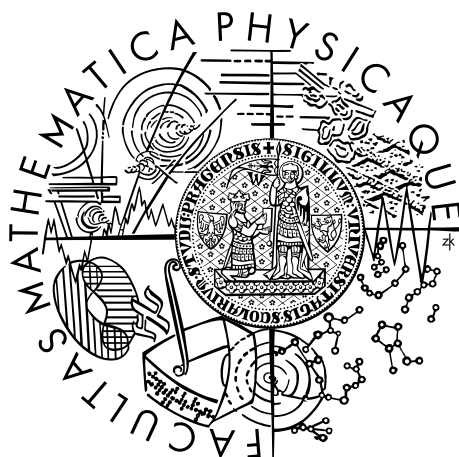


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jelena Cvetković

Lineární a nelineární autoregresní modely pro časové řady z ekonomiky a financí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Lineární a nelineární autoregresní modely pro časové řady z ekonomiky a financí

Autor: Jelena Cvetković

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá lineárními a nelineárními autoregresními modely pro časové řady z ekonomiky a financí. Je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části se čtenář seznámí s pojmy spojenými s náhodnými procesy, poté jsou zavedeny autoregresní a prahové autoregresní časové řady, odvodí se jejich obecné vlastnosti, popíší se možné způsoby předpovědání budoucích hodnot a ukáže se způsob odhadu parametrů. Dále se představí test linearity. Praktická část je rozdělena na simulační studii, ve které je zkoumána kvalita odhadů a síla testu na simulovaných časových řadách, a na aplikaci na reálná data, kde jsou tyto poznatky využity na časové řadě vývoje ceny akcií společnosti ČEZ.

Klíčová slova: finanční časová řada, AR, TAR, test linearity

Title: Linear and nonlinear autoregressive models for time series from economics and finance

Author: Jelena Cvetković

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with linear and nonlinear autoregressive models for time series from economics and finance. It consists of theoretical and practical part. In theoretical part, the reader acquaints with terms connected to random processes; then autoregressive and threshold autoregressive time series are introduced, their general properties are derived, possible ways of forecasting are described and ways of parameters estimation are presented. Furthermore, test for threshold autoregression is introduced. The practical part is divided into simulation study, where the quality of estimations and the power of the test is examined on simulated time series, and into application on real data, where the acquired findings are utilized on time series of share prices of the company ČEZ.

Keywords: financial time series, AR, TAR, test for threshold autoregression

Ráda bych zde poděkovala vedoucí RNDr. Jitce Zichové, Dr. za věnovaný čas, věcné připomínky, vstřícnost a trpělivost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Obsah

Úvod	2
1 Autoregresní modely časových řad	3
1.1 Základní pojmy	3
1.2 Autoregresní proces	5
1.2.1 Základní vlastnosti	5
1.2.2 Odvození autokorelační funkce	6
1.2.3 Odvození parciální autokorelační funkce	9
1.2.4 Identifikace modelu	10
1.3 Předpovědi	11
1.3.1 Nejlepší lineární předpověď	11
1.3.2 Boxova-Jenkinsova metodologie	14
1.4 Metoda nejmenších čtverců	15
2 Prahový autoregresní model časových řad	17
2.1 Prahový autoregresní proces	17
2.1.1 Základní vlastnosti	17
2.1.2 Příklady	18
2.2 Metoda nejmenších čtverců	20
2.2.1 Obecný postup metody nejmenších čtverců	20
2.2.2 Metoda nejmenších čtverců pro dva režimy	21
2.3 Testování linearit	22
3 Simulační studie	25
3.1 Odhady parametrů	25
3.1.1 Autoregresní proces	25
3.1.2 Prahový autoregresní proces	26
3.2 Síla testu linearit	28
4 Aplikace na reálná data	30
4.1 Test linearit	30
4.2 Předpovědi	31
4.2.1 Nejlepší lineární předpověď	32
4.2.2 Boxova-Jenkinsova metodologie	32
Závěr	33
Seznam použité literatury	34
Seznam obrázků	35
Seznam tabulek	36

Úvod

V ekonomii a financích se často pracuje s časovými řadami, jedná se například o vývoj měnových kurzů nebo cen akcií v čase. Autoregresní modely jsou při jejich analýze oblíbené, pozorovaná data však často vykazují určitou nelinearitu. V takovém případě je někdy možné použít autoregresní modely ve více režimech, tzv. prahové autoregresní modely. Tato práce slouží k seznámení s autoregresním i prahovým autoregresním modelem, zkoumání uvedených vlastností a postupů na simulovaných datech a následné aplikaci na datech reálných.

V první kapitole zavedeme základní pojmy potřebné pro práci s časovými řadami. Definujeme zde náhodný proces, speciální případ náhodného procesu zvaný bílý šum a silnou a slabou stacionaritu. Dále zde zavedeme autokorelační a parciální autokorelační funkci a jejich odhady. Poté se seznámíme s autoregresním procesem, odvodíme podmínky stacionarity a autokorelační a parciální autokorelační funkci autoregresních procesů. Pojedueme o možném využití grafů ACF a PACF při identifikaci AR procesů a ukážeme dva možné způsoby předpovídání budoucího chování autoregresní časové řady. Nakonec popíšeme odhad autoregresních parametrů metodou nejmenších čtverců.

Druhá kapitola se věnuje prahovým autoregresním modelům časových řad. Uvedeme podmínky stacionarity a na příkladech ukážeme využití grafu závislosti X_t na X_{t-d} při identifikaci nelinearity časové řady. Odhady parametrů metodou nejmenších čtverců popíšeme obecně i speciálně pro jednoduchý TAR proces se dvěma režimy. Na závěr druhé kapitoly předložíme test linearity, který slouží k rozhodnutí mezi autoregresním a prahovým autoregresním modelem pro analyzovanou řadu.

Kvalitu popsání odhadů parametrů budeme zkoumat na simulovaných časových řadách ve třetí kapitole. Zároveň odhadneme sílu testu linearity v závislosti na délce zkoumaných posloupností a řádu autoregrese.

Nakonec veškeré poznatky aplikujeme na reálná data ve čtvrté kapitole, kde budeme zkoumat vývoj ceny akcií společnosti ČEZ.

Výpočty, simulace a práce s reálnými daty proběhly za pomoci programu *Wolfram Mathematica*, verze 11.2, zdrojový kód a data jsou umístěny na příloženém CD.

1. Autoregresní modely časových řad

Úvodem se seznámíme s některými základními pojmy, které budeme později využívat. Definujeme zde náhodný proces a jeho vlastnosti, dále autokorelační funkci a parciální autokorelační funkci. V další části zavedeme autoregresní proces.

1.1 Základní pojmy

Definice 1 (Náhodný proces). *Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) . Náhodným procesem s celočíselným časem (též časovou řadou) rozumíme posloupnost náhodných veličin $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) .¹*

Poznámka. Nadále budeme náhodný proces nebo časovou řadu značit zjednodušeně $\{X_t\}$, přičemž předpokládáme $t \in \mathbb{Z}$.

Definice 2 (Bílý šum). *Náhodný proces $\{\varepsilon_t\}$ s vlastnostmi*

- $E\varepsilon_t = 0$,
- $\text{var}\varepsilon_t = \sigma^2 > 0$,
- $\text{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0, \forall s \neq t$

*nazýváme bílý šum.*²

Definice 3 (Slabá stacionarita). *Časová řada $\{X_t\}$ je (slabě) stacionární, pokud $E(X_t^2) < \infty$ a pro každé $s, t \in \mathbb{Z}$ platí*

- $EX_t = \mu$,
- $\text{cov}(X_s, X_t) = \text{cov}(X_{s+h}, X_{t+h})$ pro libovolné $h \in \mathbb{Z}$.³

Poznámka. Druhý bod v definici 3 znamená, že pro libovolná $t, k \in \mathbb{Z}$ je

$\text{cov}(X_t, X_{t+k})$ nezávislá na t .

Definice 4 (Silná stacionarita). *Časová řada $\{X_t\}$ je silně stacionární, pokud pro libovolná $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$ je pravděpodobnostní rozdělení veličin X_{t_1}, \dots, X_{t_k} stejné jako pravděpodobnostní rozdělení veličin $X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h}$.⁴*

Poznámka. Silné stacionaritě se někdy také říká striktní stacionarita.

Abychom mohli definovat autokorelační funkci, musíme nejdříve zavést funkci autokovarianční.

¹Prášková a Lachout (2012), str. 9

²Fan a Yao (2003), str. 10

³Fan a Yao (2003), str. 29

⁴Fan a Yao (2003), str. 30

Definice 5 (Autokovarianční funkce). *Mějme stacionární časovou řadu $\{X_t\}$. Její autokovarianční funkci (ACVF) definujeme následujícím způsobem*

$$\gamma(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k}), k \in \mathbb{Z}.^5$$

Z definice autokovarianční funkce je vidět, že se jedná o sudou funkci, neboť platí $\gamma(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = \text{cov}(X_{t-k}, X_t) = \gamma(-k)$.

Nyní přistoupíme k zavedení autokorelační funkce časové řady.

Definice 6 (Autokorelační funkce). Autokorelační funkce (ACF) *stacionární časové řady $\{X_t\}$ je funkce*

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \text{cor}(X_t, X_{t-k}) \text{ pro } k \in \mathbb{Z},$$

kde $\text{cor}(X, Y)$ je korelační koeficient náhodných veličin X a Y .⁶

Autokorelační funkce také splňuje $\rho(k) = \rho(-k)$.

Pokud máme pozorování $\{X_1, \dots, X_T\}$ ze stacionární časové řady, můžeme autokorelační funkci odhadnout pomocí odhadu autokovarianční funkce $\hat{\gamma}(k)$ definovaného předpisem

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+k} - \bar{X}_T), \quad k = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1.1)$$

kde $\bar{X}_T = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t$ je odhad střední hodnoty $\text{E}X_t$, $t = 1, \dots, T$. Odhad autokorelační funkce je pak

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1.2)$$

Je zřejmé, že z pozorovaných dat nemůžeme sestrojít $\hat{\gamma}(k)$ ani $\hat{\rho}(k)$ pro $k \geq T$.

Další funkce, která charakterizuje náhodný proces, je parciální autokorelační funkce. Autokorelační funkce počítá korelaci mezi dvěma členy řady X_t a X_{t-k} , která může být ovlivněna tím, že jsou tyto členy v korelaci s veličinami ležícími mezi nimi. Parciální autokorelační funkce počítá korelaci mezi X_t a X_{t-k} očištěnou o vliv veličin $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$.

Definice 7 (Parciální autokorelační funkce). *Mějme stacionární časovou řadu $\{X_t\}$. Její parciální autokorelační funkci (PACF) definujeme následujícím způsobem*

- $\pi(1) = \rho(1)$,
- $\pi(k) = \text{cor}(X_t, X_{t-k} \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$ pro $k = 2, 3, 4, \dots$.⁷

Poznámka. Vzhledem k vlastnostem koeficientu parciální korelace (viz např. Anděl (2007), str. 43) lze parciální autokorelační funkci stacionární časové řady $\{X_t\}$ s nulovou střední hodnotou zapsat jako $\pi(1) = \rho(1)$ a

$$\pi(k) = \text{cor}(R_{1|2,\dots,k}, R_{k+1|2,\dots,k}) \text{ pro } k > 1,$$

⁵Fan a Yao (2003), str. 39

⁶Fan a Yao (2003), str. 39

⁷Cipra (2008), str. 331

kde $R_{j|2,\dots,k}$ je residuum lineární regrese X_j na X_2, \dots, X_k , tj.

$$R_{j|2,\dots,k} = X_j - (\alpha_{j2}X_2 + \dots + \alpha_{jk}X_k),$$

$$\text{a } (\alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk}) = \arg \min_{\beta_2, \dots, \beta_k} \mathbb{E} \{X_j - (\beta_2X_2 + \dots + \beta_kX_k)\}^2.$$

Přesný výpočet parciální autokorelační funkce ukazuje následující věta, převzatá z Fan a Yao (2003), str. 44.

