MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Surma

Lojasiewiczova nerovnost pro různé třídy funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu práce doc. RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D. za cenné připomínky a pomoc s vypracováním práce.

Název práce: Lojasiewiczova nerovnost pro různé třídy funkcí

Autor: Martin Surma

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá Łojasiewiczovou nerovností. Je zde dokázána Łojasiewiczova nerovnost pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce a pro funkce s jednoduchým křížením. Dále studujeme otázku optimality Łojasiewiczova exponentu pro tyto funkce. V poslední kapitole jsou s důkazem uvedena využití Łojasiewiczovy nerovnosti na určitou gradientovou diferenciální rovnici, například věta o konvergenci řešení této rovnice. Je zde také ukázáno, jak se dá využít Łojasiewiczův exponent k odhadu rychlosti této konvergence.

Klíčová slova: Łojasiewiczova nerovnost, Morseova-Bottova funkce, diferenciální rovnice, konvergence řešení

Title: Lojasiewicz inequality for various classes of functions

Author: Martin Surma

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Bachelor thesis pursue the Łojasiewicz inequality. The Łojasiewicz inequality is proved here for generalized Morse-Bott functions and for functions with simple normal crossings. Further on, we study optimality of the Łojasiewicz exponent for those functions. In the last chapter, there are possible applications of the Łojasiewicz inequality to certain gradient-like differential equation stated and proved, such as the theorem on convergence of its solution. There is also shown how one can use the Łojasiewicz exponent to estimate the rate of the convergence.

Keywords: Łojasiewicz inequality, Morse-Bott function, differential equation, convergence of solution

Obsah

Úvod

Stěžejním bodem práce je Łojasiewiczova nerovnost. Budeme zkoumat, pro jaké funkce lze dokázat platnost této nerovnosti v určitém bodě. Základním prostorem funkcí, ve kterém se budeme celou dobu pohybovat, jsou funkce $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, které jsou třídy C^1 na nějaké otevřené množině $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě $x_\infty \in \mathcal{U}$, pokud existují konstanty $\theta \in (0, 1/2]$, σ, $C > 0$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C|\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(x_\infty)|^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(x_\infty).$$

Łojasiewiczova nerovnost platí například pro všechny reálně analytické funkce, což dokázal Stanisław Łojasiewicz ve své práci (Łojasiewicz, 1963).

Důležitou aplikací Łojasiewiczovy nerovnosti je její použití na diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0, \quad t \geq 0$$

s neznámou funkcí u a známou funkcí $\mathcal{E}$. S využitím Łojasiewiczovy nerovnosti lze dokázat konvergenci řešení k ekvilibriu. Konkrétně pokud funkce $\mathcal{E}$ splňuje v bodě x_∞ Łojasiewiczovu nerovnost a bod x_∞ je hromadným bodem funkce $u(t)$ pro $t \to +\infty$, pak lze dokázat, že bod x_∞ je dokonce limitou funkce $u(t)$ pro $t \to +\infty$. Znalost Łojasiewiczova exponentu θ lze navíc využít k odhadu rychlosti konvergence řešení u, a to jak z hlediska vzdálenosti od limitního stavu, tak z hlediska délky zbývající trajektorie po limitní stav. Čím větší je exponent θ, tím lepší jsou tyto odhady. Pokud dokonce víme, že exponent θ je optimální, pak je optimální i odhad rychlosti konvergence řešení u z hlediska délky zbývající trajektorie po limitní stav.

Pro úvodní seznámení s Łojasiewiczovou nerovností lze doporučit kapitolu 2 z článku (Chill, 2003). V této bakalářské práci jsou podány důkazy Łojasiewiczovy nerovnosti pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce a pro funkce s jednoduchým křížením. Tyto důkazy vychází z článku (Feehan, 2017). Dále jsou v práci uvedeny důkazy vět související s konvergencí řešení výše uvedené rovnice, jenž jsou převzaté z článku (Haraux a kol., 2009).

Vlastním přínosem této bakalářské práce je podrobnější rozpracování důkazů a opravení chyb v důkazu Łojasiewiczovy nerovnosti pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce. Zejména jsem v tomto důkazu podrobněji odůvodnil možnost narovnání podvariety kritických bodů. Oproti zdroji jsem navíc zkoumal i otázku optimality Łojasiewiczova exponentu.

1. Základní definice a tvrzení

Značení. Buď $d \in \mathbb{N}$. Symbol $B_\sigma(x)$ značí otevřenou kouli v $\mathbb{R}^d$ se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^d$ a poloměrem $\sigma > 0$, tedy

$$B_\sigma(x) = \{y \in \mathbb{R}^d; \|y\|_{\mathbb{R}^d} < \sigma\}\,.$$

Značení. Buď $d \in \mathbb{N}$ a $A,B \subset \mathbb{R}^d$. Pak symbolem $A - B$ rozumíme množinu

$$\{a - b;\ a \in A, b \in B\}\,.$$

Značení. Buďte $d, k \in \mathbb{N}$ a $K : \left(\mathbb{R}^d\right)^k \to \mathbb{R}$ buď symetrická k-lineární forma. Pak pro $\xi \in \mathbb{R}^d$ píšeme zkráceně $K\xi^k$ místo delšího $K(\xi, \ldots, \xi)$. Podobně pro $1 \leq i < k$ rozumíme symbolem $K\xi^i$ symetrickou $(k-i)$-lineární formu

$$\begin{aligned} K\xi^i\colon \quad & \left(\mathbb{R}^d\right)^{k-i} \to \mathbb{R} \\ \left(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(k-i)}\right) & \mapsto K(\xi, \ldots, \xi, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(k-i)}), \end{aligned}$$

kde $\eta^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k - i$ jsou libovolné vektory z prostoru $\mathbb{R}^d$.

Značení. Buď $d \in \mathbb{N}$ a $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ funkce. Pak symbolem $\omega(u)$ rozumíme množinu všech hromadných bodů funkce $u(t)$ pro $t \to +\infty$, to jest takových bodů $x \in \mathbb{R}^d$, pro něž existuje rostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, že platí $\lim_{n\to+\infty} u(t_n) = x$.

Definice 1. *(asymptotické složitosti)*
Buďte $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ funkce. Řekneme, že

a) $f(t)$ je asymptoticky menší nebo rovno $g(t)$ pro $t \to +\infty$, značíme $f(t) = O(g(t))$, pokud

$$\exists C > 0, \exists t_0 \geq 0, \forall t \geq t_0 : f(t) \leq Cg(t)\,,$$

b) $f(t)$ je asymptoticky větší nebo rovno $g(t)$ pro $t \to +\infty$, značíme $f(t) = \Omega(g(t))$, pokud

$$\exists C > 0, \exists t_0 \geq 0, \forall t \geq t_0 : f(t) \geq Cg(t)\,,$$

c) $f(t)$ je asymptoticky stejné jako $g(t)$ pro $t \to +\infty$, značíme $f(t) = \Theta(g(t))$, pokud

$$f(t) = O(g(t)) \ \text{a}\ f(t) = \Omega(g(t))\,.$$

Definice 2. *(Łojasiewiczova nerovnost)*
Buď $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^1. Řekneme, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě $x_\infty \in \mathcal{U}$, pokud existují konstanty $\theta \in (0, 1/2]$, σ, $C > 0$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C|\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(x_\infty)|^{1-\theta}\,, \quad \forall x \in B_\sigma(x_\infty)\,.$$

Konstantu θ nazveme Łojasiewiczův exponent. Łojasiewiczův exponent θ nazveme optimální, pokud existují konstanty δ, $c > 0$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq c|\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(x_\infty)|^{1-\theta}\,, \quad \forall x \in B_\delta(x_\infty)\,.$$

Poznámka. Snadno se ověří, že pokud funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost s Łojasiewiczovým exponentem θ, pak ji splňuje i s exponentem $\theta' \in (0, \theta]$.

Poznámka. Pokud funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost s Łojasiewiczovým exponentem θ, který je optimální, pak ji nesplňuje s žádným exponentem $\theta' \in (0, 1/2]$, který je větší než θ.

