MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Langr

Lipschitzovsky volné prostory

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Cúth Marek, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor: Matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Mé poděkování patří v první řadě mé snoubence, která mě neúnavně podporovala při psaní této práce a mému vedoucímu, který si na mě vždy vyhradil čas a vše mi s velkou ochotou a trpělivostí vysvětloval. Děkuji.

Název práce: Lipschitzovsky volné prostory

Autor: Ondřej Langr

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Cúth Marek, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme základními vlastnostmi „Lipschitzovsky volných prostorů“. V první části především ukazujeme, jak jsou tyto prostory zkonstruovány a ukazujeme, že jsou charakterizovány vlastností, které říkáme Univerzální vlastnost. Ve druhé části se pak zaobíráme normou na těchto prostorech a podáváme explicitní vzorec pro výpočet normy prvku v obecném Lipschitzovsky volném prostoru, který vznikne z čtyřbodového metrického prostoru. Zda se, že tento vzorec není nikde publikován a jedna se tak pravděpodobně o originální výsledek této práce.

Klíčová slova: Banachův prostor Lipschitzovská funkce Lipschitzovsky volné prostory

Title: Lipschitz-free spaces

Author: Ondřej Langr

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Mgr. Cúth Marek, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this work we deal with basic properties of Lipschitz-free space. In the first part we especially show how these spaces are constructed and we show that they are characterized by "Universal property". In the second part we give an explicit formula for the calculation of the norm of an element in the general Lipschitz-free space over metric space containing four points. It looks that this formula is nowhere published, therefore this is probably the original result of this work.

Keywords: Banach space Lipschitz function Lipschitz-free spaces

Obsah

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{R}$ .... reálná čísla
$\mathbb{R}^+$ .... interval $(0,\infty)$
$\mathbb{R}_0^+$ .... interval $[0,\infty)$
$\mathbb{N}$ .... přirozená čísla
$Y \subset\subset X$ .... Y je vektorový podprostor vektorového prostoru X
$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ .... posloupnost prvků x_n z prostoru X
$\operatorname{span} M$ .... množina lineárních kombinaci prvků z množiny M
X^* .... duální prostor, neboli prostor všech omezených lineárních funkcionálů na X
$B_X(r)$ .... $\{x \in X : \ \|x\| \leq r\}$ uzavřená koule v prostoru X o poloměru r.

Úvod

V této práci zkoumáme základní vlastnosti *Lipschitzovsky-volných prostorů*. Jedná se zajímavou třídu Banachových prostorů, které jsou zkonstruovány z prostorů metrických. V roce 2003 se objevil článek [1], ve kterém bylo pomocí této konstrukce dokázáno několik zajímavých výsledků z oblasti nelineární geometrie Banachových prostorů. Za všechny zmiňme výsledek, že kdykoliv se separabilní Banachův prostor vnoří izometricky (a třeba i nelineárně) do jiného Banachova prostoru, pak se do tohoto Banachova prostoru vnoří také pomocí izometrie, která je navíc lineární [1, Corollary 3.3]. Tento článek ovlivnil mnoho matematiků, kteří začali tuto třídu prostorů aktivně studovat – jako argument pro toto tvrzení můžeme uvést citace článku [1] na MathSciNetu (kterých je více než 80).

V předložené práci popisujeme konstrukci *Lipschitzovsky volného prostoru* a dokazujeme jejich základní vlastnosti, zejména pak podrobně ukazujeme, že tyto prostory jsou jednoznačně určeny pomocí jisté vlastnosti, které zde říkáme „Univerzální vlastnost“. Tyto výsledky nejsou nové, jedná se víceméně o klasické postupy doplněné o detaily, které v odborné literatuře často chybí. V závěru práce se pak zaobíráme tím, jakým způsobem se dá počítat norma prvku v tomto Banachově prostoru. Zmiňujeme vzoreček pro výpočet normy zahrnující infimum (což není nové). Na samý závěr práce pak jeho použití ukazujeme na prvcích vzniklých lineární kombinací až tří prvků z $\delta(M)$, což je výsledek vzniklý z konzultací s vedoucím práce.

Kompilační část práce je inspirovaná článkem [2] (pokud není řečeno jinak).

1. Základní vlastnosti Lipschitzovsky-volných prostorů

Z neprázdného metrického prostoru (M,ρ) budeme postupně budovat Lipschitzovsky volný prostor, proto si nejprve definujeme prostor $\mathrm{Lip}_m(M)$ a ukážeme si nějaké jeho základní vlastnosti, poté z něj vybudujeme Lipschitzovsky-volný prostor a ukážeme nějaké jeho vlastnosti.

Úmluva 1. Všechny metrické prostory, se kterými budeme pracovat uvažujme neprázdné.

Definice 1 (Lipschitzovská funkce)**.** Mějme (M,ρ) a (N,σ) metrické prostory a $K > 0$. O funkci $f : M \to N$ řekneme, že je K-*Lipschitzovská*, pokud pro každé dva body $x,y \in M$ platí, že $\sigma(f(x),f(y)) \leq K\rho(x,y)$.

O funkci řekneme, že je *Lipschitzovská*, jestliže je K-Lipschitzovská pro nějaké $K > 0$. Množinu všech Lipschitzovských funkcí z (M,ρ) do (N,σ) označme $\mathrm{Lip}(M,N)$.

Definice 2. Mějme (M,ρ) a (N,σ) metrické prostory. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}} : \mathrm{Lip}(M,N) \to (0,\infty)$ předpisem:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup\left\{\frac{\sigma(f(x),f(y))}{\rho(x,y)} : \ x,y \in M, x \neq y\right\}.$$

Speciálně pro $(N,\sigma) = (\mathbb{R},|\cdot|)$ máme:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)} : \ x,y \in M, x \neq y\right\}.$$

Zvolme v M libovolný bod a označme ho m. Množinu všech Lipschitzovských funkcí z metrického prostoru M do $\mathbb{R}$, které nabývají v bodě m nuly označme:

$$\mathrm{Lip}_m(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : \ f \text{ je Lipschitzovská } \& \ f(m) = 0\}.$$

Poznámka 1. Někdy se místo $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ užívá značení $L(f)$, pro $f \in \mathrm{Lip}(M,N)$.

Poznámka 2. V následující větě budeme chtít dokázat, že $\mathrm{Lip}_m(M)$ je *Banachův prostor*. Kdybychom nepožadovali $f(m) = 0$, pak bychom měli *pseudometrický prostor*, tj $\|a\| = 0 \not\Rightarrow a = 0$.

Lemma 1 (Kritérium úplnosti)**.** *Mějme X normovaný vektorový prostor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*

(i) X je úplný

(ii) Kdykoliv $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z X splňující, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X, tj. existuje $x \in X$ že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Důkaz. Důkaz se standartně přednáší v kurzu „Úvod do funkcionální analýzy“ na MFF. □

Věta 2. $(\mathrm{Lip}_m(M), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ *je Banachův prostor.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\mathrm{Lip}_m(M)$ je vektorový prostor. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f,g \in \mathrm{Lip}_m(M)$. Chceme ukázat, že $\alpha f + g \in \mathrm{Lip}_m(M)$.

Pro každé $x, y \in M$ máme $|\alpha f(x) + g(x) - \alpha f(y) - g(y)| \leq \alpha|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}})\rho(x,y)$ a také $\alpha f(m) + g(m) = 0$, tedy celkem $\alpha f + g \in \mathrm{Lip}_m(M)$.

