MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martina Magová

Kótované promítání pro střední školy

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Učitelství mamematiky – Učitelství deskriptivní geometrie

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 20. 6. 2018 podpis

Ráda bych poděkovala všem, kteří mě při tvorbě této práce podporovali. Mé poděkování patří především vedoucí práce RNDr. Vlastě Moravcové, Ph.D. za trpělivost a podnětné rady a připomínky, které mi poskytovala.

Název práce: Kótované promítání pro střední školy

Autor: Martina Magová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce navazuje na bakalářskou práci *Polohové úlohy v kótovaném promítání*. Rozšiřuje ji o metrické úlohy a analýzu současného stavu výuky kótovaného promítání na středních školách. Její součástí jsou řešené příklady, z nichž k některým jsou v příloze k dispozici krokované konstrukce upravené pro promítání dataprojektorem. Teoretická část včetně krokovaných konstrukcí je také zpřístupněna veřejnosti prostřednictvím internetových stránek. Práce je určena žákům středních škol jako materiál k samostudiu a současně jako pomůcka pro učitele, kteří zde mohou čerpat zadání úloh do výuky a promítnout krokované řešení.

Klíčová slova: pravoúhlé promítání, konstrukční úlohy, polohové úlohy, metrické úlohy

Title: Orthogonal projection onto the *xy*-plane for secondary schools

Author: Martina Magová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis follows on from the bachelor thesis *Position examples in an orthogonal projection onto the xy-plane* with metric examples and analysis of the current state of teaching the orthogonal projection onto the *xy*-plane at secondary schools. It includes a variety of examples and exercises. For some of those, step-by-step constructions are available in the addendum. They have been adapted for projection using a dataprojector. The theoretical part including step-by-step constructions was also made available to the public via a webpage. The thesis is designed for secondary school students as a material for self study and as a tool for teachers, who can use the included examples and project the step-by-step constructions in class.

Keywords: orthogonal projection, construction examples, position examples, metric examples

Obsah

Úvod

Tato práce navazuje na bakalářskou práci *Polohové úlohy v kótovaném promítání*. Rozšiřuje ji o metrické úlohy a analýzu současného stavu výuky kótovaného promítání na středních školách.

Práce je rozdělena do osmnácti kapitol. První kapitola je již zmíněnou analýzou současného stavu výuky kótovaného promítání na středních školách. Druhou kapitolou pak začíná teoretická část práce. Kapitoly 2, 3 a 5 jsou věnovány zobrazování bodů, přímek a rovin v kótovaném promítání. Kapitoly 4, 6 a 7 se zabývají vzájemnou polohou dvou přímek, přímky a roviny a dvou rovin. Kapitoly 8 a 9 jsou věnovány průniku mnohoúhelníků a teoretickému řešení střech. V kapitole 10 lze nalézt výklad otáčení obecné roviny do průmětny. Kapitola 12 se týká kolmosti. Kapitoly 11, 13 a 14 jsou věnovány vzájemné odchylce dvou přímek, přímky a roviny a dvou rovin. Kapitoly 15 až 18 se týkají vzálenosti dvou bodů, bodu od roviny a dvou mimoběžných přímek.

Kapitoly 2 až 9 jsou převzaty z bakalářské práce a mírně modifikovány.

Každé téma je vysvětleno teoreticky i pomocí řešených příkladů. Formulace návodů k řešením jsou inspirovány učebnicí [1], zadání příkladů jsou prací autorky. V celé práci pracujeme s jednotkou 1 cm.

Text je určen žákům a učitelům středních škol, na nichž je deskriptivní geometrie vyučována. Žáci si zde mohou dostudovat to, čemu neporozumněli v hodině, případně doplnit látku, kterou zameškali. Učitelé mohou čerpat zadání úloh do výuky.

V textu se od čtenáře předpokládají základní znalosti z oblasti středoškolské stereometrie, rovnoběžného promítání a osové afinity v rovině.

K některým příkladům jsou v příloze k dispozici krokované konstrukce, které jsou upraveny pro promítání dataprojektorem a poslouží především učitelům jako pomůcka při výuce. V příloze je také k dispozici dotazník, kterým jsme zjišťovali současný stav výuky kótovaného promítání a pravoúhlé axonometrie na středních školách. V naší práci jsme z něj využili část týkající se kótovaného promítání.

Teoretická část práce včetně krokovaných konstrukcí je navíc zpřístupněna veřejnosti prostřednictvím internetových stránek `kotovane-promitani.deskriptiva.cz` připravených v redakčním systému Joomla.

Práce byla sepsána v programu OpenOffice. Obrázky byly sestrojeny v programu GeoGebra, vyexportovány ve formátu *.png a následně vloženy do textové části. Veškerý použitý software je volně k dispozici na internetu.

1 Současný stav výuky kótovaného promítání na středních školách

V této kapitole se zabýváme rozsahem současné výuky kótovaného promítání na středních školách. Ten jsme zjišťovali pomocí

a) kurikulárních dokumentů,

b) analýzy současných výukových zdrojů,

c) dotazníkového šetření.

1.1 Kótované promítání v kurikulárních dokumentech

Deskriptivní geometrie není na gymnáziích povinným předmětem, a proto není zahrnuta v jejich rámcovém vzdělávacím programu (dále RVP). Pro gymnázia, na nichž je deskriptivní geometrie vyučována jako volitelný předmět, je doporučený vzdělávací obsah tohoto oboru umístěn na metodickém portálu RVP ([8]). Ten z kótovaného promítání obsahuje základní úlohy o přímce a o rovině, vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin, kolmost přímky a roviny a otáčení roviny do průmětny.

Deskriptivní geometrie je obsažena i v některých rámcových vzdělávacích programech pro střední odborné vzdělávání, např. stavebnictví. Ty zahrnují základy kótovaného promítání, které nejsou blíže specifikovány, a jeho aplikace, jako teoretické řešení střech a topografické plochy.

Z kurikulárních dokumentů tedy nelze zjistit mnoho o tom, v jakém rozsahu je vyučováno kótované promítání na středních školách. Pro gymnázia existuje na metodickém portálu nezávazný doporučený vzdělávací obsah, který je poměrně stručný. Některé RVP pro střední odborné vzdělávání, jak již bylo zmíněno, obsahují jen blíže nespecifikované základy kóvaného promítání a jeho aplikace.

1.2 Analýza současných výukových zdrojů

V této podkapitole rozebereme, jak jsou v některých současných středoškolských výukových materiálech vyloženy základní oblasti kótovaného promítání. Pro porovnání jsme vybrali čtyři zdroje:

1) E. Pomykalová: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, Prometheus (1. vydání 2010), [1]

2) B. Musálková: *Deskriptivní geometrie II pro 2. ročník SPŠ stavebních*, Sobotáles (1. vydání 2000), [2]

3) L. Drs: *Deskriptivní geometrie pro střední školy I*, Prometheus (1. vydání 1994), [3]

4) M. Dvořáková: *Kótované promítání, diplomová práce* (2007), [4]

V prvních třech případech se jedná o učebnice, které byly schváleny ministerstem školství k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy. Pro srovnání jsme sem zařadili i jednu diplomovou práci.

Porovnání těchto zdrojů je rozděleno do sedmi částí. V první, nazvané *Přímka*, jsme se zaměřili na zobrazení přímky, sklápění promítací roviny přímky a stupňování přímky. Druhá část je věnována vzájemné poloze dvou přímek. Třetí, nazvaná *Rovina*, se týká zobrazení roviny, čtvrtá je dále věnována vzájemné poloze dvou rovin a pátá vzájemné poloze přímky a roviny. Šestá část je zaměřená na otáčení obecné roviny do průmětny. V sedmé části, nadepsané *Kolmost*, jsme se zabývali větou o průmětu pravého úhlu, konstrukcí přímky kolmé k rovině a konstrukcí roviny kolmé k přímce.

Toto členění se shoduje s řazením příslušných podkapitol v jednotlivých zdrojích, jen otáčení roviny do průmětny bylo v každém materiálu zařazeno jinam.

Přímka

Všechny uvedené zdroje obsahují rozbor toho, co může být průmětem přímky v kótovaném promítání, který je kromě druhé knihy všude doplněn o názorný prostorový obrázek. Dále všechny zdroje obsahují výklad sklápění promítací roviny přímky do průmětny. V první a druhé učebnici nechybí ani sklápění do hlavní roviny.

Po sklápění následuje stupňování přímky a definice pojmů spád a interval přímky. Druhá učebnice, na rozdíl od ostatních, zavádí stupňování přímky pomocí vrstevních rovin o celočíselných kótách. Píše se tu, že tyto roviny danou přímku *protnou v soustavě bodů, jejichž kóty jsou celá čísla lišící se o jedničku. Sestrojíme-li průměty těchto bodů, říkáme, že jsme přímku vystupňovali* ([2], str. 58). Ve třetí učebnici (jako jediné) stupňování přímky není zavedeno.

V rámci zobrazení přímky se obvykle řeší úlohy na vzdálenost dvou bodů, vzájemnou polohu bodu a přímky, odchylku přímky od průmětny nebo dourčení kóty bodu tak, aby ležel na zadané přímce.

Vzájemná poloha dvou přímek

Kromě třetí učebnice, která se vzájemným polohám nevěnuje vůbec, následuje ve všech ostatních po části věnované přímce analýza toho, jak se mohou promítnout dvě rovnoběžné, dvě různoběžné nebo dvě mimoběžné přímky.

Druhý a čtvrtý materiál se od prvního liší tím, že do tohoto rozboru také zahrnují, jak se v jednotlivých případech liší stupňování daných přímek.

Rovina

V podkapitole týkající se průmětu roviny je obvykle připomenuto, čím je rovina jednoznačně určena. Následně jsou zavedeny pojmy jako stopa roviny, hlavní a spádové přímky roviny, spádové měřítko, spád a interval roviny. Výjimkou je třetí učebnice, v níž lze najít jen zavedení stopy a hlavních přímek roviny.

Pouze v první učebnici je rovina zadávána také pomocí souřadnic, v ostatních se tento způsob zadání nevyskytuje.

Vzájemná poloha dvou rovin

Část věnovaná vzájemné poloze dvou rovin začíná v prvním, druhém a čtvrtém zdroji zmínkou o tom, že rovnoběžné roviny, které nejsou rovnoběžné s průmětnou, mají rovnoběžné spádové přímky. Dále zde je možné najít rozbor toho, jak se mohou promítnout dvě různoběžné roviny. První i čtvrtý materiál obsahují informaci, jak lze najít průsečnici různoběžných rovin ve speciálních případech, kdy a) je jedna z rovin rovnoběžná s průmětnou, b) je jedna z rovin kolmá k průmětně a c) jsou obě roviny kolmé k průmětně. Dále všechny zdroje popisují obecný postup hledání průsečnice různoběžných rovin, a sice zvlášť pro případ, kdy jsou jejich stopy různoběžné, a zvlášť pro případ, kdy jsou jejich stopy rovnoběžné.

První a druhý výukový materiál obsahují dva řešené příklady na sestrojení průsečnice dvou různoběžných rovin obecně položených vůči průmětně. V jednom z nich mají dané roviny různoběžné stopy a ve druhém z nich rovnoběžné. Čtvrtý materiál obsahuje řešenou úlohu na vzájemnou polohu rovin obecných rovin s rovnoběžnými stopami a další příklady na vzájemnou polohu dvou rovin.

Třetí učebnice se vzájemným polohám dvou rovin nevěnuje vůbec.

Vzájemná poloha přímky a roviny

V prvním, druhém a čtvrtém zdroji je popsán obecný postup, jak lze najít průsečík přímky s rovinou s využitím pomocné roviny obsahující zadanou přímku. Dále píší, že je vhodné zvolit pomocnou rovinu kolmou k průmětně a zavádí pojem krycí přímka. První učebnice obsahuje i zmínku o tom, jak se úloha zjednoduší v případě, že je daná přímka nebo daná rovina kolmá k průmětně.

Dále první a druhá učebnice obsahují jeden řešený příklad na zobrazení průsečíku přímky s rovinou, přičemž jsou zadaná přímka i zadaná rovina v obecné poloze vůči průmětně. Oba zdroje tento příklad řeší pomocí promítací roviny proložené danou přímkou. Druhá učebnice přidává druhý postup, kdy úlohu řeší pomocí obecné roviny proložené danou přímkou. Čtvrtý materiál kromě úlohy, v níž mají zadaná rovina i zadaná přímka obecnou polohu vůči průmětně, obsahuje další příklady na vzájemnou polohu přímky a roviny.

Třetí učebnice se na vzájemné polohy přímky a roviny nezaměřuje vůbec.

Otáčení obecné roviny do průmětny

Po výkladu otáčení doplněném o názorný prostorový obrázek následují obvykle úlohy na zobrazení čtverce a podobné aplikační úlohy. Druhá učebnice jako jediná nabízí i vysvětlení otáčení do hlavní roviny.

První a druhý zdroj v řešených úlohách na otáčení využívají osovou afinitu. V prvním z těchto materiálů je osová afinita zavedena ještě před kapitolou věnovanou kótovanému promítání. Ve druhé učebnici osová afinita zavedena není, protože je zavedena již v prvním dílu této učebnice.

Třetí zdroj zavádí osovou afinitu také před kapitolou o kótovaném promítání. V rámci otáčení roviny zde ale osová afinita není v žádném příkladu aplikována.

Kolmost

První kniha v části věnované základním vlastnostem rovnoběžného promítání uvádí důkaz věty o průmětu pravého úhlu. Dále v rámci kótovaného promítání v podkapitole věnované kolmosti obsahuje odvození toho, jak se zobrazí kolmice k rovině. Ve druhé učebnici věta o průmětu pravého úhlu formulována není, protože se vyskytuje již v prvním dílu této učebnice v rámci Mongeova promítání. Je zde odvozeno stejným způsobem, jako v první učebnici, jak se promítne kolmice k rovině. Čtvrtý materiál uvádí jen větu, která říká, že kolmice k rovině se promítne kolmo k hlavním přímkám roviny. K této větě zde není uvedeno odvození.

Dále v prvním, druhém i čtvrtém materiálu následuje popis konstrukce přímky kolmé k rovině a roviny kolmé k přímce. V rámci procvičení těchto konstrukcí v žádném z nich nechybí řešený příklad na vzdálenost bodu od roviny. Ve druhé učebnici se objevuje řešený příklad na zobrazení pravidelného šestibokého hranolu s podstavou v obecné rovině a příklad na sestrojení průmětu pravidelného čtyřbokého hranolu, opět s podstavou v obecné rovině. Tyto příklady na zobrazení hranolu nebo jehlanu jsem v žádném z ostatních materiálů nenašla. Ačkoli jsou takové úlohy pracnější, považujeme za motivační je žákům ukázat, protože jejich výsledkem je pěkný a relativně názorný obrázek.

Ve třetí učebnici se v rámci základních vlastností pravoúhlého promítání objevuje věta o průmětu pravého úhlu i s odvozením. V rámci kótovaného promítání se kolmosti přímky a roviny již nevěnuje.

Shrnutí

V žádné z uvedených učebnic se nevyskytují odborné chyby. Třetí kniha je velmi stručná a podle našeho názoru v současnosti není dobře využitelná ve výuce. Čtvrtá práce obsahuje velké množství jazykových chyb, zejména chyb v interpunkci. Tato práce nepůsobí moc dobře ani vizuálně, protože v ní není zvolen jednotný font písma a obsahuje nekvalitní obrázky. Pro žáky středních škol bychom ji proto spíše nedoporučili.

Obecně ve všech výukových materiálech chybělo více řešených příkladů. Například na vzájemnou polohu dvou rovin je v nich většinou možné najít jen řešené příklady, kde mají obě zadané roviny obecnou polohu vůči průmětně. Podobně na vzájemnou polohu přímky a roviny se v těchto zdrojích objevují obvykle jen příklady, kde mají zadaná přímka i zadaná rovina obecnou polohu vůči průmětně.

Dále stojí za zmínku, že kromě témat, na která jsme se zaměřili, bylo v prvním, druhém a čtvrtém materiálu možné najít podkapitolu věnovanou teoretickému řešení střech nebo topografickým plochám, což jsou nejčastější aplikace kótovaného promítaní.

První a druhá učebnice kromě dříve zmíněných řešených příkladů obsahují také mnoho neřešených příkladů k procvičení. Předrýsovaná zadání příkladů k procvičení lze nalézt také například ve sbírce úloh od E. Maňáskové [5]. Jako pomůcku doporučujeme také sbírku modelů k vystřižení a slepení od M. Kupčákové [6].

1.3 Dotazníkové šetření

O stavu výuky kótovaného promítání na středních školách jsme více zjišťovali také pomocí dotazníku, který je uveden v příloze této práce.

Oslovili jsme přibližně 1 200 škol. Ze škol, na nichž je deskriptivní geometrie vyučována, vyplnilo dotazník celkem 43 škol, z toho 34 gymnázií a 9 středních průmyslových škol (dále SPŠ). Učitelé z některých škol nevyplnili dotazník kompletně.

Mimo jiné jsme se ptali, zda žáci na dané škole skládají maturitní zkoušku z deskriptivní geometrie. Přehled odpovědí jednotlivých škol uvádíme v tabulce 1.

	gymnázia	SPŠ	celkem
Ano, všichni povinně	0	1	1
Ano, zkouška je volitelná	18	3	21
Ne	16	5	21

Tab. 1: *Maturitní zkouška*

Zajímala nás dále podoba maturitní zkoušky. Odpovědi škol jsou opět shrnuty v tabulce 2.

	gymnázia	SPŠ	celkem
Ústní	11	1	12
Písemná	2	0	2
Písemná + ústní	1	1	2
Samostatná práce	1	0	1
Samostatná práce + ústní	1	1	2
Samostatná práce + písemná	0	1	1

Tab. 2: *Podoba maturitní zkoušky*

Rovněž jsme zjišťovali, z jakých zdrojů učitelé čerpají výklad a příklady ke kótovanému promítání. Nejčastěji byly uváděny učebnice od E. Pomykalové [1], B. Musálkové [2], učebnice kolektovu autorů [7] a sbírka úloh od E. Maňáskové [5].

Dále nás zajímalo, zda je ve výuce deskriptivní geometrie používána pravotočivá nebo levotočivá soustava souřadnic, případně zda se učitelé snaží obě prostřídat.

	gymnázia	SPŠ	celkem
Pravotočivou	12	3	15
Levotočivou	12	5	17
Obě	7	1	8

Tab. 3: *Soustava souřadnic*

V dotazníku jsme se také ptali, zda je na dané škole ve výuce deskriptivní geometrie používán dataprojektor. Z dotazovaných škol 25 gymnázií a 8 SPŠ odpovědělo, že dataprojektor používají aspoň občas, na 8 gymnáziích a 1 SPŠ dataprojektor nepoužívají.

Také jsme se zjišťovali, zda žáci rýsují na počítači. Přehled odpovědí škol předkládáme v tabulce 4.

	gymnázia	SPŠ	celkem
Ano	8	1	9
Ano, ale v jiném předmětu	5	4	9
Ne	20	3	23

Tab. 4: *Využití PC ve výuce*

Zajímalo nás dále, zda kótované promítání předchází Mongeovu. Učitelé z 25 gymnáziií a 4 SPŠ odpověděli, že ano. ze 7 gymnázií a 3 SPŠ odpověděli, že ne. Jedna SPŠ uvedla, že na jejich škole kótované promítání není vyučováno. Následně jsme zjišťovali, zda je několik vybraných témat na dané škole vyučováno. V tabulce 5 uvádíme počty škol, na kterých jednotlivá témata jsou vyučována.

	gymnázia	SPŠ	celkem
Vzdálenost bodu od roviny	22	5	27
Vzdálenost bodu od přímky	23	5	28
Odchylka dvou přímek	24	5	29
Hranaté těleso v obecné poloze	16	6	22
Průnik přímky s hranatým tělesem	8	2	10
Řezy hranatých těles	5	2	7
Oblá tělesa	4	4	8
Průnik těles	2	2	4
Teoretické řešení střech	16	6	24
Topografické plochy	5	5	10
Osvětlení	0	0	0

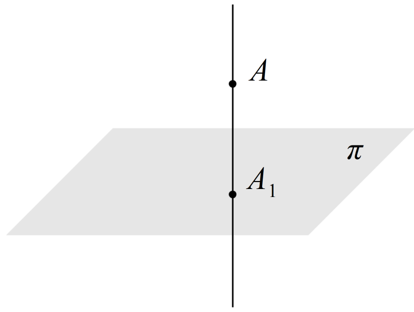
Tab. 5: *Rozsah výuky kótovaného promítání*

Z témat, na která jsme se ptali, mezi nejčastěji vyučovaná patří vzdálenost bodu od roviny a od přímky, odchylka dvou přímek a teoretické řešení střech. Z toho důvodu jsme tato témata zařadili do naší práce.

