveň $(x(t_n),y(t_n))$ je libovolně blízko bodu (p,q) a proto $\Delta(t) \subset U((p,q),\rho)$. Což je spor.

□

Poznámka. V předešlé větě místo předpokladu, aby funkce f byla odražená od nuly na $(\mathbb{R} \setminus U(0,\delta_2)) \times (t_0, +\infty)$, lze důkaz obdobně provést i za slabšího předpokladu a to, že pro každý kompakt K neobsahující nulu, existuje t_0 taková, že je funkce f odražená od nuly na každé množině $K \times (t_0, +\infty)$.

Pro pohodlnější ověření podmínky z předešlé poznámky nám poslouží následující lemma.

Lemma 3. *Nechť existuje $\eta \in C(\mathbb{R})$, $\eta > 0$ taková, že pro všechna $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $\lim_{(\mu,t)\to(\lambda,+\infty)} f(\lambda,t) \geq \eta(\lambda)$. Pak pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}$ neobsahující nulu existuje $t_0, \eta_K > 0$, tak že pro všechna $t > t_0$ a $\lambda \in K$ je splněno*

$$f(\lambda,t) > \eta_K.$$

Důkaz. Buď $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní množina neobsahující nulu. Ze spojitosti a nenulovosti η na kompaktu K existuje η_K takové, aby

$$\min_{\lambda \in K}\{\eta(\lambda)\} =: 2\eta_K > 0.$$

Z definice limity pro každé $\lambda \in K$ existuje $\mathfrak{U}(\lambda,\delta,t_0)$, tak, že pro všechny $(\mu,t) \in \mathfrak{U}(\lambda,\delta_\lambda,t_\lambda)$ je

$$f(\mu,t) > \eta_K.$$

Dále definujme

$$\Omega_K := \bigcup_{\lambda \in K} U(\lambda,\delta_\lambda).$$

Tedy je $K \subset \Omega_K$. Protože K je kompaktní, tak existuje konečné podpokrytí. Nechť je to $\bigcup_{n=1}^{N} U(\lambda_n,\delta_n)$. Protože toto sjednocení je konečné, tak existuje $\max_n\{t_{\lambda_n}\} := t_0$. Tedy pro všechny dvojice $(\lambda,t) \in K \times (t_0, +\infty)$ je

$$f(\lambda,t) \geq \eta_K.$$

$\square$

Nyní vyjdeme z věty [2, Theorem 5.6.], která zaručuje existenci pozitivně invariantní množiny pro autonomí rovnici (2). V následující větě ukážeme, že pozitivně invariantní množiny rovněž existují i pro námi studovanou rovnici (1). Ovšem zde budeme muset zavést slabší defінci pozitivně invariantních množin existujících pouze pro velké časy.

Definice 2. *Buď $t_0 \in \mathbb{R}$. Pak množinu množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ nazveme pozitivně invariantní pro $t > t_0$, pokud pro všechna řešení $(x(t),y(t))$ soustavy (1.8),(1.9) a všechna $t_1 > t_0$ takové, že $(x(t_1),y(t_1)) \in M$. Platí $(x(t),y(t)) \in M$ pro všechna $t > t_1$.*

Oznamčme navíc nyní $L := \frac{c(\beta+2)}{(\beta+1)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}}$

Věta 4. *Nechť existuje $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$, takové, že pro všechny $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ platí*

$$\frac{f(\lambda,t)}{|\lambda|^{\frac{\beta}{\beta+2}}} > L.$$

Pak existují K, t_0, $\delta > 0$, takové, že množina

$$S^+_{\delta,K} := \left\{(x,y) : \left|\frac{y}{x}\right| < K, xy < 0, x > 0, x^2 + y^2 < \delta^2\right\},$$

respektive

$$S^-_{\delta,K} := \left\{(x,y) : \left|\frac{y}{x}\right| < K, xy < 0, x < 0, x^2 + y^2 < \delta^2\right\}$$

je pro všechna $t > t_0$ pozitivně invariantní.