Dokažme nyní, že zobrazení $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}} : \mathrm{Lip}_m(M) \to \mathbb{R}$ je *norma.*

1. $\forall f \in \mathrm{Lip}_m(M) : \|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0 \iff f = 0.$

   Nejprve ukážeme, že z $f \equiv 0$ plyne $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$. Jelikož je $f \equiv 0$, tak $|f(x) - f(y)|/\rho(x,y) = 0$ pro každé $x,y \in M$, tedy to platí i pro supremum přes všechna $x,y \in M$, tedy $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$.

   Nyní ukážeme, že z $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$ plyne $f \equiv 0$. Mějme $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$ takovou, že $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$. Tedy z definice zobrazení $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ pro všechna $x,y \in M$ dostáváme $|f(x) - f(y)|/\rho(x,y) = 0$ z toho plyne $|f(x) - f(y)| = 0$ a tedy $f(x) = f(y)$. Speciálně pro $y = m$ dostáváme, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) = f(m) = 0$, tedy $f \equiv 0$.

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall f \in \mathrm{Lip}_m(M) : \|\alpha f\|_{\mathrm{Lip}} = |\alpha|\|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Zvolme $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak máme:

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup\left\{\frac{|\alpha f(x) - \alpha f(y)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\}\\ &= \sup\left\{|\alpha|\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\} = |\alpha|\|f\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

3. $\forall f,g \in \mathrm{Lip}_m(M) : \|f+g\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}$. Zvolme tedy $f,g \in \mathrm{Lip}_m(M)$. Pak:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup\left\{\tfrac{|f(x)+g(x)-f(y)-g(x)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\}\\ &\leq \sup\left\{\tfrac{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\}\\ &\leq \sup\left\{\tfrac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\}\\ &\quad + \sup\left\{\tfrac{|g(x)-g(y)|}{\rho(x,y)} : x,y \in M, x \neq y\right\}\\ &= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že normovaný lineární prostor $\mathrm{Lip}_m(M)$ je úplný. Užijeme předeslané Lemma 1. Mějme posloupnost Lipschitzovských funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\mathrm{Lip}} = L < \infty.$$

Chceme ukázat, že suma $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje v $\mathrm{Lip}_m(M)$.

Nejprve ukažme, že existuje bodová limita. Mějme tedy $x \in M$ libovolné. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_k(x) - f_k(m)|}{\rho(x,m)}\rho(x,m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\mathrm{Lip}}\rho(x,m) = L\rho(x,m) < \infty.$$

Máme tedy, že je pro každé $x \in M$ posloupnost částečných součtů absolutních hodnot omezená, tedy konvergentní v $\mathbb{R}$, tedy i $\left(\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right)_{N=1}^{\infty}$ je konvergentní pro každé $x \in M$. Označme tuto bodovou limitu f. Dále chceme ukázat, že tato bodová limita je Lipschitzovská funkce.

Nechť jsou $x,y \in M$ libovolné. Máme:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{\rho(x,y)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{\rho(x,y)} \leq L.$$

Přechodem k supremu přes všechna $x,y \in M, x \neq y$ dostáváme, že $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq L$.

Ukažme, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = f$ v metrice dané normou $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > k_0, n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=n}^{\infty} \|f_k\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon$. Dále tedy dostáváme pro libovolné $n > k_0$:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - f \right\|_{\mathrm{Lip}} = \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup \left\{ \frac{|\sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(x) - f_k(y))|}{\rho(x,y)} :\ x \neq y \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{\rho(x,y)} :\ x \neq y \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|f_k\| \rho(x,y)}{\rho(x,y)} :\ x \neq y \right\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ pro $n \to \infty$ v $(\mathrm{Lip}_m(M), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$. □

Lemma 3 (Některé vlastnosti Lipschitzovských funkcí)**.** *Mějme* (M,ρ) *a* (N,σ) *metrické prostory,* $f,g \in \mathrm{Lip}(M,\mathbb{R})$ *a* $h \in \mathrm{Lip}(N,M)$.

(i) *Jsou-li* f,g *omezené, pak* $fg \in \mathrm{Lip}(M,\mathbb{R})$.

(ii) $\min(g,f) \in \mathrm{Lip}(M,\mathbb{R})$.

(iii) $f \circ h \in \mathrm{Lip}(N,\mathbb{R})$ *a pro normu platí odhad:* $\|f \circ h\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \|h\|_{\mathrm{Lip}}$. *Pokud navíc* f *je izometrie, nastává rovnost.*

Poznámka 3. Bod (ii) platí i pro maximum, důkaz je analogický. Bod (iii) platí nejen pro $\mathbb{R}$, ale pro obecný metrický prostor, my jej ale využijeme jen pro $\mathbb{R}$.

Důkaz. Add (i): Mějme $f,g : M \to \mathbb{R}$ omezené Lipschitzovké funkce, tedy existuje $C > 0$, že pro libovolné $x \in M$ máme $|f(x)| \leq C$, $|g(x)| \leq C$. Pak:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup \left\{ \frac{|[g(x) - g(y)]f(x) + g(y)[f(x) - f(y)]|}{\rho(x,y)} :\ x \neq y \right\} \\
&\leq \sup \{ |f(x)| \|g\|_{\mathrm{Lip}} + |g(y)| \|f\|_{\mathrm{Lip}} :\ x \neq y \} \leq C(\|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}).
\end{aligned}$$

Add (ii): Mějme $f,g \in \mathrm{Lip}(M,\mathbb{R})$ a $x,y \in M$. Odhadujme výraz $|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|/\rho(x,y)$. Udělejme rozbor případů:

Pro $f(x) \leq g(x)$ a $f(y) \leq g(y)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Pro $f(x) \geq g(x)$ a $f(y) \geq g(y)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{|g(x) - g(y)|}{\rho(x,y)} \leq \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Pro $f(x) \leq g(x)$, $f(y) \geq g(y)$ a $f(x) \geq g(y)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{f(x) - g(y)}{\rho(x,y)} \leq \frac{g(x) - g(y)}{\rho(x,y)} \leq \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Pro $f(x) \leq g(x)$, $f(y) \geq g(y)$ a $f(x) \leq g(y)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{g(y) - f(x)}{\rho(x,y)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{\rho(x,y)} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Pro $f(x) \geq g(x)$, $f(y) \leq g(y)$ a $f(y) \leq g(x)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{g(x) - f(y)}{\rho(x,y)} \leq \frac{f(x) - f(y)}{\rho(x,y)} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Konečně pro $f(x) \geq g(x)$, $f(y) \leq g(y)$ a $f(y) \geq g(x)$ dostáváme:

$$\frac{|\min(f,g)(x) - \min(f,g)(y)|}{\rho(x,y)} = \frac{f(y) - g(x)}{\rho(x,y)} \leq \frac{g(y) - g(x)}{\rho(x,y)} \leq \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Přechodem k supremu přes $x,y \in M$, $x \neq y$ dostáváme, že $\|\min(f,g)\|_{\mathrm{Lip}} \leq \max(\|f\|_{\mathrm{Lip}},\|g\|_{\mathrm{Lip}})$.