Věta 1. *(Taylorova formule)*
Buďte n, k, $M \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní otevřené okolí bodu $0 \in \mathbb{R}^n$, $x, x_0 \in \mathcal{U}$ a $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ funkce třídy C^M na $\mathcal{U}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + (f'(x_0))(x - x_0) + \frac{(f''(x_0))(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\
&\dots + \frac{\left(f^{(M-1)}(x_0)\right)(x - x_0)^{M-1}}{(M-1)!} + \\
&+ \frac{1}{(M-1)!} \int_0^1 (1-t)^{M-1} \left(f^{(M)}(x_0 + t(x - x_0))\right)(x - x_0)^M dt\,.
\end{aligned}$$

Důsledek. *(upravená Taylorova formule)*
Buďte n, k, $M \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní otevřené okolí bodu $0 \in \mathbb{R}^n$, $x, x_0 \in \mathcal{U}$ a $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ funkce třídy C^M na $\mathcal{U}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + (f'(x_0))(x - x_0) + \frac{(f''(x_0))(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\
&\dots + \frac{\left(f^{(M-1)}(x_0)\right)(x - x_0)^{M-1}}{(M-1)!} + \frac{\left(f^{(M)}(0)\right)(x - x_0)^M}{M!} + \\
&+ \frac{1}{(M-1)!} \int_0^1 (1-t)^{M-1} \left(f^{(M)}(x_0 + t(x - x_0)) - f^{(M)}(0)\right)(x - x_0)^M dt\,.
\end{aligned}$$

Důkaz. Věta je důsledkem předchozího tvrzení. Stačí si uvědomit, že platí

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(M-1)!} \int_0^1 (1-t)^{M-1} \left(f^{(M)}(0)\right)(x - x_0)^M dt = \\
&\quad = \frac{1}{(M-1)!} \left(f^{(M)}(0)\right)(x - x_0)^M \int_0^1 (1-t)^{M-1} = \frac{1}{M!} \left(f^{(M)}(0)\right)(x - x_0)^M\,.
\end{aligned}$$

Tím je důsledek dokázán. □

2. Zobecněné Morseovy-Bottovy funkce

V následující kapitole zadefinujeme Morseovy-Bottovy funkce, zobecněné Morseovy-Bottovy funkce a dokážeme Łojasiewiczovu nerovnost pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce. Navíc ukážeme, že uvedená volba Łojasiewiczova exponentu θ je optimální.

Značení. Buď $d \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ buď varieta. Pak $T_x\mathcal{V}$ značí tečný prostor k varietě $\mathcal{V}$ v bodě $x \in \mathcal{V}$ a $T_x^{\perp}\mathcal{V}$ značí jeho ortogonální doplněk.

Definice 3. *(Morseova-Bottova funkce)*
Buď $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^2. Označme $\operatorname{Crit}\mathcal{E} := \{x \in \mathcal{U} : \mathcal{E}'(x) = 0\}$. Řekneme, že $\mathcal{E}$ je Morseova-Bottova funkce v bodě $x_\infty \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$, pokud platí zároveň

a) $\operatorname{Crit}\mathcal{E}$ *je podvarieta třídy C^2 množiny $\mathcal{U}$,*

b) $\mathcal{E}''(x_\infty)(\xi,\xi) \neq 0$ *pro všechna nenulová $\xi \in T_{x_\infty}^{\perp}\operatorname{Crit}\mathcal{E}$.*

Věta 2. *(Łojasiewiczova nerovnost pro Morseovy-Bottovy funkce)*
Buď $d \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina. Pokud $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je Morseova-Bottova funkce v bodě $x_\infty \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$, pak je v bodě x_∞ splněna Łojasiewiczova nerovnost s Łojasiewiczovým exponentem $1/2$.

Důkaz. Věta je důsledkem Łojasiewiczovy nerovnosti pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce, která bude dokázána níže. □

Poznámka. Dle (Feehan, 2017) věta platí i za slabších předpokladů. Stačí místo podmínky b) v definici Morseovy-Bottovy funkce předpokládat slabší podmínku b) $T_{x_\infty}\operatorname{Crit}\mathcal{E} = \operatorname{Ker}\mathcal{E}''(x_\infty)$, kde $\mathcal{E}''(x_\infty)$ je chápán jako operátor z prostoru $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\star}\right)$.

Definice 4. *(zobecněná Morseova-Bottova funkce)*
Buďte $d \geq 1$, $N \geq 2$ přirozená čísla, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^N. Označme $\operatorname{Crit}\mathcal{E} := \{x \in \mathcal{U} : \mathcal{E}'(x) = 0\}$. Řekneme, že $\mathcal{E}$ je zobecněná Morseova-Bottova funkce řádu N v bodě $x_\infty \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$, pokud platí zároveň

a) $\operatorname{Crit}\mathcal{E}$ *je podvarieta třídy C^N množiny $\mathcal{U}$,*

b) $\mathcal{E}^{(n)}(x) = 0$ *pro všechna $x \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$ a $1 \leq n \leq N-1$,*

c) $\mathcal{E}^{(N)}(x_\infty)\xi^N \neq 0$ *pro všechna nenulová $\xi \in T_{x_\infty}^{\perp}\operatorname{Crit}\mathcal{E}$.*

Následující věta je bez dodatku o optimalitě Łojasiewiczova exponentu uvedena v článku (Feehan, 2017) jako Theorem 2.5. Její důkaz začíná narovnáním podvariety kritických bodů $\operatorname{Crit}\mathcal{E}$, což je vhodné zjednodušení. Stěžejním bodem důkazu je použití Taylorových formulí pro následné odhady.

Věta 3. *(Łojasiewiczova nerovnost pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce) Buďte $d \geq 1$, $N \geq 2$ přirozená čísla, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina. Označme* $\operatorname{Crit} \mathcal{E} := \{x \in \mathcal{U} : \mathcal{E}'(x) = 0\}$. *Pokud $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je zobecněná Morseova-Bottova funkce řádu N v bodě $x_\infty \in \operatorname{Crit} \mathcal{E}$, pak je v bodě x_∞ splněna Łojasiewiczova nerovnost s Łojasiewiczovým exponentem $1/N$. Navíc platí, že Łojasiewiczův exponent $\theta = 1/N$ je optimální.*

Důkaz. Před začátkem samotného důkazu provedeme dvě zjednodušení. Nejprve přesuneme klíčový bod x_∞ do počátku a posunutím hodnot funkce o konstantu v něm nastavíme $\mathcal{E}(x_\infty) = 0$. K tomu stačí pro $x \in \mathcal{U} - \{x_\infty\}$ definovat funkci $\mathcal{E}_0(x) := \mathcal{E}(x + x_\infty) - \mathcal{E}(x_\infty)$. Derivace původní funkce zůstanou zachovány, neboť pro $x \in U - \{x_\infty\}$ platí $\mathcal{E}_0^{(n)}(x) = \mathcal{E}^{(n)}(x + x_\infty)$. Při přechodu od funkce $\mathcal{E}$ k funkci $\mathcal{E}_0$ zůstane zachován i rozdíl $\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(x_\infty)$, který vystupuje v Łojasiewiczově nerovnosti. Tudíž můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_\infty = 0$ a $\mathcal{E}(0) = 0$.

Zadruhé, označme $K := T_0 \operatorname{Crit} \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$. Z toho, že $\operatorname{Crit} \mathcal{E}$ je podvarieta třídy C^N množiny $\mathcal{U}$, máme existenci čísla $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq d$, otevřených množin $G \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in V$ a hladkého zobrazení $\varphi : G \to \operatorname{Crit} \mathcal{E} \cap V$, které je difeomorfismem třídy C^N. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že také $0 \in G$ a $\varphi(0) = 0$. V případě, že by nastal okrajový případ $k = 0$ nebo $k = d$, tak v tomto zjednodušení nic zjednodušovat nebudeme. Dále předpokládejme, že $0 < k < d$ a $(n_1, \dots, n_{d-k})$ buď nějakou bází prostoru $K^\perp$. Pro nějaké otevřené okolí počátku $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, takové, že $G \times \{0\} \subset \Omega$, definujme $\bar{\mathcal{E}} : \Omega \to \mathbb{R}$ jako $\bar{\mathcal{E}}(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{d-k}) := \mathcal{E}(\psi(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{d-k}))$, kde $\psi(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{d-k}) = \varphi(s_1, \dots, s_k) + t_1 n_1 + \dots + t_{d-k} n_{d-k}$. Může se stát, že definice $\bar{\mathcal{E}}$ není jednoznačná. V takovém případě stačí zmenšit množiny V a Ω. Navíc můžeme předpokládat, že $\psi(\Omega) = V$.