Věta 1. *Nechť $\{X_t\}$ je stacionární časová řada a pro všechna t platí $\mathbb{E}X_t = 0$. Pak $\pi(k) = \alpha_{kk}$ pro $k \geq 1$, kde*

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{kk}) = \arg \min_{\beta_1, \dots, \beta_k} \mathbb{E}(X_t - \beta_1X_{t-1} - \dots - \beta_kX_{t-k})^2.$$

Důkaz. Je uveden v knize Fan a Yao (2003), str. 79–80. □

Z této věty plyne, že odhad parciální autokorelační funkce $\hat{\pi}(k)$ se získá jako odhad parametru α_{kk} . V praxi se také používá následující rekurentní vztah pro odvození odhadu $\pi(k)$, viz Cipra (2008), str. 331.

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(1) &= r_{11} = \hat{\rho}(1), \\ \hat{\pi}(k) &= r_{kk} \text{ pro } k > 1, \text{ kde} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$r_{kk} = \frac{\hat{\rho}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot \hat{\rho}(k-j)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot \hat{\rho}(j)}, \text{ kde}$$

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} \cdot r_{k-1,k-j} \text{ pro } j = 1, \dots, k-1.$$

Nyní již máme definovány veškeré pojmy potřebné k zavedení autoregresního procesu a odvození jeho vlastností.

1.2 Autoregresní proces

1.2.1 Základní vlastnosti

Autoregresní časové řady jsou speciálním případem náhodných procesů, ve kterých jsou členy posloupnosti $\{X_t\}$ součtem lineární kombinace zpožděných členů a odchytky v podobě bílého šumu.

Definice 8 (Autoregresní proces řádu p). *Časová řada $\{X_t\}$ definovaná předpisem*

$$X_t = b_1X_{t-1} + \dots + b_pX_{t-p} + \varepsilon_t$$

pro $p \geq 1$, kde $\{\varepsilon_t\}$ je bílý šum, $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$ a $b_p \neq 0$ se nazývá autoregresní proces řádu p a značí se $AR(p)$.⁸

⁸Fan a Yao (2003), str. 10–11

Model $AR(p)$ můžeme přepsat pomocí tzv. autoregresního polynomu:

$$X_t - b_1 X_{t-1} - \dots - b_p X_{t-p} = b(B)X_t = \varepsilon_t,$$

kde B je operátor časového posunu, tj. $B^k X_t = X_{t-k}$, a $b(\cdot)$ je autoregresní polynom definovaný jako $b(z) = 1 - b_1 z - \dots - b_p z^p$.

O stacionaritě AR procesů pojednává následující věta z Cipra (2008), str. 335.

Věta 2. *Proces $AR(p)$ je stacionární, pokud všechny kořeny z_1, \dots, z_p autoregresního polynomu $b(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, tj. platí $|z_i| > 1$ pro $i = 1, \dots, p$.*

Důkaz. Je uveden v knize Fan a Yao (2003), str. 31, kde $a(B) = 1$, protože platí vztah $AR(p) = ARMA(p, 1)$. □

Pomocí věty 2 odvodíme podmínky stacionarity pro $AR(1)$ a $AR(2)$.

Autoregresní proces řádu 1 je dán předpisem $X_t = b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, což lze přepsat do tvaru $X_t - b_1 X_{t-1} = \varepsilon_t$. Autoregresní polynom je tedy tvaru $b(z) = 1 - b_1 z$ a má pouze jediný kořen $z_1 = b_1^{-1}$. Dle předchozí věty je $AR(1)$ stacionární pokud $|z_1| > 1$, tj. pokud $|b_1| < 1$.

V případě $AR(2)$, který je tvaru $X_t - b_1 X_{t-1} - b_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$, dostaneme kvadratický polynom $b(z) = 1 - b_1 z - b_2 z^2$. Z Viètových vzorců víme, že pro kořeny z_1 a z_2 tohoto polynomu platí $z_1 \cdot z_2 = -b_2^{-1}$ a $z_1 + z_2 = -b_1/b_2$.

Použitím věty 2 dostaneme podmínky pro parametry b_1 a b_2 . Celkem je tedy $AR(2)$ stacionární, pokud

$$-1 < b_2 < 1, b_1 + b_2 < 1 \text{ a } b_2 - b_1 < 1.$$

Poznámka. Stacionární proces $AR(p)$ lze zapsat ve tvaru tzv. lineárního procesu

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}, \quad (1.4)$$

kde $\psi_0 = 1$ a řada $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ konverguje pro $|z| \leq 1$.

1.2.2 Odvození autokorelační funkce

Nadále budeme pracovat se stacionárními autoregresními časovými řadami. Z (1.4) a vlastností bílého šumu plyne $\text{cov}(X_{t-k}, \varepsilon_t) = 0$ pro $k > 0$.

Aplikací střední hodnoty na předpis $AR(p)$ z definice 8 ukážeme, že stacionární autoregresní proces řádu p má nulovou střední hodnotu.

$$X_t - b_1 X_{t-1} - \dots - b_p X_{t-p} = \varepsilon_t,$$

$$\mathbb{E}X_t - b_1 \mathbb{E}X_{t-1} - \dots - b_p \mathbb{E}X_{t-p} = \mathbb{E}\varepsilon_t = 0. \quad (1.5)$$

Z definice 3 víme, že $\mathbb{E}X_t = \mu$ pro $\forall t$, proto lze rovnici (1.5) napsat jako

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p b_j\right) \mu = 0.$$

Všimněme si, že výraz v závorce odpovídá autoregresnímu polynomu procesu $AR(p)$ v bodě 1, tj. $b(1)$. Platí tedy $\mu = EX_t = 0$, protože $b(1) = 0$ by znamenalo, že $z_1 = 1$ je kořenem $b(z)$, to je ale ve sporu s větou 2.

Použitím $EX_t = 0$ a $E\varepsilon_t = 0$ získáme pro $k > 0$

$$0 = \text{cov}(X_{t-k}, \varepsilon_t) = E(X_{t-k}\varepsilon_t). \quad (1.6)$$

Tento vztah využijeme při odvozování ACF. Nejdříve odvodíme autokorelační funkci pro procesy $AR(1)$ a $AR(2)$.

Obě strany předpisu pro $AR(1)$ vynásobíme ε_t a aplikujeme střední hodnotu. Dostaneme rovnici

$$E(X_t\varepsilon_t) = b_1E(X_{t-1}\varepsilon_t) + E\varepsilon_t^2.$$

Použitím (1.6) a definice 2 dostáváme

$$E(X_t\varepsilon_t) = \sigma^2. \quad (1.7)$$

Nyní obě strany předpisu pro $AR(1)$ vynásobíme X_t a aplikujeme střední hodnotu

$$EX_t^2 = b_1E(X_tX_{t-1}) + E(X_t\varepsilon_t).$$

Použitím definice 5, vztahu (1.7) a nulové střední hodnoty procesu $AR(1)$ máme

$$\gamma(0) = b_1\gamma(1) + \sigma^2,$$

což upravíme s využitím definice 6

$$\gamma(0) [1 - b_1\rho(1)] = \sigma^2$$

a dostaneme

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - b_1\rho(1)}. \quad (1.8)$$

Nakonec předpis pro $AR(1)$ vynásobíme veličinou X_{t-k} , $k > 0$, aplikujeme střední hodnotu a vydělíme $\gamma(0)$

$$\begin{aligned} E(X_tX_{t-k}) &= b_1E(X_{t-1}X_{t-k}) + E(\varepsilon_tX_{t-k}), \\ \gamma(k) &= b_1\gamma(k-1), \\ \rho(k) &= b_1\rho(k-1). \end{aligned}$$

Dostali jsme jednoduchou diferenční rovnici s počáteční podmínkou $\rho(1) = b_1$. Jejím řešením dostaneme

$$\rho(k) = b_1^k \text{ pro } k \geq 0.$$

Nyní můžeme dosadit do rovnice (1.8) za $\rho(1)$ a dostaneme rozptyl X_t

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - b_1^2}.$$

Pro odvození autokorelační funkce procesu $AR(2)$ postupujeme analogicky. Z rovnosti

$$E(X_t\varepsilon_t) = b_1E(X_{t-1}\varepsilon_t) + b_2E(X_{t-2}\varepsilon_t) + E\varepsilon_t^2$$

opět dostáváme $E(X_t \varepsilon_t) = \sigma^2$.

Dále lze psát

$$\begin{aligned} EX_t^2 &= b_1 E(X_t X_{t-1}) + b_2 E(X_t X_{t-2}) + E(X_t \varepsilon_t), \\ \gamma(0) &= b_1 \gamma(1) + b_2 \gamma(2) + \sigma^2, \\ \gamma(0) &= \frac{\sigma^2}{1 - b_1 \rho(1) - b_2 \rho(2)}. \end{aligned}$$

Konečně pro $k > 0$ máme

$$E(X_t X_{t-k}) = b_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + b_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}),$$

což vede k diferenční rovnici

$$\rho(k) = b_1 \rho(k-1) + b_2 \rho(k-2), \quad k \geq 2, \quad (1.9)$$

s počátečními podmínkami

$$\rho(1) = \frac{b_1}{1 - b_2}, \quad \rho(2) = \frac{b_1^2}{1 - b_2} + b_2. \quad (1.10)$$

Charakteristický polynom rovnice (1.9) je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b_1 \lambda - b_2.$$

Všimněme si, že kořeny $p(\lambda)$ jsou převrácenou hodnotou kořenů autoregresního polynomu $b(z)$, tj. $\lambda_1 = z_1^{-1}$ a $\lambda_2 = z_2^{-1}$. Obecné řešení je tedy tvaru

$$\rho(k) = a_1 z_1^{-k} + a_2 z_2^{-k}, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Použitím počátečních podmínek a Viètových vzorců získáme řešení ve tvaru

$$\rho(k) = \frac{z_1^{-k-1}(1 - z_2^{-2}) - z_2^{-k-1}(1 - z_1^{-2})}{(z_1^{-1} - z_2^{-1})(1 + z_1^{-1} z_2^{-1})} \text{ pro } k \geq 0.$$

Obdobný je i obecný postup pro výpočet ACF procesu $AR(p)$. Stále platí $EX_t \varepsilon_t = \sigma^2$. Vynásobením předpisu procesu veličinou X_t a výpočtem střední hodnoty dostaneme

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - b_1 \rho(1) - \dots - b_p \rho(p)}.$$

Vynásobením členem X_{t-k} , $k > 0$ dospějeme k diferenční rovnici s obecným řešením ve tvaru

$$\rho(k) = a_1 z_1^{-k} + \dots + a_p z_p^{-k},$$

kde z_1, \dots, z_p jsou různé kořeny autoregresního polynomu $b(z)$. Pokud by polynom $b(z)$ měl vícenásobné kořeny či kořeny komplexně sdružené, řešení by bylo analogické.

Počáteční podmínky získáme, pokud předpis procesu $AR(p)$ vynásobíme postupně členy $X_{t-1}/\gamma(0), \dots, X_{t-p}/\gamma(0)$ a současně vždy aplikujeme střední hodnotu. Soustavě takto získaných rovnic se říká *Yule-Walkerovy rovnice* a maticově je lze zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \rho(p-3) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}.$$

Yule-Walkerovy rovnice se dají využít nejen k výpočtu autokorelační funkce procesu $AR(p)$, ale i k výpočtu jejího odhadu. Pokud bychom naopak měli k dispozici hodnoty ACF, nebo její odhady, mohli bychom pomocí Yule-Walkerových rovnic odhadnout parametry b_1, \dots, b_p .

1.2.3 Odvození parciální autokorelační funkce

Další funkcí, kterou jsme definovali v kapitole 1.1, je parciální autokorelační funkce. Z definic 7 a 8 vyplývá, že u $AR(p)$ procesu platí $\pi(k) = 0$ pro $k > p$, protože X_t nezávisí přímo na X_{t-k} pro $k > p$. Říkáme, že bod useknutí PACF je p .

Předpokládáme-li stacionární autoregresní proces s nulovou střední hodnotou, můžeme k výpočtu PACF využít poznámku za definicí 7 a větu 1. Pro proces $AR(1)$ z nich rovnou vyplývá $\pi(1) = \rho(1)$ a $\pi(k) = 0$ pro $k > 1$.