Po analýze výše uvedených výukových zdrojů jsme se rozhodli do práce zařadit řešené příklady, v nichž mají zadané objekty speciální polohy vůči průmětně, protože se jich v těchto výukových materiálech mnoho neobjevovalo.

2 Zobrazení bodu

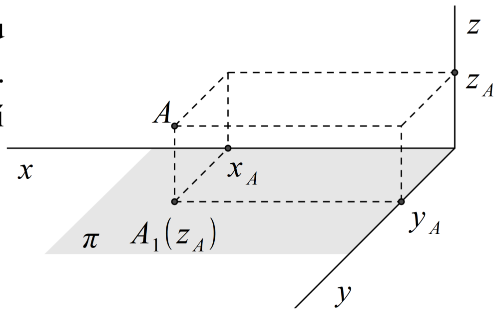
Kótované promítání je pravoúhlé promítání na jednu průmětnu, kterou obvykle značíme π. Každým bodem A v prostoru lze vést přímku kolmou k průmětně, které se říká **promítací přímka** bodu A. Průsečík promítací přímky s průmětnou značíme A_1 a nazýváme jej **pravoúhlým průmětem** bodu A do roviny π (obr. 1). Bod A_1 je ale současně průmětem všech bodů promítací přímky bodu A. Pouze pomocí bodu A_1 bychom tedy nebyli schopni jednoznačně zpětně zrekonstruovat bod A v prostoru. Tento problém vyřešíme následovně. Rovina π dělí celý prostor na dva poloprostory. Jeden z nich označme za kladný a druhý za záporný. Aby byl každý bod v prostoru svým průmětem jednoznačně určen, připíšeme k jeho pravoúhlému průmětu do závorky jeho vzdálenost od průmětny, kterou v případě bodů ležících v záporném poloprostoru doplníme znaménkem minus. Tento údaj nazýváme **kóta** bodu A. Body ležící v průmětně mají kótu rovnou nule.



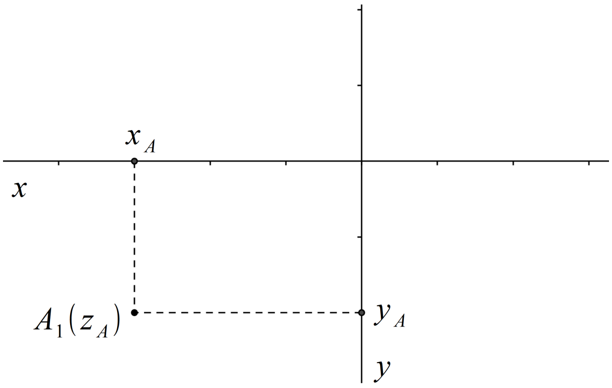
Obr. 1: *Průmět bodu A*

Dále zpravidla volíme kartézskou soustavu souřadnic takovou, že osy x a y leží v π (obr. 2). V takovém případě je kóta bodu zároveň jeho třetí souřadnicí.

Situalci v prostoru přeneseme na papír tak, že papír ztotožníme s rovinou π (obr. 3).[1]



Obr. 2: *Zavedení soustavy souřadnic*



Obr. 3: *Zavedení soustavy souřadnic*

1 Zobrazení bodu viz [1], str. 70 a 71.

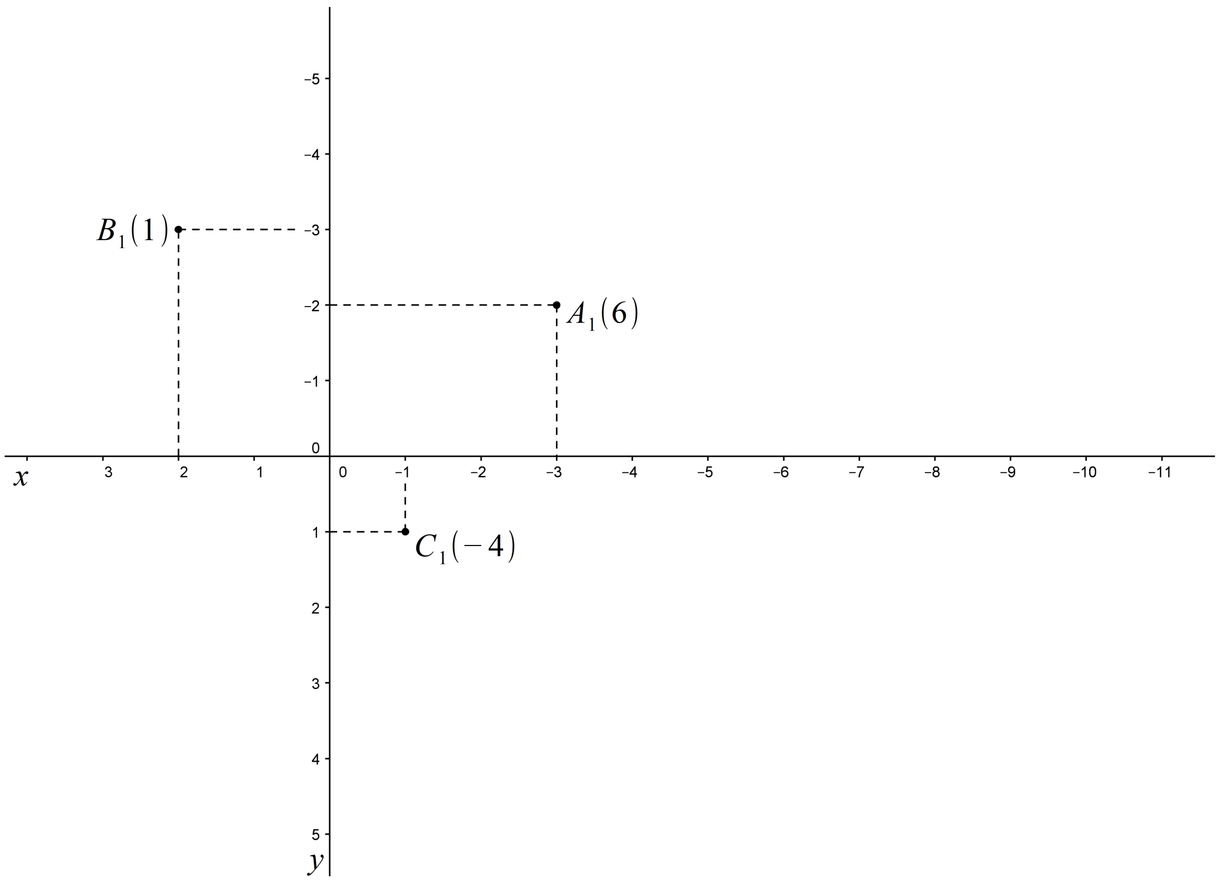
Příklad 2.1

Zobrazte body A, B a C.

$A = [-3; -2; 6]$, $B = [2; -3; 1]$, $C = [-1; 1; -4]$

Řešení (obr. 4)

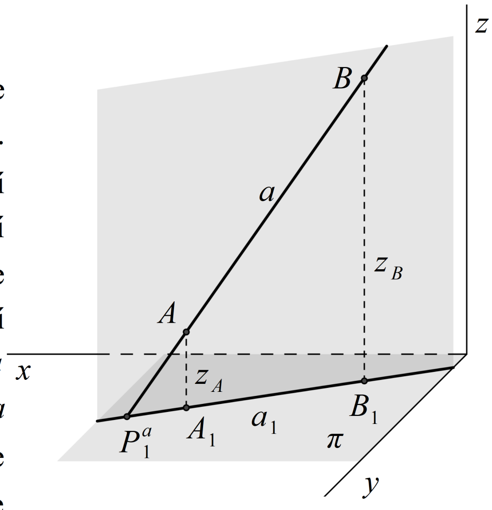
Sestrojení obrazů bodů v kótovaném promítání je zřejmé z obrázku. Bod A_1 je obrazem bodu A, bod B_1 je obrazem bodu B a bod C_1 je obrazem bodu C. Bod A leží na kolmici k průmětně vedené bodem A_1 ve vzdálenosti 6 nad průmětnou. Bod B leží na kolmici k průmětně vedené bodem B_1 ve vzdálenosti 1 nad průmětnou. Bod C leží na kolmici k průmětně vedené bodem C_1 ve vzdálenosti 4 pod průmětnou.



Obr. 4: *Řešení příkladu 2.1*

3 Zobrazení přímky

Ve speciálním případě, kdy je přímka kolmá k π, je jejím průmětem jeden bod, který značíme a_1. Promítací přímky bodů na dané přímce a, která není kolmá k průmětně, leží v rovině, která prochází přímkou a a je kolmá k π. Tuto rovinu nazýváme **promítací rovina** přímky a. Průsečnice promítací roviny s průmětnou je průmětem přímky a a značíme ji a_1 (obr. 5). Průsečík přímky a s průmětnou nazýváme **stopník** přímky a a značíme jej P^a. Kóta stopníku přímky je nulová a nebudeme ji v označení bodu uvádět.

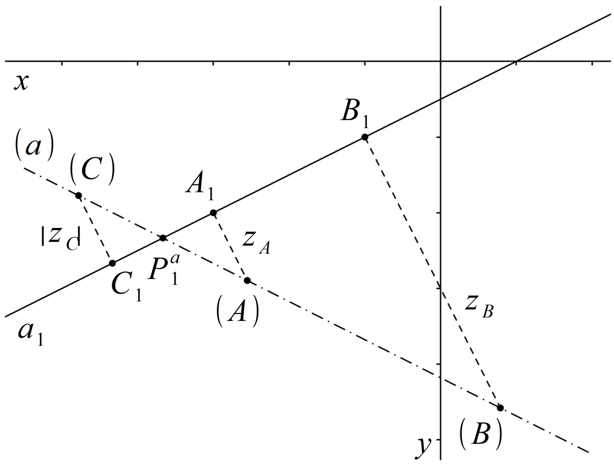


Obr. 5: *Průmět přímky a*

Promítací rovinu přímky v úlohách často sklápíme. To znamená, že ji otočíme kolem průmětu přímky o 90°, aby splynula s průmětnou π.

Promítací rovinu přímky a sklopíme tak, že sklopíme dva body A, B přímky a. Na kolmici vedené bodem A_1 k přímce a_1 naneseme délku $|z_A|$, čímž získáme sklopený bod A, který značíme (A) (obr. 6). Analogicky jako bod A sklopíme i bod B. Body (A), (B) určují přímku (a), tj. sklopenou přímku a.

Kótu bodu můžeme nanést do obou polorovin daných přímkou a_1. Musíme vždy dbát na to, abychom nanášeli kladné kóty do stejné poloroviny určené přímkou a_1 (v obr. 6 body A a B) a absolutní hodnoty záporných kót do opačné poloroviny (v obr. 6 bod C).[1]



Obr. 6: *Sklopení přímky a*

1 Zobrazení přímky a sklopení promítací roviny přímky viz [1], str. 72-74.

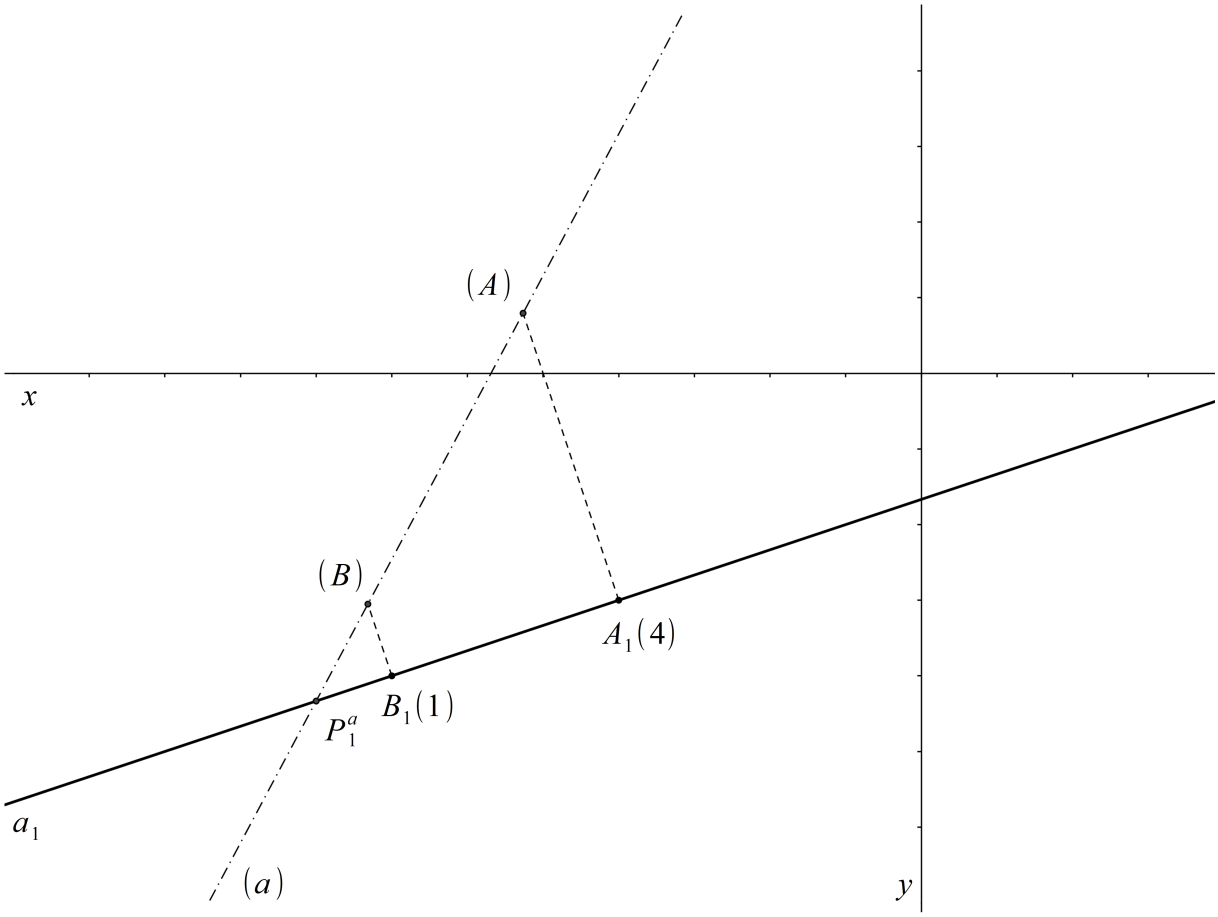
Příklad 3.1

Zobrazte stopník přímky a.

$a = \leftrightarrow AB, A = [4; 3; 4], B = [7; 4; 1]$

Řešení (obr. 7)

Nejdříve sestrojíme průměty A_1 a B_1 bodů A a B, které určí průmět a_1 přímky a. Abychom nalezli stopník přímky a, sklopíme promítací rovinu přímky a. Na kolmici vedené bodem A_1 k přímce a_1 naneseme 4 jednotky délky, čímž získáme bod (A). Na kolmici vedené bodem B_1 k přímce a_1 naneseme 1 jednotku, čímž získáme bod (B). Body (A) a (B) určují přímku (a). Průsečík přímek a_1 a (a) je bod, který ve sklopení zůstal na místě, tedy leží v průmětně a je hledaným stopníkem přímky a. Označíme jej proto P_1^a.



Obr. 7: *Řešení příkladu 3.1*

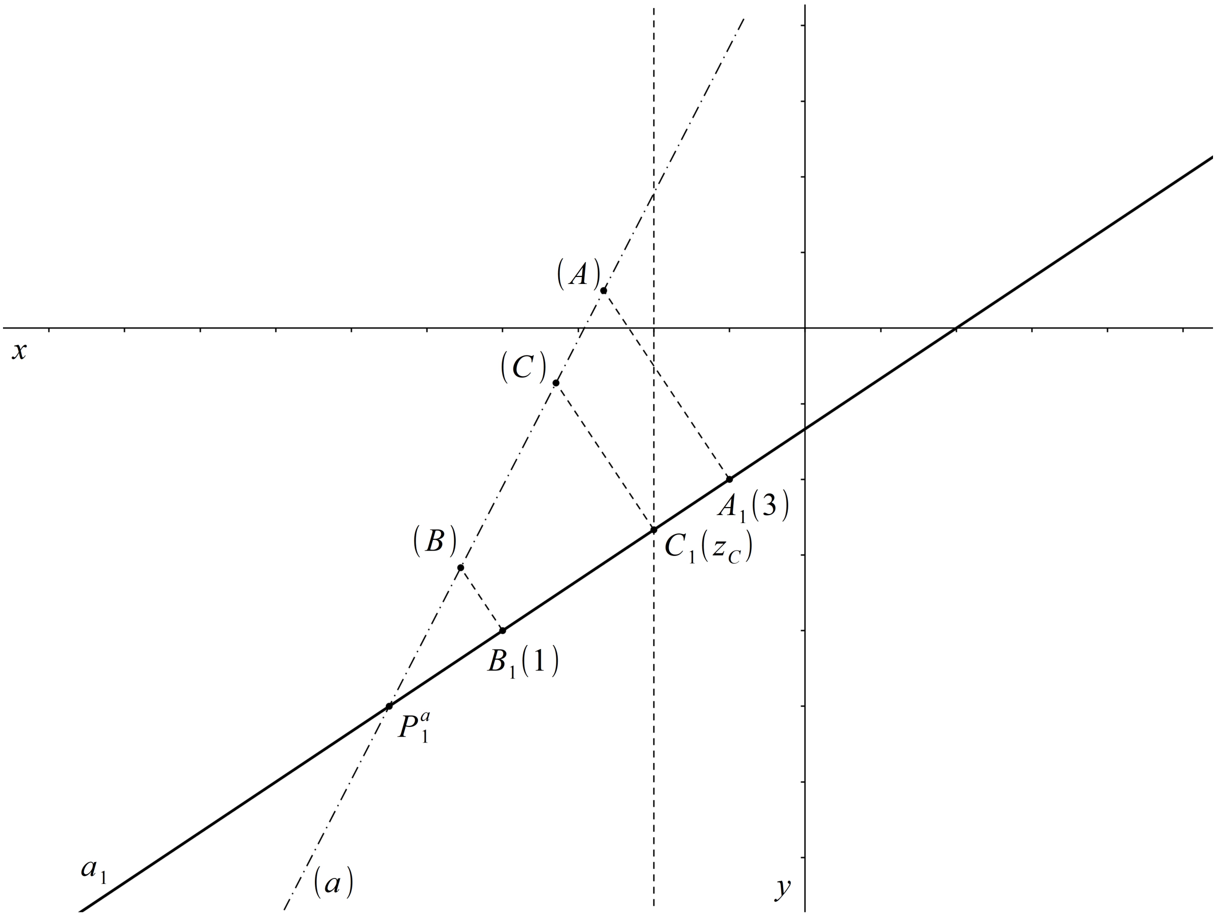
Příklad 3.2

Určete kótu bodu C tak, aby ležel na přímce a.