Pro zkrácení značení pišme pouze $s = (s_1, \dots, s_k)$, $t = (t_1, \dots, t_{d-k})$, $(s,t) = (s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{d-k})$. Nyní ukážeme, že funkce $\bar{\mathcal{E}} : \Omega \to \mathbb{R}$ je zobecněná Morseova-Bottova řádu N v bodě 0. Ověřujme postupně podmínky z definice zobecněné Morseovy-Bottovy funkce. Předně platí, že $\bar{\mathcal{E}}$ je třídy C^N na Ω. Je tomu tak, protože funkce φ, $t_1 n_1, \dots, t_{d-k} n_{d-k}$ jsou třídy C^N na Ω, a tudíž ψ je třídy C^N na Ω. Funkce $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \circ \psi$ je třídy C^N na Ω, neboť je složením dvou funkcí třídy C^N. Spočtěme nyní parciální derivace funkce $\bar{\mathcal{E}}$ pro $(s,t) \in \Omega$.
Pro $i = 1, \dots, k$ platí:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial s_i}(s,t) = \mathcal{E}'(\psi(s,t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_i}(s) .$$

Pro $j = 1, \dots, d-k$ platí:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t_j}(s,t) = \mathcal{E}'(\psi(s,t)) \cdot n_j .$$

Vzhledem k tomu, že pro $s \in G$ je $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}(s), n_1, \dots, n_{d-k}\right)$ báze $\mathbb{R}^n$, je $\bar{\mathcal{E}}'(s,t) = 0$ právě tehdy, když $\mathcal{E}'(\psi(s,t)) = 0$, a to nastane právě tehdy, když $\psi(s,t) \in \operatorname{Crit} \mathcal{E}$. Pro $(s,t) = (s,0) = (s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0) \in \Omega$ platí $\psi(s,0) = \varphi(s) \in \operatorname{Crit} \mathcal{E}$. Pokud však $t \neq 0$, pak $\psi(s,t) \notin \operatorname{Crit} \mathcal{E}$. Z posledních dvou pozorování a předchozích ekvivalencí vyplývá, že

$$\operatorname{Crit} \bar{\mathcal{E}} = \left\{(s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d ; s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}\right\} \cap \Omega ,$$

což je podvarieta třídy C^N množiny Ω.

Nyní ověříme, že pro fukci $\overline{\mathcal{E}}$ platí podmínka b) z definice zobecněné Morseovy-Bottovy funkce, tedy, že platí $\overline{\mathcal{E}}^{(n)}(s,t) = 0$ pro všechna $(s,t) = (s,0) \in \operatorname{Crit} \overline{\mathcal{E}}$ a $1 \leq n \leq N-1$. Buď tedy $(s,0) \in \operatorname{Crit} \overline{\mathcal{E}}$ a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1 \leq n \leq N-1$. Při výpočtu n-té derivace využijeme rovnost $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \circ \psi$ na Ω a toho, že funkce $\mathcal{E}$ je zobecněná Morseova-Bottova. Přímo z definice totiž máme, že $\mathcal{E}^{(j)}(\psi(s,0)) = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$, neboť $\psi(s,0) = \varphi(s) \in \operatorname{Crit} \mathcal{E}$, a právě nulovost těchto derivací zaručí, že platí $\overline{\mathcal{E}}^{(n)}(s,0) = 0$ díky větě o derivaci složené funkce.

Pro dokázání toho, že funkce $\bar{\mathcal{E}}$ je zobecněná Morseova-Bottova řádu N v bodě 0, zbývá ověřit $\overline{\mathcal{E}}^{(N)}(0)\eta^N \neq 0$ pro všechna nenulová $\eta \in T_0^{\perp} \operatorname{Crit} \overline{\mathcal{E}}$. Z tvaru množiny $\operatorname{Crit} \overline{\mathcal{E}}$ plyne, že $\eta = (0, \ldots, 0, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ a alespoň jedno z čísel $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_d$ je nenulové. Z věty o derivaci složené funkce a toho, že $\mathcal{E}^{(n)}(0) = 0$ pro $n = 1, \ldots, N-1$ máme

$$\overline{\mathcal{E}}^{(N)}(0)\eta^N = \mathcal{E}^{(N)}(0)(\psi'(0)\eta)^N = \mathcal{E}^{(N)}(0)\left(\sum_{i=1}^{d-k} \eta_{k+i} n_i\right)^N \neq 0,$$

neboť $\sum_{i=1}^{d-k} \eta_{k+i} n_i$ je nenulový prvek z $T_0^{\perp} \operatorname{Crit} \mathcal{E}$.

Nyní dokážeme, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě 0 s exponentem $1/N$ právě tehdy, když funkce $\bar{\mathcal{E}}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě 0 s exponentem $1/N$. Předpokládejme nejprve, že $\bar{\mathcal{E}}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě 0, tedy, že existují konstanty $C_1 \in (0, +\infty)$ a $\sigma_1 \in (0,1]$ takové, že

$$\left\|\bar{\mathcal{E}}'(s,t)\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C_1 \left|\bar{\mathcal{E}}(s,t)\right|^{1-\frac{1}{N}}, \quad \forall (s,t) \in B_{\sigma_1}(0).$$

Pak pro $(s,t) \in B_{\sigma_1}(0)$ platí

$$\begin{aligned} C_1 \left|\bar{\mathcal{E}}(s,t)\right|^{1-\frac{1}{N}} &\leq \left\|\bar{\mathcal{E}}'(s,t)\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \|(\mathcal{E} \circ \psi)'(s,t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \|\mathcal{E}'(\psi(s,t))\psi'(s,t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq \\ &\leq \|\mathcal{E}'(\psi(s,t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \|\psi'(s,t)\|_{\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\star})} \leq A_1 \|\mathcal{E}'(\psi(s,t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}}, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne ze spojitosti $\psi'(s,t) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\star})$ vzhledem k $(s,t) \in \Omega$. Nyní stačí volit $\sigma \in (0,1]$ takové, že $B_\sigma(0) \subset \psi\left(B_{\sigma_1}(0)\right)$. Pak funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost s konstantami C_1/A_1 a σ, neboť pro $x \in B_\sigma(0)$, $x = \psi(s,t)$, $(s,t) \in \Omega$, platí

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{A_1} |\mathcal{E}(x)|^{1-\frac{1}{N}} = \frac{C_1}{A_1} |\mathcal{E}(\psi(s,t))|^{1-\frac{1}{N}} = \frac{C_1}{A_1} \left|\bar{\mathcal{E}}(s,t)\right|^{1-\frac{1}{N}} &\leq \\ \leq \|\mathcal{E}'(\psi(s,t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}}&. \end{aligned}$$

Podobně by se ukázal i opačný směr, tedy, že pokud funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě 0 s exponentem $1/N$, pak ji splňuje i funkce $\bar{\mathcal{E}}$ v bodě 0 s exponentem $1/N$. Stačí si uvědomit, že $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} \circ \psi^{-1}$.

Z předcházejících zjednodušujících úvah plyne, že Łojasiewiczovu nerovnost stačí dokázat pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce, které mají v bodě 0 množinu kritických bodů tvaru $\left\{(s_1, \ldots, s_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d; s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}\right\} \cap \mathcal{U}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq d$. Dále tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$K = \left\{(s_1, \ldots, s_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d; s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}\right\} \text{ a } \mathcal{U} \cap K = \mathcal{U} \cap \operatorname{Crit} \mathcal{E}.$$

Případ, kdy $k = d$ je triviální, neboť v takovém případě je funkce $\mathcal{E}$ konstantně nulová na $\mathcal{U}$, a tedy $0 = \|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq |\mathcal{E}(x)|^{1-\frac{1}{N}} = 0$ pro $x \in \mathcal{U}$. Dále nechť $k < d$. Označme $\mathcal{K} := [-R,R]^d$ pro nějaké $R \in (0,1]$ takové, že $[-R,R]^d \subset \mathcal{U}$. Uvažujme libovolné $x \in \mathcal{K}$. Každé takové x můžeme jednoznačně psát ve tvaru $x = x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\parallel \in K \cap \mathcal{K}$ a $x_\perp \in K^\perp \cap \mathcal{K}$.