Pro $AR(2)$ platí také $\pi(1) = \rho(1)$. Pro určení $\pi(2)$ nalezneme minimum funkce $f(\beta_1, \beta_2) = \mathbf{E}(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \beta_2 X_{t-2})^2$. Funkci $f(\beta_1, \beta_2)$ upravíme roznásobením na tvar

$$f(\beta_1, \beta_2) = (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \cdot \gamma(0) + 2\beta_1 \cdot (\beta_2 - 1) \cdot \gamma(1) - 2\beta_2 \cdot \gamma(2),$$

a určíme parciální derivace podle β_1 a β_2

$$\frac{\partial f(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 2\beta_1 \gamma(0) + 2(\beta_2 - 1) \gamma(1),$$

$$\frac{\partial f(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 2\beta_2 \gamma(0) + 2\beta_1 \gamma(1) - 2\gamma(2).$$

Parciální derivace položíme rovny 0 a vydělíme členem $\gamma(0) \neq 0$, získáme tak následující rovnice

$$2\beta_1 + 2(\beta_2 - 1)\rho(1) = 0,$$

$$2\beta_2 + 2\beta_1\rho(1) - 2\rho(2) = 0.$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme

$$\beta_1 = (1 - \beta_2) \rho(1), \quad \beta_2 = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}.$$

Dosazením za $\rho(1)$ a $\rho(2)$ z (1.10) dostáváme výsledek

$$\pi(2) = \beta_2 = b_2.$$

Pro $k > 2$ je $\pi(k) = 0$.

U autoregresních procesů vyšších řádů bychom postupovali analogicky.

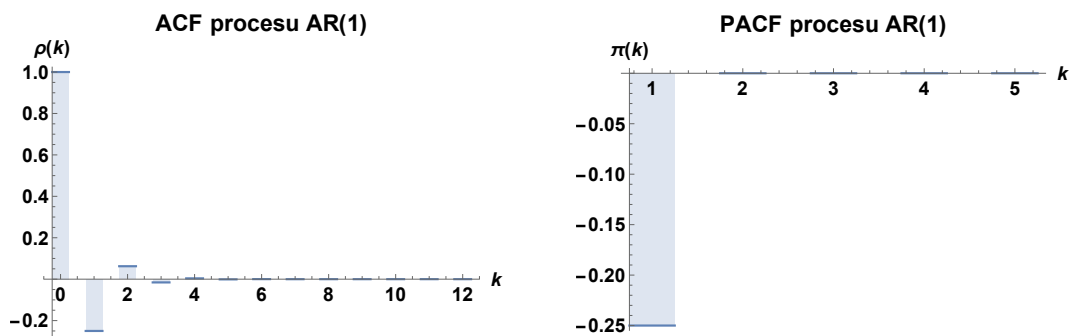
1.2.4 Identifikace modelu

V případě, že máme k dispozici pouze pozorované hodnoty posloupnosti $\{X_t\}$, nám k určení řádu autoregresního modelu mohou pomoci autokorelační a parciální autokorelační funkce. V předchozí části jsme odvodili tyto funkce pro $AR(1)$ a $AR(2)$, nyní ukážeme jejich průběh na náhodně vygenerovaném vzorku pro stacionární procesy s předpisy

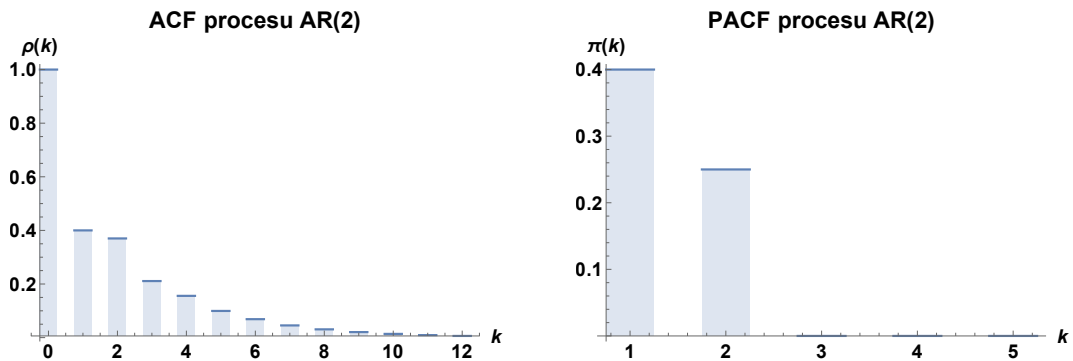
$$X_t = -0,25X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$X_t = 0,3X_{t-1} + 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Vzorek jsme vytvořili v programu Wolfram Mathematica pomocí zabudovaných funkcí *RandomFunction* a *ARProcess*, kde jsme pro bílý šum zvolili $\sigma^2 = 1$.



Obrázek 1.1: ACF a PACF procesu $AR(1)$



Obrázek 1.2: ACF a PACF procesu $AR(2)$

Všimněme si, že absolutní hodnoty autokorelační i parciální autokorelační funkce pro rostoucí k klesají. U PACF jsme navíc již odvodili, že má tzv. bod useknutí p , tento bod je zřejmý v obrázcích 1.1 a 1.2.

Ještě poznamenejme, že pro $b_1 < 0$ se mění znaménko autokorelační funkce: $\rho(k) < 0$ pro lichá k a $\rho(k) > 0$ pro sudá k .

Podrobněji je problematika identifikace modelu pojednána například v knize Cipra (2008), str. 339.

1.3 Předpovědi

V této části popíšeme dva způsoby získání předpovědí budoucích hodnot časové řady $\{X_t\}$.

1.3.1 Nejlepší lineární předpověď

Tato metoda popsaná v knize Fan a Yao (2003) slouží především k očištění dat od bílého šumu a tudíž k jednoduššímu výpočtu odhadů parametrů b_1, \dots, b_p metodou maximální věrohodnosti.

Definice 9 (Nejlepší lineární předpověď). *Nechť $\{X_t\}$ je stacionární časová řada s nulovou střední hodnotou. Pokud*

$$\widehat{X}_{k+1} = \varphi_{k1}X_k + \dots + \varphi_{kk}X_1 \quad (1.11)$$

splňuje

$$\mathbb{E}(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1})^2 = \min_{\psi_1, \dots, \psi_k} \mathbb{E}(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \psi_j X_{k+1-j})^2, \quad (1.12)$$

řekneme, že \widehat{X}_{k+1} je nejlepší lineární předpověď X_{k+1} založená na X_k, \dots, X_1 .⁹

Poznámka. Nejlepší lineární předpověď dle definice 9 tedy minimalizuje střední čtvercovou chybu (anglická zkratka *MSE*).

Následující tvrzení, které je převzaté i s důkazem z knihy Fan a Yao (2003), str. 91–92, přibližuje, jak vypadají koeficienty $\{\varphi_{kj}, j = 1, \dots, k\}$.

Věta 3. *Koeficienty $\varphi_{k1}, \dots, \varphi_{kk}$ splňují (1.11), (1.12) právě tehdy, když*

$$\sum_{j=1}^k \varphi_{kj} \gamma(i-j) = \gamma(i) \quad (1.13)$$

pro $i = 1, \dots, k$, kde $\gamma(\cdot)$ je autokovarianční funkce procesu $\{X_t\}$.

Důkaz. Pro libovolná $\{\psi_j, j = 1, \dots, k\}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \psi_j X_{k+1-j} \right)^2 &= \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k (\varphi_{kj} - \varphi_{kj} + \psi_j) X_{k+1-j} \right)^2 = \\ &= \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} X_{k+1-j} + \sum_{j=1}^k (\varphi_{kj} - \psi_j) X_{k+1-j} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Po umocnění a s využitím (1.11) se (1.14) rovná

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2 &+ \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k (\varphi_{kj} - \psi_j) X_{k+1-j} \right)^2 + \\ &+ 2\mathbb{E} \left[\left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} X_{k+1-j} \right) \sum_{i=1}^k (\varphi_{ki} - \psi_i) X_{k+1-i} \right]. \end{aligned}$$

⁹Fan a Yao (2003), str. 91

Protože podle definice 5 platí $\mathbb{E}X_{k+1}X_{k+1-i} = \gamma(i)$ a $\mathbb{E}X_{k+1-i}X_{k+1-j} = \gamma(i-j)$, můžeme pokračovat v úpravách a získáme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2 + \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k (\varphi_{kj} - \psi_j) X_{k+1-j} \right)^2 + \\ + 2 \sum_{i=1}^k (\varphi_{ki} - \psi_i) \left[\gamma(i) - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} \gamma(i-j) \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

S použitím (1.14) a (1.15) lze snadno nahlédnout, že

$$\mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \psi_j X_{k+1-j} \right)^2 \geq \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2$$

pro libovolná ψ_1, \dots, ψ_k , pokud je poslední sčítanec v (1.15) roven nule, což je ekvivalentní podmínce (1.13), která je tedy postačující pro (1.12).

Předpokládejme dále bez újmy na obecnosti, že existuje $1 \leq i \leq k$, pro které platí

$$K_1 = \gamma(i) - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} \gamma(i-j) \neq 0.$$

Nechť navíc $\psi_i = \varphi_{ki} + K_2$ a $\psi_j = \varphi_{kj}$ pro všechna $j \neq i$. Pak z (1.14) a (1.15) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \psi_j X_{k+1-j} \right)^2 &= \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2 + \mathbb{E} (K_2 X_{k+1-i})^2 - 2K_1 K_2 = \\ &= \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2 + K_2^2 \text{var} X_t - 2K_1 K_2. \end{aligned}$$

Zvolíme-li K_2 tak, aby $K_2^2 \text{var} X_t < |2K_1 K_2|$, tj. aby platilo

$$K_1 K_2 > 0, \quad \text{a zároveň} \quad |K_2| < \frac{2|K_1|}{\text{var} X_t},$$

máme

$$\mathbb{E} \left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \psi_j X_{k+1-j} \right)^2 < \mathbb{E} \left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1} \right)^2.$$

To ale znamená, že \widehat{X}_{k+1} není nejlepší lineární předpověď, čímž jsme získali spor a (1.13) je tudíž také nutnou podmínkou pro (1.12). □

Označme $Z_t = X_t - \widehat{X}_t$, $t = 1, 2, \dots, T$, kde definujeme $\widehat{X}_1 = 0$. Této transformaci původních dat se anglicky říká *prewhitening*. Vidíme, že $\mathbb{E}Z_t = 0$ a z (1.11) a (1.13) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \nu_t = \text{var} Z_t &= \mathbb{E} \left(X_t^2 - 2X_t \widehat{X}_t + \widehat{X}_t^2 \right) = \\ &= \gamma(0) - 2 \sum_{i=1}^{t-1} \varphi_{t-1,i} \gamma(i) + \sum_{i=1}^{t-1} \varphi_{t-1,i} \left(\sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} \gamma(i-j) \right) = \\ &= \gamma(0) - \sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} \gamma(j). \end{aligned}$$

Navíc se jedná o posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{Z_t\}$, protože pro všechna $t \neq s \in \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z_t, Z_s) &= \mathbb{E}Z_tZ_s = \\
&= \mathbb{E} \left[\left(X_t - \sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} X_{t-j} \right) \left(X_s - \sum_{j=1}^{s-1} \varphi_{s-1,j} X_{s-j} \right) \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[X_t \left(X_s - \sum_{j=1}^{s-1} \varphi_{s-1,j} X_{s-j} \right) \right] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} \mathbb{E} \left[X_{t-j} \left(X_s - \sum_{r=1}^{s-1} \varphi_{s-1,r} X_{s-r} \right) \right] = \\
&= \gamma(s-t) - \sum_{j=1}^{s-1} \varphi_{s-1,j} \gamma(s-t-j) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} \left[\gamma(s-t+j) - \sum_{r=1}^{s-1} \varphi_{s-1,r} \gamma(s-t+j-r) \right] = \\
&= \gamma(s-t) - \gamma(s-t) - \sum_{j=1}^{t-1} \varphi_{t-1,j} [\gamma(s-t+j) - \gamma(s-t+j)] = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

s využitím (1.13) pro $k = s - 1$ a $i = s - t$, resp. $i = s - t + j$.