$a = \leftrightarrow AB, A = [1; 2; 3], B = [4; 4; 1], C = [2; ?; ?]$

Řešení (obr. 8)

Nejdříve sestrojíme průměty A_1 a B_1 bodů A a B, které určí průmět a_1 přímky a. Bod C_1 najdeme jako průsečík přímky rovnoběžné s osou y jdoucí bodem 2 na ose x a přímky a_1. Kótu bodu C zjistíme pomocí sklopení promítací roviny přímky a. Průsečíkem kolmice bodem C_1 k a_1 a přímky (a) je bod (C). Vzdálenost bodů C a (C) je absolutní hodnota hledané kóty bodu C. Protože bod (C) leží ve stejné polorovině určené přímkou a_1 jako bod (A) a bod A má kladnou kótu, je kóta bodu C také kladná.



Obr. 8: *Řešení příkladu 3.2*

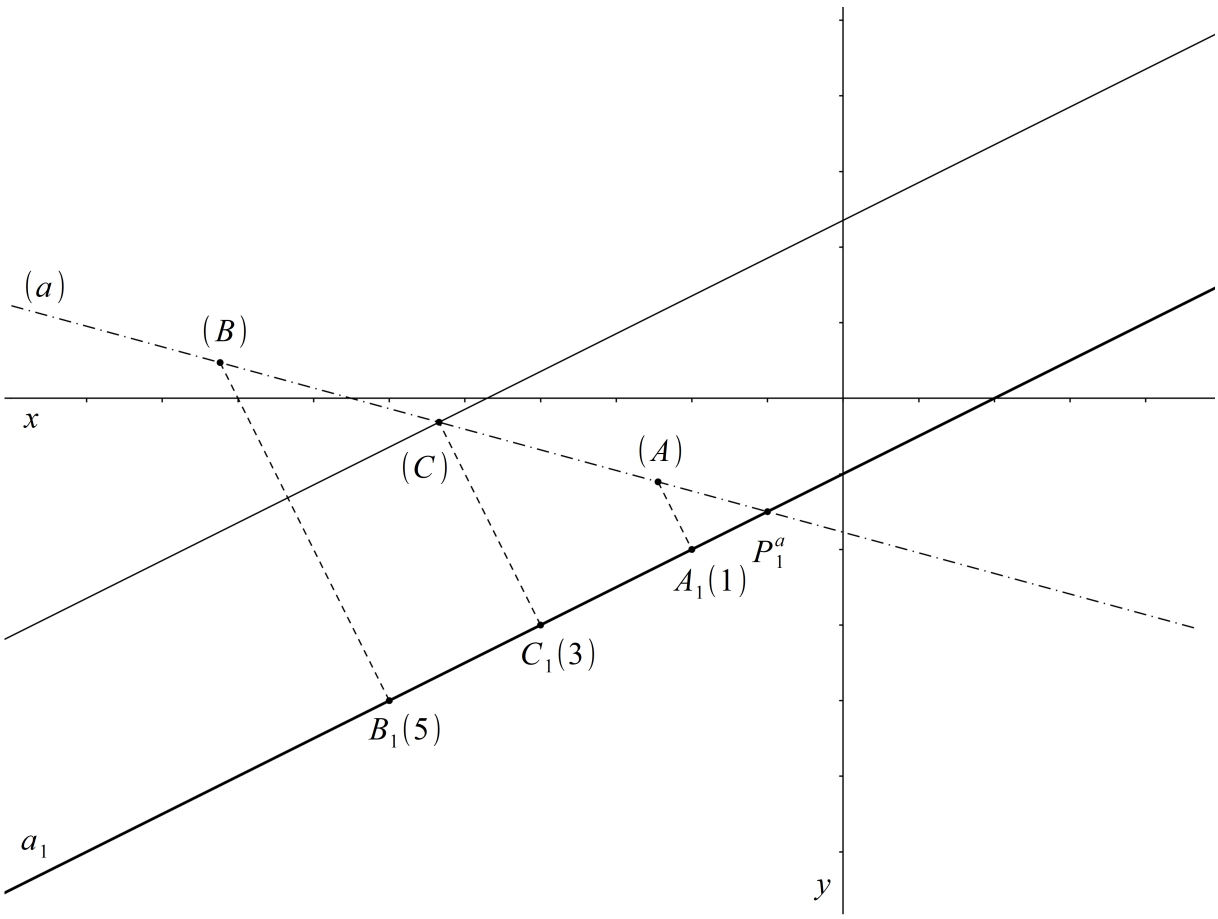
Příklad 3.3

Na přímce a určete bod C o kótě 3.

$a = \leftrightarrow AB, A = [2; 2; 1], B = [6; 4; 5]$

Řešení (obr. 9)

Nejdříve sestrojíme průměty A_1 a B_1 bodů A a B, které určí průmět a_1 přímky a. Dále sklopíme promítací rovinu přímky a. Sestrojíme pomocnou rovnoběžku s přímkou a_1 ve vzdálenosti 3, a to ve stejné polorovině jako bod (A). Bod (C) je průsečíkem přímky (a) s pomocnou rovnoběžkou. Bod C_1 najdeme jako patu kolmice vedené bodem (C) k a_1.



Obr. 9: *Řešení příkladu 3.3*

4 Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky a a b v prostoru mohou být **rovnoběžné**, **různoběžné** nebo **mimoběžné**. Rovnoběžné přímky dále rozdělujeme na různé a totožné.

Přímky a a b, jejichž průměty jsou totožné přímky, leží v jedné promítací rovině a mohou tedy být rovnoběžné nebo různoběžné. Průsečík přímek a, b v tomto případě dohledáme pomocí sklopení jejich společné promítací roviny.[1]

Dané přímky a, b se také mohou promítnout na dvě různoběžné přímky. V takovém případě jsou dané přímky mimoběžné nebo různoběžné. Průsečík přímek a_1, b_1 je průmětem bodů $E \in a$ a $F \in b$. Pokud mají body E, F stejné kóty, a tedy splývají, jsou přímky a, b různoběžné a protínají se v bodě $E = F$. V opačném případě jsou přímky a, b mimoběžné. Kóty bodů E, F určíme pomocí sklopení promítacích rovin obou zadaných přímek.[2]

Pokud jsou průměty přímek a, b různé rovnoběžné přímky, leží dané přímky v rovnoběžných promítacích rovinách a jsou rovnoběžné nebo mimoběžné. Vzájemnou polohu rozlišíme tak, že sklopíme promítací roviny přímek a, b „na stejnou stranu“. Jsou-li přímky (a) a (b) rovnoběžné, jsou přímky a, b rovnoběžné. Jsou-li přímky (a) a (b) různoběžné, jsou přímky a, b mimoběžné.[3]

Pokud se jedna z přímek, například přímka b, promítne na bod a druhá na přímku, jsou přímky a, b různoběžné nebo mimoběžné. Pokud $b_1 \in a_1$, a tedy přímky a, b leží v jedné promítací rovině, jsou přímky a, b různoběžné a bod b_1 je průmětem průsečíku přímek a, b. V opačném případě jsou přímky a, b mimoběžné.[4]

Pokud jsou obě přímky promítací, jsou rovnoběžné.

---

1 Viz příklady 4.5 a 4.8.

2 Viz příklady 4.1 a 4.3.

3 Viz příklady 4.2 a 4.4.

4 Viz příklady 4.6 a 4.7.

Příklad 4.1

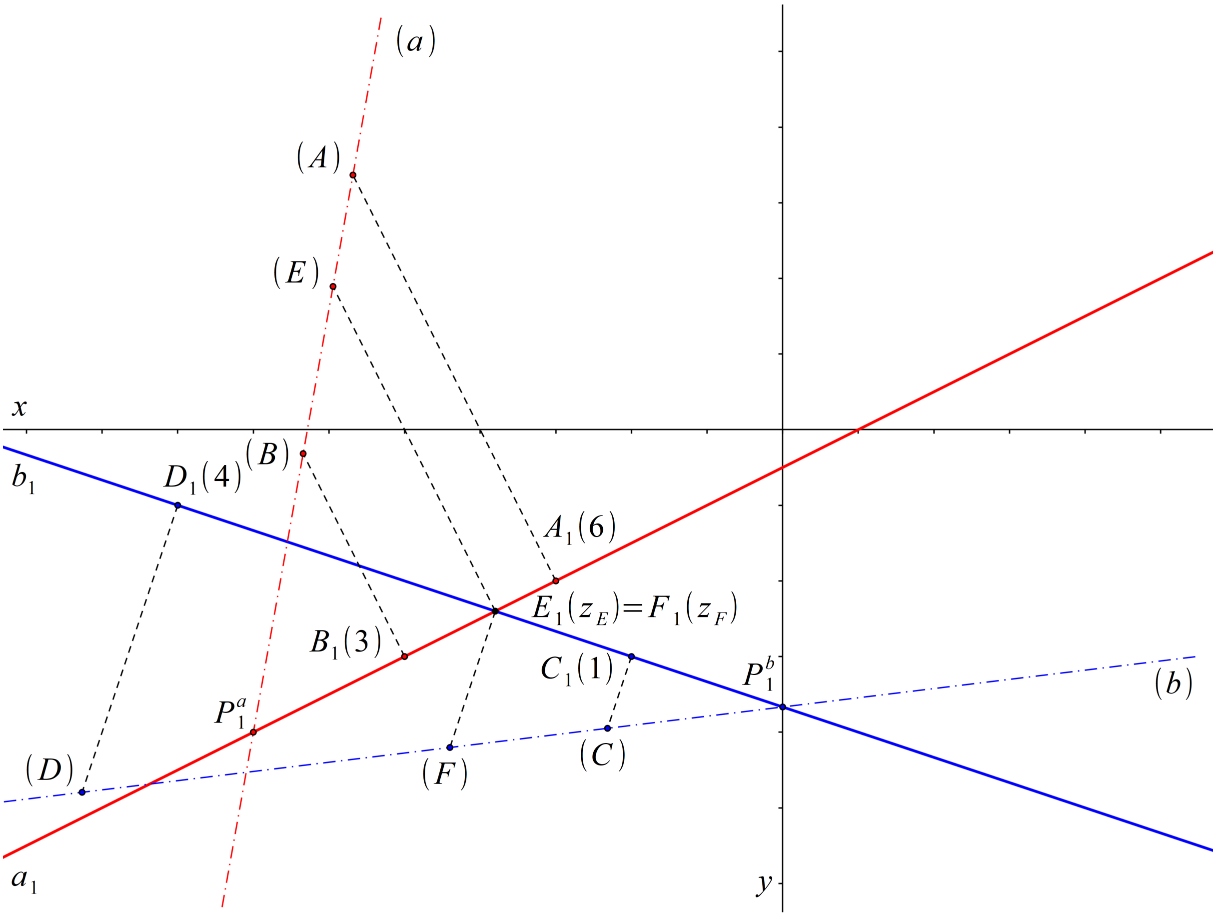
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [3; 2; 6]$, $B = [5; 3; 3]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [2; 3; 1]$, $D = [8; 1; 4]$

Řešení (obr. 10)

Průměty přímek a, b jsou různoběžné přímky. Přímky a, b tedy mohou být různoběžné nebo mimoběžné. Průsečík přímek a_1, b_1 je průmětem bodů E a F, kde $E \in a$ a $F \in b$. Pokud mají body E, F stejnou kótu, splývají. Přímky a, b jsou potom různoběžné. V opačném případě jsou mimoběžné. Kóty bodů E, F zjistíme pomocí sklopení promítacích rovin přímek a, b. Průsečíkem kolmice bodem E_1 k a_1 a přímky (a) je bod (E), průsečíkem kolmice bodem F_1 k b_1 a přímky (b) je bod (F). Nyní vidíme, že $z_E = |E_1(E)| > z_F = |F_1(F)|$, což znamená, že přímky a, b jsou mimoběžné.



Obr. 10: *Řešení příkladu 4.1*

Poznámka:

Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U příkladů, kde porovnáváme dvě kóty, se proto při malém rozdílu nemůžeme přesvědčit o jejich shodnosti či rozdílnosti.

Příklad 4.2

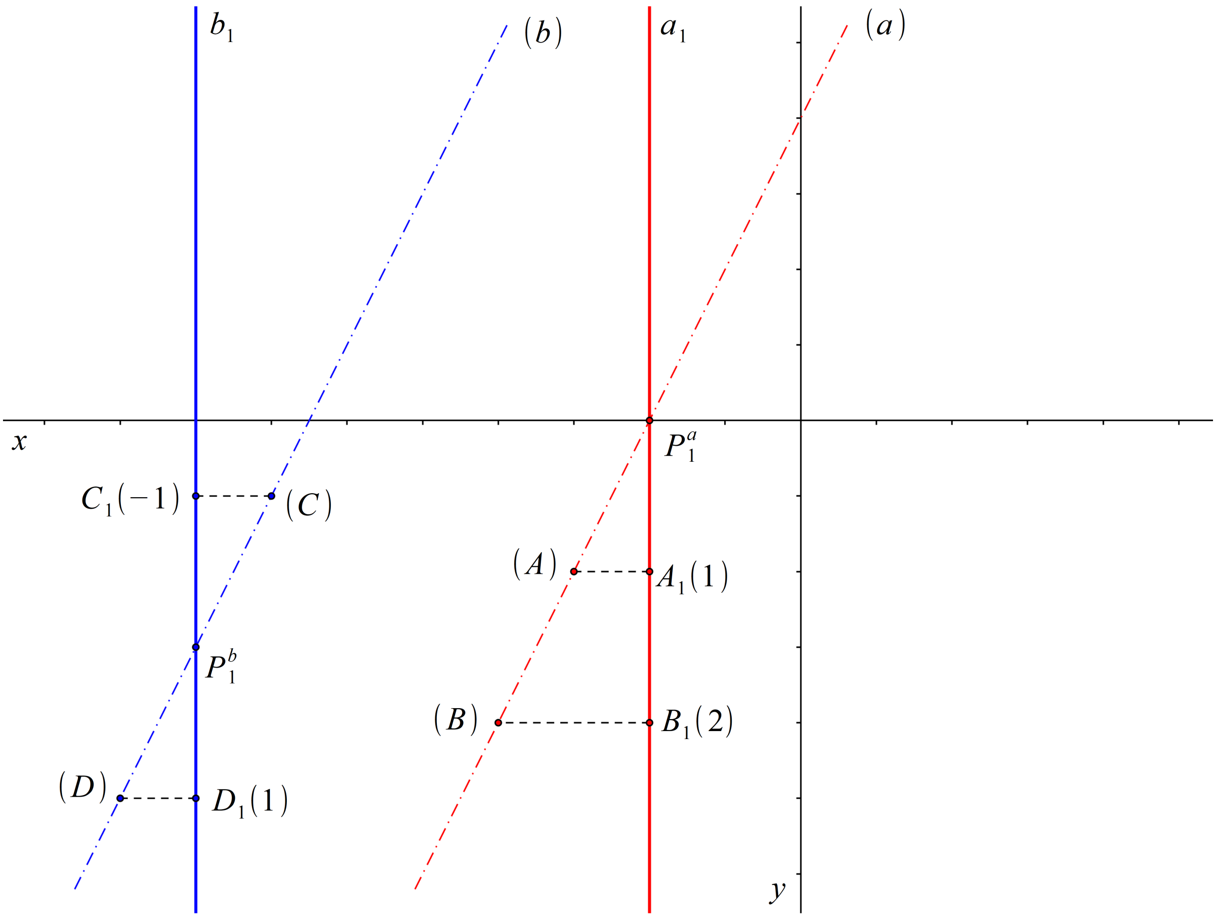
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [2; 2; 1]$, $B = [2; 4; 2]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [8; 1; -1]$, $D = [8; 5; 1]$

Řešení (obr. 11)

Průměty přímek a, b jsou různé rovnoběžné přímky. To znamená, že přímky a, b mohou být rovnoběžné nebo mimoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu přímek a a b, musíme promítací roviny těchto přímek sklopit „na stejnou stranu“. Přímky (a), (b) jsou rovnoběžné, a proto jsou přímky a, b rovnoběžné různé.



Obr. 11: *Řešení příkladu 4.2*

Poznámka:
Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U přímek s velmi malou odchylkou se proto nemůžeme přesvědčit, zda jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Budeme je ale považovat za rovnoběžné.

Příklad 4.3

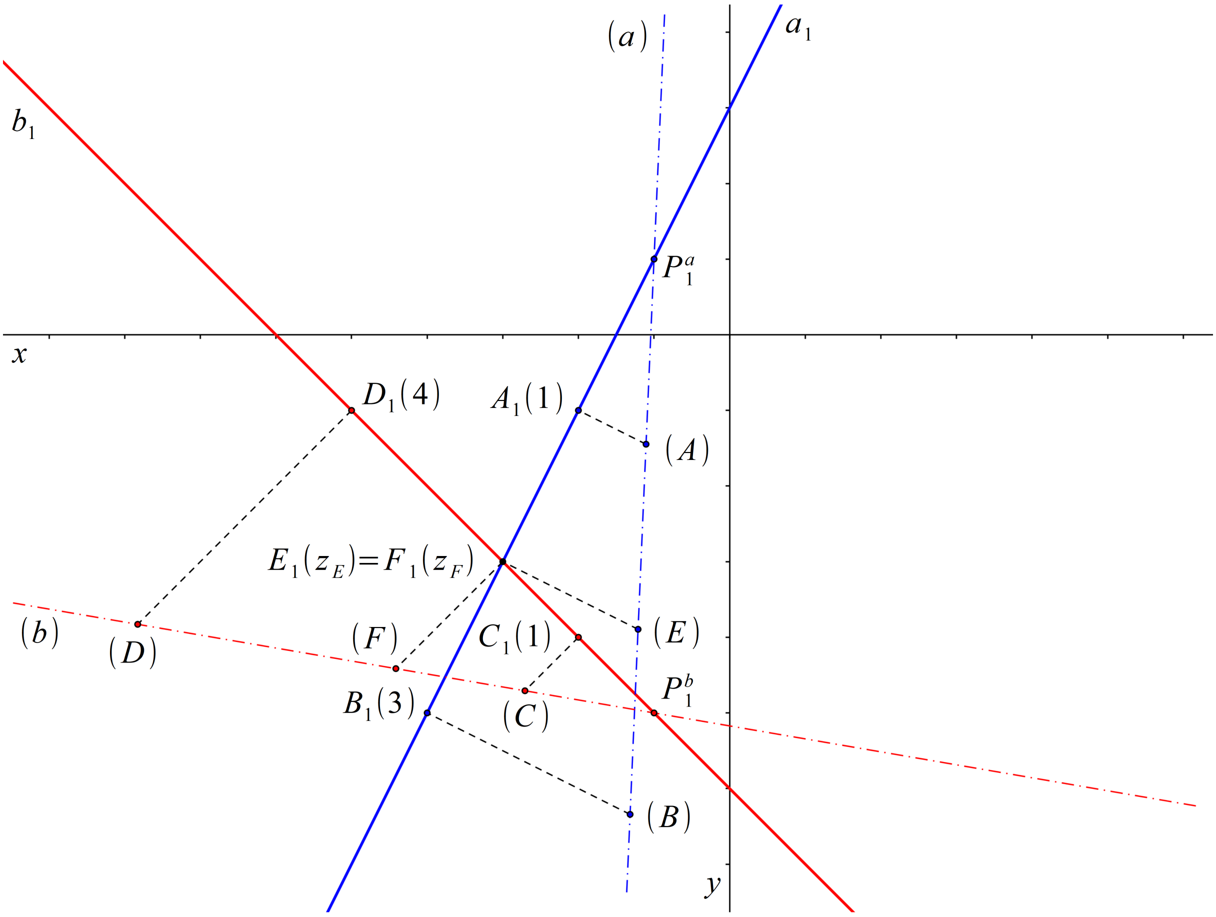
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [2; 1; 1]$, $B = [4; 5; 3]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [2; 4; 1]$, $D = [5; 1; 4]$

Řešení (obr. 12)

Průměty přímek a, b jsou různoběžné přímky. Přímky a, b jsou tedy různoběžné nebo mimoběžné. Průsečík přímek a_1, b_1 je průmětem bodů E a F, kde $E \in a$ a $F \in b$. Pokud mají body E, F stejnou kótu, splývají. Přímky a, b jsou potom různoběžné. V opačném případě jsou mimoběžné. Kóty bodů E, F zjistíme pomocí sklopení promítacích rovin přímek a, b. Průsečíkem kolmice bodem E_1 k a_1 a přímky (a) je bod (E), průsečíkem kolmice bodem F_1 k b_1 a přímky (b) je bod (F). Nyní vidíme, že $z_E = |E_1(E)| = z_F = |F_1(F)|$, tudíž body E, F splývají. Přímky a, b jsou tedy různoběžné a protínají se v bodě $E = F$.