Důkaz. Tvrzení dokáži nejdříve pro množinu $S^-_{\delta,K}$. Máme vztah $x^2 + y^2 = 2E(t)$ a derivováním dostáváme

$$E'(t) = -f(y,t)y^2 \le 0 \tag{1.13}$$

A proto pokud řešení je pro nějaký čas $t_1 \in (0,+\infty)$ v $U(0,\delta_1)$, pak pro všechna $t \ge t_1$ řešení toto okolí neopustí. Buď K, $\lambda > 0$, pak

$$F(-\lambda,K\lambda,t) = (c|\lambda|^{\frac{\beta}{\beta+2}}K\lambda, -f(K\lambda,t)K\lambda + c|\lambda|^{\frac{\beta}{\beta+2}}\lambda)$$

Proto

$$\frac{F_2(-K\lambda,\lambda,t)}{F_1(-K\lambda,\lambda)} = \frac{1}{K} - \frac{K^{\frac{\beta}{\beta+2}}f(K\lambda,t)}{c(\lambda K)^{\frac{\beta}{\beta+2}}}.$$

A z toho $\frac{F_2(-K\lambda,\lambda)}{F_1(-K\lambda,\lambda)} \le -K$ právě tehdy, když

$$\frac{f(K\lambda,t)}{(\lambda K)^{\frac{\beta}{\beta+2}}} \ge c\left(\frac{K^2+1}{K^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}}\right)$$

Položíme-li $K^2 := (\beta+1)$, tak dostaneme

$$c\left(\frac{K^2+1}{K^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}}\right) = c\left(\frac{\beta+2}{(\beta+1)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}}\right) = L$$

Navíc z předpokladu existuje $\mathfrak{U}(0,\delta,t_2)$, kde $\delta \leq \delta_1$ tak, že pro všechna $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_2)$ platí

$$f(-\lambda,t)|\lambda|^{\frac{-\beta}{\beta+2}} > L.$$

A tedy pro $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_2)$ platí

$$\frac{F_2(-K\lambda,\lambda,t)}{F_1(-K\lambda,\lambda)} \leq -K.$$

Proto na úsečce $\{(-\lambda,K\lambda),\lambda \in (0,\delta)\}$ pro $t > t_2$ bude řešení směřovat do $S^-_{\delta,K}$. Z jednoznačnosti řešení pak řešení touto úsečkou množinu $S^-_{\delta,K}$ neopustí.
Pro dokázání tvrzení zbývá ověřit, že řešení z $S^-_{\delta,K}$ pro neprotne úsečku $\{(\lambda,0) : \lambda \in (-x,0)\}$. To je ovšem zřejmé z faktu, že pro všechna $x \in (-\delta,0)$ a všechna $t > 0$ je $F_2(x,0,t) = -c|x|^{\frac{\beta}{\beta+2}}x > 0$.
Celkem tedy vidíme, že řešení nemůže opustit $S^-_{\delta,K}$ pro všechna $t \in (t_0,\infty)$, kde $t_0 := \max\{t_1,t_2\}$, čímž je důkaz pro $S^-_{\delta_1,K_1}$ dokončen.
Pro množinu $S^+_{\delta_1,K_1}$ tvrzení převedeme na předchozí případ pomocí souřadnic

$$x(t) = -\overline{x}(t), \quad y(t) = -\overline{y}(t).$$

Tak dostaneme soustavu rovnic

$$\overline{x}'(t) = c|\overline{x}(t)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}\overline{y}(t)$$

$$\overline{y}'(t) = -\overline{f}(\overline{y}(t),t)\overline{y}(t) - c|\overline{x}(t)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}\overline{x}(t),$$

kde $\overline{f}(y,t) = f(-y,t)$ pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$. Tedy dostáváme stejnou rovnici, kde místo funkce f vystupuje $\overline{f}$, která má stejné vlastnosti.

□

Poznámka. V důkazu jsme položili $K := \beta+1$, neboť v tomto bodě nabývá funkce

$$\frac{K^2+1}{K^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}}$$

svého minima a tedy lepší výsledek takto nelze získat.

V další větě ukážeme, že za předpokladů zajišťující konvergenci energie k nule a existenci pozitivně invariantních množin z Věty 4 se znaménko řešení rovnice (1) změní pouze konečněkrát. Ideou důzaku je ukázet, že řešení rovnic (1.8), (1.9) nemůže měnit své znaménko pro libovolně velké časy, neboť by muselo skončit v pozitivně invariantní množině.