Odkážeme se zde na inovativní algoritmus (viz Fan a Yao (2003), str. 93), díky kterému lze snadno nalézt nejlepší lineární předpovědi AR procesů.

Nejlepší lineární předpověď získáme z předpisu

$$\widehat{X}_{k+1} = \sum_{j=1}^k \theta_{kj} Z_{k+1-j}, \quad k = 1, \dots, T, \quad (1.16)$$

kde

$$\begin{aligned}
\theta_{k,k-j} &= \frac{1}{\nu_j} \left[\gamma(k-j) - \sum_{i=0}^{j-1} \theta_{j,j-i} \theta_{k,k-i} \nu_i \right], \\
\nu_0 &= \gamma(0), \\
\nu_k &= \gamma(0) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}^2 \nu_j,
\end{aligned}$$

a hodnoty $\{\theta_{ij}\}$ a $\{\nu_j\}$ počítáme v pořadí

$$\begin{aligned}
&\widehat{X}_1, \nu_0, \\
&\theta_{11}, \widehat{X}_2, \nu_1, \\
&\theta_{22}, \theta_{21}, \widehat{X}_3, \nu_2, \\
&\vdots \\
&\theta_{T,T}, \theta_{T,T-1}, \dots, \theta_{T,1}, \widehat{X}_{T+1}, \nu_T.
\end{aligned}$$

1.3.2 Boxova-Jenkinsova metodologie

Abychom mohli zkonstruovat předpovědi touto metodou, vyjdeme z vyjádření $AR(p)$ jako lineárního procesu (1.4).

Označme $\widehat{X}_{t+k}(t)$ předpověď v čase t o k kroků dopředu, kterou hledáme ve tvaru

$$\widehat{X}_{t+k}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{k+i}^* \varepsilon_{t-i}.$$

Opět budeme minimalizovat střední čtvercovou chybu, nyní ve tvaru

$$\mathbb{E} \left(X_{t+k} - \widehat{X}_{t+k}(t) \right)^2. \quad (1.17)$$

Použitím (1.4) můžeme (1.17) přepsat do tvaru

$$MSE = \mathbb{E} \left(\varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \cdots + \psi_{k-1} \varepsilon_{t+1} + \sum_{j=k}^{\infty} (\psi_j - \psi_j^*) \varepsilon_{t+k-j} \right)^2.$$

Označíme-li Z výraz v závorce, vidíme, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= 0, \\ MSE &= \mathbb{E}Z^2 = \text{var}Z. \end{aligned}$$

S využitím definice 2 můžeme dále psát

$$\begin{aligned} MSE &= \text{var} \varepsilon_{t+k} + \sum_{j=1}^{k-1} \text{var}(\psi_j \varepsilon_{t+k-j}) + \sum_{j=k}^{\infty} \text{var}[(\psi_j - \psi_j^*) \varepsilon_{t+k-j}] = \\ &= \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2 + \sum_{j=k}^{\infty} (\psi_j - \psi_j^*)^2 \right). \end{aligned}$$

Střední čtvercová chyba je nejmenší, pokud $\psi_j^* = \psi_j$ pro $j \geq k$. Dospěli jsme tedy k předpovědi ve tvaru

$$\widehat{X}_{t+k}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{k+j} \varepsilon_{t-j}. \quad (1.18)$$

Chyba předpovědi $\widehat{X}_{t+k}(t)$ je

$$e_{t+k}(t) = X_{t+k} - \widehat{X}_{t+k}(t) = \varepsilon_{t+k} + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j \varepsilon_{t+k-j}.$$

Má nulovou střední hodnotu a rozptyl

$$\text{var}[e_{t+k}(t)] = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2 \right).$$

Speciálně můžeme chybu předpovědi v čase $t-1$ o 1 krok dopředu zapsat jako

$$e_t(t-1) = \varepsilon_t,$$

to znamená, že bílý šum je jednokroková chyba předpovědi.

Obecný postup konstrukce převezmeme z knihy Cipra (2008), str. 367–368. Vzhledem k linearitě předpovědí můžeme psát

$$\widehat{X}_{t+k}(t) = b_1 \widehat{X}_{t+k-1}(t) + \dots + b_p \widehat{X}_{t+k-p}(t), \quad (1.19)$$

kde $\widehat{X}_{t+j}(t) = X_{t+j}$ pro $j \leq 0$. Pak můžeme rekurentně počítat předpovědi, dokud se nedostaneme do požadovaného horizontu a času, v tomto pořadí

- o 1 krok dopředu: $\widehat{X}_1(0), \widehat{X}_2(1), \dots$,
- o 2 kroky dopředu: $\widehat{X}_2(0), \widehat{X}_3(1), \dots$,
- ...

Odvodíme předpovědi v modelu $AR(1)$. Protože se jedná o nejjednodušší případ autoregresního procesu, můžeme předpověď spočítat přímo z definice, nepotřebujeme obecný postup konstrukce. V Boxově-Jenkinsově metodologii je

$$X_t = b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t = b_1(b_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \sum_{j=0}^{\infty} b_1^j \varepsilon_{t-j},$$

tedy $\psi_j = b_1^j$ pro $j \geq 0$. Podle (1.18) po dosazení za ψ_j platí

$$\widehat{X}_{t+k}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_1^{k+j} \varepsilon_{t-j} = b_1^k \sum_{j=0}^{\infty} b_1^j \varepsilon_{t-j} = b_1^k X_t.$$

Z kapitoly 1.2.1 víme, že podmínka stacionarity pro $AR(1)$ je $|b_1| < 1$, z toho plyne

$$\widehat{X}_{t+k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

podle kvadratického středu (viz Cipra (2008), str. 369).

1.4 Metoda nejmenších čtverců

Parametry autoregresního modelu lze odhanout metodou nejmenších čtverců (MNČ, anglicky OLS) nebo metodou maximální věrohodnosti (anglicky MLE), na základě realizací X_1, \dots, X_T posloupnosti $\{X_t\}$. Popíšeme zde první z nich.

Pokud máme k dispozici hodnoty X_1, \dots, X_T , $T > p + 1$, procesu $AR(p)$, minimalizujeme při MNČ součet čtverců

$$S(\mathbf{b}) = \sum_{t=p+1}^T (X_t - b_1 X_{t-1} - \dots - b_p X_{t-p})^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{F}\mathbf{b})^\top (\mathbf{X} - \mathbf{F}\mathbf{b}),$$

kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{p+1} \\ X_{p+2} \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} X_p & X_{p-1} & \dots & X_1 \\ X_{p+1} & X_p & \dots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{T-1} & X_{T-2} & \dots & X_{T-p} \end{pmatrix}.$$

Odhady parametrů b_1, \dots, b_p získáme položením první parciální derivace $S(\mathbf{b})$ rovné nule. Za předpokladu plné hodnosti matice \mathbf{F} máme

$$\frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = -2(\mathbf{F}^\top \mathbf{X} - \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{b}) = 0.$$

Řešením je soustava normálních rovnic $\mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{b} = \mathbf{F}^\top \mathbf{X}$ a hledaný odhad parametrů je

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\top \mathbf{X}.$$

Plnou hodnost matice \mathbf{F} zajišťují následující předpoklady

- $E(\varepsilon_t) = 0$,
- $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$,
- $\text{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$ pro $s \neq t$,
- $\text{cov}(X_{t-k}, \varepsilon_t) = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Autoregresní modely je všechny splňují.

Poznámka. Odhad metodou maximální věrohodnosti je odvozen například v knize Fan a Yao (2003), str. 93–96.

2. Prahový autoregresní model časových řad

Zavedený lineární model časových řad má v praxi omezené použití, neboť pozorovaná data obvykle vykazují nelineární chování. Jedním z možných alternativních přístupů je využití lineárního modelu ve více režimech. Takovému modelu se říká prahový a je popsán v kapitole 4.1 knihy Fan a Yao (2003).

2.1 Prahový autoregresní proces

2.1.1 Základní vlastnosti

Definice 10 (Prahový autoregresní proces s k režimy). *Proces definovaný předpisem*

$$X_t = \sum_{i=1}^k (b_{i1}X_{t-1} + \dots + b_{i,p_i}X_{t-p_i} + \sigma_i\varepsilon_t)\mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i),$$

kde

- $k \geq 2$,
- $\{\varepsilon_t\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin,
- $E\varepsilon_t = 0$, $\text{var}\varepsilon_t = 1$,
- $d, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$,
- $\sigma_i > 0$,
- b_{ij} jsou neznámé parametry,
- $\bigcup_{i=1}^k A_i = (-\infty, \infty)$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$,

nazýváme prahový autoregresní proces s k režimy.¹

Poznámka. Budeme předpokládat, že A_i jsou intervaly ve tvaru $(r_{i-1}, r_i]$ pro $i = 1, \dots, k-1$ a (r_{k-1}, r_k) , kde $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_k = \infty$. Proměnné r_i budeme nazývat prahy. Prahové autoregresní procesy s k režimy budeme značit zkratkou $TAR(k)$ (z anglického threshold autoregressive process).

Z definice 10 vidíme, že na každém intervalu A_i , $1 \leq i \leq k$, je TAR definovaný jako autoregresní lineární proces.

V následující větě, uvedené v knize Fan a Yao (2003) na str. 126–127, uvádíme podmínky stacionarity TAR procesů.

Věta 4. *Proces $TAR(k)$ z definice 10 je silně stacionární, pokud*

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_p$$

¹Fan a Yao (2003), str. 126

a platí buď

$$\max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^{p_i} |b_{ij}| < 1 \quad \text{nebo} \quad \sum_{j=1}^p \max_{1 \leq i \leq k} |b_{ij}| \leq 1,$$

kde $p = \max_{1 \leq i \leq k} p_i$.

Důkaz. Je uveden v knize Fan a Yao (2003), str. 36. □

2.1.2 Příklady

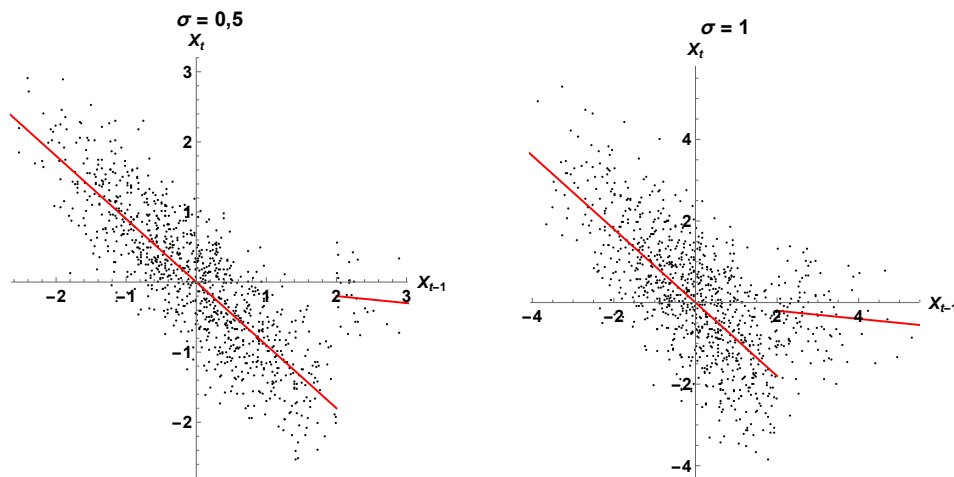
Abychom přiblížili chování prahových autoregresních procesů, uvedeme několik ilustračních příkladů. Ke každému vykreslíme graf závislosti X_t na X_{t-1} , kde je červenou barvou vyznačena regresní funkce. Všechny uvedené řady byly simulovány v programu Wolfram Mathematica, kde jsme pro posloupnost ε_t zvolili normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.