Obr. 12: *Řešení příkladu 4.3*

Poznámka:
Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U příkladů, kde porovnáváme dvě kóty, se proto při malém rozdílu nemůžeme přesvědčit o jejich shodnosti či rozdílnosti.

Příklad 4.4

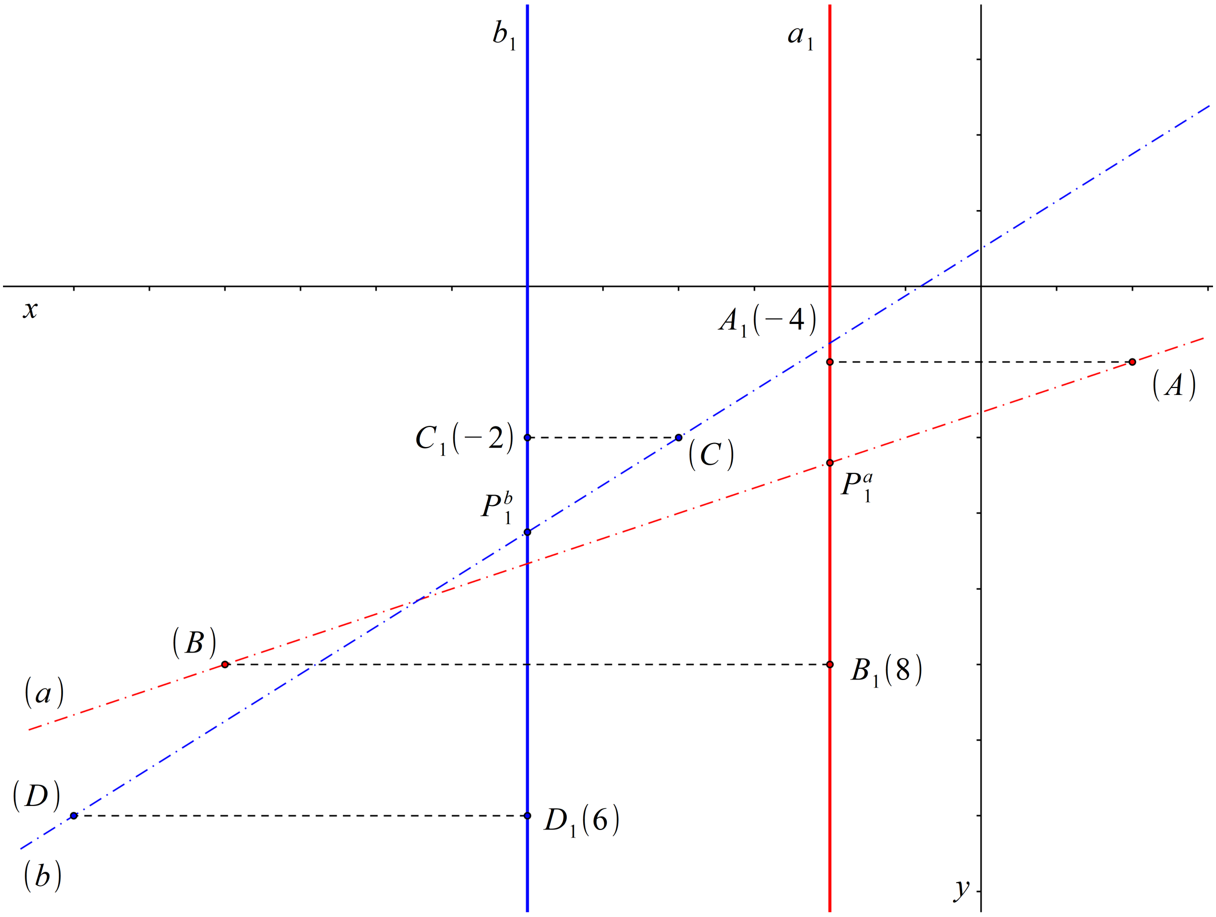
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [2; 1; -4]$, $B = [2; 5; 8]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [6; 2; -2]$, $D = [6; 7; 6]$

Řešení (obr. 13)

Průměty přímek a, b jsou různé rovnoběžné přímky, tudíž jsou přímky a, b rovnoběžné nebo mimoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu přímek a, b, sklopíme jejich promítací roviny „na stejnou stranu“. Přímky (a), (b) jsou různoběžné, a proto jsou přímky a, b mimoběžné.



Obr. 13: *Řešení příkladu 4.4*

Příklad 4.5

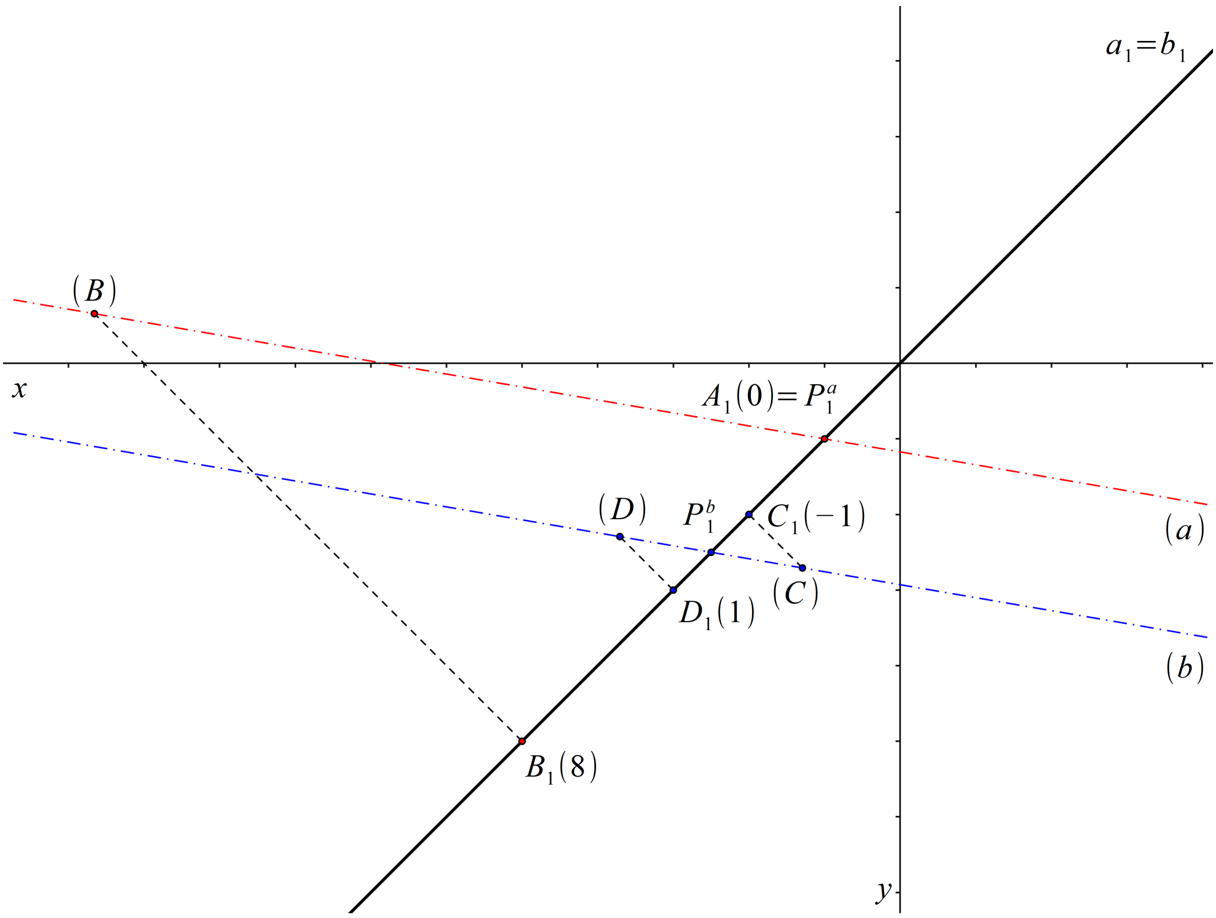
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB, A = [1; 1; 0], B = [5; 5; 8]$

$b = \leftrightarrow CD, C = [2; 2; -1], D = [3; 3; 1]$

Řešení (obr. 14)

Průměty přímek a, b jsou totožné přímky. Přímky a, b tedy leží v jedné promítací rovině a jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu těchto přímek, musíme sklopit jejich promítací rovinu. Přímky (a), (b) jsou rovnoběžné různé, a proto jsou přímky a, b rovnoběžné různé.



Obr. 14: *Řešení příkladu 4.5*

Poznámka:
Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U přímek s velmi malou odchylkou se proto nemůžeme přesvědčit, zda jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Budeme je ale považovat za rovnoběžné.

Příklad 4.6

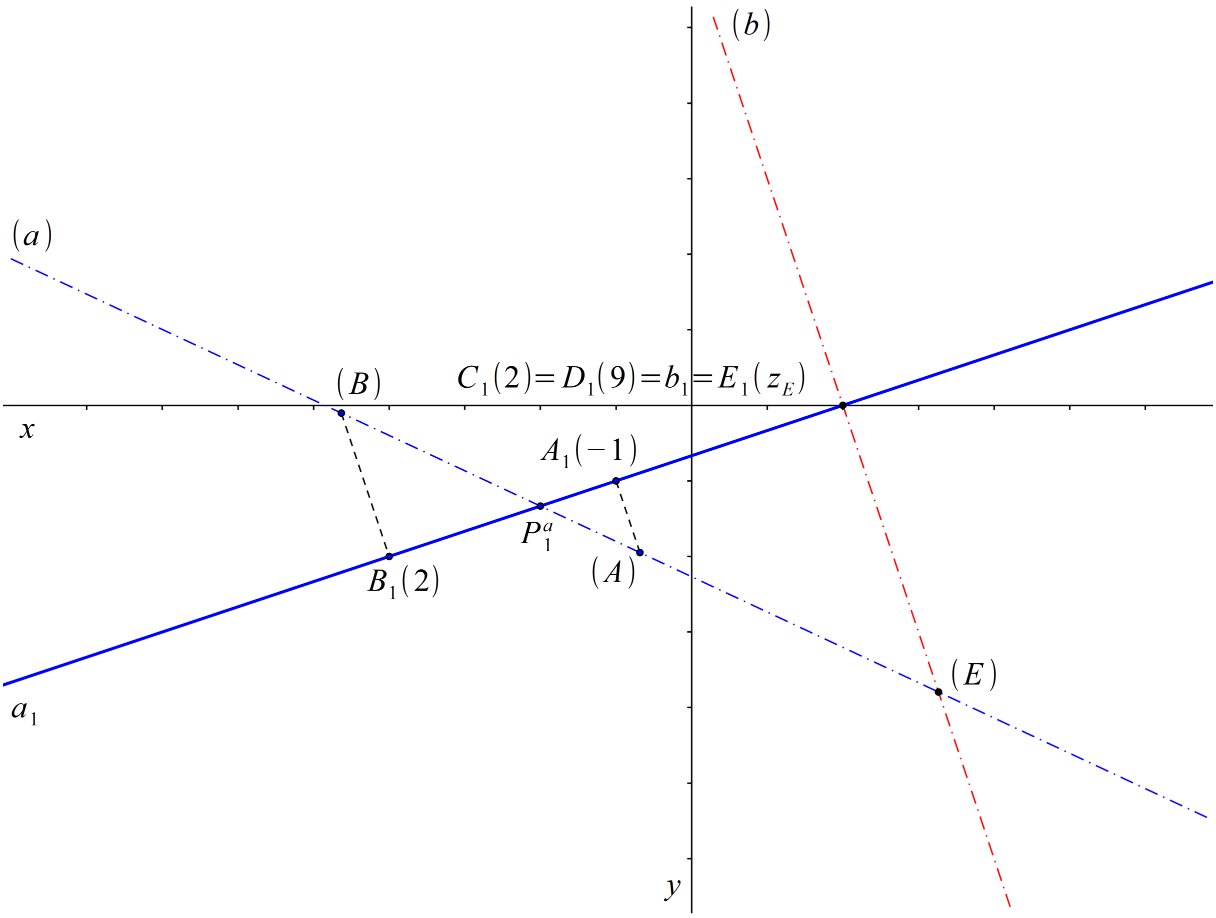
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [1; 1; -1]$, $B = [4; 2; 2]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [-2; 0; 2]$, $D = [-2; 0; 9]$

Řešení (obr. 15)

Z průmětů přímek a, b vidíme, že přímka b je kolmá k průmětně a leží v promítací rovině přímky a. Z toho plyne, že přímky a, b jsou různoběžné. Průmětem průsečíku E přímek a, b je bod b_1. Kótu z_E bodu E dourčíme sklopením promítací roviny přímek a, b. Je záporná a $|z_E| = |E_1(E)|$.



Obr. 15: *Řešení příkladu 4.6*

Příklad 4.7

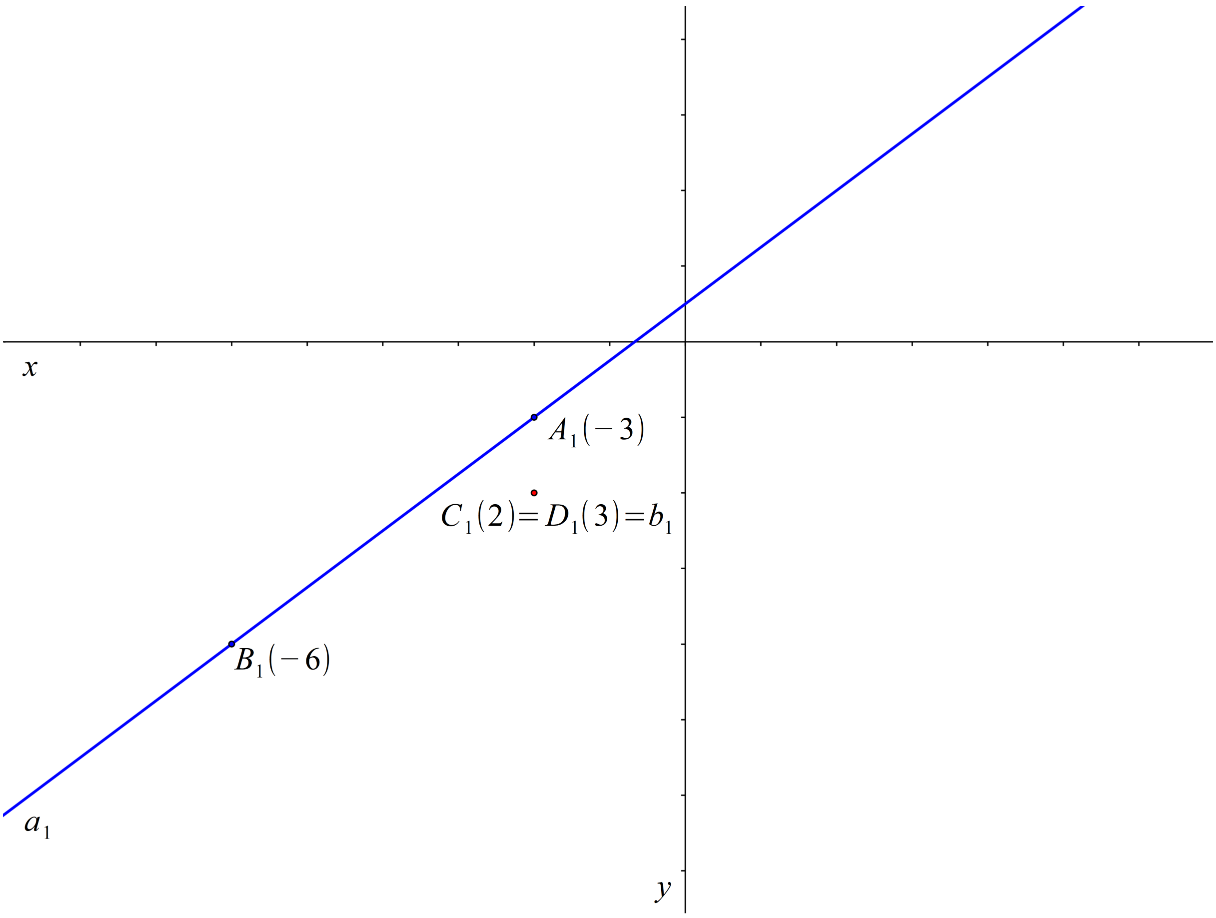
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [2; 1; -3]$, $B = [6; 4; -6]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [2; 2; 2]$, $D = [2; 2; 3]$

Řešení (obr. 16)

Z průmětů přímek a, b vidíme, že přímka b je kolmá k průmětně a neleží v promítací rovině přímky a. Z toho plyne, že přímky a, b jsou mimoběžné.



Obr. 16: *Řešení příkladu 4.7*

Příklad 4.8

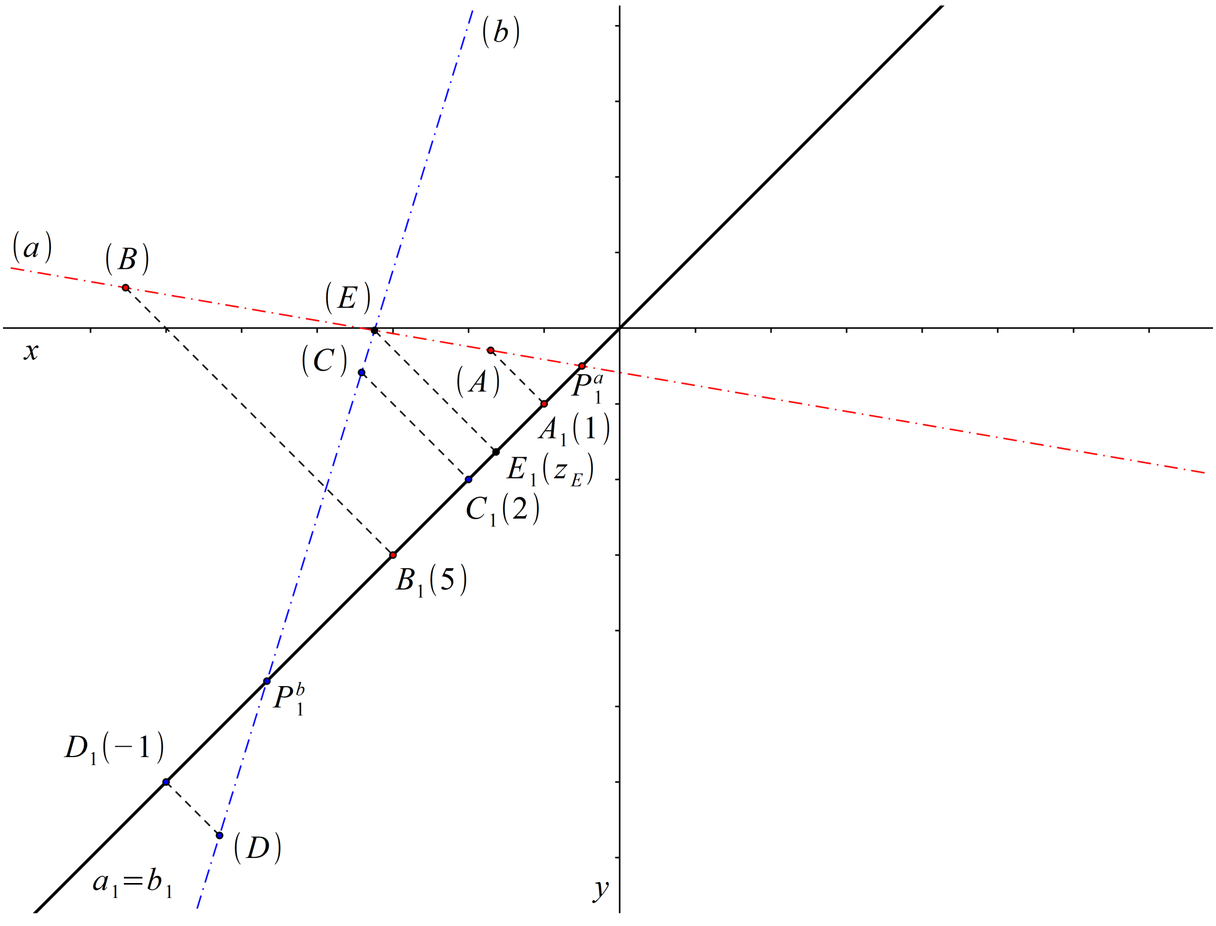
Určete vzájemnou polohu přímek a a b. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [1; 1; 1]$, $B = [3; 3; 5]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [2; 2; 2]$, $D = [6; 6; -1]$

Řešení (obr. 17)

Průměty přímek a, b jsou totožné přímky. Přímky a, b tedy leží v jedné promítací rovině a jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu těchto přímek, musíme sklopit jejich promítací rovinu. Přímky (a), (b) jsou různoběžné, a proto jsou přímky a, b různoběžné. Ve sklopení vidíme sklopený průsečík E přímek a, b. Pata kolmice vedená tímto bodem k přímce $a_1 = b_1$ je bod E_1. Kóta z_E bodu E je kladná a je rovna vzdálenosti bodů E_1, (E).



