

Posudek diplomové práce Bc. L. Staré “The Gibbs phenomenon in the discontinuous Galerkin method”

Předkládaná práce se soustředí na použití nespojitě Galerkinovy metody (discontinuous Galerkin DG) pro případ nelineární Burgersovy rovnice v 1D. Je známo, že řešení této rovnice mohou vykazovat nespojitosti. V okolí těchto nespojitostí (jak uvádí autorka) dochází k lokálním oscilacím známým jako Gibbsův jev. Tyto oscilace ale mají nefyzikální charakter a jsou způsobeny numerickým řešením. V řadě případů jsou a nebo mohou být zdrojem velkých nepřesností někdy až s fatálními následky. Práce se zabývá testováním několika metod pro potlačení těchto oscilací založených vesměs na nespojitě Galerkinově metodě a jejich modifikacích. Motivace vychází z citované knihy D. Kuzmina A Guide to Numerical Methods for Transport Equations. Práce ukazuje použití základní DG metody a na jejím základě pak srovnává několik metod, jak se vyrovnat s nefyzikálními oscilacemi numerického řešení. Je srovnáváno použití standardní DG metody, stabilního schémata nižšího řádu (low-order scheme), modifikace DG metody a pak také tzv. flux corrected techniky. Ve všech případech se zabývá numerickou aproximací řešení Burgersovy rovnice v 1D případě, pro účely práce jsou uváženy dva testovací příklady.

Práce je členěna do úvodu, čtyř kapitol a závěru. Úvod obsahuje poměrně detailní přehled literatury. Kapitola 1 obsahuje některé základní definice a označení. Kapitola 2 je věnována problému nelineární rovnice konvekce a jejímu řešení užitím DG metody. V kapitole 3 se autorka modifikacím DG metody s cílem potlačení nefyzikálních oscilací. Speciálně uvádí tzv. schéma nízkého řádu (low order method) ale také flux corrected schématům (FCT), které jsou na schématu nižšího řádu založeny. Všechny metody jsou rozpracovány pro případ nelineární rovnice. Uvedená schémata jsou dále aplikovaná pro numerické řešení Burgersovy rovnice a práce obsahuje srovnání numerických výsledků dosažených jednotlivými schématy.

Práce je psaná v anglickém jazyce (zřejmě z důvodu užití metody FCT s převládající anglickou terminologií). Bohužel práce obsahuje po jazykové stránce značné množství chyb, někdy jsou použité formulace jazykově nepřesné nebo nesprávné. Bohužel tento problém také ovlivňuje matematickou preciznost práce, nepřesnosti jsou také obsaženy nejen ve formulacích doprovodného textu ale také v matematické části práce (viz např. str. 7-8 věnované numerickému toku, nebo dále str. 11) Na druhou stranu autorka zvládla zpracování vysoce obtížného tématu numerického řešení nelineárního problému užitím nespojitě Galerkinovy metody (byť v 1D případě) v kombinaci s aplikací tzv. flux corrected schématu a linearizací. Z práce bohužel není jasné, jakým způsobem autorka realizovala numerické výpočty. Numerické výsledky částečně ukazují, že prezentovaná metoda může vést k potlačení Gibbsova jevu.

Autorce bych rád položil následující otázky:

- 1) Jakým způsobem bylo realizováno vlastní numerické řešení? Byla metoda (FCT) testována pro případ lineární transportní rovnice?
- 2) Viz str. 19 – autorka uvádí, že metoda FCT klade požadavek $\text{div } v = 0$. Ale tato metoda byla úspěšně aplikována na řešení Eulerových rovnic. Je tedy tento požadavek opravdu nezbytný pro FCT?
- 3) Je soustava rovnic 3.10 je lineární nebo nelineární? Jak je prakticky řešena?
- 4) Co je norma a co seminorma Sobolevova prostoru H^1 dle definice 1? Je seminorma uvedená v def. 2 opravdu seminorma?

5) Strana 7, definice 4, bod 1 – uvedená množina nebo prostor funkcí bez vysvětlení. O jaký prostor se jedná? Stačí stručná odpověď.

6) Str. 9, v odstavci začínajícím “*To give the reader a complete overview ...*” jsou uvedeny dva požadavky na numerický tok. Jaké jsou všechny požadavky kladené na numerický tok?

7) Str. 15, v definici 7 je uvedeno “*discrete solution satisfies the local discrete maximum principle*”. Ve větě 3 (Theorem 3) pak ale “*Then ... the local DMP holds.*” Jak je to tedy míněno správně?

8) Str. 23, v rovnici 3.8 je užito koeficientů α_{ij} . Tyto jsou aplikovány stejně na členy “časové derivace” (m_{ij}) tak také na členy umělé viskozity (d_{ij}) ? Jsou aplikovány stejným způsobem na všechny toky (zdá se mi, že by měl být rozdíl mezi tokem v rámci elementu a tokem v rámci skokové nespojitosti v uzlech sítě)?

I přes uvedené výtky směřující hlavně k formálnímu zpracování práce práci hodnotím kladně a to i z hlediska vysoké obtížnosti zadaného tématu. Autorka musela zvládnout nastudování problematiky užití limiterů (flux corrected) schémat, jejich modifikaci jednak pro DG metodu ale také pro nelineární rovnici. Z těchto důvodů doporučuji práci k obhajobě.



Doc. RNDr. Petr Sváček PhD.