TAR se dvěma režimy

Jedná se o nejjednodušší případ prahového autoregresního procesu, na kterém posoudíme vliv parametru σ . Předpis simulované časové řady je

$$X_t = \begin{cases} -0,9X_{t-1} + \sigma\varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 2, \\ -0,1X_{t-1} + \sigma\varepsilon_t, & X_{t-1} > 2, \end{cases} \quad (2.1)$$

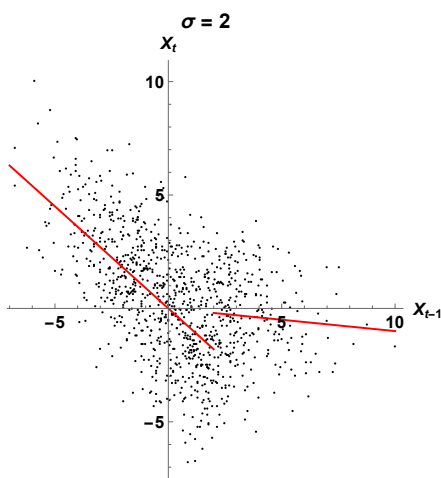
kde $\sigma \in \{0,5; 1; 2\}$. Pro každou volbu σ bylo generováno $T = 1000$ hodnot časové řady řídicí se modelem (2.1).



Obrázek 2.1: TAR se dvěma režimy, kde $\sigma \in \{0,5; 1\}$

Z grafů na obrázcích 2.1 a 2.2 vidíme, že parametr σ má vliv na rozptyl veličin z posloupnosti $\{X_t\}$: pro $\sigma = 0,5$ nabývají simulované realizace X_1, \dots, X_{1000} hodnot z intervalu $(-3; 3)$, ale pro $\sigma = 2$ jsou jejich hodnoty v intervalu $(-7; 10)$.

Také vidíme, že předěl v prahovém bodě 2 je pro menší σ zřetelný, zatímco pro $\sigma = 2$ je nevýrazný.



Obrázek 2.2: TAR se dvěma režimy, kde $\sigma = 2$

TAR se třemi a čtyřmi režimy

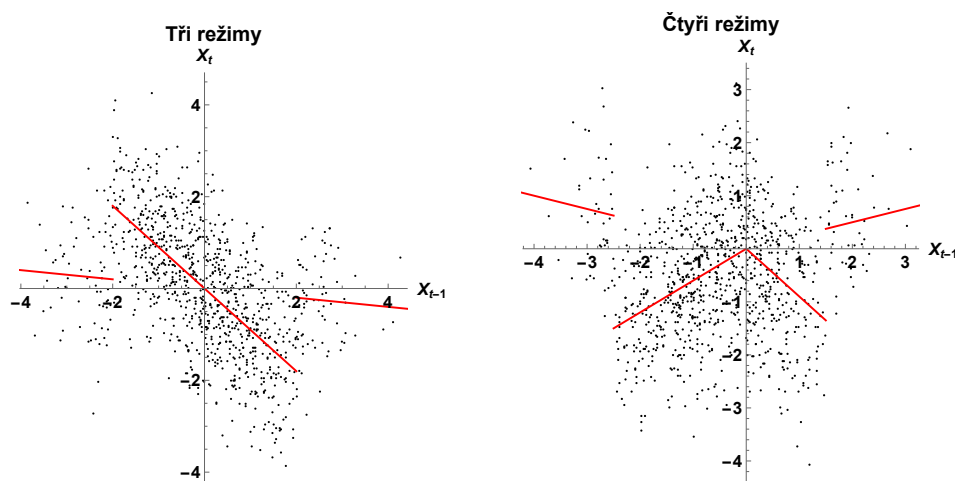
Uvedeme zde ještě prahový autoregresní proces se třemi režimy daný předpisem

$$X_t = \begin{cases} -0,1X_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq -2, \\ -0,9X_{t-1} + \varepsilon_t, & -2 < X_{t-1} \leq 2, \\ -0,1X_{t-1} + \varepsilon_t, & 2 < X_{t-1}, \end{cases}$$

a se čtyřmi režimy s předpisem

$$X_t = \begin{cases} -0,25X_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq -2,5, \\ 0,6X_{t-1} + \varepsilon_t, & -2,5 < X_{t-1} \leq 0, \\ -0,9X_{t-1} + \varepsilon_t, & 0 < X_{t-1} \leq 1,5, \\ 0,25X_{t-1} + \varepsilon_t, & 1,5 < X_{t-1}. \end{cases}$$

Díky $\sigma = 1$ v obou předpisech lze v obrázku 2.3 zřetelně rozlišit jednotlivé režimy.



Obrázek 2.3: TAR se třemi a čtyřmi režimy

Lze konstatovat, že graf závislosti X_t na X_{t-d} je jednoduchým nástrojem k rozpoznání nelinearity v analyzované časové řadě.

2.2 Metoda nejmenších čtverců

Při prokládání reálných dat prahovým autoregresním modelem potřebujeme odhadnout nejen parametry $b_{i,1}, \dots, b_{i,p_i}$, ale také d , p_i , σ_i a A_i pro $1 \leq i \leq k$. Algoritmus odhadování metodou nejmenších čtverců tedy rozdělíme na několik kroků, které jsou popsány v knize Fan a Yao (2003), str. 131–132.

2.2.1 Obecný postup metody nejmenších čtverců

Mějme pozorování X_1, \dots, X_T , $T > p + 1$, procesu $TAR(k)$. Předpokládejme, že známe počet režimů k , intervaly A_i a řády autoregresí p_i , $1 \leq i \leq k$. Dále předpokládejme $d \leq p = \max_{1 \leq i \leq k} p_i$ a označme

$$\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,p_i} \end{pmatrix}.$$

V prvním kroku algoritmu pro jednotlivé pevně zvolené hodnoty $d \in \{1, \dots, p\}$ a pro $i \in \{1, \dots, k\}$ minimalizujeme

$$S_T(\mathbf{b}_i) = \sum_{t=p+1}^T (X_t - b_{i,1}X_{t-1} - \dots - b_{i,p_i}X_{t-p_i})^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i).$$

Takto získané odhady označíme $\tilde{\mathbf{b}}_i(d)$. Pro pevné d se jedná o odhad parametrů \mathbf{b}_i v i -tém režimu metodou nejmenších čtverců, k jejich výpočtu tedy můžeme použít teorii z kapitoly 1.4.

Ve druhém kroku hledáme odhad d jako

$$\hat{d} = \arg \min_{1 \leq d \leq p} \sum_{i=1}^k S_T(\tilde{\mathbf{b}}_i(d)).$$

Pokud existuje více takových \hat{d} , vybereme nejmenší. Výsledný odhad regresních parametrů můžeme označit $\hat{\mathbf{b}}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i(\hat{d})$.

Počet režimů k lze určit z grafu dat, jak bylo naznačeno v kapitole 2.1.2, ale v praxi jsou A_i a p_i často neznámé, proto uvedeme i postup pro hledání jejich odhadů.

Pro danou množinu možných intervalů $\{A_i\}$ označme

$$S_T(\{A_i\}) = \sum_{i=1}^k S_T(\hat{\mathbf{b}}_i). \quad (2.2)$$

Intervaly, pro které je $S_T(\{A_i\})$ minimální, označíme \hat{A}_i , $1 \leq i \leq k$.

Pro odhad p_i potřebujeme prvně zavést odhad parametrů σ_i jako

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T_i} S_T(\hat{\mathbf{b}}_i), \quad 1 \leq i \leq k,$$

kde T_i je počet prvků množiny $\{t : p < t \leq T \text{ a } X_{t-\hat{d}} \in \hat{A}_i\}$.

Nakonec odhadneme autoregresní řády $\{p_i\}$ pomocí zobecněného Akaikeho informačního kritéria

$$AIC(\{p_i\}) = \sum_{i=1}^k [T_i \log(\hat{\sigma}_i^2) + 2(p_i + 1)]. \quad (2.3)$$

Odhady \hat{p}_i volíme tak, aby minimalizovaly $AIC(\{p_i\})$.

2.2.2 Metoda nejmenších čtverců pro dva režimy

Uvedený obecný postup rozepíšeme pro jednoduchý $TAR(2)$ proces s předpisem

$$X_t = \begin{cases} b_{1,1}X_{t-1} + b_{1,2}X_{t-2} + \sigma_1\varepsilon_t, & X_{t-d} \leq r, \\ b_{2,1}X_{t-1} + b_{2,2}X_{t-2} + \sigma_2\varepsilon_t, & X_{t-d} > r, \end{cases}$$

kde $d \in \{1, 2\}$. Zřejmě máme $p = 2$, $A_1 = (-\infty, r]$, a $A_2 = (r, \infty)$. V prvním kroku pro pevné d odvodíme $S_T(\mathbf{b}_i)$. Pro $i = 1, 2$ minimalizujeme součet

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{b}_i) &= \sum_{t=3}^T (X_t - b_{i,1}X_{t-1} - b_{i,2}X_{t-2})^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) = \\ &= (\mathbf{X} - \mathbf{F}\mathbf{b}_i)^\top \mathbf{I} (\mathbf{X} - \mathbf{F}\mathbf{b}_i), \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}(X_{3-d} \in A_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{I}(X_{4-d} \in A_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{I}(X_{T-d} \in A_i) \end{pmatrix}$$

a matice \mathbf{F} a vektor \mathbf{X} z kapitoly 1.4 jsou ve tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_{T-1} & X_{T-2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_3 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\frac{\partial S_T(\mathbf{b}_i)}{\partial \mathbf{b}_i} = -2(\mathbf{F}^\top \mathbf{I} \mathbf{X} - \mathbf{F}^\top \mathbf{I} \mathbf{F} \mathbf{b}_i)$$

a tedy $\tilde{\mathbf{b}}_i(d) = (\mathbf{F}^\top \mathbf{I} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\top \mathbf{I} \mathbf{X}$, což můžeme po roznásobení rozepsat jako

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{i,1}(d) &= C \left[\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \sum_{t=3}^T X_t X_{t-1} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \sum_{t=3}^T X_t X_{t-2} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{i,2}(d) = C & \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \sum_{t=3}^T X_t X_{t-2} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) - \right. \\ & \left. - \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \sum_{t=3}^T X_t X_{t-1} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \right], \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} C = & \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) - \right. \\ & \left. - \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} \mathbb{I}(X_{t-d} \in A_i) \right]^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku bychom zvolili

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in \{1,2\}} \left[S_T(\tilde{\mathbf{b}}_1(d)) + S_T(\tilde{\mathbf{b}}_2(d)) \right]$$

a položili $\hat{\mathbf{b}}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i(\hat{d})$.

2.3 Testování linearity

V předcházejících kapitolách jsme definovali autoregresní a prahové autoregresní modely pro časové řady. V kapitole 2.1.2 jsme ukázali grafický nástroj pro identifikaci prahového modelu v datech. Nyní zavedeme test, pomocí kterého můžeme rozhodnout, zda jsou pozorovaná data z $AR(p)$ procesu či z procesu TAR se dvěma režimy. Test je popsán v Chan (1990) a Chan (1991).

Mějme pozorování X_1, \dots, X_T , $T > p + 1$, ze slabě stacionární časové řady s nulovou střední hodnotou. Testujeme nulovou hypotézu

$$H_0 : X_t = \theta_1 X_{t-1} + \dots + \theta_p X_{t-p} + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^p \theta_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

proti alternativě

$$H_1 : X_t = \sum_{j=1}^p \theta_j X_{t-j} + \mathbb{I}(X_{t-d} \leq r) \left[\sum_{j=1}^p \varphi_j X_{t-j} \right] + \varepsilon_t.$$

Předpokládáme, že parametry $1 \leq p$ a $1 \leq d \leq p$ známe a $\{\varepsilon_t\}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny z rozdělení $N(0, \sigma^2)$, kde $0 < \sigma^2 < \infty$, přičemž ε_t nezávisí na X_{t-1}, X_{t-2}, \dots , viz Chan (1991). Dále předpokládáme, že r leží uvnitř známého omezeného uzavřeného intervalu I_r .

V článku Chan (1990) je k testování H_0 proti H_1 navržena testová statistika

$$\lambda = T' \frac{(\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2}, \quad (2.4)$$

kde $T' = T - \max(p, d) = T - p$.