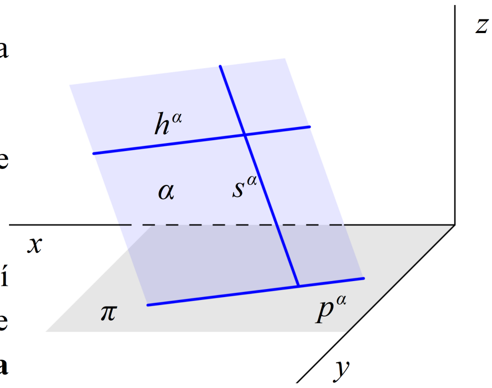
Obr. 17: *Řešení příkladu 4.8*

5 Zobrazení roviny

Rovina α rovnoběžná s průmětnou se zobrazí na celou průmětnu.

Průmětem roviny α, která je komá k průmětně π, je přímka. Tu značíme α_1.

Rovina α, která není kolmá k průmětně, se zobrazí na celou průmětnu. Takovou rovinu obvykle zadáváme její průsečnicí s π, kterou nazýváme **stopa** roviny α (značíme p^α), a průmětem dalšího bodu roviny α, který na stopě neleží, nebo hlavní přímkou různou od stopy.



Obr. 18: *Zobrazení roviny α*

Hlavní přímka roviny α je každá přímka roviny α, která je rovnoběžná s π, tedy přímka, na níž leží body roviny α, které mají navzájem stejnou kótu. Takovou přímku značíme h^α. K jejímu průmětu do závorky připisujeme kótu, tj. kótu bodů této přímky. Stopa roviny je tedy hlavní přímka o kótě 0.

Další speciální přímkou je **spádová přímka** roviny α, což je přímka roviny α, která je kolmá ke všem hlavním přímkám. Značíme ji s^α.

Každá rovina má nekonečně mnoho hlavních i spádových přímek.

Rovinu někdy zadáváme také pomocí průsečíků se souřadnicovými osami. Jsou-li průsečíky dané roviny α s osami x, y, z po řadě body $X = [x^\alpha, 0\ 0]$, $Y = [0, y^\alpha, 0]$, $Z = [0, 0, z^\alpha]$, má rovina α souřadnice x^α, y^α, z^α a píšeme $\alpha = (x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha)$. Body X a Y určují stopu roviny α.

Pokud je rovina rovnoběžná s některou osou, značíme příslušnou souřadnici symbolem ∞. Například rovina $\alpha = (2, 3, \infty)$ jerovnoběžná s osou z.

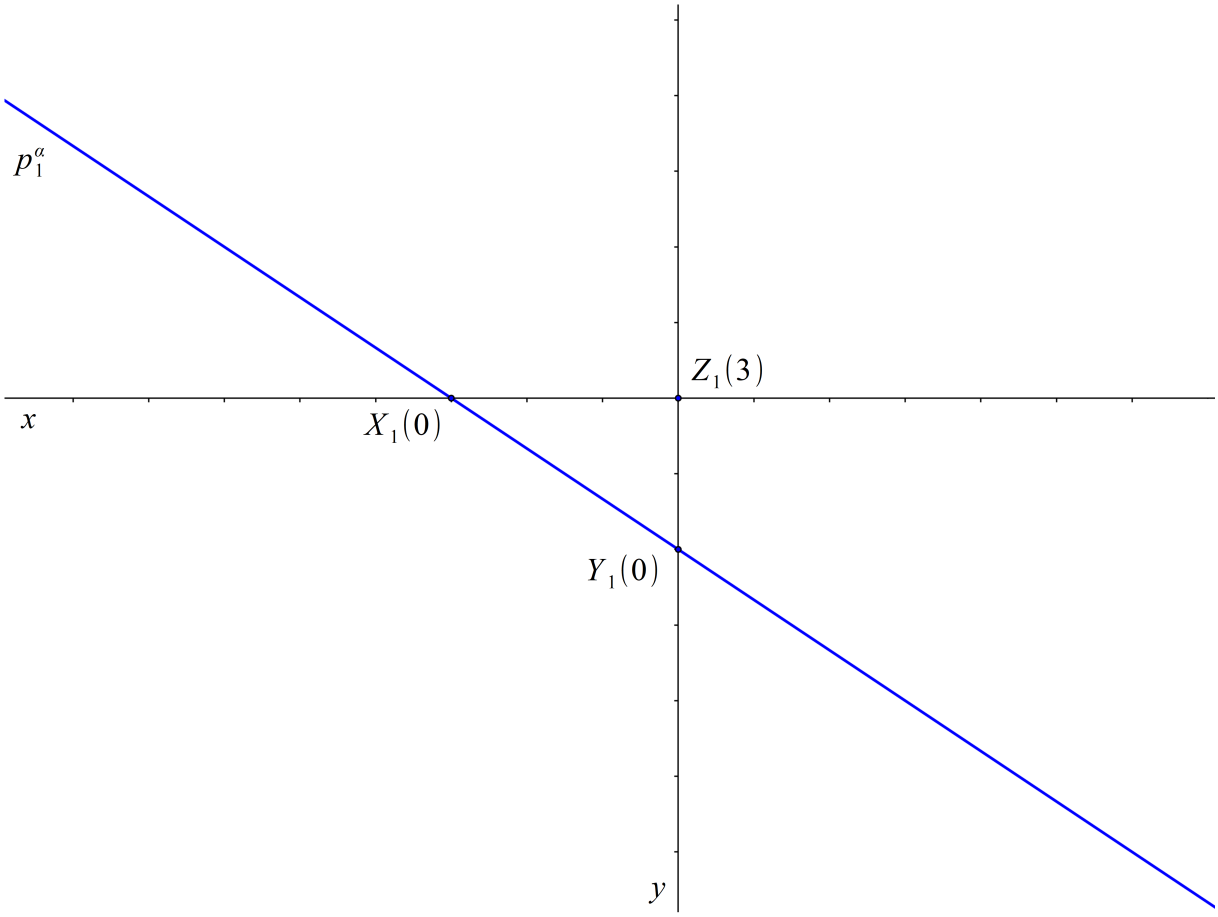
Pomocí souřadnic nelze zadat rovinu procházející počátkem. Všechny tři průsečíky takové roviny se souřadnicovými osami totiž splynou s počátkem. Jedním bodem ale rovina není jednoznačně určena.

Příklad 5.1

Zobrazte stopu roviny $\alpha = (3, 2, 3)$.

Řešení (obr. 19)

Průsečíky dané roviny α s osami x, y, z jsou po řadě body $X = [3, 0, 0]$, $Y = [0, 2, 0]$, $Z = [0, 0, 3]$. Stopa této roviny je určena body X a Y.



Obr. 19: *Řešení příkladu 5.1*

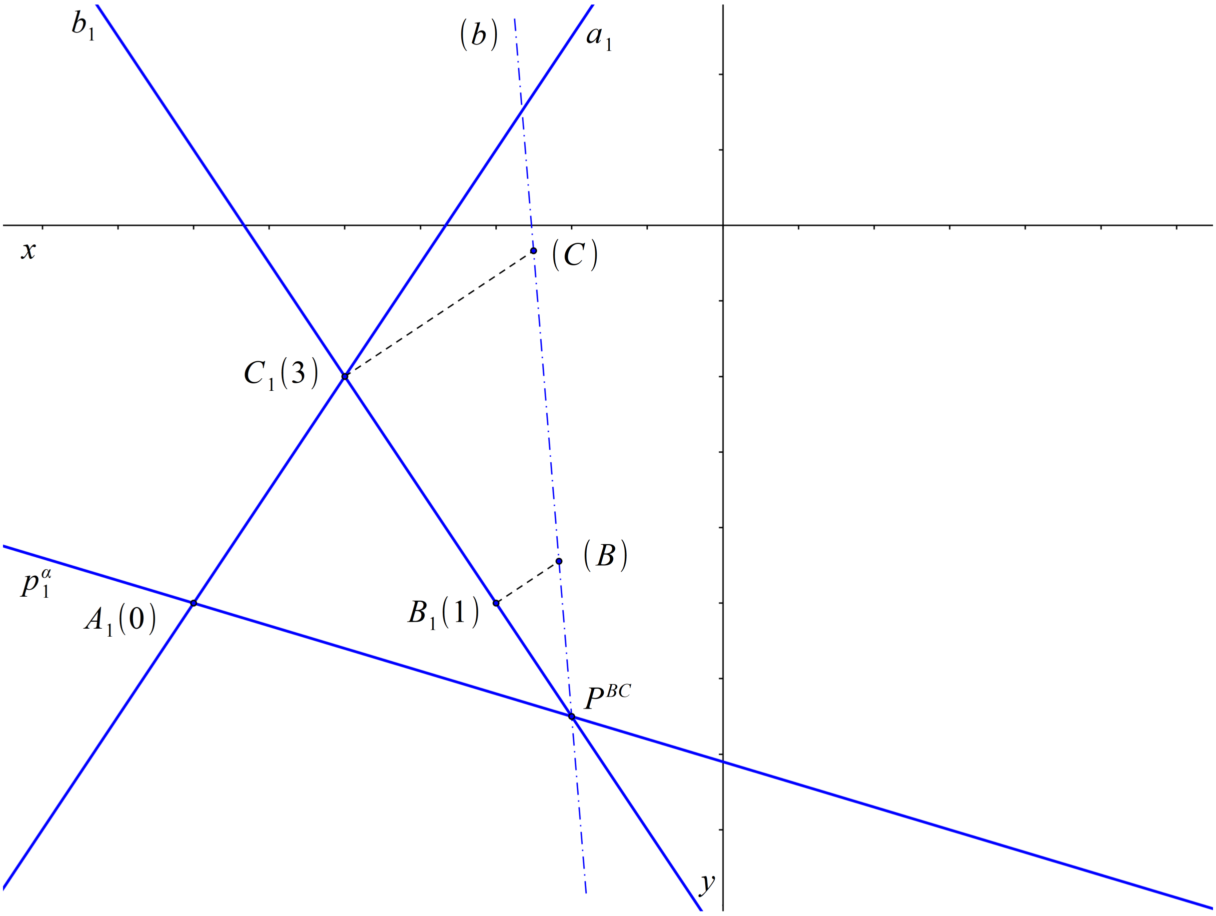
Příklad 5.2

Zobrazte stopu roviny α dané různoběžnými přímkami $a = \leftrightarrow AC$ a $b = \leftrightarrow BC$.

$A = [7; 5; 0]$, $B = [3; 5; 1]$, $C = [5; 2; 3]$

Řešení (obr. 20)

Protože je kóta bodu A rovna nule, je bod A jedním bodem stopy. Dalším bodem stopy je stopník P^{BC} přímky BC, který dohledáme sklopením promítací roviny přímky BC.



Obr. 20: *Řešení příkladu 5.2*

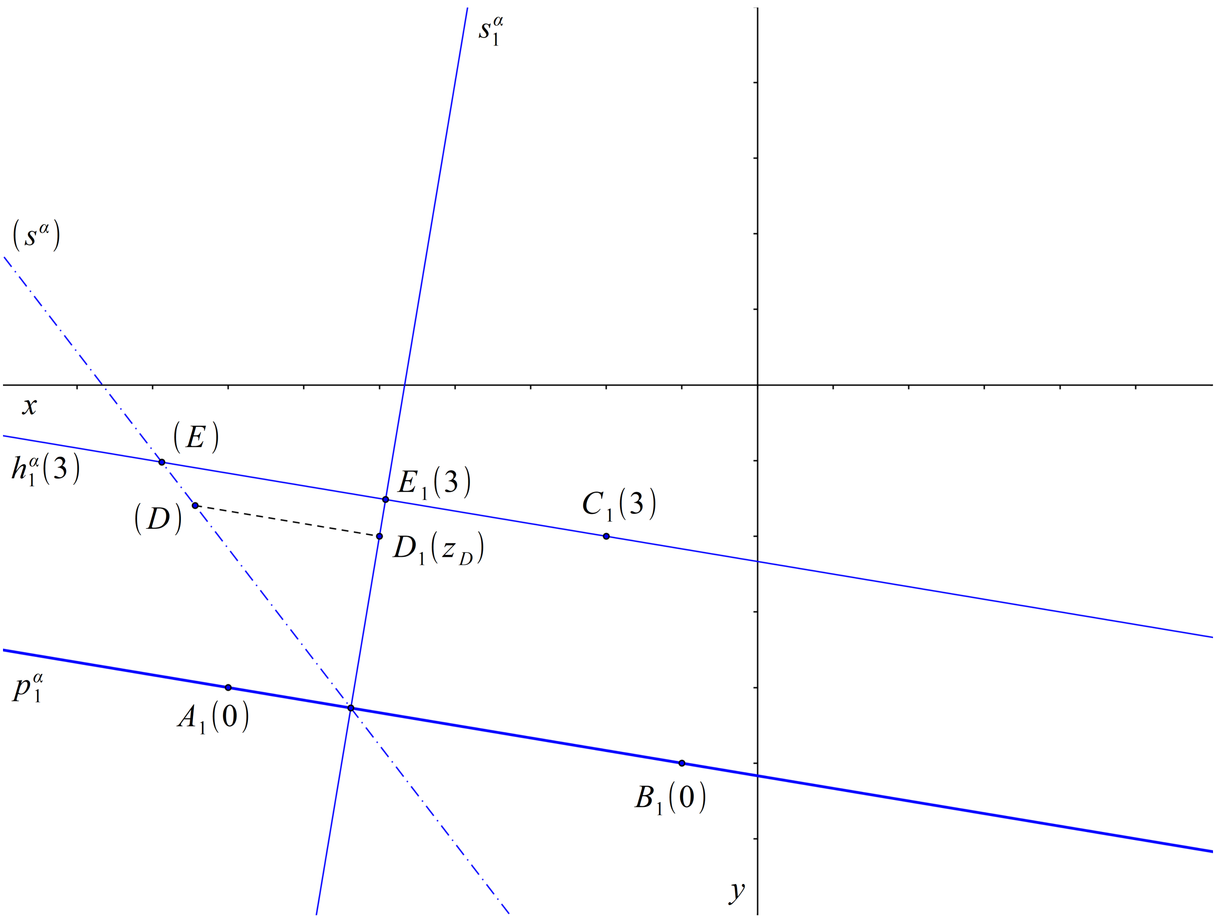
Příklad 5.3

Dourčete kótu bodu D tak, aby ležel v rovině $\alpha = \leftrightarrow ABC$.

$A = [7; 4; 0]$, $B = [1; 5; 0]$, $C = [2; 2; 3]$, $D = [5; 2; ?]$

Řešení (obr. 21)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 3. Dále bodem D_1 vedeme spádovou přímku s_1^α roviny α stejným způsobem, jako v příkladu 2.3. Promítací rovinu této přímky sklopíme, a to pomocí známého stopníku a průsečíku E s hlavní přímkou o kótě 3. Průsečíkem kolmice bodem D_1 k s_1^α a přímky (s^α) je bod (D). Kóta z_D bodu D je kladná a je rovna vzdálenosti bodů D_1 a (D).



Obr. 21: *Řešení příkladu 5.3*

6 Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka a a rovina α v prostoru mohou být **rovnoběžné** nebo **různoběžné**. Speciálním případem přímky a rovnoběžné s rovinou α je ten, kdy přímka a leží v rovině α.

Pokud rovina α ani přímka a nejsou promítací, může být přímka a s rovinou α různoběžná i rovnoběžná. Abychom o vzájemné poloze přímky a a roviny α mohli rozhodnout, pomůžeme si **krycí přímkou** q, což je přímka, pro kterou platí, že $q \subset \alpha$ a $q_1 = a_1$. Pokud je přímka q totožná s přímkou a, přímka a leží v rovině α. Pokud jsou přímky a, q rovnoběžné různé, přímka a je rovnoběžná s rovinou α a neleží v rovině α. Pokud je přímka q různoběžná s přímkou a, je přímka a různoběžná s rovinou α a průsečík přímek a, q je průsečíkem přímky a a roviny α. Přímky q a a nemohou být mimoběžné, neboť $q_1 = a_1$, a tedy leží v jedné promítací rovině.[1] Ve speciálním případě, kdy je přímka a rovnoběžná s p^α, sklopíme promítací rovinu libovolné spádové přímky roviny α, abychom dourčili, zda přímka a leží v rovině α.[2]

Pokud rovina α není promítací a přímka a promítací je, pak je přímka a různoběžná s rovinou α. Průmět průsečíku přímky a a roviny α v takovém případě splývá s bodem a_1. Jeho kótu dourčíme pomocí sklopení promítací roviny té spádové přímky roviny α, která je různoběžná s přímkou a.[3]

V případě, že rovina α je promítací a přímka a promítací není, mohou přímka a a rovina α být různoběžné i rovnoběžné. Pokud jsou přímky α_1 a a_1 rovnoběžné různé, přímka a je rovnoběžná s rovinou α a neleží v rovině α. Pokud jsou přímky α_1 a a_1 totožné, přímka a leží v rovině α. Pokud jsou přímky α_1 a a_1 různoběžné, je přímka a různoběžná s rovinou α a průmět průsečíku přímky a a roviny α splývá s průsečíkem přímek a_1, α_1. Kótu průsečíku v tomto případě určíme sklopením promítací roviny přímky a.[4]

Pokud jsou přímka a i rovina α promítací, jsou rovnoběžné. Přímka a leží v rovině α právě tehdy, když bod a_1 leží na přímce α_1.