Věta 5. *Nechť existuje $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$, takové, že pro všechny $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$ platí $f(\lambda,t)|\lambda|^{\frac{-\beta}{\beta+2}} > L$, dále nechť existuje okolí $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ a $C_1 > 0$ takové, že $f \leq C_1$ na $\mathfrak{U}(0,\delta_1,t_1)$ a nechť pro všechna $\delta_2 > 0$ existuje C_2, $t_2 > 0$ takové, že $f \geq C_2$ na $(\mathbb{R} \setminus U(0,\delta_2)) \times (t_0,+\infty)$. Pak řešení u rovnice (1) a u' změní své znaménko pouze konečněkrát.*

Důkaz. Z Věty 4 existují $S^+_{\rho_1,K_1}$ a $S^-_{\rho_2,K_2}$. Definujme $\rho := \min\{\rho_1,\rho_2\}$.
Z Věty 2 existuje $\tau_0 > 0$, takové, že pro všechna $t > \tau_0$ je řešení v $(x(t),y(t)) \in U_2(0,\rho)$.
Předpokládejme, že $y(t_0) \geq 0$ (pro opačnou nerovnost je důkaz analogický). Pak dokud $y > 0$ je i $x' > 0$. Nechť nejprve je $x(\tau_0) > 0$, pak nutně existuje τ_1 tak, že $y(\tau_1) = 0$. Ale neboť $F_2(x,0,t) < 0$, pak

$$(x(t),y(t)) \in S^+_{K_1,\rho_1}$$

pro $t \in (\tau_1,\tau_1 + \varepsilon)$ a z Věty 4 nemůže tuto množinu opustit pro všechna $t > \tau_1$. Tedy $u(t)$ a $u'(t)$ nezmění znaménko pro všechna $t > \tau_1$. Pokud je $x(\tau_0) \leq 0$, pak řešení neprotne přímku $\{(-\lambda,0), \lambda \in (0,\rho)\}$. Tedy buď u ani u' nezmění znaménko, a nebo existuje $\tau_2 \geq \tau_0$ tak, že $x(\tau_2) = 0$ a v takovém případě u' a u změní znaménko pouze jednou a podle předchozího kroku řešení skončí v $S^+_{K,\rho}$. Čímž je důkaz proveden.

$\square$

2. Rychlost konvergence neoscilujících řešení

V této kapitole se budeme zabývat chováním řešení pro $t \to +\infty$, pro případ, kdy

$$f(-\lambda,t)|\lambda|^{\frac{-\beta}{\beta+2}} > L,$$

na nějakém $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$, což jak jsme ukázali v první kapitole je případ, kdy se oscilace kolem počátku zastaví v konečném čase.

Nyní využijeme existejci řešení v pozitivně invariantních množinách z Věty 4. Tím získáme vztah mezi u a u'. Pomocí toho dotaneme odhad na rychlost konvergence řešení u zdola funkcí $t^{-\frac{2}{\beta}}$. Poté budeme uvažovat případ, kdy $f(y,t) \leq |y|^\alpha G_2$ na nějakém $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$, kde α a G_2 jsou kladné konstanty. Zde využijeme toho, že řešení se v takovémto případě nemůže pohybovat blízko osy x pro velké časy a tím získýme odhad na $|u|$ z druhé strany.

Věta 6. *Nechť existuje $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$, takové, že pro všechny $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$ platí $f(-\lambda,t)|\lambda|^{\frac{-\beta}{\beta+2}} > L$. Pak existuje řešení u rovnic (1) a existují t_1, $C_1 \in (0,\infty)$ tak, že pro všechna $t > t_1$ platí*

$$|u(t)| \geq C_1 t^{-\frac{2}{\beta}}.$$

Pokud navíc existují G_2, $\alpha \in (0,+\infty)$ a $\mathfrak{U}(0,\rho,\tau)$ tak, aby pro všechna $(y,t) \in \mathfrak{U}(0,\rho,\tau)$ platilo

$$f(y,t) \leq |y|^\alpha G_2,$$

pak existuje $C_2 \in \mathbb{R}$ a $t_2 > 0$ tak, že pro všechna $t > t_2$ je

$$|u(t)| \leq C_2 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta+\alpha}}.$$