Add (iii): Mějme f a h z předpokladu. Mějme $x,y \in N$ libovolné, že $h(x) \neq h(y)$. Pak:

$$\frac{|f \circ h(x) - f \circ h(y)|}{\sigma(x,y)} = \frac{|f(h(x)) - f(h(x))|}{\rho(h(x),h(y))} \frac{\rho(h(x),h(y))}{\sigma(x,y)} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}\|h\|_{\mathrm{Lip}},$$

pokud $h(x) = h(y)$ a $x \neq y$, pak $\frac{|f \circ h(x) - f \circ h(y)|}{\sigma(x,y)} = 0 \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}\|h\|_{\mathrm{Lip}}$.

Tedy přechodem přes supremum přes $x,y \in N$, $x \neq y$ získáváme požadovaný odhad $\|f \circ h\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}\|h\|_{\mathrm{Lip}}$.

Pro f izometrii dostáváme:

$$\begin{aligned} \|f \circ h\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup\left\{\frac{|f \circ h(x) - f \circ h(y)|}{\sigma(x,y)} : x,y \in N x \neq y\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|f \circ h(x) - f \circ h(y)|}{\rho(h(x),h(y))}\frac{\rho(h(x),h(y))}{\sigma(x,y)} : x,y \in N h(x) \neq h(y)\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\rho(h(x),h(y))}{\sigma(x,y)} : x,y \in N x \neq y\right\} = \|h\|_{\mathrm{Lip}}. \end{aligned}$$

□

Definice 3 (Zobrazení δ). Mějme (M,ρ) metrický prostor. Definujme zobrazení $\delta_M : M \to (\mathrm{Lip}_m(M))^*$ předpisem $\delta_M(x)(f) := f(x)$, $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$, $x \in M$. Pokud bude z kontextu jasné, jaký metrický prostor uvažujeme, budeme místo δ_M psát pouze δ.

Korektnost definice ověříme v následující větě.

Věta 4. *Mějme funkci δ z Definice 3. Pak $\delta : M \to \mathrm{Lip}_m(M)^*$ je korektně definované zobrazení, je izometrií z M na $\delta(M)$, $\delta(m) = 0$ a $\delta(M \setminus \{m\})$ je lineárně nezávislá množina.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že pro libovolné $x \in M$ je $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_m(M)^*$. Mějme $f,g \in \mathrm{Lip}_m(M)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\delta(x)(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha\delta(x)(f) + \delta(x)(g),$$

tedy $\delta(x)$ je lineární. Mějme $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$. Potom $|\delta(x)(f)| = |f(x)| = |f(x) - f(m)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}\rho(x,m)$. Tedy $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_m(M)^*$ a $\|\delta(x)\| \leq \rho(x,m)$.

Nyní ukažme, že δ je izometrie. Mějme $x,y \in M$ a $f \in \mathrm{Lip}_m(M), \|f\|_{Lip} \leq 1$. Ukážeme dvě nerovnosti. Máme:

$$|(\delta(x)-\delta(y))(f)| = |f(x)-f(y)| = \frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}\rho(x,y) \leq \|f\|_{Lip}\rho(x,y) \leq \rho(x,y),$$

tedy $\|\delta(x) - \delta(y)\| \leq \rho(x,y)$.

Pro opačnou nerovnost zvolme $f(x) = \rho(x,y)-\rho(y,m)$. To je dobře definovaná 1-Lipschitzovská funkce. Pro ni platí:

$$|(\delta(x)-\delta(y))(f)| = |f(x)-f(y)| = |\rho(x,y) - \rho(y,m) - \rho(y,y) + \rho(y,m)| = \rho(x,y).$$

Tedy $\|\delta(x)-\delta(y)\| \geq \rho(x,y)$, celkově $\|\delta(x)-\delta(y)\| = \rho(x,y)$. Neboli δ je izometrií M na $\delta(M)$.

Máme, že $\delta(m)(f) = f(m) = 0$ pro každé $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$, tedy $\delta(m) \equiv 0$.

Pro důkaz lineární nezávislosti mějme $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ a $(x_i)_{i=1}^n \subset M\setminus\{m\}$ $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$ tak, že jejich lineární kombinace $\sum_{i=1}^n a_i\delta(x_i)$ se rovná 0. Což znamená, že pro každou Lipschitzovskou funkci f platí $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = 0$. Definujme funkci $f(y) := \min(1,\rho(y,m)) * \prod_{i=2}^n \min(1,\rho(y,x_i))$. Zřejmě $f(x_1) \neq 0$ a z Lemmatu 3 dostáváme, že $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$. Pak ale $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = a_1 f(x_1) = 0$, tedy $a_1 = 0$. Analogicky dokážeme, že $a_i = 0$ pro $i = 2,\ldots,n$. □

Definice 4. *Lispchitzovsky-volný prostor nad M* je Banachův prostor

$$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{span}\{\delta(x) : \ x \in M\}} \subset \mathrm{Lip}_m(M)^*.$$

Poznámka 4. Konstrukce $\mathcal{F}(M)$ závisí na zvoleném bodu m. Pokud bude jasné z kontextu, jaký bod $m \in M$ byl zvolen ke konstrukci, nebudeme ho značit. Jak ostatně uvidíme v Důsledku **??**, jsou-li $m,n \in M$, pak $\mathcal{F}_n(M)$ je izometricky izomorfní s $\mathcal{F}_m(M)$, tedy na volbě bodu m nezáleží.

Poznámka 5. To, že $\mathcal{F}(M)$ je Banachův prostor plyne z toho, že je uzavřeným podprostorem Banachova prostoru $\mathrm{Lip}_m(M)^*$.

Nyní zformulujme pomocné lemma z úvodu do funkcionální analýzy.

Lemma 5. *Mějme X normovaný vektorový prostor, $M \subset X$ jeho hustý podprostor, Y Banachův prostor a omezené lineární zobrazení $T : M \to Y$. Pak existuje právě jedno lineární omezené zobrazení $\tilde{T} : X \to Y$ takové, že $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ a $\tilde{T}|_M = T$.*

Lemma 6 (O jednoznačnosti lineárního zobrazení)**.** *Mějme X vektorový prostor, Y Banachův prostor a I nějakou indexovou množina. Nechť $(x_i)_{i\in I}$ splňuje $\overline{\mathrm{span}\{x_i : \ i \in I\}} = X$. Mějme spojitá lineární zobrazení $T,L : X \to Y$, takové, že $L(x_i) = T(x_i)$ pro každé $i \in I$. Pak $T = L$.*

Důkaz. Mějme $a \in \operatorname{span}\{x_i : i \in I\}$ libovolné, tedy existuje indexová množina $I_a \subset I$ a konečná posloupnost $(a_i)_{i \in I_a}$, že $a = \sum_{i \in I_a} a_i x_i$. Pak z linearity L,T a předpokladu $L(x_i) = T(x_i)$ pro $i \in I$ dostáváme:

$$L(a) = \sum_{i \in I_a} a_i L(x_i) = \sum_{i \in I_a} a_i T(x_i) = T(a),$$

tedy tato rovnost platí pro každé $a \in \operatorname{span}\{x_i : i \in I\}$. Ze spojitosti na husté podmnožině dostáváme, že $L \equiv T$ na X. □

Věta 7 (univerzální vlastnost $\mathcal{F}(M)$)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor s vybraným bodem $m \in M$, X je Banachův prostor a $L : M \to X$ je Lipschitzovské zobrazení, pro které $L(m) = 0$. Pak existuje právě jedno spojité lineární zobrazení $\widehat{L} : \mathcal{F}(M) \to X$ splňující $\widehat{L} \circ \delta = L$. Navíc platí rovnost $\|\widehat{L}\| = \|L\|_{\mathrm{Lip}}$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\delta"] & X \arrow[d, "id_X"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\hat{L}"] & X \end{tikzcd}$$

Důkaz. Označme $V = \operatorname{span}\{\delta(x) : m \neq x, x \in M\}$. Definujme pomocné zobrazení $\widetilde{L} : V \to X$ pro $a = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in M$ předpisem $\widetilde{L}(a) = \widetilde{L}(\sum_{i=1}^n a_i \delta(x_i)) = \sum_{i=1}^n a_i L(x_i)$. Že $\widetilde{L}$ je dobře definované plyne z toho, že $\{\delta(x) : m \neq x, x \in M\}$ je *algebraická báze* množiny V.