---

1 Viz příklady 6.1, 6.2 a 6.3.

2 Viz příklad 6.4.

3 Viz příklad 6.5.

4 Viz příklad 6.6.

Příklad 6.1

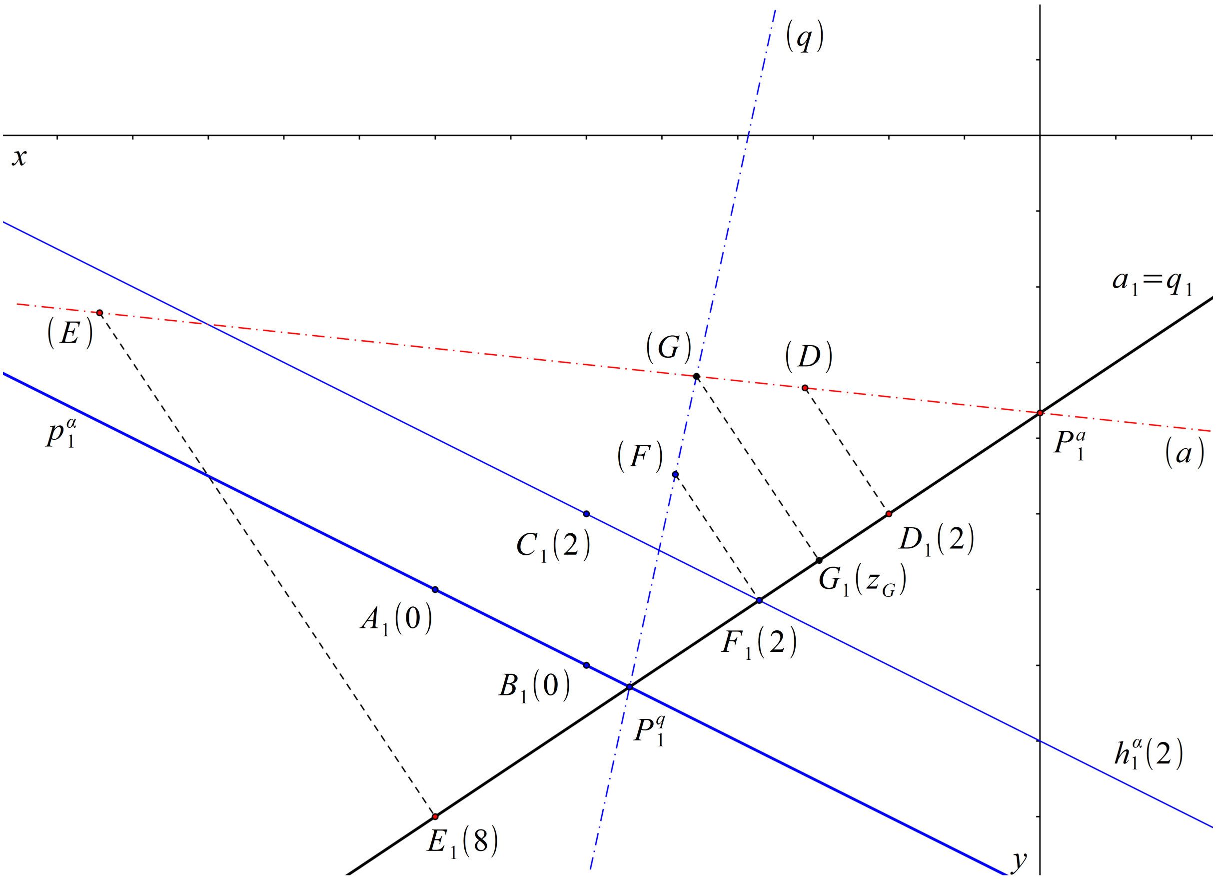
Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [8; 6; 0]$, $B = [6; 7; 0]$, $C = [6; 5; 2]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [2; 5; 2]$, $E = [8; 9; 8]$

Řešení (obr. 22)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 2. Rovina α není promítací a přímka a také ne. Přímka a a rovina α tedy mohou být různoběžné i rovnoběžné. V takovém případě si pomůžeme krycí přímkou q, pro kterou platí, že $q_1 = a_1$ a $q \subset \alpha$. Přímka q protíná hlavní přímku h^α v bodě F o kótě 2 a stopník P^q přímky q leží na stopě roviny α. Sklopíme promítací rovinu přímek a, q. Přímky (a), (q) jsou různoběžné a protínají se v bodě (G). Z toho plyne, že přímky a, q jsou různoběžné a protínají se v bodě G. Přímka a je tedy různoběžná s rovinou α a průsečík G přímek a, q je zároveň průsečíkem přímky a a roviny α. Kóta bodu G je kladná a je rovna vzdálenosti bodů G_1, (G).



Obr. 22: *Řešení příkladu 6.1*

Příklad 6.2

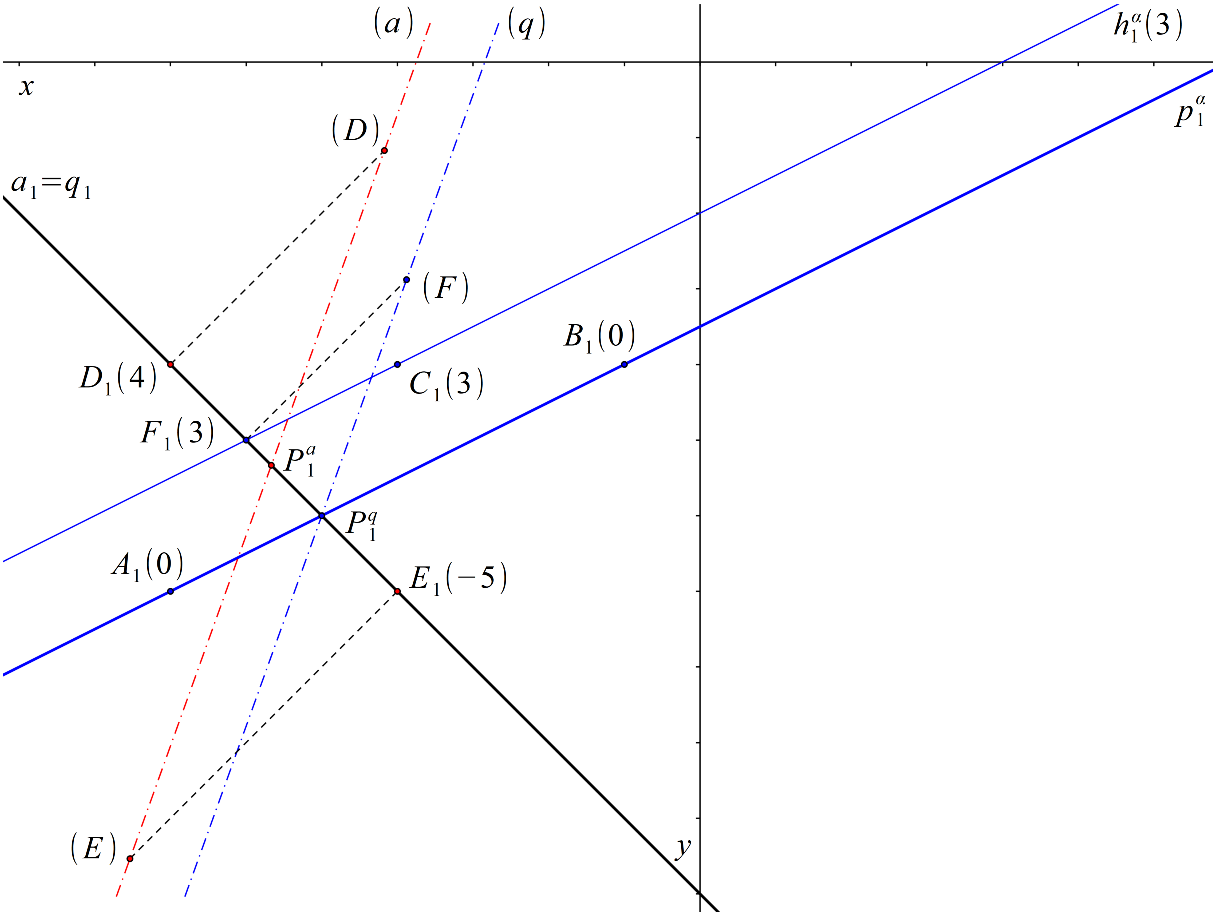
Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [7; 7; 0]$, $B = [1; 4; 0]$, $C = [4; 4; 3]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [7; 4; 4]$, $E = [4; 7; -5]$

Řešení (obr. 23)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky roviny α o kótě 3. Rovina α není promítací a přímka a také ne. Přímka a a rovina α tedy mohou být různoběžné i rovnoběžné. V takovém případě si pomůžeme krycí přímkou q, pro kterou platí, že $q_1 = a_1$ a $q \subset \alpha$. Přímka q protíná hlavní přímku h^α v bodě F o kótě 3 a stopník P^q přímky q leží na stopě roviny α. Sklopíme promítací rovinu přímek a, q. Přímky (a), (q) jsou rovnoběžné různé. Z toho plyne, že přímky a, q jsou rovnoběžné různé. Přímka a je tedy rovnoběžná s rovinou α a neleží v rovině α.



Obr. 23: *Řešení příkladu 6.2*

Poznámka:

Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U přímek s velmi malou odchylkou se proto nemůžeme přesvědčit, zda jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Budeme je ale považovat za rovnoběžné.

Příklad 6.3

Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

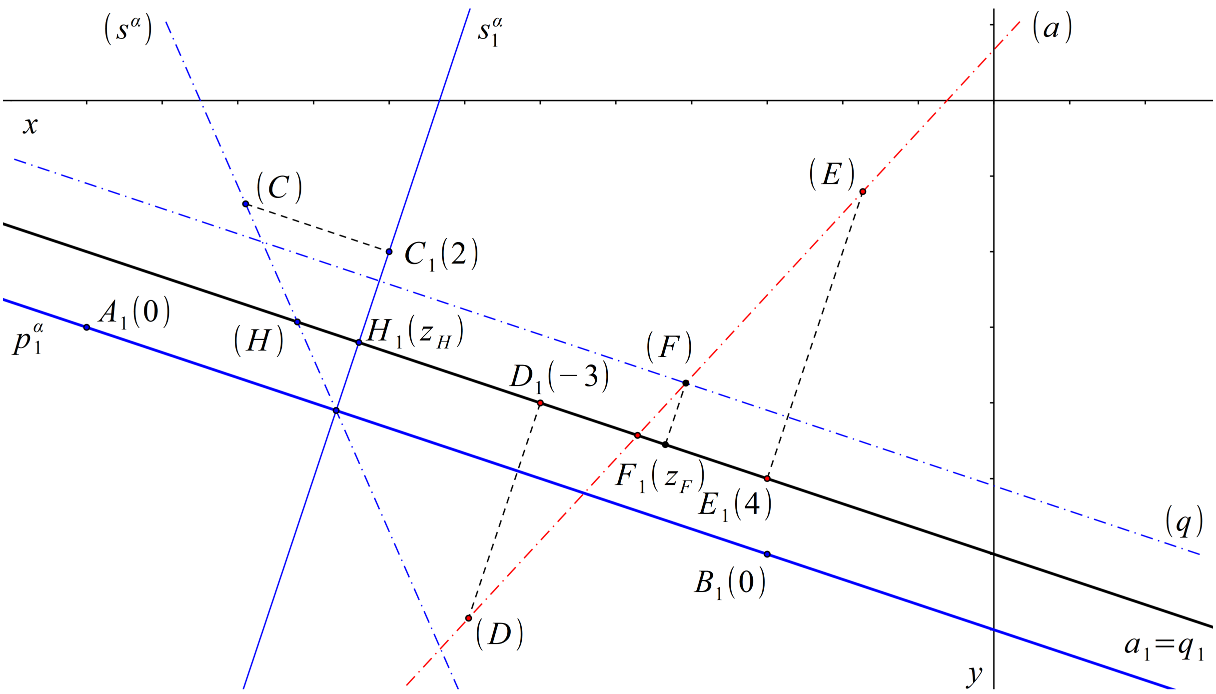
$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [12; 3; 0]$, $B = [3; 6; 0]$, $C = [8; 2; 2]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [6; 4; -3]$, $E = [3; 5; 4]$

Řešení (obr. 24)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 2. Rovina α není promítací a přímka a také ne. Přímka a a rovina α tedy mohou být různoběžné i rovnoběžné. Přímka a_1 je rovnoběžná s p_1^α, a proto je přímka a rovnoběžná s α právě tehdy, když je rovnoběžná s π. Přímka a je různoběžná s π, tudíž je různoběžná s rovinou α.

K dourčení průsečíku F přímky a a roviny α užijeme krycí přímku q, pro kterou platí, že $q_1 = a_1$ a $q \subset \alpha$. Přímka a_1 je rovnoběžná s p_1^α, přímka q bude tedy hlavní přímkou roviny α. Například pomocí sklopení promítací roviny libovolné spádové přímky s^α roviny α zjistíme kótu z_q přímky q. Zvolili jsme spádovou přímku procházející bodem C. Promítací rovinu přímky s^α sklopíme pomocí bodu C a známého stopníku. Kóta z_q je rovna kótě bodu H, pro který platí $H_1 \in \{q_1 \cap s_1^\alpha\}$ a $H \in s^\alpha$. Dále sklopíme promítací rovinu přímek a, q. Přímka (q) je rovnoběžka s přímkou a_1 ve vzdálenosti z_q, a to ve stejné polorovině určené přímkou a_1 jako bod (E). Průsečík přímek (a) a (q) je bod (F). Pata kolmice vedené tímto bodem k a_1 je bod F_1. Kóta bodu F je kladná a je rovna vzdálenosti bodů F_1, (F) a je to současně kóta hlavní přímky q.



Obr. 24: *Řešení příkladu 6.3*

Příklad 6.4

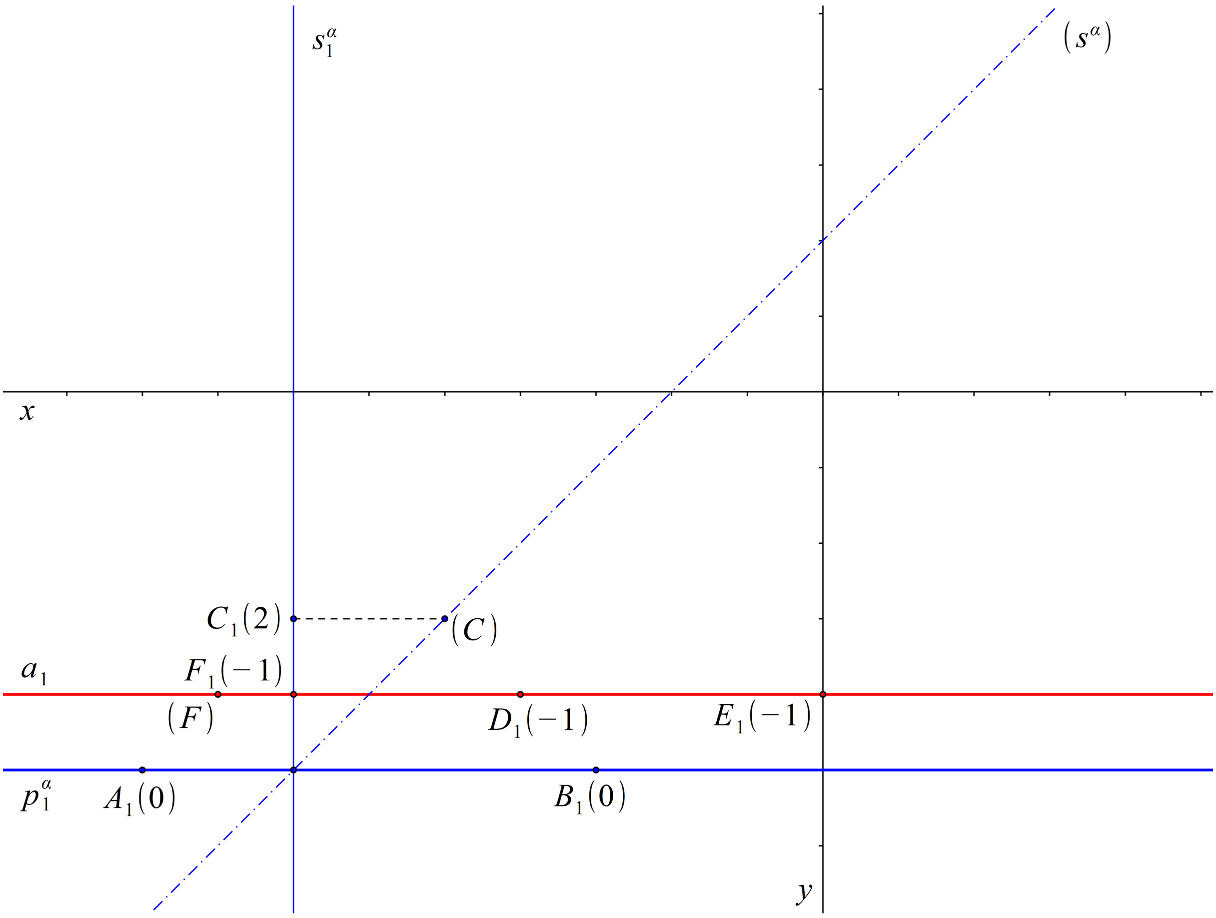
Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [9; 5; 0], B = [3; 5; 0], C = [7; 3; 2]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [4; 4; -1], E = [0; 4; -1]$

Řešení (obr. 25)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 2. Rovina α není promítací a přímka a také ne. Přímka a je navíc rovnoběžná s p^α, protože body D a E mají navzájem stejnou kótu a přímka a_1 je rovnoběžná s p_1^α. Přímka a a rovina α jsou tedy rovnoběžné, zbývá jen určit, zda přímka a leží v rovině α. V tomto případě si pomůžeme sklopením promítací roviny libovolné spádové přímky roviny α. Zvolili jsme spádovou přímku procházející bodem C, kterou sklopíme pomocí bodu C a známého stopníku. K této promítací rovině je přímka a kolmá a protíná ji v bodě F. Jelikož bod (F) neleží na přímce (s^α), je přímka a rovnoběžná s rovinou α a neleží v rovině α.



Obr. 25: *Řešení příkladu 6.4*

Příklad 6.5

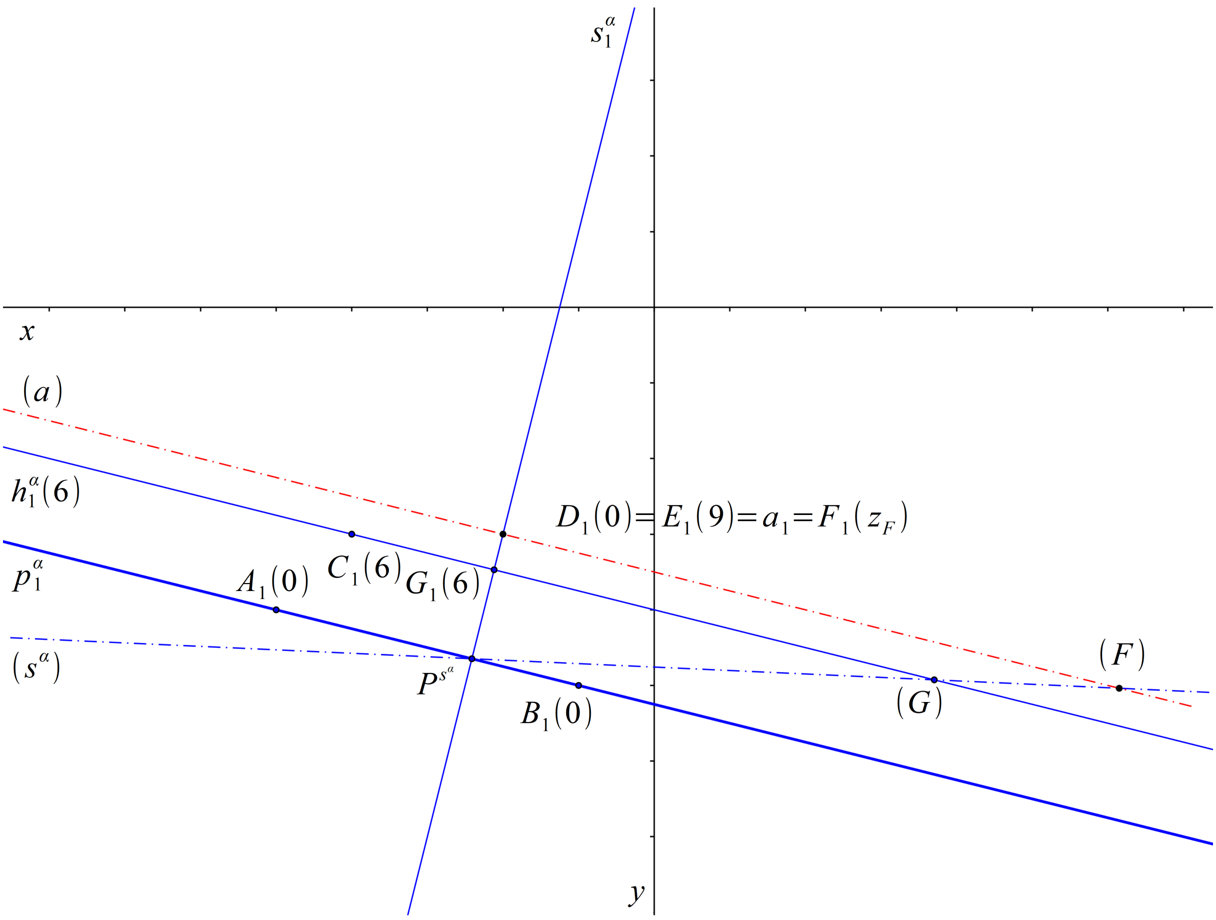
Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [5; 4; 0]$, $B = [1; 5; 0]$, $C = [4; 3; 6]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [2; 3; 0]$, $E = [2; 3; 9]$

Řešení (obr. 26)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmět hlavní přímky h^α roviny α o kótě 6. Přímka a je promítací a rovina α není. Přímka a a rovina α jsou tedy různoběžné a průmět F_1 jejich průsečíku F splývá s bodem a_1. K určení kóty bodu F užijeme sklopení promítací roviny té spádové přímky roviny α, která je různoběžná s přímkou a. Přímky a a s^α se protínají v bodě F. Promítací rovinu přímky s^α sklopíme pomocí známého stopníku P^{s^α} a průsečíku G spádové přímky s hlavní přímkou o kótě 6. Kóta bodu F je rovna vzdálenosti bodů F_1, (F).