Aplikováním upravené Taylorovy formule na $f = \mathcal{E}', n = k = d, M = N - 1$ získáme pro všechna $x \in \mathcal{K}$ rovnost

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(x) = \mathcal{E}'(x_\parallel) + \mathcal{E}''(x_\parallel)x_\perp + \frac{\mathcal{E}^{(3)}(x_\parallel)x_\perp^2}{2!} + \dots \\ \dots + \frac{\mathcal{E}^{(N-1)}(x_\parallel)x_\perp^{N-2}}{(N-2)!} + \frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}}{(N-1)!} + \\ + \frac{1}{(N-2)!}\int_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\,.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\mathcal{E}$ je zobecněná Morseova-Bottova, platí $\mathcal{E}^{(n)}(x_\parallel) = 0$ pro $1 \leq n \leq N-1$, a tedy

$$\mathcal{E}'(x) = \frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{1}{(N-2)!}\int_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\,. \tag{2.1}$$

Odhadujme $\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \sup\limits_{\|y\|_{\mathbb{R}^d}\leq 1} |\mathcal{E}'(x)y|$ zdola:

Je-li $\|y\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1$, pak platí

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}'(x)y| = \Bigg| \frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}y}{(N-1)!} + \\ + \frac{1}{(N-2)!}\left(\int_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\right)y\Bigg| \geq \\ \geq \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}y}{(N-1)!}\right| - \\ - \left|\frac{1}{(N-2)!}\left(\int_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\right)y\right|.\end{aligned}$$

Odhadujme shora druhý člen posledního výrazu jako

$$\left|\frac{1}{(N-2)!}\left(\int\limits_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\right)y\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(N-2)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}y\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 |1-t|^{N-2}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}y\right|dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 1\cdot\max_{z\in\mathcal{K}}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}y\right|dt \leq$$

$$\leq \max_{z\in\mathcal{K}}\left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}.$$

Dohromady tedy platí

$$|\mathcal{E}'(x)y| \geq \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}y}{(N-1)!}\right| - \max_{z\in\mathcal{K}}\left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}.$$

Přejdeme k supremu přes $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1$ a získáme

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{1}{(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} - \max_{z\in\mathcal{K}}\left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}.$$

Nyní využijeme spojitosti $\mathcal{E}^{(N)}$ na $\mathcal{K}$ a toho, že číslo $\left\|\mathcal{E}^{N}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}$ je kladné pro nenulová $x_\perp$. Pro taková $x_\perp$ totiž platí

$$\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N}\right|}{\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}} > 0\,.$$

Můžeme tedy volit $R > 0$ tak malé, že

$$\max_{z\in\mathcal{K}}\left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq \frac{1}{2(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}, \quad \forall x \in \mathcal{K}\,.$$

Máme tedy odhad zdola

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{1}{2(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}, \quad \forall x \in \mathcal{K}\,. \tag{2.2}$$

V opačném směru aplikováním upravené Taylorovy formule na $f = \mathcal{E}$, $n = d$, $k = 1$, $M = N$ získáme pro všechna $x \in \mathcal{K}$ rovnost

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x_\parallel) + \mathcal{E}'(x_\parallel)x_\perp + \frac{\mathcal{E}''(x_\parallel)x_\perp^2}{2!} + \dots$$
$$\dots + \frac{\mathcal{E}^{(N-1)}(x_\parallel)x_\perp^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!} +$$
$$+ \frac{1}{(N-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{N-1}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N dt\,.$$

Opět využijeme toho, že funkce $\mathcal{E}$ je zobecněná Morseova-Bottova, tudíž platí $\mathcal{E}^{(n)}(x_\parallel) = 0$ pro $1 \le n \le N-1$. Nyní navíc platí i $\mathcal{E}(x_\parallel) = 0$, neboť $0, x_\parallel \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}(0) = 0$. Předchozí rovnost se zjednoduší na

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!} + \frac{1}{(N-1)!}\int_0^1 (1-t)^{N-1}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N dt\,. \tag{2.3}$$

Odhadujme $|\mathcal{E}(x)|$ shora:

$$|\mathcal{E}(x)| \le \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!}\right| + \frac{1}{(N-1)!}\int_0^1 |1-t|^{N-1}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right| dt\,.$$

Odhadujme shora druhý člen posledního výrazu jako

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(N-1)!}\int_0^1 |1-t|^{N-1}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right| dt \le \\
&\quad \le \int_0^1 1\cdot\max_{z\in\mathcal{K}}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right| dt \le \max_{z\in\mathcal{K}}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right|.
\end{aligned}$$

Nyní využijeme spojitosti $\mathcal{E}^{(N)}$ na $\mathcal{K}$. Můžeme volit $R > 0$ tak malé, že

$$\max_{z\in\mathcal{K}}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!}\right|, \quad \forall x \in \mathcal{K}\,.$$

Máme tedy odhad shora

$$|\mathcal{E}(x)| \le \frac{2}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N\right|, \quad \forall x \in \mathcal{K}\,. \tag{2.4}$$

Hledejme nyní konstanty $C_0 \in (0, +\infty)$ a $\sigma \in (0{,}1]$ s nimiž je splněna Łojasiewiczova nerovnost. Předně si všimněme, že pokud $x = x_\parallel + 0 \in \mathcal{K}$, pak $x \in \operatorname{Crit}\mathcal{E}$. Pro taková x je nerovnost splněna triviálně, neboť $\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = 0$ a $|\mathcal{E}(x)| = 0$. Dále mějme pouze $x \in \mathcal{K}$ tvaru $x = x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\parallel \in K \cap \mathcal{K}$ a $x_\perp \in K^\perp \cap \mathcal{K}$, přičemž $x_\perp \ne 0$. Jednotkový vektor příslušný k vektoru $x_\perp$ značme $\tilde{x}_\perp$. Začněme nerovností (2.2) a postupně upravujme:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} &\ge \frac{1}{2(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \frac{N\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}}{4}\frac{2}{N!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \ge \\
&\ge \frac{N\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}}{4}\frac{2}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^{N}\right| = \\
&= \frac{N}{4}\left(\frac{2}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{1}{N}}\left(\frac{2\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^N}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{N-1}{N}} = \\
&= \frac{N}{4}\left(\frac{2}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{1}{N}}\left(\frac{2}{N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N\right|\right)^{\frac{N-1}{N}} \ge \\
&\ge \frac{N}{4}\left(\frac{2}{N!}\zeta\right)^{\frac{1}{N}}|\mathcal{E}(x)|^{1-\frac{1}{N}}\,,
\end{aligned}$$

kde v poslední úpravě jsme využili nerovnost (2.4) a číslo

$$\zeta := \min_{\xi\in K^\perp,\, \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}=1} \left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\xi^N\right| ,$$

které je kladné a dobře definované díky tomu, že funkce $\mathcal{E}$ je zobecněná Morseova-Bottova v bodě 0.

Funkce $\mathcal{E}$ tedy v bodě 0 splňuje Łojasiewiczovu nerovnost s Łojasiewiczovým exponentem $1/N$, s konstantou $\sigma \in (0,R)$ a konstantou

$$C_0 := \frac{N}{4}\left(\frac{2}{N!}\zeta\right)^{\frac{1}{N}} .$$

Pro důkaz optimality Łojasiewiczova exponentu ukážeme, že existuje konstanta $C_1 \in (0, +\infty)$ taková, že pro funkci $\mathcal{E}$ se zjednodušujícími předpoklady platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{R^{d\star}} \le C_1 \left|\mathcal{E}(x)\right|^{1-\frac{1}{N}} , \quad \forall x \in B_\sigma(0) . \tag{2.5}$$

Mějme tedy $x \in B_\sigma(0) \subset K$, které opět lze jednoznačně psát ve tvaru $x = x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\parallel \in K \cap \mathcal{K}$ a $x_\perp \in K^\perp \cap \mathcal{K}$ a odhadujme nejprve $\|\mathcal{E}'(x)\|_{R^{d\star}}$ shora. Buď $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\|_{\mathbb{R}^d} \le 1$. Pak z rovnosti (2.1) plyne

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}'(x)y| \le& \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}y}{(N-1)!}\right| + \\ &+ \left|\frac{1}{(N-2)!}\left(\int_0^1 (1-t)^{N-2}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel) + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}dt\right)y\right| .\end{aligned}$$

Druhý člen posledního výrazu odhadneme stejně jako dříve a dostaneme

$$|\mathcal{E}'(x)y| \le \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}y}{(N-1)!}\right| + \max_{z\in\mathcal{K}} \left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} .$$

Přejdeme k supremu přes $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\|_{\mathbb{R}^d} \le 1$ a získáme

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \le& \frac{1}{(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} + \max_{z\in\mathcal{K}}\left\|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \le \\ \le& \frac{2}{(N-1)!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}} .\end{aligned} \tag{2.6}$$

V opačném směru odhadujme $|\mathcal{E}(x)|$ zdola. Z rovnosti (2.3) plyne

$$|\mathcal{E}(x)| \ge \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!}\right| - \left|\frac{1}{(N-1)!}\int_0^1 (1-t)^{N-1}\left(\mathcal{E}^{(N)}(x_\parallel + tx_\perp) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N dt\right| .$$