Důkaz. Víme, že existuje pro $t > \tau_0$ pozitivně invariantní množina $S^-_{\delta,K}$. Tedy každé řešení (x,y) splňující $(x(t_0),y(t_0)) \in S^-_{\delta,K}$ pro $t_0 > \tau_0$ splňuje pro všechna $t > t_0$ nerovnici $\frac{-y(t)}{x(t)} < K$. Neboli

$$\frac{-u'(t)}{cu^{\frac{\beta+2}{2}}(t)} < K$$

Z toho integrací od t_0 do $t > t_0$ a substitucí dostáváme

$$-\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{ds}{s^{\frac{\beta+2}{2}}} < cK(t-t_0)$$

to jest

$$\frac{\beta}{2}|u(t)|^{-\frac{\beta}{2}} < cK(t-t_0) + \frac{\beta}{2}u(t_0)^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Tedy jistě existuje $C_1 > 0$ taková, že

$$|u(t)| \geq C_1 t^{-\frac{2}{\beta}}.$$

Čímž je první část věty dokázána.
Nechť $f(y,t) \leq |y|^\alpha G_2$ na $\mathfrak{U}(0,\rho,\tau)$ a (x,y) řešení rovnice (1) splňující

$((x(t_0)),(y(t_0))) \in S^-_{\delta_0,K}$ pro $t_0 \geq \max\{\tau,\tau_0\}$, kde $\delta_0 := \min\{\delta,\rho\}$. Z rovnice získáme, že pro $t > t_0$ je $y'(t) > 0$ právě tehdy, když

$$f(y(t),t)y < |x(t)|^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}.$$

Navíc pokud

$$(x,y) \in \{(x,y) : yG < -x^{\frac{2(\beta+1)}{(\beta+2)(\alpha+1)}}, \quad y \in (-\rho,\rho)\},$$

kde $G = G_2^{\frac{1}{\alpha+1}}$, pak je $F_2(x,y,t) > 0$ pro všechna $t > t_0$.
Proto pro řešení (x,y) nutně existuje $t_1 \geq t_0$ tak, že pro všechna $t > t_1$ je splněno

$$yG > -x^{\frac{2(\beta+1)}{(\beta+2)(\alpha+1)}}.$$

Z čehož pro všechna $t > t_1$ dostáváme

$$G^{-1} < \frac{y}{-x^{\frac{2(\beta+1)}{(\beta+2)(\alpha+1)}}} = \frac{u'}{-Cu^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}},$$

kde $C = c^{\frac{2(\beta+1)}{(\beta+2)(\alpha+1)}} > 0$. A po integraci pravé strany nerovnice od t_1 do $t \in (t_1, +\infty)$ máme

$$\int_{t_1}^{t} \frac{u'(t)}{-Cu^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}(t)}dt = \int_{u(t_1)}^{u(t)} \frac{ds}{-Cs^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}(t)} = \overline{C}(u^{-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}(t) - u^{-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}(t_1)),$$

kde $\overline{C} > 0$ .Proto dostáváme nerovnost

$$G^{-1}(t - t_1) \leq \overline{C}(u^{-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}(t_1) - u^{-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}(t)),$$

což je po úpravě

$$|u| \leq ((L_1 t + L_2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-\beta}},$$

kde $L_1 = \frac{\overline{C}}{G}\frac{\alpha+1}{\beta-\alpha} > 0$ a $L_2 = \frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}u(t_1)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}} - t_1\frac{\overline{C}}{G}$. Tedy existují $t_2 > t_1$ a $C_2 \in (0, +\infty)$, takové že pro všechna $t_2 > t_1$ je splněno

$$u(t) \leq C_2 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}}$$

$\square$

Nyní budeme směřovat k zobecnění věty [1, Theorem 3.4], která zaručí existenci „rychlého“ neoscilujícího řešení. To jest takového řešení, které splňuje $|u| \leq Ct^{-\frac{2}{\beta}}$. K tomu budeme potřebovat následující lemmata.