Označme $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)^T$. Reziduální součet čtverců v modelu $AR(p)$, to jest za platnosti H_0 , má tvar

$$S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{t=p+1}^T \left(X_t - \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j X_{t-j} \right)^2 = \min_{\{\theta_i\}} \sum_{t=p+1}^T \left(X_t - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{t-j} \right)^2.$$

Zřejmě jsou $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ odhady autoregresních parametrů metodou nejmenších čtverců, která byla popsána v kapitole 1.4.

Odhad rozptylu σ^2 veličin ε_t za platnosti H_0 je

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{T-p} S(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Dále uvažujme situaci v modelu TAR se 2 režimy, to znamená za platnosti H_1 . Použijeme značení z kapitoly 2.2.2.

V prvním režimu, pro $X_{t-d} \leq r$, máme parametry

$$b_{11} = \theta_1 + \varphi_1, \dots, b_{1p} = \theta_p + \varphi_p$$

a reziduální součet čtverců

$$S_T(\hat{\mathbf{b}}_1) = \sum_{t=p+1}^T \left(X_t - \sum_{j=1}^p (\hat{\theta}_j + \hat{\varphi}_j) X_{t-j} \right)^2.$$

V druhém režimu, pro $X_{t-d} > r$, máme parametry

$$b_{21} = \theta_1, \dots, b_{2p} = \theta_p$$

a reziduální součet čtverců

$$S_T(\hat{\mathbf{b}}_2) = \sum_{t=p+1}^T \left(X_t - \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j X_{t-j} \right)^2 = S(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Obecně lze psát

$$\begin{aligned} S_T(\hat{\mathbf{b}}_i) &= S_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \sum_{t=p+1}^T \left[X_t - \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j X_{t-j} - \mathbb{I}(X_{t-d} \leq r) \sum_{j=1}^p \hat{\varphi}_j X_{t-j} \right]^2 = \\ &= \min_{\{\theta_i\}, \{\varphi_i\}} \sum_{t=p+1}^T \left[X_t - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{t-j} - \mathbb{I}(X_{t-d} \leq r) \sum_{j=1}^p \varphi_j X_{t-j} \right]^2, \end{aligned}$$

kde $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p, \hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p$ jsou odhady metodou nejmenších čtverců podle postupu z kapitoly 2.2.2.

$S_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ ovšem závisí na hodnotě prahu r , proto definujeme odhad rozptylu σ^2 veličin ε_t za platnosti H_1 předpisem

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-p} \min_{r \in I_r} S_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}).$$

Hypotézu H_0 zamítáme ve prospěch alternativy H_1 při velkých hodnotách testové statistiky λ . Kvantily rozdělení veličiny λ byly zjištěny simulačně při volbě

$I_r = [q_X(a); q_X(b)]$, kde $q_X(a)$ je výběrový $100a\%$ -ní kvantil rozdělení veličin X_t , $q_X(b)$ analogicky.

$p \backslash \alpha$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
0	6,12	7,75	9,33	11,36	16,33
1	9,27	11,18	12,94	15,16	20,45
2	11,34	13,38	15,26	17,60	23,13
3	13,25	15,42	17,39	19,83	25,57
4	15,07	17,33	19,39	21,93	27,87
5	16,80	19,16	21,30	23,93	30,04
6	18,48	20,93	23,14	25,85	32,13
9	23,28	25,96	28,36	31,29	38,01
12	27,83	30,70	33,27	36,39	43,50
15	32,20	35,25	37,97	41,26	48,72
18	36,45	39,67	42,52	45,96	53,74

Tabulka 2.1: Kvantily testové statistiky λ při $a = 0,25$, $b = 0,75$

$p \backslash \alpha$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
0	7,61	9,21	10,77	12,80	17,75
1	11,05	12,85	14,55	16,72	21,94
2	13,26	15,18	16,98	19,25	24,69
3	15,30	17,31	19,19	21,57	27,20
4	17,22	19,32	21,28	23,73	29,54
5	19,05	21,23	23,26	25,79	31,77
6	20,82	23,07	25,16	27,77	33,90
9	25,84	28,30	30,55	33,36	39,90
12	30,58	33,20	35,61	38,59	45,49
15	35,13	37,91	40,44	43,58	50,81
18	39,54	42,45	45,11	48,39	55,92

Tabulka 2.2: Kvantily testové statistiky λ při $a = 0,10$, $b = 0,90$

V tabulkách 2.1 a 2.2, převzatých z článku Chan (1991), jsou uvedeny $100(1 - \alpha)\%$ -ní kvantily $q_\lambda(1 - \alpha)$ testové statistiky λ pro vybrané hodnoty α při volbě $a = 0,25$, $b = 0,75$ respektive $a = 0,10$, $b = 0,90$.

Kritický obor testu H_0 proti H_1 na hladině α pak je

$$\lambda > q_\lambda(1 - \alpha).$$

Podle článku Chan (1991) je tento postup asymptoticky ekvivalentní testu poměrem věrohodností.

Popsaný test je jednou z mnoha možností, jak testovat hypotézu linearitu v časových řadách. Další přístupy jsou uvedeny například v knize Tong (1993).

3. Simulační studie

V této části aplikujeme metodu nejmenších čtverců z kapitol 1.4 a 2.2 na simulované časové řady procesů AR a TAR . Dále ze simulovaných řad prahového autoregresního modelu spočítáme sílu testu linearit, popsaného v kapitole 2.3.

Simulace AR a TAR procesů jsme provedli pomocí programu Wolfram Mathematica a zabudovaných funkcí $ARProcess$ a $RandomFunction$. Dále jsme využili funkce $Mean$ a $StandardDeviation$ pro výpočet průměrných hodnot a směrodatných odchylek odhadů.

3.1 Odhady parametrů

3.1.1 Autoregresní proces

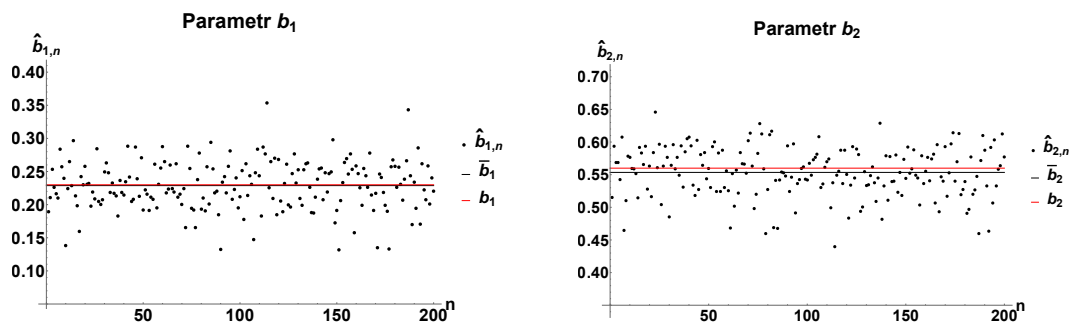
Vygenerovali jsme 200 stacionárních autoregresních posloupností o délce 500 s předpisem

$$X_t = 0,23X_{t-1} + 0,56X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t \sim N(0; 0,5^2)$. Metodou nejmenších čtverců jsme odhadli parametry b_1 a b_2 každé posloupnosti, označme je $\hat{b}_{1,n}$ a $\hat{b}_{2,n}$ pro $n = 1, \dots, 200$. Průměry těchto odhadů vyšly

$$\bar{b}_1 = 0,228734 \quad \text{a} \quad \bar{b}_2 = 0,553493.$$

Oba průměry se od reálných parametrů $b_1 = 0,23$ a $b_2 = 0,56$ odchyľují jen málo (viz obrázek 3.1).



Obrázek 3.1: Parametry autoregresního modelu

Dále jsme spočítali směrodatné odchylky získaných odhadů

$$s_{b_1} = 0,0365347 \quad \text{a} \quad s_{b_2} = 0,0376975,$$

kteřé jsou přijatelné u obou odhadovaných parametrů. Variabilitu jednotlivých odhadů $\hat{b}_{1,n}$, $\hat{b}_{2,n}$ vidíme v obrázku 3.1. Odhady pro parametr b_1 se pohybují v intervalu $(0,13; 0,36)$, pro parametr b_2 v intervalu $(0,43; 0,65)$.

Výsledky simulací potvrzují kvalitu odhadů z hlediska přiblížení k odhadovaným regresním parametrům.

3.1.2 Prahový autoregresní proces

Zde jsme vygenerovali 200 stacionárních prahových autoregresních posloupností s předpisem

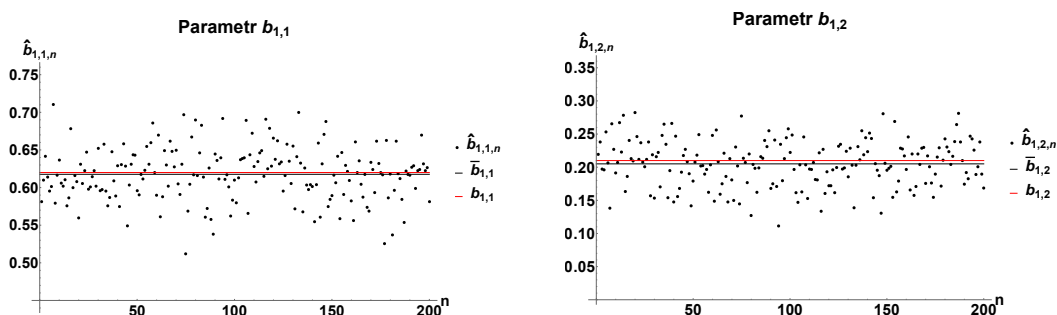
$$X_t = \begin{cases} 0,62X_{t-1} + 0,21X_{t-2} + 0,5\varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 0, \\ 0,37X_{t-1} - 0,33X_{t-2} + 0,5\varepsilon_t, & X_{t-1} > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde $\varepsilon_t \sim N(0; 1)$. Oproti AR procesu jsme zvětšili délku simulovaných posloupností na 1000, abychom měli dostatečný počet pozorování v obou režimech.

Odhady parametrů každé posloupnosti jsme spočítali dvoukrokovou metodou nejmenších čtverců z kapitoly 2.2, jejíž součástí je i odhad parametru d . Ve všech posloupnostech odpovídal odhad \hat{d}_n reálnému parametru $d = 1$.