Druhý člen posledního výrazu opět odhadneme stejně jako dříve a získáme

$$|\mathcal{E}(x)| \ge \left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!}\right| - \max_{z\in\mathcal{K}}\left|\left(\mathcal{E}^{(N)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(0)\right)x_\perp^N\right| \ge \frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N}{N!}\right| . \tag{2.7}$$

Nyní s využitím odhadů (2.6) a (2.7) ukážeme platnost nerovnosti (2.5) pro nějakou konstantu C_1. Pro $x = x_\parallel + 0 \in B_\sigma(0)$ jsou opět obě strany nerovnosti nulové nezávisle na volbě konstanty C_1. Můžeme tedy dále předpokládat, že $x = x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\perp \neq 0$ jsou opět obě strany nerovnosti nulové, a to nezávisle na volbě konstanty C_1. Můžeme tedy dále předpokládat, že $x = x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\perp \neq 0$. Začněme nerovností (2.6) a postupně upravujme:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} &\leq \frac{2}{(N-1)!}\|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^{N-1}\|_{\mathbb{R}^{d\star}} = \frac{2\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}}{(N-1)!}\|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^{N-1}\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq \\
&\leq \frac{2\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}}{(N-1)!}\frac{\eta}{\zeta}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right| = \frac{4N\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}\eta}{\zeta}\frac{1}{2N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right| = \\
&= \frac{4N\eta}{\zeta}\left(\frac{1}{2N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{1}{N}}\left(\frac{\|x_\perp\|_{\mathbb{R}^d}^{N-1}}{2N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{N-1}{N}} = \\
&= \frac{4N\eta}{\zeta}\left(\frac{1}{2N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^N\right|\right)^{\frac{1}{N}}\left(\frac{1}{2N!}\left|\mathcal{E}^{(N)}(0)x_\perp^N\right|\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \\
&\leq \frac{4N\eta}{\zeta}\left(\frac{1}{2N!}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)\tilde{x}_\perp^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}}\right)^{\frac{1}{N}}|\mathcal{E}(x)|^{\frac{N-1}{N}} \leq \\
&\leq \frac{4N\eta}{\zeta}\left(\frac{\eta}{2N!}\right)^{\frac{1}{N}}|\mathcal{E}(x)|^{\frac{N-1}{N}}.
\end{aligned}$$

V průběhu jsme využili již dříve definované číslo ζ a číslo

$$\eta := \max_{\xi \in K^\perp,\, \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}=1}\left\|\mathcal{E}^{(N)}(0)\xi^{N-1}\right\|_{\mathbb{R}^{d\star}},$$

které je dobře definované a kladné díky tomu, že platí $\eta \geq \zeta > 0$.

Ukázali jsme platnost nerovnosti (2.5) s konstantou

$$C_1 := \frac{4N\eta}{\zeta}\left(\frac{\eta}{2N!}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Tím je důkaz hotov.

□

3. Funkce s jednoduchým křížením

V této kapitole definujeme C^1 funkce s jednoduchým křížením a dokážeme pro ně platnost Łojasiewiczovy nerovnosti. Pro některé z nich navíc ukážeme i optimalitu Łojasiewiczova exponentu.

Definice 5. *(C^1 funkce s jednoduchým křížením)*
Nechť $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ je otevřené okolí počátku v $\mathbb{R}^d$ a $\mathcal{E}$ je C^1 funkce na $\mathcal{U}$. Řekneme, že $\mathcal{E}$ má jednoduché křížení, pokud

$$\mathcal{E}(x) = x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d} \mathcal{F}(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{U},$$

kde $n_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, d$ a $\mathcal{F}$ je C^1 funkce na $\mathcal{U}$ taková, že pro všechna $x \in \mathcal{U}$ platí $\mathcal{F}(x) \neq 0$.

Následující věta je bez dodatku o optimalitě Łojasiewiczova exponentu uvedena v článku (Feehan, 2017, verze 1) jako Theorem 4.

Věta 4. *(Łojasiewicszova nerovnost pro C^1 funkce s jednoduchým křížením)*
Nechť $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\mathcal{U}$ je otevřené okolí počátku v $\mathbb{R}^d$ a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ buď C^1 funkce s jednoduchým křížením. Pokud $\mathcal{E}(0) = 0$ a $\mathcal{E}'(0) = 0$, pak je v bodě 0 splněna Łojasiewiczova nerovnost s Lojasiewiczovým exponentem $\theta = \frac{1}{cn}$. Číslo $c \leq d$ značí počet činitelů $x_i^{n_i}$ ve výrazu $x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d} \mathcal{F}(x)$ takových, že $n_i \geq 1$ a n je definováno jako $n = \max_{1 \leq i \leq d} n_i$. Pokud $n_i \in \{0, n\}$ pro všechna $i = 1, \dots, d$, pak je tato volba exponentu θ optimální.

Důkaz. Nejprve dokažme platnost Łojasiewiczovy nerovnosti s exponentem $\theta = \frac{1}{cn}$, tedy hledejme konstanty $C \in (0, \infty)$ a $\sigma \in (0, 1]$ takové, že

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C|\mathcal{E}(x)|^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(0). \tag{3.1}$$

Funkce $\mathcal{E}$ je C^1 funkcí na $\mathcal{U}$ s jednoduchým křížením, tudíž platí

$$\mathcal{E}(x) = x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d} \mathcal{F}(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{U},$$

kde $n_i \in \{0\} \cup [1, +\infty)$, $i = 1, \dots, d$ a $\mathcal{F}$ je C^1 funkce na $\mathcal{U}$ taková, že pro všechna $x \in \mathcal{U}$ platí $\mathcal{F}(x) \neq 0$. Z předpokladu $\mathcal{E}(0) = 0$ plyne, že je nenulový počet čísel n_i, $i = 1, \dots, d$, které jsou nenulové. Jinak bychom byli ve sporu s předpokladem pro funkci $\mathcal{F}$, totiž $0 = \mathcal{E}(0) = \mathcal{F}(0) \neq 0$. Označme tento počet jako c a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$\mathcal{E}(x) = x_1^{n_1} \dots x_c^{n_c} \mathcal{F}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U},\ n_i \geq 1,\ i = 1, \dots, c.$$

Po umocnění rovnosti na druhou jistě platí

$$\mathcal{E}^2(x) = x_1^{2n_1} \dots x_c^{2n_c} \mathcal{F}^2(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}. \tag{3.2}$$

Definujme $V := \{x \in \mathcal{U}; \forall i \in \{1, \dots, c\} : x_i \neq 0\}$ a všimněme si, že pro $x \in \mathcal{U} \setminus V$ je nerovnost (3.1) splněna triviálně, neboť je vždy na pravé straně nerovnosti 0.

Dále budeme zkoumat pouze $x \in V$. Spočtěme nyní parciální derivace funkce $\mathcal{E}$ pro $x \in V$.
Pro $i = 1,\dots,c$ platí:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}(x) = \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{n_j}\right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n_i x_i^{n_i-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{c} x_j^{n_j}\right) \mathcal{F}(x) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{n_j}\right) \left(x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n_i \mathcal{F}(x)\right) x_i^{-1}\,.$$

Pro $i = c+1,\dots,d$ platí:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}(x) = \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{n_j}\right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x)\,.$$

Odhadujme $\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}}$ na V zespodu:

$$\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \sum_{i=1}^{c} \left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}(x)\right|^2 = \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n_j}\right) \sum_{i=1}^{c} \left(x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n_i \mathcal{F}(x)\right)^2 x_i^{-2}\,.$$

Nyní využijeme toho, že $\mathcal{F}$ je třídy C^1 na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{F}(0) \neq 0$. Existuje konstanta $\sigma \in (0,1]$ taková, že $B_\sigma(0) \subset \mathcal{U}$ a

$$\left|x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x)\right| \leq \frac{n_i}{2} |\mathcal{F}(x)|\,, \quad \forall x \in B_\sigma(0) \text{ a } i = 1,\dots,c\,, \tag{3.3}$$

a tudíž

$$\left|x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n_i \mathcal{F}(x)\right| \geq \frac{n_i}{2} |\mathcal{F}(x)|\,, \quad \forall x \in B_\sigma(0) \text{ a } i = 1,\dots,c\,.$$