Mějme libovolný prvek $a \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$, tedy $\sum_{i=1}^N a_i \delta(x_i) = a$, kde $a_i \in \mathbb{R}, x_i \in M$ pro $i = 1, \dots, N$. Z důsledku Hahn-Banachovy věty máme, že existuje $x^* \in B_{X^*}(1)$ tak, že $\|\widetilde{L}(a)\|_X = x^*(\widetilde{L}(a))$.

Ukážeme tyto nerovnosti:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{L}(a)\|_X = x^*(\widetilde{L}(a)) &= \sum_{i=1}^N a_i x^*(L(x_i)) \le \|x^* \circ L\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{i=1}^N a_i \rho(x_i,m) \\ &\le \|x^* \circ L\|_{\mathrm{Lip}} \|a\|_{\mathcal{F}(M)} \le \|x^*\|_{\mathrm{Lip}} \|L\|_{\mathrm{Lip}} \|a\|_{\mathcal{F}(M)} \le \|L\|_{\mathrm{Lip}} \|a\|_{\mathcal{F}(M)}. \end{aligned}$$

První rovnost plyne z volby x^*. Druhá rovnost plyne z definice zobrazení $\widetilde{L}$ a z linearity x^*. První nerovnost máme z definice $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$, druhá z odhadu normy v $\|\cdot\|_{\mathcal{F}(M)}$ pomocí 1-Lipschitzovské funkce $\rho(\cdot, m)$, třetí z Lemmatu 3(iii). Poslední nerovnost máme z rovnosti norem pro lineární operátor – $\|x^*\|_{\mathrm{Lip}} = \|x^*\| \le 1$.

Jelikož nerovnost $\|\widetilde{L}(a)\|_X \le \|L\|_{\mathrm{Lip}} \|a\|_{\mathcal{F}(M)}$ platí pro každé $a \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$, můžeme přejít k supremu přes všechna $a \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$. Tedy $\|\widetilde{L}\| \le \|L\|_{\mathrm{Lip}}$. Tím dostáváme první odhad a omezenost lineárního operátoru $\widetilde{L}$.

Aplikací Lemmatu 5 na zobrazení $\widetilde{L}$ dostáváme zobrazení $\widehat{L} : \mathcal{F}(M) \to X$, které řejmě splňuje $\widehat{L} \circ \delta = L$ a $\|\widehat{L}\| = \|\widetilde{L}\| \le \|L\|_{\mathrm{Lip}}$.

Že existuje právě jedno lineární zobrazení splňující $\widehat{L} \circ \delta = L$ plyne z Lemmatu 6. Každé lineární zobrazení z V do X musí splňovat formuli, která je použita v definici $\widetilde{L}$.

Pro důkaz rovnosti $\|L\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widetilde{L}\|$ ukažme ještě druhou, snadnější nerovnost. $\|L\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widetilde{L} \circ \delta\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|\widetilde{L}\|_{\mathrm{Lip}} \|\delta\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widetilde{L}\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widetilde{L}\|$. První rovnost dostáváme z definice $\widetilde{L}$. Nerovnost máme z odhadu normy složeného Lipschitzovského zobrazení z Lemmatu 3(iii). Rovnost $\|\delta\|_{\mathrm{Lip}} = 1$ máme z toho, že δ je izometrie. Poslední rovnost je z ekvivalence norem lineárních omezených funkcionálů. □

Důsledek 8 (Representace duálu k $\mathcal{F}(M)$)**.** *Je-li $\mathcal{F}(M)$ Lipschitzovsky-volný prostor zkonstruovaný z* $\mathrm{Lip}_m(M)$*, pak* $\mathcal{F}(M)^*$ *a* $\mathrm{Lip}_m(M)$ *jsou izometrické.*

Důkaz. Mějme $f \in \mathrm{Lip}_m(M)$. Podle Věty 7 (kde za Banachův prostor X zvolíme $\mathbb{R}$) existuje právě jedno omezené lineární zobrazení $\widehat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ splňující $\widehat{f} \circ \delta = f$, kde navíc $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widehat{f}\|$. Neboli $\widehat{f} \in \mathcal{F}(M)^*$.

Definujme zobrazení $T : \mathrm{Lip}_m(M) \to \mathcal{F}(M)^*$ předpisem:

$$T(f) = \widehat{f}.$$

Že toto zobrazení je izometrie, máme z rovnosti norem: $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widehat{f}\|$. Dokažme linearitu operátoru T. Mějme $\alpha \in \mathbb{R}$, $f,g \in \mathrm{Lip}_m(M)$, pak $T(\alpha f + g) \circ \delta = (\widehat{\alpha f + g}) \circ \delta = \alpha f + g = \alpha T(f) \circ \delta + T(g) \circ \delta = (\alpha T(f) + T(g)) \circ \delta$. Z Lemmatu 6 dostáváme, že $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$. Tedy, zobrazení T je lineární izometrie a zbývá dokázat, že je na.

Mějme nyní $x^* \in \mathcal{F}(M)^*$. Pak definujme funkci f pro každé $x \in M$ předpisem $f(x) := x^*(\delta(x))$. Tato funkce je lipschitzovská, neboť δ je izometrie a x^* je omezené lineární zobrazení. Její obraz při zobrazení T je $\widehat{f}$, kde $\widehat{f}$ splňuje $\widehat{f} \circ \delta = x^* \circ \delta$, čímž máme z jednoznačnosti spojitého lineárního zobrazení (Lemma 6) rovnost $\widehat{f} = x^*$. □

Lipschitzovská struktura prostoru M odpovídá lineární struktuře prostoru $\mathcal{F}(M)$.

Důsledek 9. *Mějme (M,ρ) a (N,σ) neprázdné metrické prostory. Nechť existuje $L : M \to N$ Lipschitzovské zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $\widehat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ splňující $\|L\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widehat{L}\|$ a $\widehat{L} \circ \delta_M = \delta_N \circ L$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\delta_M"] & N \arrow[d, "\delta_N"] \\
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\hat{L}"] & \mathcal{F}(N)
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Aplikací Věty 7 na zobrazení $T : M \to \mathcal{F}(N)$, kde $T = \delta_N \circ L$ dostáváme lineární zobrazení $\widehat{T} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$, kde $\|\widehat{T}\| = \|T\|_{\mathrm{Lip}}$ a $\widehat{T} \circ \delta_M = T$. Definujme $\widehat{L} := \widehat{T}$. Toto zobrazení splňuje $\|\widehat{L}\| = \|T\|_{\mathrm{Lip}} = \|\delta_N \circ L\|_{\mathrm{Lip}} = \|L\|_{\mathrm{Lip}}$, (kde poslední rovnost máme z Lemmatu 3(iii)) a $\widehat{L} \circ \delta_M = T = \delta_N \circ L$. □

Věta 10 (O jednoznačnosti $\mathcal{F}(M)$)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor, $n \in M$, Z Banachův prostor. Nechť existuje $i : M \to Z$ izometrie, že:*

1. $i(n) = 0$

2. $i(M \setminus \{n\})$ *je* lineárně nezávislá *množina*

3. $\overline{\operatorname{span}}\{i(x) : x \in M\} = Z$

4. Kdykoliv X *je Banachův prostor a* $f : M \to X$ *Lipschitzovské zobrazení,* $f(n) = 0$*, pak existuje lineární zobrazení* $\widehat{f} : Z \to X$*, že* $\|\widehat{f}\| = \|f\|_{\mathrm{Lip}}$ *a* $\widehat{f} \circ i = f$.