Průměry a směrodatné odchylky odhadů regresních parametrů v prvním režimu vyšly

$$\begin{aligned} \bar{b}_{1,1} &= 0,617634, & \bar{b}_{1,2} &= 0,205015, \\ s_{b_{1,1}} &= 0,0353855 & \text{a} & s_{b_{1,2}} = 0,0347494. \end{aligned}$$



Obrázek 3.2: Parametry prvního režimu

Ve druhém režimu vyšly průměry

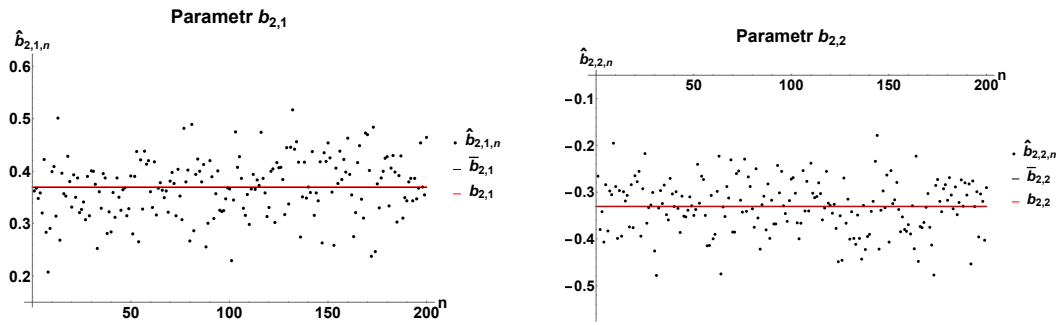
$$\bar{b}_{2,1} = 0,368891 \quad \text{a} \quad \bar{b}_{2,2} = -0,331076,$$

a směrodatné odchylky

$$s_{b_{2,1}} = 0,0564031 \quad \text{a} \quad s_{b_{2,2}} = 0,0562995.$$

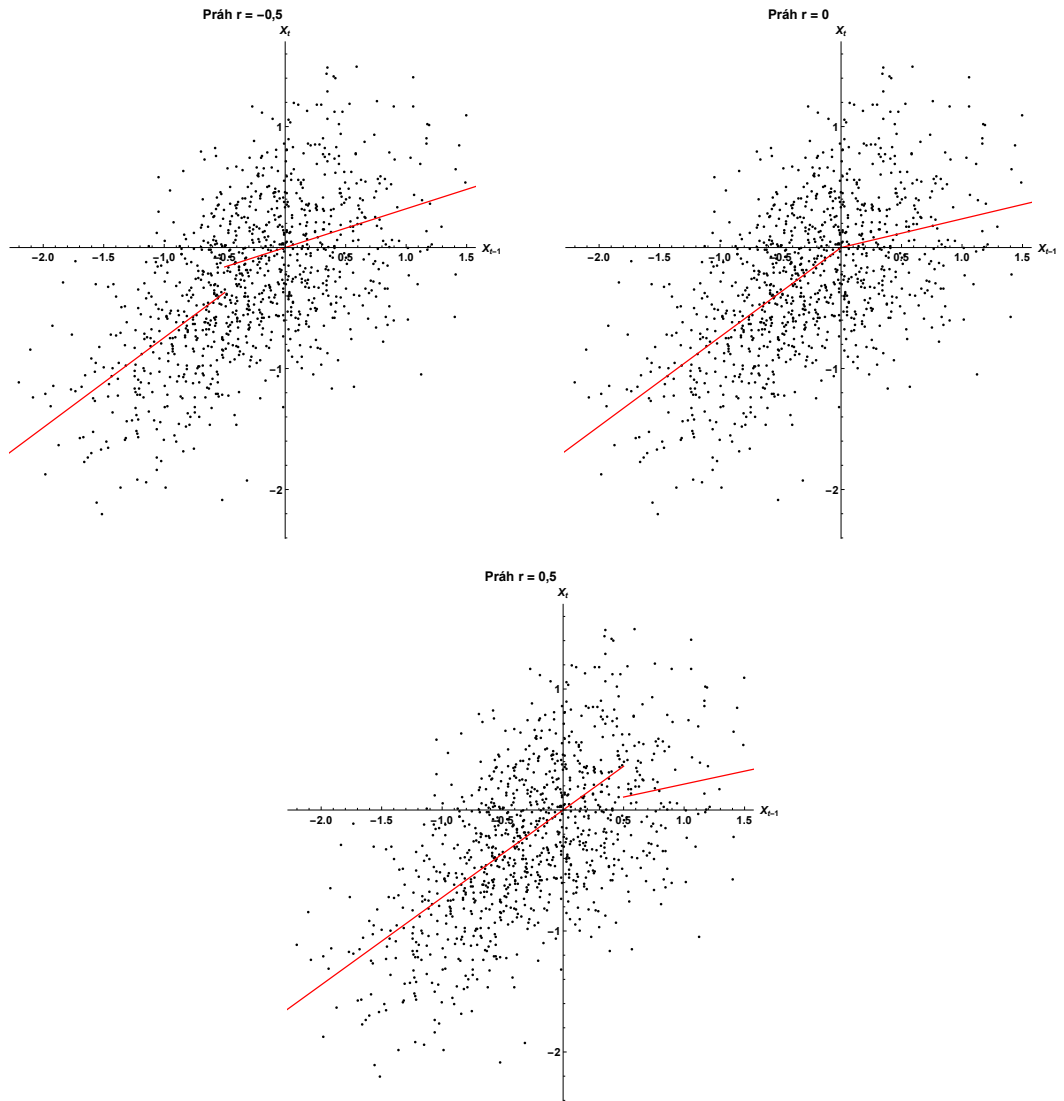
Podobně jako u autoregresního modelu jsou průměry odhadů velice blízko skutečným hodnotám parametrů. Směrodatné odchylky v prvním režimu mají také přijatelné hodnoty, jednotlivé odhady parametru $b_{1,1}$ leží v intervalu $(0,51; 0,72)$, odhady parametru $b_{1,2}$ v rozmezí $(0,11; 0,29)$, viz obrázek 3.2.

Směrodatné odchylky ve druhém režimu jsou vyšší, ale stále přijatelné. Důvodem je větší počet odlehlých odhadů, viz obrázek 3.3. Jednotlivé odhady parametru $b_{2,1}$, leží uvnitř $(0,20; 0,52)$, odhady $b_{2,2}$ se pohybují v rozmezí $(-0,47; -0,18)$. Horší výsledky ve druhém režimu jsou způsobeny menším počtem dat – průměrně 334 členů posloupnosti, tj. přibližně třetina, splňuje podmínku pro druhý režim.



Obrázek 3.3: Parametry druhého režimu

Postup pro odhad A_i a p_i , $i = 1, \dots, k$, ukážeme na náhodně vybrané simulované řadě z modelu (3.1). Jak jsme ukázali v kapitole 2.1.2, graf závislosti X_t na X_{t-1} je vhodným nástrojem k rozpoznání nelinearity časové řady.



Obrázek 3.4: Závislost X_t na X_{t-1} vybrané řady pro $r \in \{-0,5; 0; 0,5\}$

Pro námi vybranou řadu z takového grafu vyplývá volba dvou režimů a prahu $r = 0$, pro ověření metody nejmenších čtverců však zvolíme ještě dvě možné

hodnoty, $r = -0,5$ a $r = 0,5$. Na obrázku 3.4 jsou zobrazeny tyto tři volby prahu r , červenou barvou je znázorněno proložení dat dvěma lineárními funkcemi pro $X_{t-1} \leq r$, resp. $X_{t-1} > r$. Mezivýsledky výpočtů z kapitoly 2.2 jsou uvedeny v tabulce 3.1. Pro volbu $r = 0$ je funkce $S_T(\{A_i\})$ daná předpisem (2.2) minimální, metoda tedy určila správně odhady $\hat{A}_1 = (-\infty, 0]$ a $\hat{A}_2 = (0, \infty)$.

r	-0,5	0	0,5
\hat{b}_{11}	0,546934	0,56211	0,638459
\hat{b}_{12}	0,272501	0,244434	0,121416
\hat{b}_{21}	0,33896	0,347394	0,332779
\hat{b}_{22}	-0,047699	-0,362803	-0,351094
$S_T(\{A_i\})$	264,252	246,573	263,749

Tabulka 3.1: Mezivýsledky výpočtu odhadů \hat{A}_i

Mezivýsledky výpočtu odhadů \hat{p}_i jsou uvedeny v tabulce 3.2. V praxi se běžně uvažují nízké řády autoregrese, proto jsme do výpočtu zahrnuli pouze možnosti $p_i \in \{1, 2\}$, $i = 1, 2$. Vidíme, že funkce $AIC(\{p_i\})$ počítaná podle vzorce (2.3) je minimální pro $p_1 = p_2 = 2$.

	$p_1 = 1$ $p_2 = 1$	$p_1 = 2$ $p_2 = 2$	$p_1 = 1$ $p_2 = 2$	$p_1 = 2$ $p_2 = 1$
T_1	655	655	655	655
T_2	344	343	343	343
\hat{b}_{11}	0,738421	0,56211	0,738421	0,56211
\hat{b}_{12}	–	0,244434	–	0,244434
\hat{b}_{21}	0,237109	0,347394	0,347394	0,237109
\hat{b}_{22}	–	-0,362803	-0,362803	–
$\hat{\sigma}_1^2$	0,251339	0,233845	0,251339	0,233845
$\hat{\sigma}_2^2$	0,303443	0,272318	0,272318	0,304328
$AIC(\{p_i\})$	-1306,76	-1385,95	-1340,69	-1349,83

Tabulka 3.2: Mezivýsledky výpočtu odhadů \hat{p}_i

Můžeme shrnout, že metoda nejmenších čtverců dává uspokojivé výsledky při dostatečně velkém počtu pozorovaných hodnot - u autoregresních modelů tím myslíme více než 500 pozorování, u prahových autoregresních modelů více než 1000.

3.2 Síla testu linearity

V kapitole 2.3 jsme popsali test linearity, nyní pomocí simulace posloupností hodnot z prahového autoregresního modelu odhadneme sílu testu. Generovali jsme 200 posloupností délky 200, 500 a 1000 z $TAR(2)$ řádu 1, 2 a 3, jejichž předpisy vidíme v tabulce 3.3.

	H_1	ε_t
$X_t =$	$\begin{cases} 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 0, \\ 0,25X_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-1} > 0, \end{cases}$	$\varepsilon_t \sim N(0; 1)$
$X_t =$	$\begin{cases} 0,62X_{t-1} + 0,21X_{t-2} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 0, \\ 0,37X_{t-1} - 0,33X_{t-2} + \varepsilon_t, & X_{t-1} > 0, \end{cases}$	$\varepsilon_t \sim N(0; 0,25)$
$X_t =$	$\begin{cases} 0,15X_{t-1} - 0,25X_{t-2} - 0,35X_{t-3} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 0, \\ -0,15X_{t-1} + 0,25X_{t-2} + 0,35X_{t-3} + \varepsilon_t, & X_{t-1} > 0. \end{cases}$	$\varepsilon_t \sim N(0; 1)$

Tabulka 3.3: Simulované řady $TAR(2)$

Síla testu je pravděpodobnost, že za platnosti alternativy zamítneme hypotézu. Odhadneme ji relativní četností

$$\hat{\beta} = \frac{n}{N},$$

kde n je počet posloupností, u kterých na základě testové statistiky dané vzorcem (2.4) zamítáme hypotézu ve prospěch alternativy na hladině $\alpha = 0,05$, a N je celkový počet generovaných posloupností, v našem případě $N = 200$.

$T \backslash p$	1	2	3
200	0	0	0,9
500	0	0,085	1
1000	0,06	0,76	1

Tabulka 3.4: Odhad síly testu $\hat{\beta}$

Odhady síly testu v závislosti na délce simulovaných posloupností T a řádu autoregrese p jsou uvedeny v tabulce 3.4. Jak se dalo čekat, síla testu je přímo úměrná délce simulovaných posloupností. Navíc je přímo úměrná i řádu autoregrese. Pro nízká p a malý počet pozorování vychází $\hat{\beta}$ nulová. V takových případech je vysoká pravděpodobnost chyby II. druhu, tj. nezamítnutí hypotézy za platnosti alternativy.

Lze tedy konstatovat, že popsáný test dobře rozliší prahovou alternativu pouze pro vysoký počet pozorovaných hodnot a pro $p > 2$.

4. Aplikace na reálná data

V předcházející kapitole jsme na simulovaných datech ověřili sílu testu linearity a kvalitu odhadů parametrů AR a TAR modelů. Nyní poznatky uplatníme na reálných datech.

4.1 Test linearity

Na webových stránkách společnosti ČEZ je k dispozici denní vývoj ceny akcií. Data za období od 2.9.2013 do 1.3.2016 vidíme na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Vývoj ceny akcií společnosti ČEZ

Cenu akcií jsme transformovali na logaritmické výnosy pomocí vzorce

$$X_t = \log \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right), \quad t = 1, \dots, 622,$$

kde Y_t je cena akcií v čase t a $\log(\cdot)$ je přirozený logaritmus. Tato transformace zajistí stacionaritu zkoumaných dat.

Pomocí vzorců (1.2) a (1.3) jsme odhadli autokorelační a parciální autokorelační funkci logaritmických výnosů. Na obrázku 4.2 vidíme obě odhadnuté funkce. Bod useknutí PACF není sice zřetelný jako u simulovaných příkladů, ale můžeme předpokládat řád autoregrese $p = 2$.