Můžeme tedy pokračovat v odhadování $\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}}$ jako

$$\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n_j}\right) \sum_{i=1}^{c} \left(\frac{n_i}{2} |\mathcal{F}(x)|\right)^2 x_i^{-2}$$

a získáme

$$\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{\mathcal{F}^2(x)}{4} \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n_j}\right) \sum_{i=1}^{c} x_i^{-2}\,, \quad \forall x \in V \cap B_\sigma(0)\,. \tag{3.4}$$

Definujme $m := \inf_{x\in B_\sigma(0)} |\mathcal{F}(x)| > 0$ a $M := \sup_{x\in B_\sigma(0)} |\mathcal{F}(x)| < +\infty$. Předpokládejme nejprve, že $c = 1$. Pak platí

$$\mathcal{E}'(x) = \left(x_1^{n_1-1}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1}(x) x_1 + n_1 \mathcal{F}(x)\right), x_1^{n_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_2}(x), \dots, x_1^{n_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_d}(x)\right)\,.$$

Z předpokladu věty má platit $\mathcal{E}'(0) = 0$, avšak pro $n_1 = 1$ tomu tak není, neboť $\mathcal{E}'(0) = (\mathcal{F}(0),0,\dots,0) \neq 0$. Pro $c = 1$ tedy zkoumáme jenom případy, kdy $n_1 > 1$. Z (3.2), (3.4) a z definic konstant m a M získáme

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{m}{2} |x_1|^{n_1-1} \text{ a } |\mathcal{E}(x)| \leq M |x_1|^{n_1}\,, \quad \forall x \in V \cap B_\sigma(0)\,.$$

Zkombinováním těchto nerovností získáme

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{m}{2M^{1-\frac{1}{n_1}}} \left|\mathcal{E}(x)\right|^{1-\frac{1}{n_1}} .$$

Pro $c = 1$ jsme tedy dokázali (3.1) s $\theta = \frac{1}{n_1}$ a $C = \frac{m}{2M^{1-\theta}}$. Dále předpokládejme, že $c \geq 2$. Za tohoto předpokladu nám rovnost $\mathcal{E}'(0) = 0$ nedá žádné další omezující podmínky na čísla n_i, $i = 1, \ldots, c$. Z nerovnosti aritmetického a geometrického průměru plyne

$$\sum_{i=1}^{c} x_i^{-2} \geq c \left(\prod_{i=1}^{c} x_i^{-2} \right)^{\frac{1}{c}}, \quad \forall x \in V,$$

a tedy

$$\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n_j} \sum_{i=1}^{c} x_i^{-2} \geq c \prod_{i=1}^{c} |x_i|^{2(n_i - \frac{1}{c})} = c \prod_{i=1}^{c} |x_i|^{2n_i(1-\frac{1}{cn_i})} \geq c \prod_{i=1}^{c} |x_i|^{2n_i(1-\theta)} =$$

$$= c \left(\prod_{i=1}^{c} x_i^{2n_i} \right)^{1-\theta}, \quad \forall x \in V, |x_i| \leq 1 \text{ pro } i = 1, \ldots, c\,.$$

Využitím právě získané nerovnosti v odhadu (3.4) a z definice konstanty m dostaneme odhad

$$\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{cm^2}{4} \left(\prod_{i=1}^{c} x_i^{2n_i} \right)^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(0)\,.$$

Umocněním rovnosti (3.2) na číslo $1 - \theta$ a z definice konstanty M získáme odhad

$$|\mathcal{E}(x)|^{2(1-\theta)} \leq M^{2(1-\theta)} \left(\prod_{i=1}^{c} x_i^{2n_i} \right)^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(0).$$

Zkombinováním těchto nerovností získáme

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \frac{m\sqrt{c}}{2M^{1-\theta}} \left|\mathcal{E}(x)\right|^{1-\theta} ,$$

což je (3.1) s $\theta = \frac{1}{cn}$ a $C = \frac{m\sqrt{c}}{2M^{1-\theta}}$.

Dokažme nyní optimalitu Łojasiewiczova exponentu θ pro funkce $\mathcal{E}$ s jednoduchým křížením, které jsou tvaru

$$\mathcal{E}(x) = x_1^n \ldots x_c^n \mathcal{F}(x), \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{U}.$$

Je-li $x \in V$, pak platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} = \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}(x) \right|^2 =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n_j} \right) \left(\sum_{i=1}^{c} \left(x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n_i \mathcal{F}(x) \right)^2 x_i^{-2} + \sum_{j=c+1}^{d} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right) .$$

S využitím odhadu (3.3) dostaneme

$$\left| x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}(x) + n\mathcal{F}(x) \right| \leq 2n \left|\mathcal{F}(x)\right|, \forall x \in B_\sigma(0) \text{ a } i = 1, \ldots, c\,.$$

Po případném zmenšení konstanty σ můžeme přepokládat, že platí dokonce i

$$\left| x_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_j}(x) \right| \leq 2n \left| \mathcal{F}(x) \right| , \quad \forall x \in B_\sigma(0) \text{ a } i = 1, \ldots, c \, ,$$

neboť funkce $\mathcal{F}$ je třídy C^1 na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{F}(0) \neq 0$. Můžeme tedy pro $x \in V \cap B_\sigma(0)$ odhadovat $\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}}$ jako

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} &\leq \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n} \right) \left(\sum_{i=1}^{c} \left(2n \left|\mathcal{F}(x)\right|\right)^2 x_i^{-2} + \sum_{j=c+1}^{d} \left(x_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_j}(x) \right)^2 x_1^{-2} \right) \leq \\
&\leq \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n} \right) \left(\sum_{i=1}^{c} \left(2n \left|\mathcal{F}(x)\right|\right)^2 x_i^{-2} + \sum_{j=c+1}^{d} \left(2n \left|\mathcal{F}(x)\right|\right)^2 x_1^{-2} \right) \leq \\
&\leq \left(\prod_{j=1}^{c} x_j^{2n} \right) \left((d-c+1) \sum_{i=1}^{c} \left(2n \left|\mathcal{F}(x)\right|\right)^2 x_i^{-2} \right) .
\end{aligned}$$

Speciálně pro všechna $x \in V \cap B_\sigma(0)$ tvaru $x = (t, \ldots, t)$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}'(x)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} &\leq \left(\prod_{j=1}^{c} t^{2n} \right) \left((d-c+1) \sum_{i=1}^{c} \left(2n \left|\mathcal{F}(x)\right|\right)^2 t^{-2} \right) = \\
&= 4n^2 c(d-c+1) \mathcal{F}^2(x) |t|^{2nc-2} = 4n^2 c(d-c+1) \mathcal{F}^2(x) |t|^{2nc(1-\theta)} \leq \\
&\leq 4n^2 c(d-c+1) M^2 |t|^{2nc(1-\theta)}
\end{aligned}$$

a z definice funkce $\mathcal{E}$ plyne

$$|\mathcal{E}(x)|^{2(1-\theta)} = |t|^{2nc(1-\theta)} \left|\mathcal{F}(x)\right|^{2(1-\theta)} \geq m^{2(1-\theta)} |t|^{2nc(1-\theta)} .$$

Zkombinováním posledních dvou nerovností získáme odhad

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq \frac{2nM\sqrt{c(d-c+1)}}{m^{1-\theta}} \left|\mathcal{E}(x)\right|^{1-\theta} , \;\; \forall x \in V \cap B_\sigma(0), x = (t, \ldots, t), t \in \mathbb{R} \, .$$

Tím jsme dokázali optimalitu Łojasiewiczova exponentu θ pro naše speciální funkce $\mathcal{E}$. $\square$

4. Aplikace

V této kapitole uvedeme některá využití Łojasiewiczovy nerovnosti. Mějme $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřenou množinu a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkci třídy C^1. V celé kapitole budeme na intervalu $t \in (0, +\infty)$ zkoumat diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0$$

s neznámou funkcí u. Budeme předpokládat, že řešení u této rovnice má pro $t \to +\infty$ nějaký hromadný bod $x_\infty \in \mathbb{R}^d$, v němž funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost. Za těchto předpokladů budeme umět dokázat, že x_∞ je dokonce limitním bodem funkce u pro $t \to +\infty$. Uvedeme také některé výsledky pro rychlost konvergence tohoto řešení k bodu x_∞.

Následující věta je za obecnějších předpokladů uvedena v (Haraux a kol., 2009) jako Theorem 1.