Pak existuje izometrie mezi Z *a* $\mathcal{F}(M)$.

Důkaz. Označme $\delta : M \to \mathcal{F}(M)$ izometrii z definice $\mathcal{F}(M)$. Použijme vlastnost 4 prostoru Z z předpokladu věty, kde za X zvolme $\mathcal{F}(M)$ a za f zvolme δ. Tím dostaneme zobrazení $\widehat{\delta} : Z \to \mathcal{F}(M)$, kde $\|\widehat{\delta}\| = \|\delta\| = 1$ a $\widehat{\delta} \circ i = \delta$. Použijme Větu 7 (na $X = Z$ a $f = i$), čímž dostáváme lineární zobrazení $\widehat{i} : \mathcal{F}(M) \to Z$, kde $\|\widehat{i}\| = \|i\| = 1$ a $\widehat{i} \circ \delta = i$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & Z \arrow[d, "id_Z"] \\
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\widehat{i}"] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "id_Z"] \\
Z \arrow[r, "\widehat{\delta}"] & \mathcal{F}(M)
\end{tikzcd}$$

Uvažujme zobrazení $T = \widehat{\delta} \circ \widehat{i} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$. Toto zobrazení je lineární, neboť vzniklo složením dvou lineárních zobrazení a pro libovolný prvek $a \in M$ máme:

$$T \circ \delta(a) = (\widehat{\delta} \circ (\widehat{i} \circ \delta))(a) = (\widehat{\delta} \circ i) = \delta(a) = (Id \circ \delta)(a).$$

Protože lineární zobrazení T je jednoznačně určené z hodnot na $\delta(M)$, tedy z Lemmatu 4lem - jednoznacnost lin zobr na bazi dostáváme, že $T = Id$ na $\mathcal{F}(M)$.

Uvažujme analogicky zobrazení $U = \widehat{i} \circ \widehat{\delta} : Z \to Z$. Toto zobrazení je také lineární a pro libovolný prvek $a \in M$ máme:

$$U(i(a)) = (\widehat{i} \circ (\widehat{\delta} \circ i))(a) = (\widehat{i} \circ \delta(a)) = i(a).$$

Tedy lineární zobrazení U je identita na $i(M)$ a z Lemmatu 6 na Z.

Neboť $\widehat{\delta} \circ \widehat{i} = Id_{\mathcal{F}(M)}$ a $\widehat{i} \circ \widehat{\delta} = Id_Z$, tedy zobrazení $\widehat{i}$ a $\widehat{\delta}$ jsou *na.* Jelikož $\|\widehat{\delta}\| = \|\widehat{i}\| = 1$, proto $\widehat{i} : \mathcal{F}(M) \to Z$ a $\widehat{\delta} : Z \to \mathcal{F}(M)$ jsou vzájemně inverzní izomorfismy. Z rovnosti $\|\widehat{\delta}\| = \|\widehat{i}\| = 1$ dostáváme pro každé $a,b \in \mathcal{F}(M)$:

$$\|a - b\| = \|\widehat{\delta}(\widehat{i}(a)) - \widehat{\delta}(\widehat{i}(b))\| \leq \|\widehat{i}(a) - \widehat{i}(b)\| \leq \|a - b\|,$$

že rovností je všude nabyto, tedy $\|a - b\| = \|\widehat{i}(a) - \widehat{i}(b)\|$, tedy $\widehat{i}$ je izometrie. $\square$

Důsledek 11 (Definice prostoru $\mathcal{F}(M)$ nezávisí na zvoleném bodu $m \in M$)**.** *Mějme* (M,ρ) *neprázdný metrický prostor a* $m,n \in M$*. Prostory* $\mathcal{F}_m(M)$ *a* $\mathcal{F}_n(M)$ *jsou izometricky izomorfní.*

Důkaz. Mějme $m, n \in M$. Označme $\mathcal{F}(M)_m$ prostor zkonstruovaný pomocí vybraného prvku m a $\mathcal{F}(M)_n$ prostor zkonstruovaný pomocí vybraného prvku n. Oba tyto prostory splňují předpoklady Věty 10, tedy prostory $\mathcal{F}(M)_m$ a $\mathcal{F}(M)_n$ jsou izometricky izomorfní. □

Lemma 12 (O rozšíření Lipschitzovské funkce [3, Chapter 7; Lemma 39])**.** *Mějme (M,ρ) metrický prostor a $N \subset M$. Mějme $f \in \mathrm{Lip}_m(N)$, pak existuje $\widehat{f} \in \mathrm{Lip}_m(M)$, že $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{Lip}}$ a $\widehat{f}|_N = f$.*

Důkaz. Definujme funkci $\widehat{f} : M \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$\widehat{f}(x) := \inf_{v \in N} \{f(v) + \|f\|_{\mathrm{Lip}}\rho(x,v)\}.$$

Pak pro každé $v \in N$ máme $\widehat{f}(v) \le f(v)$, neboť hodnota $f(v)$ je v množině, jejíž infimum je hodnota $\widehat{f}(v)$. Pro $v,w \in N$ máme $f(v)-f(w) \le \|f\|\rho(v,w)$ (z definice normy), tedy $f(v) \le f(w) + \|f\|\rho(v,w)$ pro libovolné $w \in N$, tedy to platí i pro infimum přes w, tedy $\widehat{f} \ge f$ na N, celkem $\widehat{f} = f$ na N.

Pro důkaz rovnosti norem mějme $x,y \in M$ a $\varepsilon > 0$. Pak z definice $\widehat{f}(y)$ existuje $v \in N$, že $\widehat{f}(y) \ge f(v) + \|f\|_{Lip}\rho(y,v) - \varepsilon$. Pak dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y)}{\rho(x,y)} &\le \frac{\widehat{f}(x) - (f(v) + \|f\|_{Lip}\rho(y,v) - \varepsilon)}{\rho(x,y)} \\ &\le \frac{f(v) + \|f\|_{Lip}\rho(x,v) - f(v) - \|f\|_{Lip}\rho(y,v) + \varepsilon}{\rho(x,y)} \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}\frac{\rho(x,y) + \varepsilon}{\rho(x,y)}. \end{aligned}$$

Tuto nerovnost máme pro libovolné $\varepsilon > 0$, tedy máme $(\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y))/\rho(x,y) \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}$ pro $x,y \in M$ libovolné. Záměnou x a y dostaneme $|\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y)|/\rho(x,y) \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Přechodem k supremu přes $x \neq y$ dostáváme $\|\widehat{f}\|_{\mathrm{Lip}} \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Opačná nerovnost je zřejmá, neboť $\widehat{f}$ je rozšířením funkce f. Tedy celkem získáváme rovnost $\|\widehat{f}\|_{\mathrm{Lip}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}}$. □

Poznámka 6. Lemma se dá dokázat analogicky jako Hahn-Banachova věta, viz [4, Theorem 1.5.6]. I zde je vidět souvislost s lineárními prostory.