Lemma 7. *Nechť* $t_0 \in \mathbb{R}$, $g,h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x(t_0) \leq y(t_0)$ *a*

$$x' = g(x,t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y' = h(y,t), \quad y(t_0) = y_0,$$

kde g,h *jsou lokálně lipschitzovské funkce v* x *a* $g(x,t) \leq h(x,t)$, *pro všechna* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [t_0, +\infty)$. *Pak* $x(t) \leq y(t)$ *pro všechna* $t \in [t_0,\infty)$, *kde* $x(t)$ *a* $y(t)$ *jsou řešení příslušných Cauchyových úloh.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Tedy předpokládejme, že existuje $t_1 > t_0$, takové, že $x(t_1) > y(t_1)$. Ze spojitosti a jednoznačnosti pak nutně existuje $t_2 < t_1$ takový, že $x(t_2) = y(t_2)$ a na $(t_2,t_2+\delta)$ je $x(t) > y(t)$ pro nějaké $\delta > 0$. Avšak na druhou stranu z předpokladu platí $x'(t_2) \leq y'(t_2)$, což dává spor.

□

Nyní uvažujme normované prostory

$$X := \{u \in C[1,\infty) : t^{\frac{1}{\alpha}}u(t) \in L^\infty([1,\infty))\}$$

s normou

$$\| u \|_X := \sup_{t\geq 1} |u(t)t^{\frac{1}{\alpha}}|$$

a

$$Y := \{u \in C[1,\infty) : t^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}u(t) \in L^\infty_{([1,\infty))}\}$$

s normou

$$\| u \|_Y := \sup_{t\geq 1} |u(t)t^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}|.$$

Lemma 8. *Nechť existuje $g \in C(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$ a $G_1 \in (0,+\infty)$ splňující pro všechna $(y,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$*

$$G_1 \leq g(y,t), \quad f(y,t) = |y|^\alpha g(y,t),$$

kde $\alpha < \frac{\beta}{\beta+2}$. Nechť $h \in Y$, pak řešení úlohy

$$v' + f(v,t)v = h$$

$$|v(1)| \leq G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad \| h \|_Y \leq G \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

splňuje

$$\| v \|_X \leq G \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

kde $G := G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha}$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $h, v(1) \geq 0$. Definujme

$$w := G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}} > 0.$$

Pak dostáváme $w(1) = G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ a

$$w' + G_1|w|^\alpha w = -G\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}-1} + G_1^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}+1} t^{-\frac{1}{\alpha}-1} = G\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Využitím nerovnosti

$$h(t) \leq t^{-\frac{1}{\alpha}-1} \| h \|_Y \leq t^{-\frac{1}{\alpha}-1} G \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

dostáváme následující odhad

$$w' = G\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}-1} - G_1|w|^\alpha w \geq h - G_1|w|^\alpha w \geq h - f(w,t)w.$$

A jelikož $v(1) \geq G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = w(1)$, tak podle předešlého lematu pro všechna $t > 1$ dostáváme, že $w(t) \geq v(t)$, což dokazuje lemma.

□

V této větě ukážeme existenci řešení, pro která platí $|u| \leq C_1 t^{-\frac{1}{\alpha}+1}$. A protože navíc $\frac{1}{\alpha} + 1 > \frac{2}{\beta}$, tak takováto řešení mají rychlejší úbytek energie než řešení z věty 6. Proto takováto řešení nazveme „rychlá“.

Věta 9. *Nechť existuje $g \in C(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ a $G_1 \in (0,+\infty)$ splňující pro všechna $(y,t) \in \mathbb{R} \times (0, + \infty)$*

$$G_1 \leq g(y,t), \quad f(y,t) = |y|^\alpha g(y,t),$$

kde $\alpha < \frac{\beta}{\beta+2}$. Pak existuje řešení $u > 0$ a C_1,C_2 splňující

$$|u| \leq C_1 t^{-\frac{1}{\alpha}+1}, \quad |u'| \leq C_1 t^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Důkaz. Definujme operátor κ definovaný na $L^1([1,\infty))$ předpisem

$$\forall u \in L^1([1,\infty)), \forall t \in [1,\infty), \kappa(u)(t) = \left|\int_t^\infty u(s)ds\right|^\beta \int_t^\infty u(s)ds$$