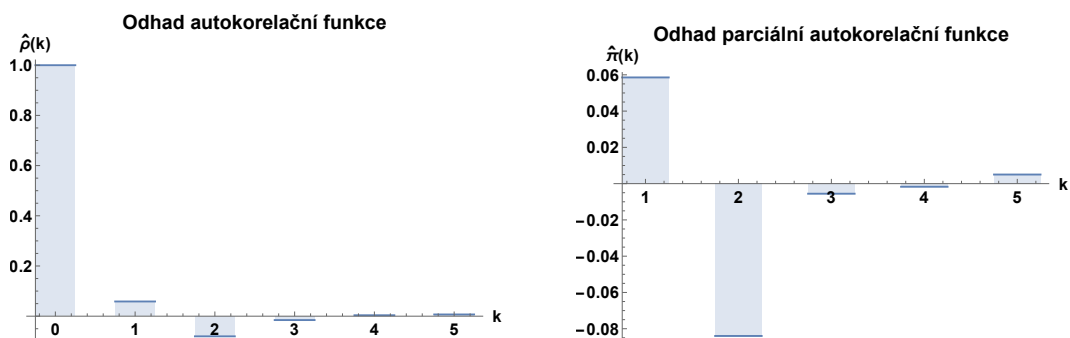
Předpokladem testu linearity je známá hodnota $d \leq p$. Z grafů závislosti X_t na X_{t-1} , resp. X_{t-2} , není na první pohled patrná lineární závislost v několika režimech. Nicméně pro $d = 2$ se lineární závislost v jednom režimu jeví méně výraznější než pro $d = 1$, jak je vidět na obrázku 4.3. Proto předpokládejme pro případný prahový model $d = 2$.

Pomocí programu *Wolfram Mathematica* jsme provedli test linearity na hladině $\alpha = 0,05$, popsany v kapitole 2.3. Zvolili jsme hodnoty $a = 0,25$ a $b = 0,75$

pro výpočet intervalu I_r a pro volbu kvantilu testové statistiky λ z tabulek 2.1 a 2.2. Testová statistika nám vyšla

$$\lambda = 3,71702,$$

což nespadá do kritického oboru $(13,38; \infty)$. Nulovou hypotézu tedy nezamítáme.

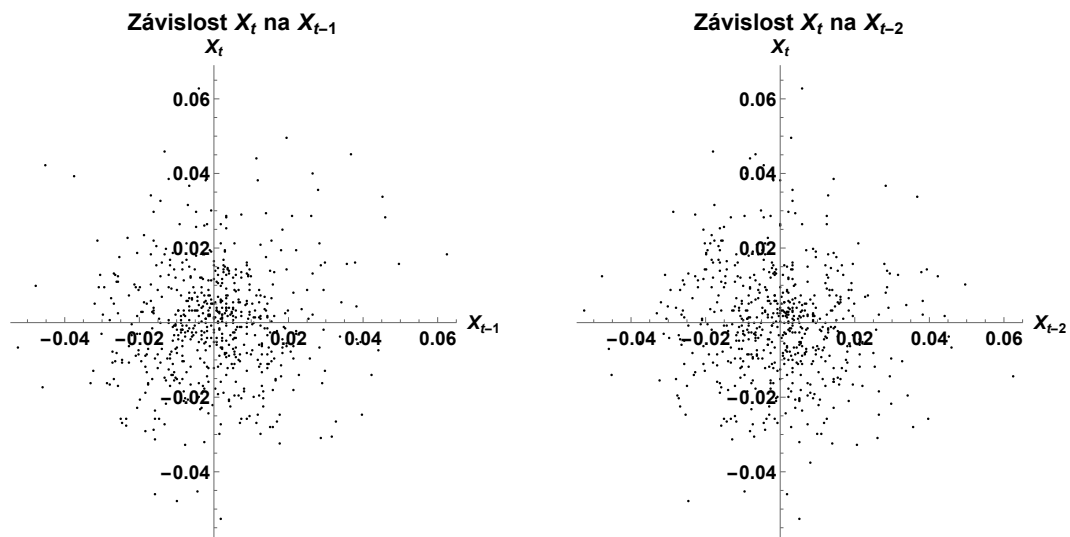


Obrázek 4.2: Odhad ACF a PACF logaritmických výnosů

V kapitole 3.2 jsme dospěli k závěru, že pro $p = 2$ je potřeba alespoň 1000 pozorování, aby test linearity dobře odlišil prahový model. Sice nemáme k dispozici dostatečný počet pozorování, nicméně modelu $AR(2)$ odpovídají jak odhady ACF a PACF, tak i grafy závislosti X_t na X_{t-1} a X_{t-2} . Můžeme tedy konstatovat, že test linearity určil model $AR(2)$ správně.

Z testu linearity máme spočítané odhady parametrů

$$\hat{b}_1 = 0,062327 \quad \text{a} \quad \hat{b}_2 = -0,0836158.$$



Obrázek 4.3: Graf závislosti X_t na X_{t-1} , resp. X_{t-2}

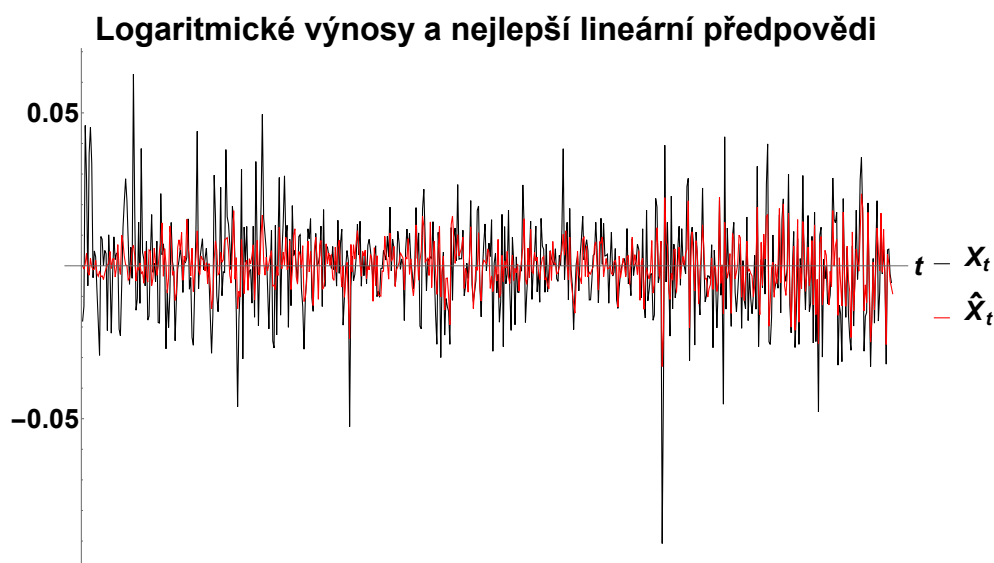
4.2 Předpovědi

V kapitole 1.3 jsme popsali dva způsoby předpovídání budoucích hodnot autoregresních časových řad. Nyní uplatníme obě metody na logaritmických výnosech.

4.2.1 Nejlepší lineární předpověď

Podle inovativního algoritmu (1.16) jsme v programu Wolfram Mathematica spočítali nejlepší lineární předpovědi pro časy $t = 1, \dots, 623$. K výpočtu jsme použili odhady autokovarianční a autokorelační funkce. Na obrázku 4.4 uvádíme logaritmické výnosy X_t černou barvou a předpovědi \hat{X}_t červenou barvou. Vidíme, že tato metoda správně předpovídá hodnoty X_t . Speciálně vychází

$$\hat{X}_{T+1} = \hat{X}_{623} = -0,00912448.$$



Obrázek 4.4: Logaritmické výnosy a nejlepší lineární předpovědi

4.2.2 Boxova-Jenkinsova metodologie

Zde jsme pomocí programu Wolfram Mathematica spočítali předpovědi v čase $T = 622$ o $k = 1, \dots, 5$ kroků dopředu podle vzorce (1.19), kde jsme použili odhadnuté parametry \hat{b}_1 a \hat{b}_2 . V tabulce 4.1 vidíme, že předpovědi počítané touto metodou konvergují velice rychle k 0.

k	$\hat{X}_{T+k}(T)$
1	-0,000113059
2	0,000449871
3	0,0000374927
4	-0,0000352795
5	-0,00000533384

Tabulka 4.1: Předpovědi Boxovou-Jenkinsovou metodologií

Ačkoliv nám Boxova-Jenkinsova metodologie umožňuje spočítat více odhadů budoucích hodnot, jejich velkým nedostatkem je rychlá konvergence k nule. Naopak nejlepší lineární předpověď nám sice poskytuje pouze jednu budoucí hodnotu, lépe však odráží ráz celé posloupnosti.

Závěr

Cílem práce bylo seznámení s vybraným nelineárním autoregresním modelem pro časové řady. V teoretické části jsme uvedli vlastnosti autoregresních a prahových autoregresních procesů, odvodili jsme autokorelační a parciální autokorelační funkce včetně jejich odhadů. Dále jsme popsali možné způsoby předpovídání a odhad parametrů metodou nejmenších čtverců. Nakonec jsme předložili možný test pro výběr odpovídajícího modelu.

Simulační studie vedla k zjištění, že odhady metodou nejmenších čtverců dávají pro dostatečný počet pozorování uspokojivé výsledky pro oba zkoumané modely. Zjistili jsme, že síla popsaného testu linearity je dostatečná k tomu, aby test dobře rozlišoval mezi autoregresními a prahovými autoregresními modely, pouze pokud máme k dispozici stovky pozorování a řád autoregrese je větší než 2.

Na závěr jsme získané znalosti aplikovali na reálná data. Pomocí grafů ACF, PACF a závislosti X_t na X_{t-1} a X_{t-2} jsme se ujistili, že test linearity přiřadil datům odpovídající model $AR(2)$. Metodou nejmenších čtverců, která je součástí testu linearity, jsme odhadli regresní parametry. Konstruovali jsme předpovědi podle obou popsaných metod a došli jsme k závěru, že ačkoliv je nejlepší lineární předpověď náročnější na výpočet a poskytuje pouze jednu budoucí hodnotu zkoumané časové řady, mnohem lépe reflektuje ráz celé posloupnosti.

Seznam použité literatury

- ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- CHAN, K. S. (1990). Testing for threshold autoregression. *The Annals of Statistics*, **18**(4), 1886–1894.
- CHAN, K. S. (1991). Percentage points of likelihood ratio tests for threshold autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **53**(3), 691–696.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, s.r.o., Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- FAN, J. a YAO, Q. (2003). *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. Springer series in statistics. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-95170-9.
- PRÁŠKOVÁ, Z. a LACHOUT, P. (2012). *Základy náhodných procesů I*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.
- TONG, H. (1993). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*. Clarendon Press.
- ČEZ. Vývoj ceny akcií skupiny ČEZ [online]. <https://www.cez.cz/edee/ww3/cs/akcie/akcie.jsf#stocks>. cit. 20.6.2018.

Seznam obrázků

1.1	ACF a PACF procesu AR(1)	10
1.2	ACF a PACF procesu AR(2)	10
2.1	TAR se dvěma režimy, kde $\sigma \in \{0,5; 1\}$	18
2.2	TAR se dvěma režimy, kde $\sigma = 2$	19
2.3	TAR se třemi a čtyřmi režimy	19
3.1	Parametry autoregresního modelu	25
3.2	Parametry prvního režimu	26
3.3	Parametry druhého režimu	27
3.4	Závislost X_t na X_{t-1} vybrané řady pro $r \in \{-0,5; 0; 0,5\}$	27
4.1	Vývoj ceny akcií společnosti ČEZ	30
4.2	Odhad ACF a PACF logaritmických výnosů	31
4.3	Graf závislosti X_t na X_{t-1} , resp. X_{t-2}	31
4.4	Logaritmické výnosy a nejlepší lineární předpovědi	32

Seznam tabulek

2.1	Kvantily testové statistiky λ při $a = 0,25, b = 0,75$	24
2.2	Kvantily testové statistiky λ při $a = 0,10, b = 0,90$	24
3.1	Mezivýsledky výpočtu odhadů \hat{A}_i	28
3.2	Mezivýsledky výpočtu odhadů \hat{p}_i	28
3.3	Simulované řady $TAR(2)$	29
3.4	Odhad síly testu $\hat{\beta}$	29
4.1	Předpovědi Boxovou-Jenkinsovou metodologií	32