Věta 13. *Mějme (M,ρ) metrický prostor, $m \in N \subset M$. Pak existuje lineární izometrie z $\mathcal{F}(N)$ do $\mathcal{F}(M)$.*

Důkaz. Definujme lineární zobrazení $\varphi : \mathrm{span}\{\delta_N(x) : x \in N\} \to \mathrm{span}\{\delta_M(x) : x \in M\}$ pro $a = \sum_{i=1}^n a_i\delta_N(x_i) \in \mathrm{span}\{\delta_N(x) : x \in N\}$ předpisem:

$$\varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i\delta_N(x_i)\right) = \sum_{i=1}^n a_i\delta_M(x_i).$$

Ukažme, že $\|a\|_{\mathcal{F}(N)} = \|\varphi(a)\|_{\mathcal{F}(M)}$ pro $a = \sum_{i=1}^n a_i\delta_N(x_i) \in \mathrm{span}\{\delta_N(x) : x \in N\}$, tedy:

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}_m(M), \|f\| \le 1} \left\{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)\right\} = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_m(N), \|f\| \le 1} \left\{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)\right\}.$$

Ukažme obě nerovnosti. Zúžení funkce z $\mathrm{Lip}_m(M)$ na množinu N je triviálně v $\mathrm{Lip}_m(N)$ a norma tohoto zúžení není větší, (z čehož máme nerovnost $\|a\|_{\mathcal{F}(M)} \le$

$\|a\|_{\mathcal{F}(N)})$. Mějme funkci $f \in \mathrm{Lip}_m(N)$ nalezněme funkci $g \in \mathrm{Lip}_m(M)$ takovou, že $g|_N = f$ a $\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Tu nám přesně dává Lemma **??** (z čehož máme nerovnost $\|a\|_{\mathcal{F}(M)} \geq \|a\|_{\mathcal{F}(N)})$.

Celkem dostáváme rovnost $\|a\|_{\mathcal{F}(M)} = \|a\|_{\mathcal{F}(N)}$ pro každé $a \in \mathrm{span}\{\delta(x) : \ x \in N\}$.

Aplikací Lemmatu 5 na φ a na φ^{-1} dostáváme zobrazení $\widehat{\varphi}$ a $\widehat{\varphi^{-1}}$, jejichž normy jsou jedna a jejichž složení je identita, tedy dostáváme, že $\widehat{\varphi}$ je lineární izometrie mezi $\mathcal{F}(N)$ a $\overline{\mathrm{span}}\{\delta_M(x) : \ x \in N\}$.

□

2. Norma:

V této kapitole si ukážeme jeden z možných způsobů, jak počítat normy prvků v $\mathcal{F}(M)$. Z definice $\mathcal{F}(M)$ se norma prvku počítá jako supremum před $f \in B_{\mathrm{Lip}_m(M)}(1)$. Otázka zní, jak určit, jestli jsme už dané supremum nalezli.

Definice 5. Označme symbolem $\|\cdot\|_{KR}$ zobrazení z množiny $\operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$ do $\mathbb{R}_0^+$, definované předpisem pro $a \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$:

$$\|a\|_{KR} = \inf\Big\{|a_1|\rho(y_1,z_1) + \ldots + |a_n|\rho(y_n,z_n) : a = \sum_{i=1}^{n} a_i(\delta(y_i) - \delta(z_i)) :$$

$$y_i, z_i \in M, a_i \in \mathbb{R}, \text{pro } i \in \{1,2,\ldots n\}\Big\}.$$

Tuto definici normy (zatím nevíme, že je to norma) můžeme porovnat s definicí normy v [4, Section 2.2].

Věta 14. *Norma* $\|\cdot\|$ *a zobrazení* $\|\cdot\|_{KR}$ *se na* $\operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$*rovnají.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\|\cdot\|_{KR}$ je pseudonorma.

Pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti mějme $a,b \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$. Pro $\varepsilon > 0$, z definice infima existují $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ a $y_i, z_i \in M$, $i = 1,\ldots n$, takové, že $\|a\|_{KR} \geq |a_1|(\rho(y_1, z_1) + \ldots + |a_n|\rho(y_n, z_n) - \varepsilon/2$ a také $\|b\|_{KR} \geq |b_1|(\rho(y_1, z_1) + \ldots + |b_n|\rho(y_n, z_n) - \varepsilon/2$, tak že $a = \sum_{i=1}^{n} a_i(\delta(y_i) - \delta(z_i))$ a $b = \sum_{i=1}^{n} b_i(\delta(y_i) - \delta(z_i))$. (Můžeme předpokládat, že a i b mají v rozkladu stejné prvky $(\delta(y_i) - \delta(z_i))$, pokud ne, připíšeme je tam s nulovým členem (a_i).)

$$\|a\|_{KR} + \|b\|_{KR} \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\rho(y_i,z_i) + \sum_{i=1}^{n} |b_i|\rho(y_i,z_i) - \varepsilon$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|\rho(y_i,z_i) - \varepsilon \geq \|a+b\|_{KR} - \varepsilon.$$

Jelikož to platí pro každé $\varepsilon > 0$, můžeme vzít $\varepsilon \to 0$, čímž dostáváme trojúhelníkovou nerovnost.

Pro $a \in \operatorname{span}\{\delta(x) : x \in M\}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí rovnost:

$$\|ta\|_{KR} = \inf\left\{|ta_1|\rho(y_1,z_1) + \ldots + |ta_n|\rho(y_n,z_n) : ta = \sum_{i=1}^{n} ta_i(\delta(y_i) - \delta(z_i))\right\} =$$

$$|t| \inf\left\{|a_1|\rho(y_1,z_1) + \ldots + |a_n|\rho(y_n,z_n) : a = \sum_{i=1}^{n} a_i(\delta(y_i) - \delta(z_i))\right\} = |t|\|a\|_{KR}.$$

Tedy dostáváme, že $\|\cdot\|_{KR}$ je *pseudonorma.*

Mějme $\|\cdot\|'$ libovolnou pseudonormu, která splňuje $\|\delta(x) - \delta(y)\|' \leq \rho(x,y)$, pak z trojúhelníkové nerovnosti $\|\cdot\|'$ dostáváme:

$$\|a\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\|\delta(y_i) - \delta(z_i)\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\rho(y_i,z_i),$$

kde $a = \sum_{i=1}^{n} a_i\Big(\delta(y_i) - \delta(z_i)\Big)$. Tato nerovnost platí pro každý rozklad a, tedy $\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|_{KR}$. Celkem dostáváme, že $\|\cdot\|_{KR}$ je největší pseudonorma splňující

$\|\delta(x)-\delta(y)\|' \leq \rho(x,y)$. Protože obvyklá norma $\|\cdot\|$ na $\mathcal{F}(M)$ má také tuto vlastnost, tedy $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{KR}$, z čehož dostáváme první nerovnost a že $\|\cdot\|_{KR}$ je norma.

Pro každé $x,y \in M$ máme:

$$\|\delta(x)-\delta(y)\| \leq \|\delta(x)-\delta(y)\|_{KR} \leq \rho(x,y) = \|\delta(x)-\delta(y)\|,$$

neboli zobrazení $x \mapsto \delta(x) \in (\mathrm{span}\{\delta(M)\}, \|\cdot\|_{KR})$ je izometrie.