Obr. 26: *Řešení příkladu 6.5*

Příklad 6.6

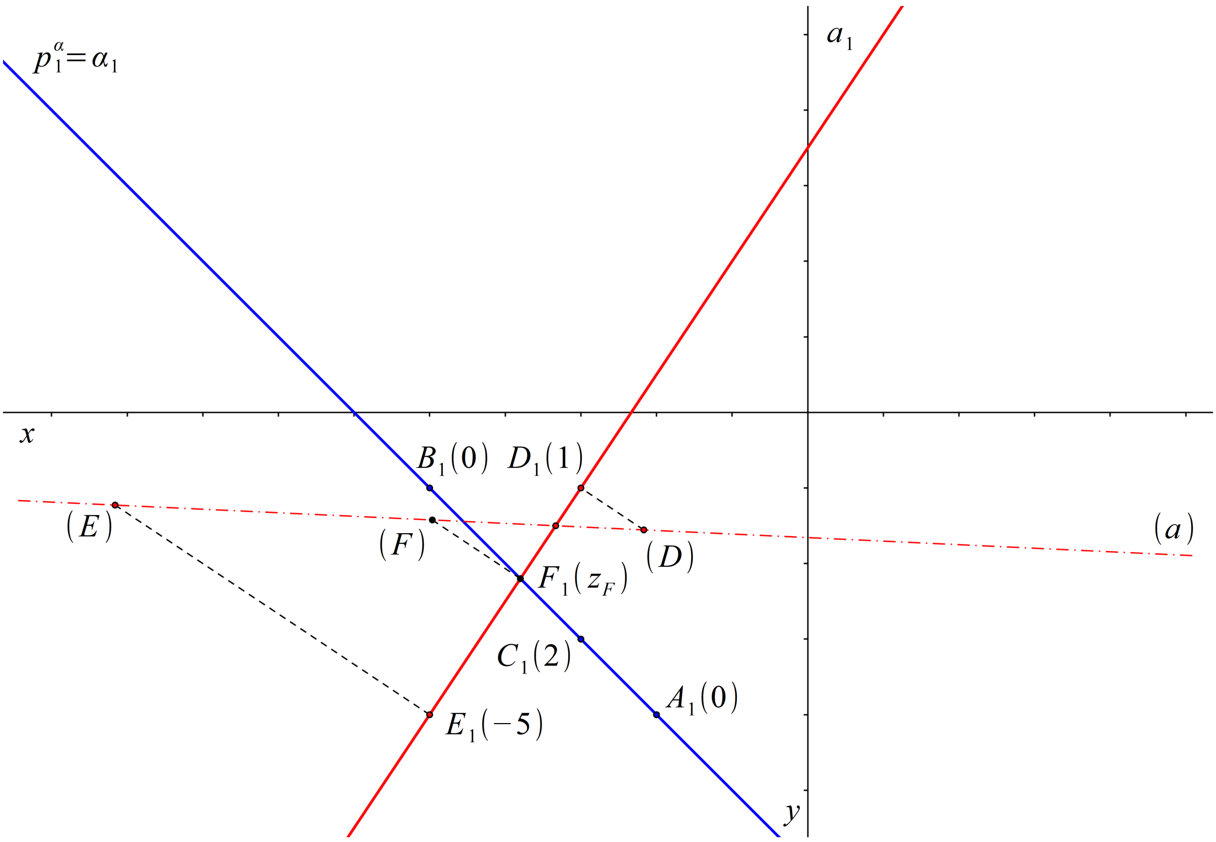
Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny α. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [2; 4; 0]$, $B = [5; 1; 0]$, $C = [3; 3; 2]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [3; 1; 1]$, $E = [5; 4; -5]$

Řešení (obr. 27)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Protože bod C_1 leží na přímce p_1^{α}, je rovina α promítací. Přímka a není promítací. Protože jsou a_1 a α_1 různoběžné přímky, jsou přímka a a rovina α různoběžné. Průmět jejich průsečíku F splývá s průsečíkem a_1 a α_1. Kótu bodu F určíme pomocí sklopení promítací roviny přímky a. Kóta z_F bodu F je záporná a $|z_F| = |F_1(F)|$.



Obr. 27: *Řešení příkladu 6.6*

7 Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny α a β v prostoru mohou být **různoběžné** nebo **rovnoběžné**. Rovnoběžné roviny dále rozdělujeme na rovnoběžné různé a totožné.

Pokud mají roviny α, β různoběžné stopy, jsou různoběžné. Různoběžné roviny mají společnou přímku, tzv. průsečnici. K určení průsečnice je třeba nalézt dva její body. Průsečnice rovin α, β prochází průsečíkem jejich stop. Jako další bod průsečnice hledáme obvykle průsečík hlavních přímek h^{α}, h^{β} se stejnou kótou.[1]

Pokud mají roviny α, β rovnoběžné stopy, mohou být rovnoběžné i různoběžné. Vzájemnou polohu rovnin α, β v takovém případě určíme sklopením promítací roviny γ kolmé ke stopám daných rovin. K rovině γ jsou roviny α, β kolmé a protínají ji tedy ve spádových přímkách s^{α}, s^{β}. Pokud jsou přímky s^{α}, s^{β} různoběžné, jsou roviny α, β různoběžné. Jejich průsečnice je rovnoběžná s jejich stopami a prochází průsečíkem přímek s^{α}, s^{β}. V opačném případě jsou roviny α, β rovnoběžné.[2]

Pokud je právě jedna z rovin, například rovina β, promítací, jsou roviny α, β různoběžné. Průmět průsečnice takových rovin v tomto případě splývá s přímkou β_1.[3]

Pokud jsou roviny α, β promítací, mohou být rovnoběžné i různoběžné. Pokud je přímka α_1 různoběžná s přímkou β_1, jsou roviny α, β různoběžné a průmětem jejich průsečnice je průsečík přímek α_1, β_1. Pokud je přímka α_1 rovnoběžná s přímkou β_1, jsou roviny α, β rovnoběžné.

Pokud jsou obě zadané roviny hlavní, jsou rovnoběžné. Pokud je právě jedna ze zadaných rovin, například rovina β, hlavní, průsečnicí daných rovin je hlavní přímka roviny α o stejné kótě, jako je kóta roviny β.[4]

1 Viz příklad 7.1.

2 Viz příklady 7.2, 7.3.

3 Viz příklad 7.4 a 7.5.

4 Viz příklad 7.6.

Příklad 7.1

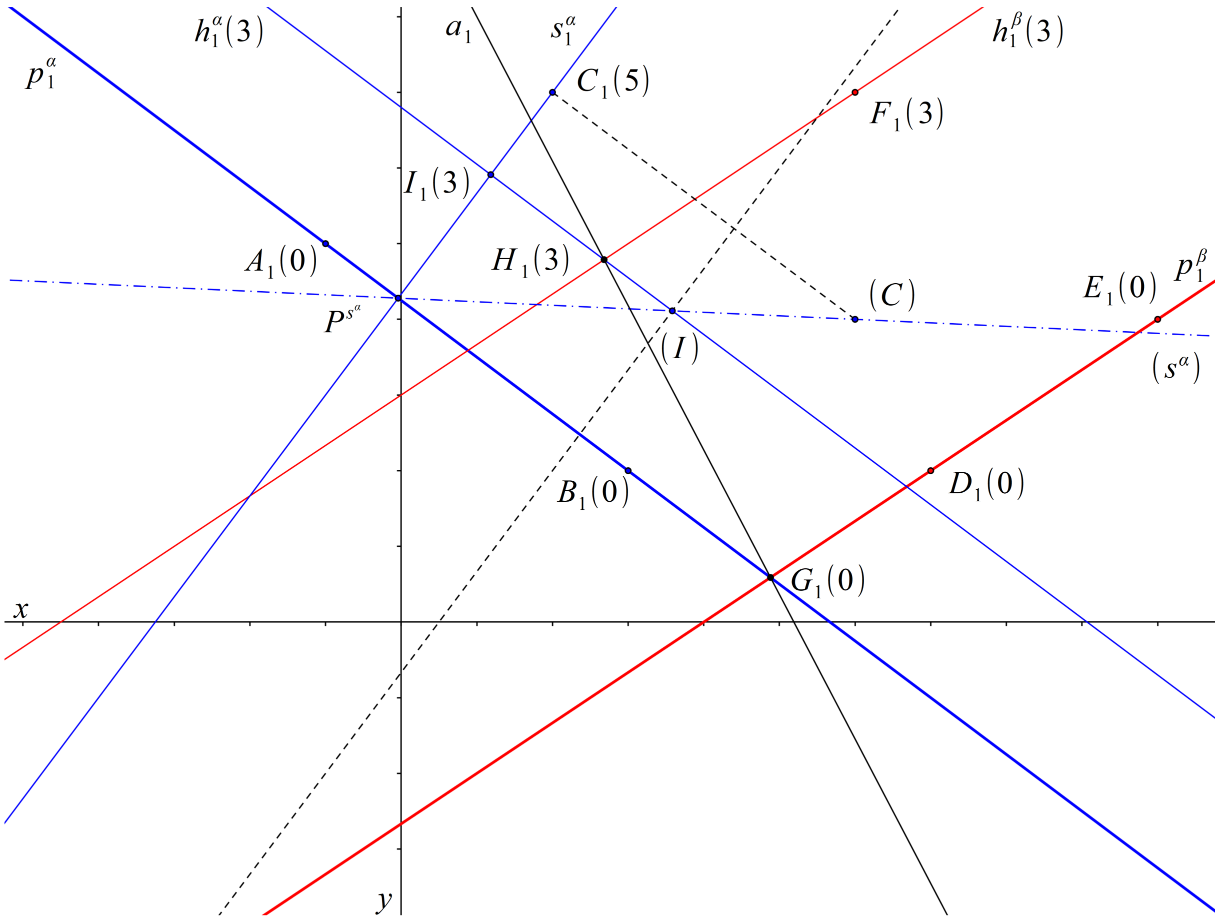
Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [1; -5; 0]$, $B = [-3; -2; 0]$, $C = [-2; -7; 5]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [-7; -2; 0]$, $E = [-10; -4; 0]$, $F = [-6; -7; 3]$

Řešení (obr. 28)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Body D, E také leží v průmětně, proto určují stopu roviny β. Roviny α, β mají různoběžné stopy a nejsou promítací. To znamená, že jsou různoběžné. Jedním bodem jejich průsečnice je průsečík G jejich stop. Jako druhý bod průsečnice můžeme najít průsečík hlavních přímek o kótě 3. Průmětem hlavní přímky roviny β o kótě 3 je přímka vedená bodem F_1 rovnoběžně se stopou roviny β. U roviny α najdeme hlavní přímku o kótě 3 například pomocí sklopení promítací roviny spádové přímky s^α jdoucí bodem C. Tuto promítací rovinu sklopíme pomocí bodu C a známého stopníku P^{s^α}. Ve sklopení na spádové přímce najdeme bod I o kótě 3. Jeho průmětem vedeme rovnoběžku se stopou roviny α, která je průmětem hledané hlavní přímky roviny α o kótě 3. Spojnice průsečíku H hlavních přímek rovin α, β o kótě 3 a průsečíku G stop rovin α, β je průsečnice a rovin α, β.



Obr. 28: *Řešení příkladu 7.1*

Příklad 7.2

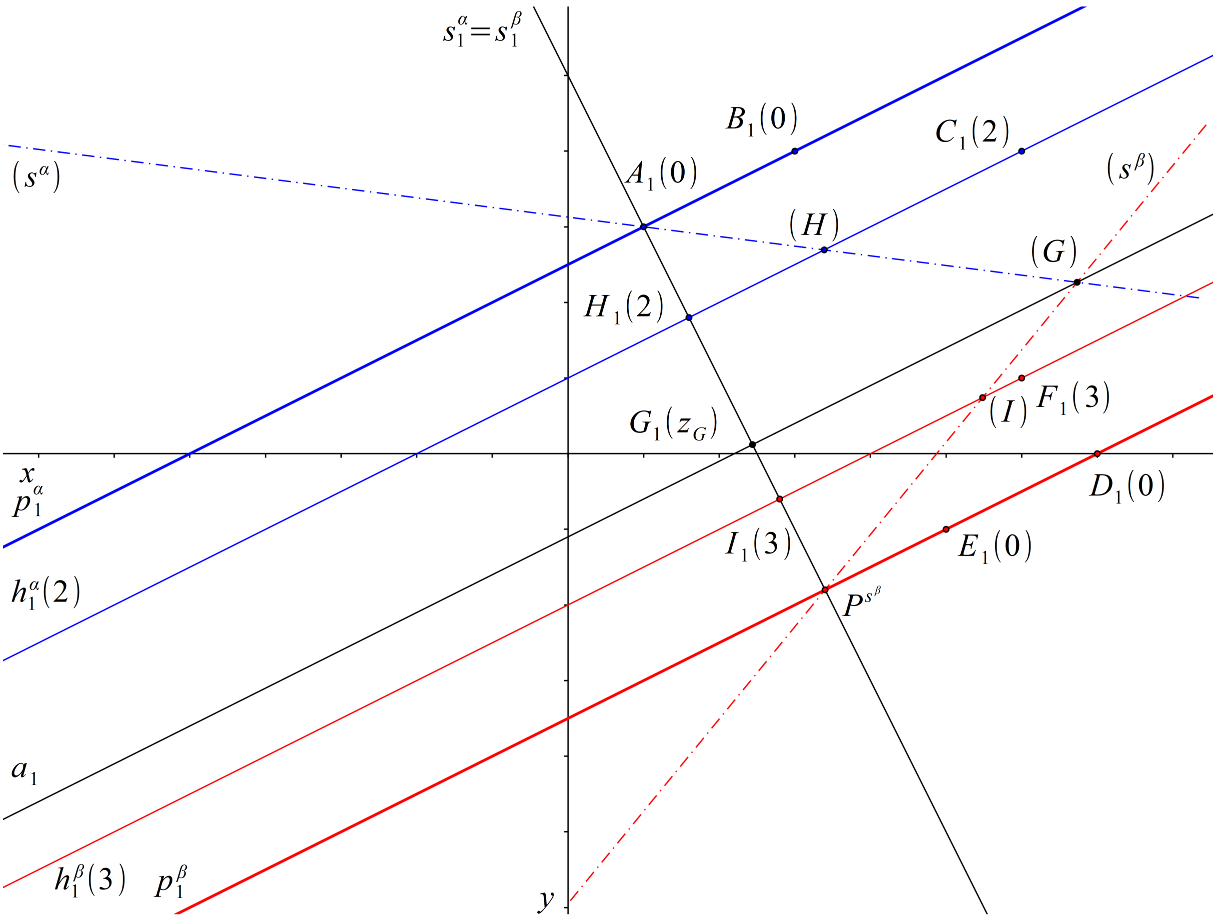
Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [-1; -3; 0]$, $B = [-3; -4; 0]$, $C = [-6; -4; 2]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [-7; 0; 0]$, $E = [-5; 1; 0]$, $F = [-6; -1; 3]$

Řešení (obr. 29)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Body D, E také leží v průmětně, proto určují stopu roviny β. Roviny α, β mají rovnoběžné stopy a nejsou promítací. To znamená, že mohou být různoběžné i rovnoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu rovin α, β, musíme sklopit promítací rovinu libovolné spádové přímky roviny α. Tato promítací rovina protíná rovinu β ve spádové přímce s^β. Průsečík přímek (s^α) a (s^β) je sklopený bod G průsečnice a rovin α, β. Rovnoběžka a_1 vedená průmětem G_1 bodu G se stopami rovin α, β je průmětem průsečnice a rovin α, β.



Obr. 29: *Řešení příkladu 7.2*

Příklad 7.3

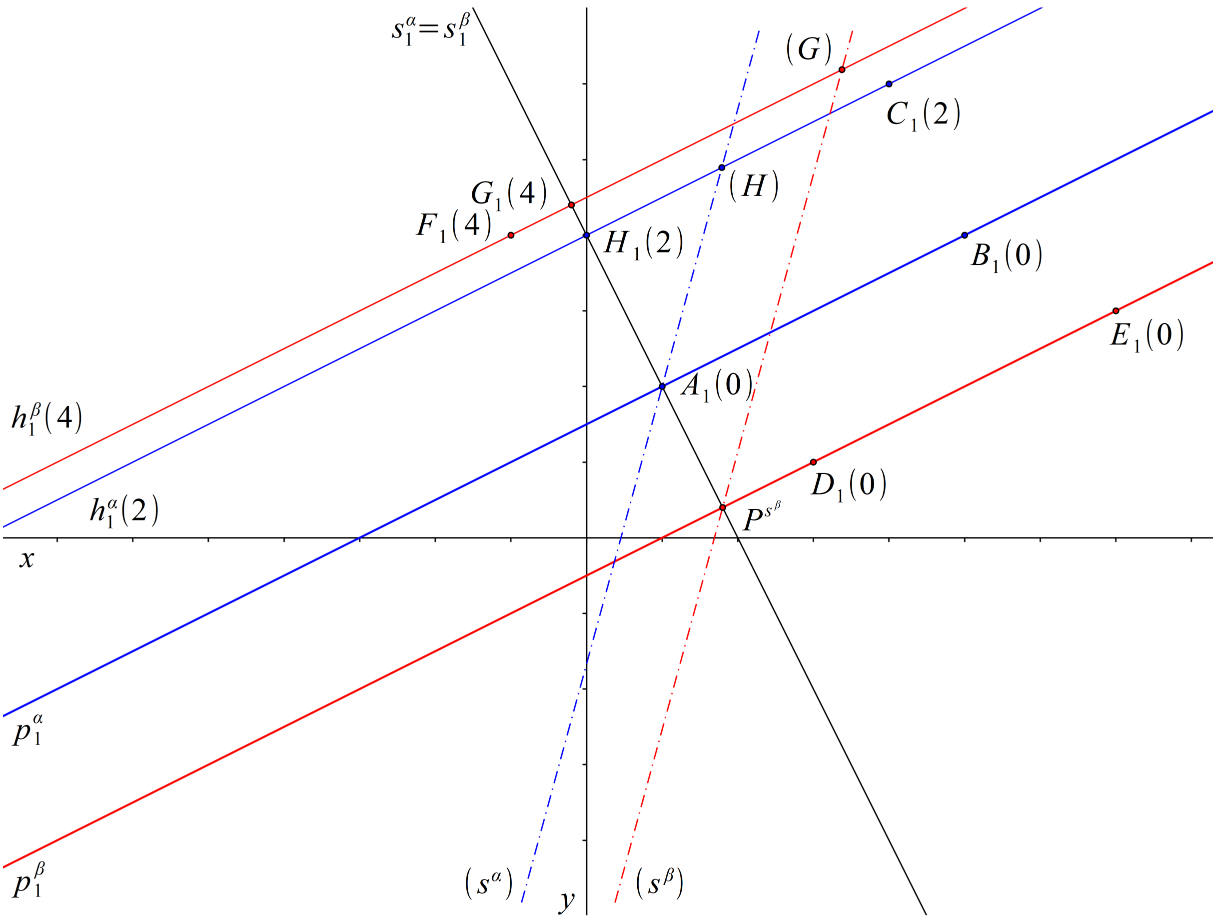
Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [-1; -2; 0]$, $B = [-5; -4; 0]$, $C = [-4; -6; 2]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [-7; -3; 0]$, $E = [-3; -1; 0]$, $F = [1; -4; 4]$

Řešení (obr. 30)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Body D, E také leží v průmětně, proto určují stopu roviny β. Roviny α, β mají rovnoběžné stopy a nejsou promítací. To znamená, že mohou být různoběžné i rovnoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu rovin α, β, musíme sklopit promítací rovinu libovolné spádové přímky s^α roviny α. Tato promítací rovina protíná rovinu β ve spádové přímce s^β. Přímky (s^α) a (s^β) jsou rovnoběžné různé, tudíž jsou roviny α, β rovnoběžné různé.