Věta 5. *(konvergence řešení)*
Buď $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^1. Mějme funkci $u : [0, +\infty) \to \mathcal{U}$, která je třídy C^1 a pro $t \in (0, +\infty)$ splňuje diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0. \tag{4.1}$$

Dále předpokládejme, že existuje $x_\infty \in \omega(u)$ takové, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě x_∞ s Łojasiewiczovým exponentem $\theta \in (0, 1/2]$. Pak $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$.

Důkaz. S využitím rovnice (4.1) odhadneme $(\mathcal{E} \circ u)'(t)$ pro $t \in (0, +\infty)$ jako

$$(\mathcal{E} \circ u)'(t) = \mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = -u'(t) \cdot u'(t) = -\|u'(t)\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq 0\,. \tag{4.2}$$

Platí tedy, že funkce $\mathcal{E} \circ u$ je na $[0, +\infty)$ nerostoucí, z čehož plyne, že existuje $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{E}(u(t)) =: A$. Vzhledem k tomu, že x_∞ je hromadný bod funkce $u(t)$ pro $t \to +\infty$, máme rostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, splňující $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ a $\lim_{n\to+\infty} u(t_n) = x_\infty$. Ze spojitosti funkce $\mathcal{E}$ a předchozího plyne, že $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}(u(t_n)) = \mathcal{E}(x_\infty)$. Dle věty o limitě podposloupnosti musí být $\mathcal{E}(x_\infty) = A$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $A = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, tak nahradíme funkci $\mathcal{E}$ funkcí $\mathcal{E} - A$. Předchozí výsledky a zjednodušení dávají, že pro všechna $t \in [0, +\infty)$ platí $\mathcal{E}(u(t)) \geq 0$. Pokud by existovalo $t_0 \in [0, +\infty)$ takové, že $\mathcal{E}(u(t_0)) = 0$, pak by nutně muselo být $\mathcal{E}(u(t)) = 0$ pro všechna $t \geq t_0$, neboť funkce $\mathcal{E} \circ u$ je na $[0, +\infty)$ nezáporná a nerostoucí. Konstantnost funkce $\mathcal{E} \circ u$ na $[t_0, +\infty)$ však implikuje konstantnost funkce u na $[t_0, +\infty)$, neboť dle (4.2) pro $t \in (t_0, +\infty)$ platí

$$(\mathcal{E} \circ u)'(t) = 0 \implies u'(t) = 0\,.$$

Z toho plyne, že $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$, neboť bod x_∞ je jediným kandidátem na limitu. Dále předpokládejme, že $\mathcal{E}(u(t)) > 0$ pro všechna $t \geq 0$. Z toho, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje v bodě x_∞ Łojasiewiczovu nerovnost s exponentem θ, máme konstanty $C \in (0, +\infty)$, $\sigma \in (0,1]$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C\,|\mathcal{E}(x)|^{1-\theta}\,, \quad \forall x \in B_\sigma(x_\infty)\,.$$

Z faktu $x_\infty \in \omega(u)$ plyne existence rostoucí posloupnosti $\{t_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t_0^n \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} t_0^n = +\infty$ takové, že platí $\lim_{n\to+\infty} \|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = 0$. Můžeme navíc předpokládat, že $\|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} < \sigma$. K číslům t_0^n definujme pro $n \in \mathbb{N}$ čísla t_1^n jako

$$t_1^n := \inf\left\{t \geq t_0^n; \|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = \sigma\right\} .$$

Ze spojitosti funkce u plyne $t_1^n > t_0^n$. Definujme pro $t \in [0, +\infty)$ funkci $H(t)$ jako $H(t) := \mathcal{E}(u(t))^\theta$. Takto definovaná funkce H je kladná, nerostoucí a platí $\lim_{t\to+\infty} H(t) = 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $t \in [t_0^n, t_1^n)$ využijeme Łojasiewiczovu nerovnost k odhadu derivace funkce H:

$$\begin{aligned} -H'(t) &= -\theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1}\mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = \\ &= \theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \theta C \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tudíž pro všechna $t \in [t_0^n, t_1^n)$ platí

$$\|u(t) - u(t_0^n)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \int_{t_0^n}^t \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds \leq \frac{1}{\theta C}(H(t_0^n) - H(t)) \leq \frac{1}{\theta C} H(t_0^n) .$$

S využitím předchozího a trojúhelníkové nerovnosti získáme pro $t \in [t_0^n, t_1^n)$, že

$$\begin{aligned} \|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^{d\star}} &\leq \|u(t) - u(t_0^n)\|_{\mathbb{R}^d} + \|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta C} H(t_0^n) + \|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} . \end{aligned}$$

Díky tomu, že u je spojitá funkce, platí pro $t_1^n < +\infty$ i odhad

$$\|u(t_1^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{\theta C} H(t_0^n) + \|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} . \tag{4.4}$$

Předpokládejme nejprve, že $t_1^n < +\infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak ze spojitosti funkce u a z definice čísel t_1^n plyne, že $\|u(t_1^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = \sigma$. Nicméně z nerovnosti (4.4) máme

$$\lim_{n\to+\infty} \|u(t_1^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{\theta C} \lim_{n\to+\infty} H(t_0^n) + \lim_{n\to+\infty} \|u(t_0^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = 0 ,$$

což je spor s $\|u(t_1^n) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = \sigma$. Musí tedy existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $t_1^n = +\infty$. Pak ale z odhadu (4.3) plyne, že $\int_0^{+\infty} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} dt < +\infty$, tudíž dle Cauchyova kritéria $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ existuje. Jediným kandidátem na tuto limitu je x_∞, neboť $\lim_{n\to+\infty} u(t_0^n) = x_\infty$ a přitom $\lim_{n\to+\infty} t_0^n = +\infty$. Platí tedy, že $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$. $\square$

Poznámka. Dle (Kurdyka, 1998) lze větu dokázat i pokud je v bodě x_∞ splněna Kurdykova-Łojasiewiczova nerovnost místo Łojasiewiczovy nerovnosti.

Následující věta je za obecnějších předpokladů uvedena v (Haraux a kol., 2009) jako Theorem 2.

Věta 6. *(rychlost konvergence řešení)*
Buď $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^1. Mějme funkci $u : [0,+\infty) \to \mathcal{U}$, která je třídy C^1 a pro $t \in (0,+\infty)$ splňuje diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0. \tag{4.5}$$

Dále předpokládejme, že existuje $x_\infty \in \omega(u)$ takové, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě x_∞ s Łojasiewiczovým exponentem $\theta \in (0,1/2]$. Pak pro $t \to +\infty$ platí

$$\|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} \leq \int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} O(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2},\ \text{kde } a > 0, \\ O(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Důkaz. Stejně jako v důkazu věty o konvergenci řešení se ukáže, že funkce $\mathcal{E} \circ u$ je na $[0,+\infty)$ nerostoucí a $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$. Pokud je funkce $\mathcal{E} \circ u$ konstantní na $[t_0,+\infty)$ pro nějaké $t_0 \in [0,+\infty)$, pak $\|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} = 0$ pro $t \geq t_0$ a tvrzení věty platí triviálně. Můžeme tedy dále předpokládat, že $\mathcal{E}(u(t)) > \mathcal{E}(x_\infty)$ a bez újmy na obecnosti $\mathcal{E}(x_\infty) = 0$. Z toho, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje v bodě x_∞ Łojasiewiczovu nerovnost s exponentem θ, máme konstanty $C \in (0,+\infty)$, $\sigma \in (0,1]$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq C\, |\mathcal{E}(x)|^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(x_\infty).$$

Vezměme $t_0 \in (0,+\infty)$ tak velké, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $u(t) \in B_\sigma(x_\infty)$. Pro $t \in [0,+\infty)$ definujme funkci $H(t)$ jako $H(t) := \mathcal{E}(u(t))^\theta$ a pro $t \in [t_0,+\infty)$ odhadněme její derivaci dvěma způsoby. V obou případech využíváme Łojasiewiczovu nerovnost a diferenciální rovnici (4.5).

$$\begin{aligned} -H'(t) &= -\theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1}\mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = \\ &= \theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \geq \theta C \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} -H'(t) &= -\theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1}\mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = \theta\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} = \\ &= \theta\mathcal{E}(u(t))^{1-\theta} \left(\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}}\right)^2 \geq \theta C^2\mathcal{E}(u(t))^{1-\theta} = \\ &= \theta C^2 H(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Z odhadu (4.6) získáme, že pro $t \in [t_0,+\infty)$ platí

$$\begin{aligned} \|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} &\leq \int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds \leq \frac{1}{\theta C}(H(t) - \lim_{s\to+\infty} H(s)) = \\ &= \frac{1}{\theta C} H(t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Na odhad (4.7) se můžeme dívat jako na diferenciální nerovnici na intervalu $[t_0,+\infty)$ s neznámou funkcí H. Vyřešením této diferenciální nerovnice získáme řádový odhad funkce H pro $t \to +\infty$

$$H(t) = \begin{cases} O(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \\ O(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Zkombinováním tohoto řádového odhadu s (4.8) obdržíme, že pro $t \to +\infty$ platí

$$\|u(t) - x_\infty\|_{\mathbb{R}^d} \leq \int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} O(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \\ O(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

což jsme měli dokázat. □

Následující věta ukazuje, co můžeme říct o rychlosti konvergence řešení, pokud víme, že Łojasiewiczův exponent θ je optimální. V určitém smyslu bude optimální i rychlost konvergence tohoto řešení. Onu rychlost konvergence tentokrát nebudeme zkoumat jako vzdálenost od limitního stavu, ale jako délku zbývající trajektorie po limitní stav.