Nyní mějme zobrazení $L : M \to \overline{\mathrm{span}\,\{\delta(x) :\ x \in M\}}^{\|\cdot\|_{KR}}$ dané předpisem $L(x) = \delta(x)$, pro každé $x \in M$. Toto zobrazení je dle předchozího odstavce 1-Lipschitzovské. Z univerzální vlastnosti $\mathcal{F}(M)$ (Věta 7) dostáváme existenci právě jednoho omezeného lineárního zobrazení $\widehat{L} : \mathcal{F}(M) \to \overline{\mathrm{span}\,\{\delta(x) :\ x \in M\}}^{\|\cdot\|_{KR}}$, kde navíc platí $\|\widehat{L}\| = \|L\|_{\mathrm{Lip}} = 1$ a $\widehat{L} \circ \delta = L = \delta$ na množině M, tedy $\widehat{L} = Id$ na $\delta(M)$, tedy z Lemmatu 6 dostáváme, že $\widehat{L} = Id$ na $\mathcal{F}(M)$.

Pro každé $a \in \mathrm{span}\,\{\delta(x) :\ x \in M\}$ tímto dostáváme:

$$\|a\|_{KR} = \|Id(a)\|_{KR} = \|\widehat{L}(a)\|_{KR} \leq \|\widehat{L}\|\|a\| = \|a\|.$$

Jelikož opačnou nerovnost máme z předchozího odstavce, dokázali jsme rovnost. □

Poznámka 7. Tímto dostáváme postup na výpočet normy (pro pro prvky z prostoru $\mathrm{span}\{\delta(x) :\ x \in M\}$). Když se nám podaří pro $a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathrm{span}\{\delta(x) :\ x \in M\}$ nalézt 1-Lipschitzovskou funkci f a rozklad $a = \sum_{j=1}^{N} b_j(\delta(y_j) - \delta(z_j))$ takový, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = \sum_{j=1}^{N} |b_i|\rho(y_i,z_i),$$

pak jsme nalezli hodnotu normy prvku a.

Poznámka 8. Speciálně, jestliže mají všechna a_i stejné znaménko, pak stačí volit $f(x) = \mathrm{sgn}(a_1)\rho(x,m)$ a za rozklad $\sum_{i=1}^{n} a_i(\delta(x_i) - \delta(m))$, pak

$$\|a\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} a_i\delta(x_i)\right\| = \sum_{i=1}^{N} |a_i|\rho(x_i,m),$$

ale v obecném případě to vůbec nemusí být snadný úkol nalézt takový rozklad a takovou funkci, které to splňují. V této práci si ukážeme ještě vzorce pro $N \leq 3$ v následujících větách. První z nich je dokázaná jiným způsobem v citovaném článku, druhá z nich je nová.

Věta 15. *[5, Lemma 11] Mějme (M,ρ) metrický prostor. Zvolme libovolné $a,b \in \mathbb{R}$ a $x,y \in M$. Pak platí následující vzorec:*

$$\|a\delta(x) + b\delta(y)\| = \begin{cases} |a|\rho(x,m) + |b|\rho(y,m), & \textit{pokud } ab \geq 0, \\ |a|\rho(x,y) + |a+b|\rho(y,m), & \textit{pokud } ab \leq 0 \textit{ a } |a| \geq |b|, \\ |a+b|\rho(x,m) + |b|\rho(x,y), & \textit{pokud } ab \leq 0 \textit{ a } |a| \leq |b|. \end{cases}$$

Důkaz. Mějme $ab \geq 0$. Zvolme $f(z) = \mathrm{sgn}(a)\rho(z,m)$ a rozklad $a(\delta(x) - \delta(m)) + b(\delta(y) - \delta(m))$. Pak $\|a\delta(x) + b\delta(y)\| \geq af(x) + bf(y) = |a|\rho(x,m) + |b|\rho(y,m) \geq \|a\delta(x) + b\delta(y)\|_{KR} = \|a\delta(x) + b\delta(y)\|$, čímž máme důkaz první části.

Mějme $a,b \in \mathbb{R}$ splňující $ab \leq 0$ a $|a| \leq |b|$. Zvolme $f(z) = \operatorname{sgn}(a)(\rho(z,y) - \rho(y,m))$ a rozklad $a\delta(x) + b\delta(y) = a(\delta(x) - \delta(y)) + (a+b)(\delta(y) - \delta(m))$. Pak $\|a\delta(x) + b\delta(y)\| \geq af(x) + bf(y) = |a|\rho(x,y) - |a|\rho(y,m) - |b|\rho(y,y) + |b|\rho(y,m) = |a|\rho(x,y) + |b+a|\rho(y,m) \geq \|a\delta(x) - a\delta(y) + b\delta(y) + a\delta(y) - b\delta(m) - a\delta(m)\|_{KR} = \|a\delta(x) + b\delta(y)\|$.

Pro důkaz třetí části nám stačí prohodit a za b a $\delta(x)$ za $\delta(y)$. □

Nyní následuje věta, která vypadá velmi komplikovaně. Ukazuje, jak spočítat hodnotu normy pro lineární kombinaci 3 prvků z $\delta(M \setminus \{m\})$. Snadný případ uvedený v Poznámce 7 v následující větě neuvádíme. Pro normy prvků platí $\|a\| = \|-a\|$, tedy nám stačí ukázat vzorec pro takovou lineární kombinaci, kde 2 znaménka jsou odlišná. Zde ale vzorec závisí i na struktuře prostoru.

Věta 16. *Mějme $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ a $x_1, x_2, x_3 \in M$. Označme $a_1\delta(x_1) - a_2\delta(x_2) - a_3\delta(x_3) = a$. Pak*

1. *Pokud platí $a_1 \geq a_2 + a_3$, pak: $\|a\| = a_1\rho(x_1,m) + a_2(\rho(x_2,x_1) - \rho(x_1,m)) + a_3(\rho(x_3,x_1) - \rho(x_1,m))$.*

2. *Pro nerovnost $\rho(x_3,m) + \rho(x_1,x_2) \leq \rho(x_3,x_1) + \rho(m,x_2)$:*

   (i) Pokud platí $a_1 \leq a_2$, pak $\|a\| = a_1\rho(x_1,x_2) + (a_2 - a_1)\rho(x_2,m) + a_3\rho(x_3,m)$.

   (ii) Pokud platí $a_2 \leq a_1 \leq a_2 + a_3$, pak $\|a\| = (a_2 + a_3 - a_1)\rho(x_3,m) + (a_1 - a_2)\rho(x_1,x_3) + a_2\rho(x_1,x_2)$.

3. *Pro nerovnost $\rho(x_3,m) + \rho(x_1,x_2) > \rho(x_3,x_1) + \rho(m,x_2)$:*

   (i) Pokud platí $a_1 \leq a_3$, pak $\|a\| = a_1\rho(x_1,x_3) + (a_3 - a_1)\rho(x_3,m) + a_2\rho(x_2,m)$.

   (ii) Pokud platí $a_3 \leq a_1 \leq a_2 + a_3$, pak $\|a\| = (a_2 + a_3 - a_1)\rho(x_2,m) + (a_1 - a_3)\rho(x_1,x_2) + a_3\rho(x_1,x_3)$.