Buď nyní $u \in X$, pak

$$|\kappa(u)(t)| = \left|\int_t^\infty u(s)ds\right|^{\beta+1} = \left|\int_t^\infty u(s)s^{\frac{1}{\alpha}}s^{-\frac{1}{\alpha}}ds\right|^{\beta+1}$$

$$\leq \left|\int_t^\infty \| u \|_X \, s^{-\frac{1}{\alpha}}ds\right|^{\beta+1} = C \| u \|_X^{\beta+1} \, t^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\beta+1)},$$

kde $C = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+1}$. Navíc z předpokladů dostáváme, že $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(\beta + 1) > 1+\frac{1}{\alpha}$, čímž dostáváme

$$\forall u \in X, \quad \| \kappa(u) \|_Y \leq \| u \|_X^\beta .$$

Nyní definujme $\delta := G_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ a zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby

$$\varepsilon C\delta < \frac{1}{\alpha}\delta.$$

Dále zavedeme operátor $\tau : \mathbb{R} \times L^1([1,\infty)) \to C^2([1,\infty))$, který každému $u \in L^1([1,\infty))$ a $z_1 > 0$ přiřadí řešení následující Cauchyovy úlohy

$$z' + f(z,t)z = \varepsilon\kappa(u); \quad z(1) = z_1$$

Dle lemmatu 8 dostáváme, že $\tau(U(\delta),U_X(\delta)) \subset U_X(\delta)$, kde $U_X(\delta)$ je koule v prostoru X o poloměru δ.
Uvažujme posloupnost $\{v_n\}_1^\infty$, definovanou rekurentně

$$v_1 = \tau(0,z_1), \quad v_{n+1} = \tau(v_n,z_1).$$

Z jednoznačnosti řešení dostáváme, že $v_1 > 0$, z toho je jasné, že $v_1' < 0$ a $v_1 \in U_X(\delta)$.
Ukážeme, že posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Buďte $x,y \in L^1([1,\infty))$ takové, že $x(t) \leq y(t)$, máme pro všechna $t \in [1,\infty)$, pak $\kappa(x)(t) \leq \kappa(y)(t)$. Z tohoto vidíme, že operátor κ je rostoucí. Z lemmatu 7 indukcí máme skutečně $v_n \leq v_{n+1}$. Protože $v_n \in U_X(\delta)$, tak je posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená funkcí z X, která je integrovatelná, neboť to znamená že pro skoro všechna $t \in (1, +\infty)$ jsou $v_n \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}$, přičemž $\alpha < 1$. Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varepsilon\kappa(v_n) < +\infty \tag{2.1}$$

a proto v_n' jsou stejně omezené a v_n konvergují lokálně stejnoměrně. Poté ze spojitosti f a záměnou limity a integrálu $v := \lim_{n\to+\infty} v_n$ řeší rovnici

$$v' + f(v,t)v = \varepsilon\kappa(v) \quad v(1) = z_1. \tag{2.2}$$

Nyní proveďme substituci pro všechna $t > 0$

$$u(t) = \int_{1+t}^{+\infty} v(s).$$

Protože $v > 0$, tak i $u > 0$ a derivováním dostáváme

$$u'(t) = -v(t+1) + \lim_{t\to+\infty} v(t).$$

Ale $v \in L^1(0, +\infty)$ a je monotóní, tak limita výše je rovná nule. A z toho

$$u'(t) = -v(t+1), \quad u''(t) = -v'(t+1).$$

Což po dosazení do vztahu 2.2 dává

$$-u'' - f(u',t)u' = \varepsilon|u|^{\beta}u$$

Protože je $v \in X$, pak existuje $C,C_1,C_2 > 0$ takové, že

$$|u(t)| \leq -\int_{1+t}^{+\infty} Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \leq C_1 t^{-\frac{1}{\alpha}+1},$$

$$|u'(t)| = |v(t+1)| \leq C_2 t^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Poté nahradíme $u(t)$ za $k\overline{u}(mt)$, pro vhodné konstanty k, $m > 0$ tak, aby

$$\overline{u}'' + |\overline{u}'|^{\alpha} g(km\overline{u}',t)\overline{u}' + |\overline{u}|^{\beta}\overline{u} = 0,$$

provedme-li důkaz znovu s $\overline{g}$ definovanou předpisem

$$\overline{g}(u',t) = g(\frac{u'}{mk},t),$$

která má stejné vlastnosti jako g, tak je důkaz hotov.