Věta 7. *(optimální rychlost konvergence řešení)*
Buď $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^1. Mějme funkci $u : [0, +\infty) \to \mathcal{U}$, která je třídy C^1 a pro $t \in (0, +\infty)$ splňuje diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0. \tag{4.9}$$

Předpokládejme, že $\mathcal{E}(u(t))$ je klesající na $[0, +\infty)$. Nakonec předpokládejme, že existuje $x_\infty \in \omega(u)$ takové, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje Łojasiewiczovu nerovnost v bodě x_∞ s Łojasiewiczovým exponentem $\theta \in (0, 1/2]$, který je optimální. Pak pro $t \to +\infty$ platí

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} \Theta(e^{-at}), & \textit{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \ \textit{kde } a > 0, \\ \Theta(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \textit{je-li } \theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Důkaz. Z předchozí věty plyne, že pro $t \to +\infty$ platí

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} O(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \\ O(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Zbývá tedy dokázat dolní odhad.

Z věty o konvergenci řešení plyne, že $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{E}(x_\infty) = 0$. Z toho, že funkce $\mathcal{E}$ splňuje v bodě x_∞ Łojasiewiczovu nerovnost s exponentem θ, který je optimální, máme konstanty $C \in (0, +\infty)$, $\sigma \in (0,1]$ takové, že platí

$$\|\mathcal{E}'(x)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq C \, |\mathcal{E}(x)|^{1-\theta}, \quad \forall x \in B_\sigma(x_\infty). \tag{4.10}$$

Vezměme $t_0 \in (0, +\infty)$ tak velké, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $u(t) \in B_\sigma(x_\infty)$. Pro $t \in [0, +\infty)$ definujme funkci $H(t)$ jako $H(t) := \mathcal{E}(u(t))^\theta$ a pro $t \in [t_0, +\infty)$ odhadněme její derivaci dvěma způsoby. V obou případech využíváme nerovnost (4.10) a diferenciální rovnici (4.9).

$$\begin{aligned} -H'(t) &= -\theta \mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = \\ &= \theta \mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \leq \theta C \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^{d\star}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} -H'(t) &= -\theta \mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \mathcal{E}'(u(t)) \cdot u'(t) = \theta \mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|^2_{\mathbb{R}^{d\star}} = \\ &= \theta \mathcal{E}(u(t))^{1-\theta} \left(\mathcal{E}(u(t))^{\theta-1} \|\mathcal{E}'(u(t))\|_{\mathbb{R}^{d\star}} \right)^2 \leq \theta C^2 \mathcal{E}(u(t))^{1-\theta} = \\ &= \theta C^2 H(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Z odhadu (4.11) získáme, že pro $t \in [t_0, +\infty)$ platí

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds \geq \frac{1}{\theta C}(H(t) - \lim_{s\to+\infty} H(s)) = \frac{1}{\theta C} H(t) \,. \tag{4.13}$$

Vyřešením diferenciální nerovnice (4.12) s neznámou a kladnou funkcí H na intervalu
$[t_0, +\infty)$ získáme řádový odhad funkce H pro $t \to +\infty$

$$H(t) = \begin{cases} \Omega(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \\ \Omega(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Zkombinováním tohoto řádového odhadu s (4.13) obdržíme, že pro $t \to +\infty$ platí

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} \Omega(e^{-at}), & \text{je-li } \theta = \frac{1}{2}, \\ \Omega(t^{\frac{-\theta}{1-2\theta}}), & \text{je-li } \theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

což jako jediné chybělo k dokončení důkazu. Tím je důkaz hotov. □

Předchozí věty uvedené v této kapitole jsou obecnými výsledky. Pokud jako funkce $\mathcal{E}$ volíme funkce z 2. a 3. kapitoly a využijeme znalost Łojasiewiczových nerovností, získáme následující důsledky.

Důsledek. *(o konvergenci řešení pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce)*
Buďte $d \geq 1$, $N \geq 2$ přirozená čísla, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $x_\infty \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ buď zobecněná Morseova-Bottova funkce řádu N v bodě x_∞. Mějme funkci $u : [0, +\infty) \to \mathcal{U}$, která je třídy C^1 a pro $t \in (0, +\infty)$ splňuje diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0.$$

Předpokládejme, že $x_\infty \in \omega(u)$ a $\mathcal{E}(u(t))$ je klesající na $[0, +\infty)$. Pak platí $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x_\infty$ *a pro $t \to +\infty$ platí*

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} \Theta(e^{-at}), & \text{je-li } N = 2, \text{ kde } a > 0, \\ \Theta(t^{-\frac{1}{N-2}}), & \text{je-li } N \geq 3. \end{cases}$$

Důkaz. Tento důsledek plyne z věty 3, věty 5 a věty 7. □

Důsledek. *(o konvergenci řešení pro speciální funkce s jednoduchým křížením)*
Buďte c, d, $n \in \mathbb{N}$, $c \leq d$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ otevřené okolí počátku v $\mathbb{R}^d$ a $\mathcal{E} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ buď C^1 funkce s jednoduchým křížením, která je tvaru

$$\mathcal{E}(x) = x_1^n \dots x_c^n \mathcal{F}(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{U} \,,$$

kde $\mathcal{F}$ je funkce vystupující v definici funkce s jednoduchým křížením. Nechť navíc platí $\mathcal{E}'(0) = 0$. Mějme funkci $u : [0,+\infty) \to \mathcal{U}$, která je třídy C^1 a pro $t \in (0,+\infty)$ splňuje diferenciální rovnici

$$u'(t) + \mathcal{E}'(u(t)) = 0.$$

Předpokládejme, že $0 \in \omega(u)$ a $\mathcal{E}(u(t))$ je klesající na $[0,+\infty)$. Pak $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$ *a pro $t \to +\infty$ platí*

$$\int_t^{+\infty} \|u'(s)\|_{\mathbb{R}^{d\star}} ds = \begin{cases} \Theta(e^{-at}), & \text{je-li } cn = 2, \text{ kde } a > 0, \\ \Theta(t^{-\frac{1}{cn-2}}), & \text{je-li } cn \geq 3. \end{cases}$$

Důkaz. Tento důsledek plyne z věty 4, věty 5 a věty 7. □

Závěr

V této práci jsme dokázali platnost Łojasiewiczovy nerovnosti pro některé třídy funkcí, konkrétně pro zobecněné Morseovy-Bottovy funkce a pro funkce s jednoduchým křížením. Důkazy byly vedeny podobně jako v článku (Feehan, 2017) a navíc trochu podrobněji. Pro tyto druhy funkcí jsme zkoumali i optimalitu Łojasiewiczova exponentu. Nakonec jsme uvedli aplikace Łojasiewiczovy nerovnosti související s konvergencí řešení určité diferenciální rovnice.

Seznam použité literatury

CHILL, R. (2003). On the łojasiewicz–simon gradient inequality. *Journal of Functional Analysis*, **201**(2), 572–601. doi: 10.1016/s0022-1236(02)00102-7.

FEEHAN, P. M. N. (2017). Resolution of singularities and geometric proofs of the lojasiewicz inequalities, arxiv:1708.09775v8.

HARAUX, A., CHILL, R. a JENDOUBI, M. (2009). Applications of the Łojasiewicz-simon gradient inequality to gradient-like evolution equations. **7**, 351–372.

KURDYKA, K. (1998). On gradients of functions definable in o-minimal structures. *Annales de l'institut Fourier*, **48**(3), 769–783. doi: 10.5802/aif.1638.

ŁOJASIEWICZ, S. (1963). Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, pages 87–89. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.