Důkaz. Add. 1. Zvolme $f(y) = \rho(x_1,m) - \rho(x_1,y)$ a rozklad $a = (a_1 - a_2 - a_3)(\delta(x_1) - \delta(m)) - a_2(\delta(x_2) - \delta(x_1)) - a_3(\delta(x_3) - \delta(x_1))$. Nyní ověříme, že tento rozklad a tato volba funkce f vede na hodnotu normy. (viz Poznámka 6). $\|a\| \geq a_1f(x_1) - a_2f(x_2) - a_3f(x_3) = a_1\rho(x_1,m) + a_2(\rho(x_2,x_1) - \rho(x_1,m)) + a_3(\rho(x_3,x_1) - \rho(x_1,m)) = (a_1 - a_2 - a_3)\rho(x_1,m) + a_2\rho(x_1,x_2) + a_3\rho(x_3,x_1) \geq \|a\|_{KR} = \|a\|$.

Add. 2 (i). Zvolme rozklad $a = a_1(\delta(x_1) - \delta(x_2)) + (a_2 - a_1)(\delta(x_2) - \delta(m)) + a_3(\delta(x_3) - \delta(m))$ a funkci f předpisem $f(y) = -\rho(y,m)$ pro $y \in \{x_2,x_3,m\}$ a $f(x_1) = \rho(x_1,x_2) - \rho(x_2,m)$. Zde ale není zřejmá její 1-Lipschitzovskost, proto ji ověřme. Mějme $y,z \in \{x_1,x_2,x_3\}$. Pokud y, ani z není rovno x_1, Lipschitzovskost dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti, (jako u ostatních funkcí, které jsme používali). Pokud jeden z nich je roven x_1 (bez újmy na obecnosti) $y = x_1$, pak chceme ukázat nerovnost:

$$|\rho(x_1,x_2) - \rho(x_2,m) + \rho(z,m)| \leq \rho(x_1,z).$$

Ověřme ji v jednotlivých případech. Pokud $\rho(x_1,x_2) - \rho(x_2,m) + \rho(z,m) \geq 0$, pak pokud $z = x_3$ můžeme nerovnost výše snadno upravit na nerovnost, kterou předpokládáme ve znění věty. (Pro $z = x_2$ to zřejmě platí). Pokud platí

$\rho(x_1,x_2) - \rho(x_2,m) + \rho(z,m) \leq 0$, pak nerovnost výše ekvivalentně upravíme na výraz $\rho(x_2,m) - \rho(x_1,x_2) \leq \rho(x_1,z) + \rho(z,m)$. Tato nerovnost platí vždy z trojúhelníkové nerovnosti. Tedy funkce f je 1-Lipschitzovská na množině x_1, x_2, x_3 a aplikací Lemmatu **??** dostaneme její rozšíření $\widehat{f}$ na celý prostor M.

Pak $\|a\| \geq a_1\widehat{f}(x_1) - a_2\widehat{f}(x_2) - a_3\widehat{f}(x_3) = a_1\rho(x_1, x_2) - a_1\rho(x_2,m) + a_2\rho(x_2,m) + a_3\rho(x_3,m) = a_1\rho(x_1, x_2) + (a_2 - a_1)\rho(x_2,m) + a_3\rho(x_3,m) \geq \|a\|_{KR} = \|a\|$, tedy platí rovnosti.

Add. 2 (ii). Zvolme rozklad $a = (a_2+a_3-a_1)(\delta(m)-\delta(x_3))+(a_1-a_2)(\delta(x_1)-\delta(x_3)) + a_2(\delta(x_1) - \delta(x_2))$ a funkci f předpisem $f(x_1) = -\rho(x_3,m) + \rho(x_3,x_1)$, $f(x_2) = -\rho(x_3,m) + \rho(x_3,x_1) - \rho(x_1,x_2)$ a $f(x_3) = -\rho(x_3,m)$. Ukažme, že za daných předpokladů je tato funkce 1-Lipschitzovská na množině $\{x_1, x_2, x_3, m\}$.

Ověřme, že f je 1-Lipschitzovská. Z definice $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ stačí ukázat pro $y,z \in \{x_1, x_2, x_3, m\}$ nerovnost $|f(y) - f(z)| \leq \rho(y,z)$. Ověřme všechny kombinace. Nejprve za y,z zvolme x_1, x_2. Dostáváme rovnost $|f(x_1) - f(x_2)| = |\rho(x_1, x_2)|$. Pro x_1, x_3 dostáváme rovnost $|f(x_1) - f(x_3)| = |\rho(x_1, x_3)|$. Pro x_2, x_3 dostáváme nerovnost $|f(x_2)-f(x_3)| = |\rho(x_1, x_3)-\rho(x_1, x_2)| \leq \rho(x_2, x_3)$. Pro x_1, m dostáváme nerovnost $|f(x_1) - f(m)| = |\rho(x_1, x_3) - \rho(x_3, m)| \leq \rho(x_1, m)$. Pro x_2, m chceme dostat nerovnost $|f(x_2) - f(m)| = |-\rho(m, x_3) + \rho(x_3, x_1) - \rho(x_1, x_2)| \leq \rho(x_2,m)$, kterou dostáváme z předpokladu analogicky, jako v části 2. Konečně pro x_3,m dostáváme rovnost $|f(x_3) - f(m)| = |-\rho(x_3, m)| = \rho(x_3, m)$. Tedy tato funkce je 1-Lipschitzovská na množině $\{x_1, x_2, x_3, m\}$ a z Lemmatu **??** dostáváme její 1-Lipschitzovské rozšíření $\widehat{f}$ na M. Pak $\|a\| \geq a_1\widehat{f}(x_1) - a_2\widehat{f}(x_2) - a_3\widehat{f}(x_3) = a_1(\rho(x_1, x_3) - \rho(x_3, m)) - a_2(\rho(x_1, x_3) - \rho(x_3, m) - \rho(x_1, x_2)) - a_3(-\rho(x_3, m)) = (a_2 + a_3 - a_1)\rho(x_3,m) + (a_1 - a_2)\rho(x_1,x_3) + a_2\rho(x_1, x_2) \geq \|a\|_{KR} = \|a\|$, tedy jsme ukázali rovnost.

Poslední část věty plyne z části 2 přehozením a_2 s a_3 a x_2 s x_3. $\square$

Závěr

Nejprve jsme definovali Lipschitzovsky volný prostor nad libovolným metrickým prostorem. Ukázali jsme, že to je až na izomorfismus jediný prostor, který má univerzální vlastnost, pokračovali jsme tím, že jsme ukázali, že prostor $\mathrm{Lip}_m(M)$ je duálním prostorem. V poslední kapitole jsme si ukázali metodu, jak počítat normy prvků v Lipschitzovsky volném prostoru. Na samý závěr jsme ukázali explicitní vzorec pro výpočet normy v prostoru, který vznikl z libovolného 4 bodového metrického prostoru.

Seznam použité literatury

[1] Gilles Godefroy and Nigel J Kalton. Lipschitz-free Banach spaces. *Studia Mathematica*, 159:121–141, 2003.

[2] Marek Cúth, Michal Doucha, and Przemysław Wojtaszczyk. On the structure of Lipschitz-free spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(9):3833–3846, 2016.

[3] Petr Hájek and Michal Johanis. *Smooth analysis in Banach spaces.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014.

[4] N. Weaver. *Lipschitz algebras.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., River Edge, NJ, 1999.

[5] Marek Cúth and Michal Johanis. Isometric embedding of ℓ_1 into Lipschitz-free spaces and ℓ_∞ into their duals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145(8):3409–3421, 2017.