$\square$

3. Oscilující řešení

V této části se budeme věnovat případu, kdy se oscilace nezastaví. K důkazu tohoto tvrzení budeme nejdříve potřebovat Lemma, které nám dá odhad energie.

Lemma 10. *Nechť existuje* $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$*, takové, že pro všechny* $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$ *platí* $f(\lambda,t)|\lambda|^{-\frac{\beta}{\beta+2}} < K$*. Nechť* $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$*. Pak existuje* t_0*,* $C > 0$ *tak, že pro všechna* $t > t_0$ *máme*

$$E(t) \geq Ct^{-\frac{2(\beta+2)}{\beta}}. \tag{3.1}$$

Důkaz. Z předpokladu dostáváme existenci K, t_1, $\delta > 0$ tak, že pro všechny dvojice $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_1)$ platí

$$\frac{f(\lambda,t)}{\lambda^{\frac{\beta}{\beta+2}}} < K$$

Z faktu, že $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$, existuje $t_2 > 0$ takové, že pro všechna $t > t_2$ je $|y(t)| < \delta$. A proto pro všechna $t > t_0 := \max\{t_1,t_2\}$ je

$$E' = -f(y,t)y^2 = -|y|^{\frac{\beta}{\beta+2}+2}\frac{f(y,t)}{|y|^{\frac{\beta}{\beta+2}}} \geq -K|y|^{\frac{\beta}{\beta+2}+2}.$$

Ze vztahu $E = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ máme následující nerovnost pro všechna $t > 0$

$$2E \geq y^2.$$

A tedy

$$E' \geq -KE^{\frac{\beta}{2(\beta+2)}+1}. \tag{3.2}$$

Integrací od t_0 do $t > t_0$ této nerovnosti získáme

$$\int_{t_0}^{t} -\frac{E(t)'}{E(t)^{\frac{\beta}{2(\beta+2)}+1}} = (\frac{\beta}{2(\beta+2)})(E(t)^{\frac{-\beta}{2(\beta+2)}} - E(0)^{\frac{-\beta}{2(\beta+2)}}) \leq K(t-t_0).$$

Proto jistě existuje $C > 0$ taková, že

$$E(t) \geq Ct^{-\frac{2(\beta+2)}{\beta}}.$$

□

Následující věta je založna na větě [1, Theorem 2.1.], která dokazuje postačující podmínku pro neutlumení kmitů. V důkazu bude třeba zavést polární souřadnice, pomocí kterých získáme vhodné odhady na rychlost rotace řešení kolem počátku.

Věta 11. *Nechť existuje* $\mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$*, takové, že pro všechny* $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_0)$ *platí* $f(\lambda,t)|\lambda|^{-\frac{\beta}{\beta+2}} < c$*. Pak každé řešení* u *a* u' *změní znaménko nekonečněkrát.*

Důkaz. Nechť nejprve $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$.
Buď (x,y) řešení rovnic (1.8),(1.9) a $t_0 \in (0,+\infty)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že řešení v čase t_0 je ve druhém nebo třetím kvadrantu. Pro spor předpokládejme, že tyto kvadranty neopustí. Uvažujme polární souřadnice (jdoucí po směru hodinových ručiček)

$$x(t) = -r(t)\cos(\theta(t)), \quad y(t) = r(t)\sin(\theta(t)).$$

Dosazením do vztahů (1.8),(1.9) dostaneme rovnice

$$-r'\cos(\theta) + r\theta'\sin(\theta) = cr^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}|\cos(\theta)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}\sin(\theta),$$

$$r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = -f(r\sin(\theta),t)r\sin(\theta) + cr^{\frac{\beta}{\beta+2}+1}|\cos(\theta)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}\cos(\theta).$$

Po úpravě získáme rovnost

$$\theta' = cr^{\frac{\beta}{\beta+2}}|\cos(\theta)|^{\frac{\beta}{\beta+2}} - f(r\sin(\theta),t)\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{3.3}$$

Dále máme odhad

$$|f(r\sin(\theta),t)\sin(\theta)\cos(\theta)| \le \left|\frac{f(r\sin(\theta),t)}{r^{\frac{\beta}{\beta+2}}\sin(\theta)^{\frac{\beta}{\beta+2}}}\right| |\cos(\theta)r^{\frac{\beta}{\beta+2}}|.$$

Navíc víme, že existuje $\mathfrak{U}(0,\delta,t_1)$, kde $t_1 > t_0$ takové, že pro všechny $(\lambda,t) \in \mathfrak{U}(0,\delta,t_1)$ platí $f(\lambda,t)|\lambda|^{-\frac{\beta}{\beta+2}} < c$. Protože $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$, tak existuje $t_2 > t_1$ tak, aby pro $t > t_2$ byl $r\sin(\theta) < \delta$. Tedy z tohoto a z faktu, že $|\cos(\theta)|^{\frac{\beta}{\beta+2}} \ge |\cos(\theta)|$ existuje $C > 0$, tak že lze pro všechna $t > t_2$ odhadnout (3.3) jako

$$\theta' \ge Cr^{\frac{\beta}{\beta+2}}|\cos(\theta)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}. \tag{3.4}$$

Protože $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$, tak dle předešlého lematu existuje $t_3 > t_2$, tak že pro všechna $t > t_3$ platí

$$\frac{1}{2}r^2(t) = E(t) \ge K_1 t^{-\frac{2(\beta+2)}{\beta}}.$$

A dosazením této nerovnosti do (3.4) získáváme pro $t > t_3$ odhad

$$\theta' \ge K|\cos(\theta(t))|^{\frac{\beta}{\beta+2}}t^{-1}.$$

Z faktu, že $\theta'(t) > 0$ pro všechna $t > t_3$, tak $\lim_{t\to+\infty}\theta(t)$ existuje. Označme ji θ_0 a platí $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Integrováním od t_3 do $+\infty$ dostaneme

$$\int_{t_3}^{+\infty} \frac{\theta'(t)}{|\cos(\theta(t))|^{\frac{\beta}{\beta+2}}}dt = \int_{\theta(t_3)}^{\theta_0} \frac{ds}{|\cos(s)|^{\frac{\beta}{\beta+2}}} \ge \int_{t_3}^{+\infty} Kt^{-1}dt.$$

Což je spor, neboť integrál napravo diverguje a nalevo konverguje. Celkem tedy musí řešení opustit každý kvadrant v konečném čase po směru hodinových ručiček. To dává, že x rep. y musí změnit znaménko na každém intervalu $[\tau,+\infty)$. Ale z definice souřadnic (1.4), (1.5), je zřejmé, že $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(u)$ a $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(u')$, tedy je důkaz pro případ $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$ hotov.
Nechť $\lim_{t\to+\infty} E(t) > 0$. Pak je z předpokladu zřejmé, že i předpoklady Lemmatu 1 jsou splněny, tedy řešení soustavy nemůže konvergovat k žádnému bodu. Z rozboru znamínek pro x' a monotonie energie je poté zřejmé, že řešení musí opustit každý kvadrant po směru hodinových ručiček.

$\square$

Závěr

V této práci jsme dospěli k výsledku, že pokud tlumení oscilátoru závisí i na čase, tak dokážeme v mnohých případech dosáhnout stejných, nebo podobných výsledků jako v článku [1]. Podstatným problémem však bylo zajistit konvergenci řešení k počátku, což pro rovnici (2) bylo splněno automaticky.
Nejpodstatnějším kritériem chování řešení rovnice (1) se ukázalo srovnání funkcí $f(\lambda,t)$ a $\lambda^{\frac{\beta}{\beta+2}}$ pro velké časy a λ blízké nuly. Což koresponduje se srovnáváním α s $\frac{\beta}{\beta+2}$ v čláknku [1].

Seznam použité literatury

[1] Alain Haraux. Sharp decay estimates of the solutions to a class of nonlinear second order ode's. *Analysis and applications*, 9(01):49–69, 2011.

[2] Mama Abdelli and Alain Haraux. Global behavior of the solutions to a class of nonlinear, singular second order ode. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 96:18–37, 2014.