Obr. 30: *Řešení příkladu 7.3*

Poznámka:

Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U přímek s velmi malou odchylkou se proto nemůžeme přesvědčit, zda jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Budeme je ale považovat za rovnoběžné.

Příklad 7.4

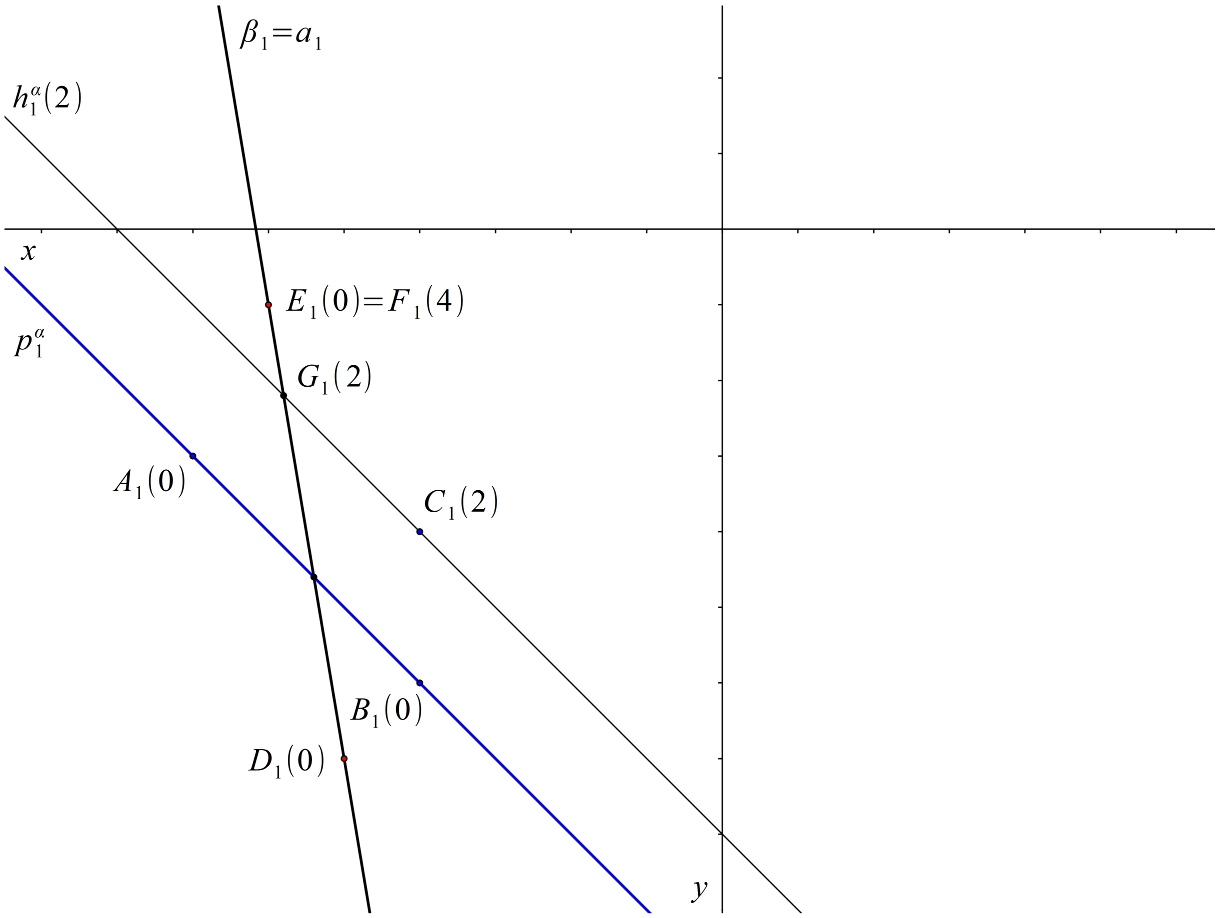
Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [7; 3; 0]$, $B = [4; 6; 0]$, $C = [4; 4; 2]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [5; 7; 0]$, $E = [6; 1; 0]$, $F = [6; 1; 4]$

Řešení (obr. 31)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Body D, E leží v průmětně, proto určují stopu roviny β. Protože bod F_1 leží na přímce p_1^β, je rovina β promítací. Průmět průsečnice a rovin α a β tedy splývá s přímkou β_1. Přímka a svým průmětem ale není jednoznačně určena. Můžeme ji dourčit například stopníkem, který leží na stopě roviny α a bodem G o kótě 2, který leží na hlavní přímce roviny α o kótě 2.



Obr. 31: *Řešení příkladu 7.4*

Příklad 7.5

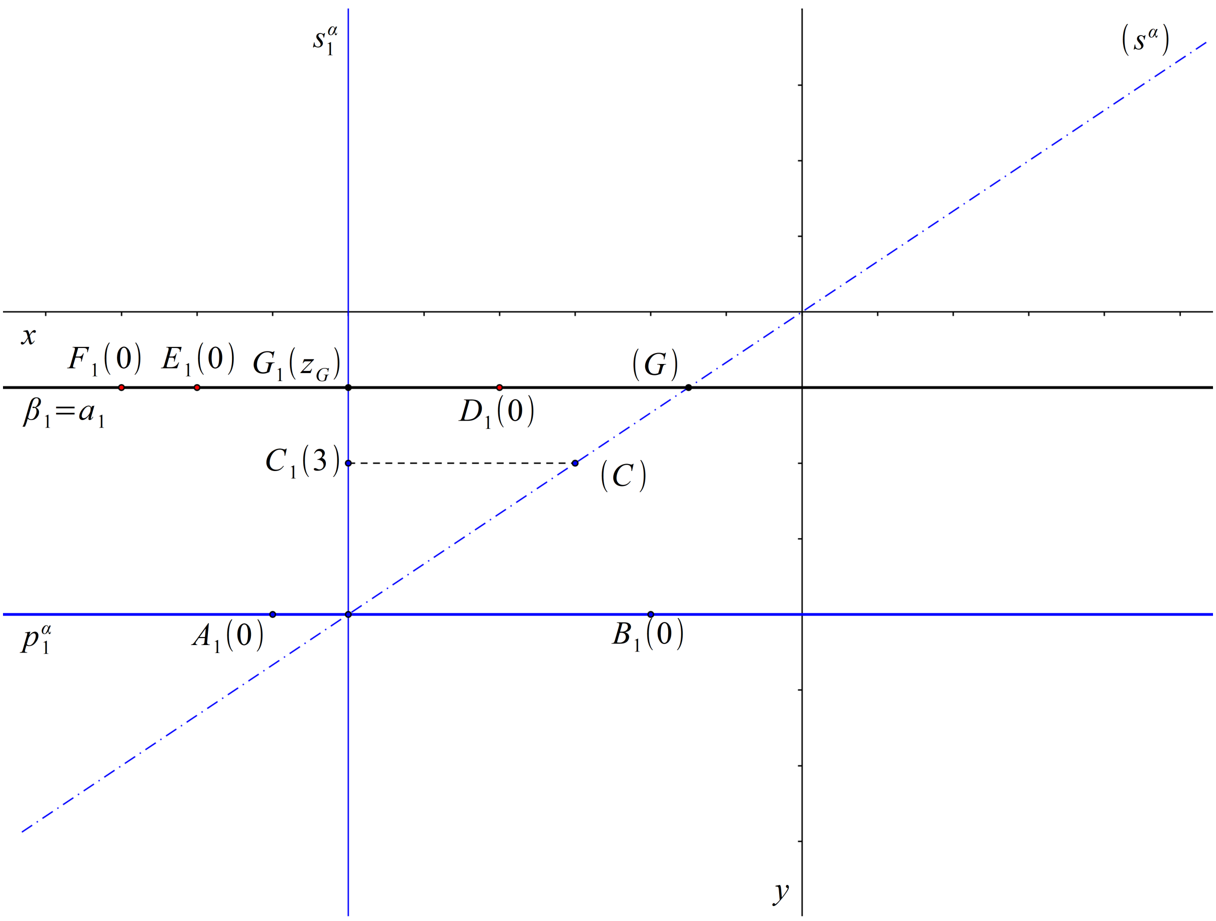
Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [7; 4; 0]$, $B = [2; 4; 0]$, $C = [6; 2; 3]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [4; 1; 0]$, $E = [8; 1; 0]$, $F = [9; 1; 4]$

Řešení (obr. 32)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Body D, E také leží v průmětně, proto určují stopu roviny β. Protože bod F_1 leží na přímce p_1^β, je rovina β promítací. To znamená, že zadané roviny jsou různoběžné. Protože přímka a leží v rovině α a její průmět je rovnoběžný se stopou roviny α, je hlavní přímkou roviny α. Abychom dourčili kótu přímky a, sklopíme promítací rovinu spádové přímky roviny α procházející bodem C. Tato spádová přímka protíná přímku a v bodě G. Na kolmici k s_1^α na přímce (s^α) najdeme bod (G). Kóta z_G bodu G je kladná a je rovna vzdálenosti bodů G_1 a (G). Protože bod G je bodem přímky a, je kóta bodu G zároveň rovna kótě přímky a.



Obr. 32: *Řešení příkladu 7.5*

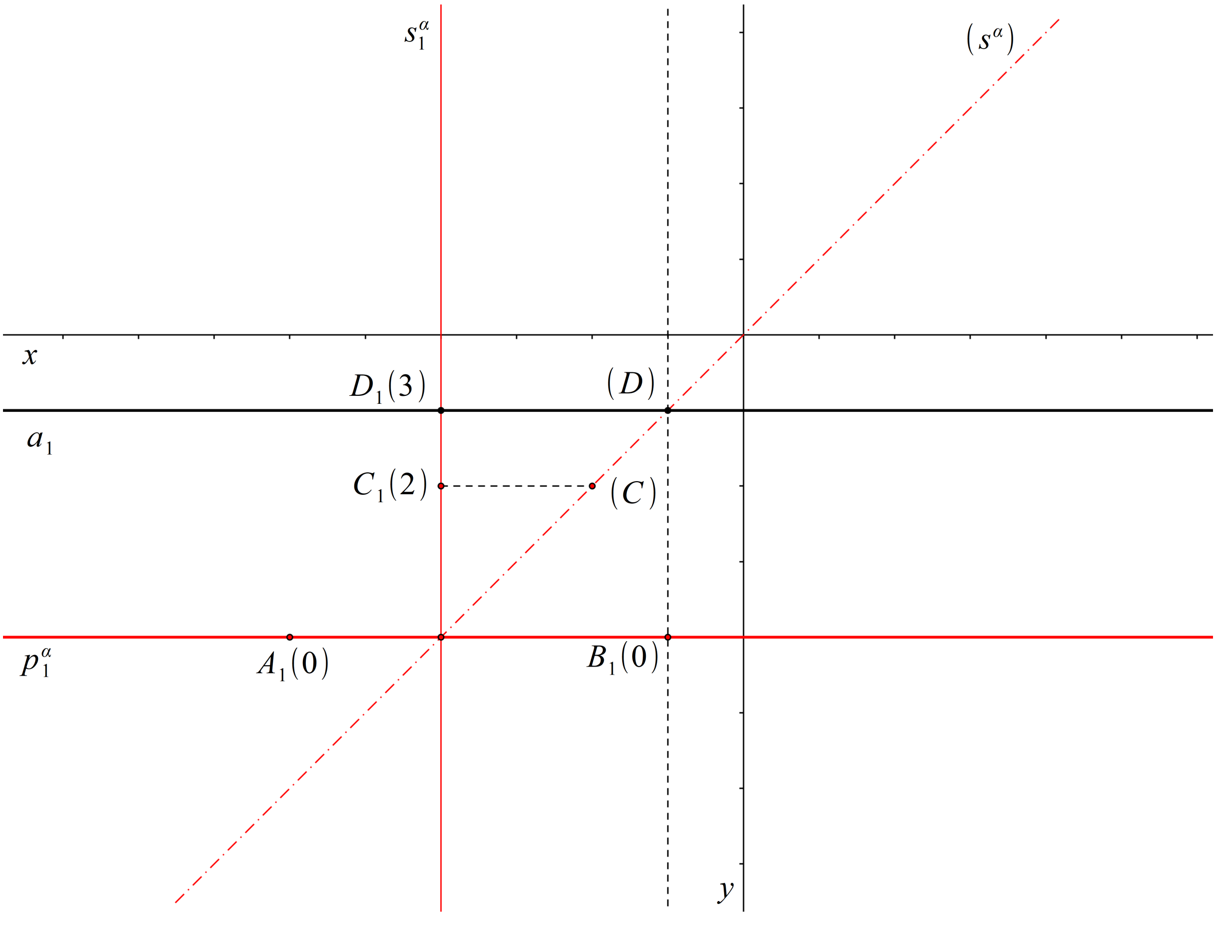
Příklad 7.6

Určete vzájemnou polohu roviny α a hlavní roviny o kótě 3. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečnici.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [6; 4; 0]$, $B = [1; 4; 0]$, $C = [4; 2; 2]$

Řešení (obr. 33)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Průsečnicí a roviny α s hlavní rovinou o kótě 3 je hlavní přímka roviny α o kótě 3. Tu najdeme následovně. Bodem C proložíme spádovou přímku roviny α. Na této přímce stejným způsobem, jako v příkladu 2.3 najdeme bod D o kótě 3. Rovnoběžka vedená bodem D_1 se stopou roviny α je průmětem hledané průsečnice.



Obr. 33: *Řešení příkladu 7.6*

8 Průnik mnohoúhelníků

Při zobrazování průniku mnohoúhelníků je třeba nejprve určit vzájemnou polohu rovin těchto mnohoúhelníků.

V případě, kdy jsou roviny mnohoúhelníků totožné, bude průmětem jejich průniku průnik jejich průmětů.

Pokud jsou roviny mnohoúhelníků rovnoběžné různé, jejich průnikem je prázdná množina.

Nejzajímavější případ nastane, pokud budou roviny mnohoúhelníků různoběžné. V této situaci najdeme průsečnici těchto rovin, na níž se bude měnit viditelnost daných mnohoúhelníků.

Příklad 8.1

Zobrazte průnik trojúhelníku *ABC* a trojúhelníku *DEF*.

$A = [1; 3; 0]$, $B = [-5; -4; 2]$, $C = [-12; 4; 8]$

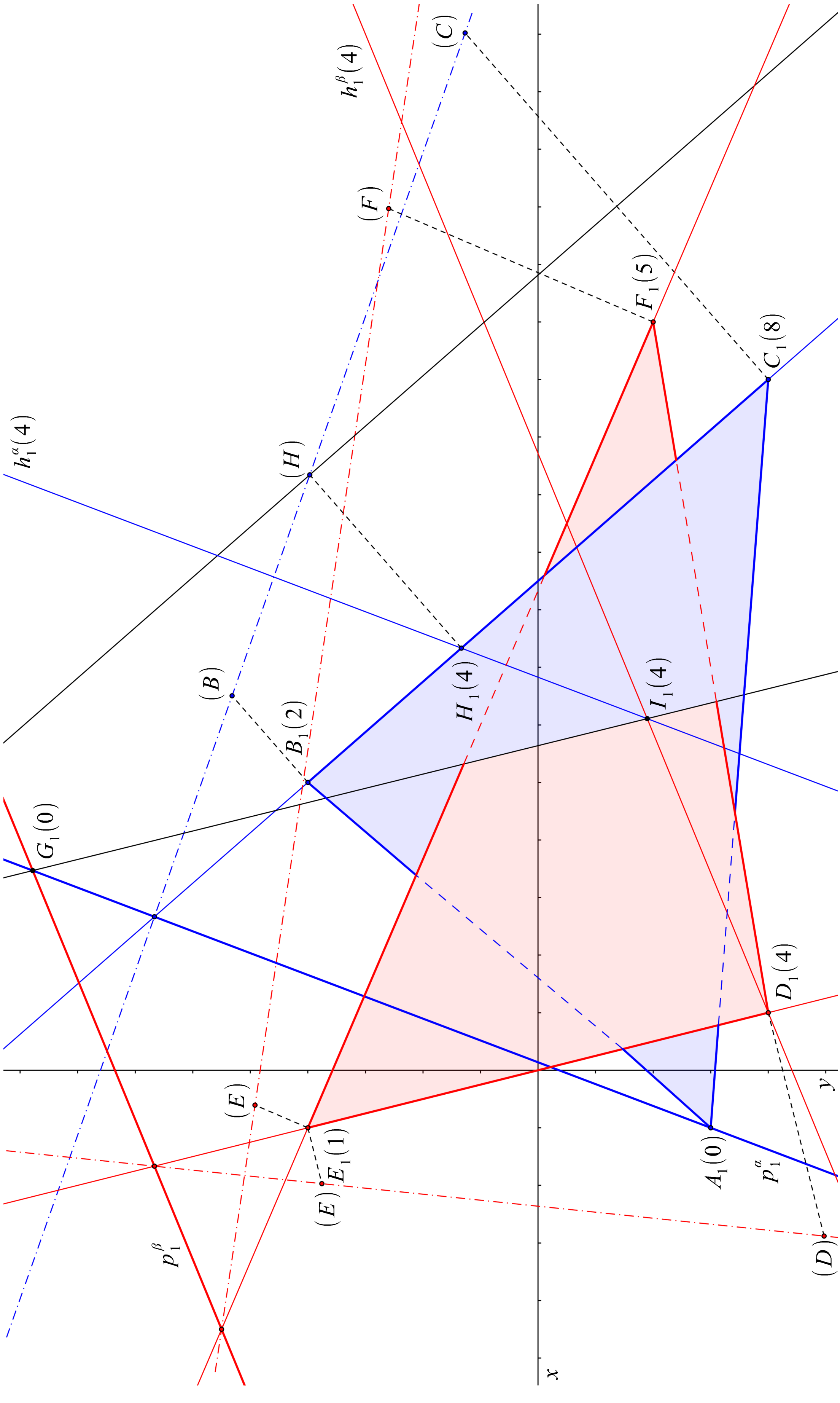
$D = [-1; 4; 4]$, $E = [1; -4; 1]$, $F = [-13; 2; 5]$

Řešení (obr. 34)

Nejprve najdeme stopy rovin α trojúhelníku *ABC* a β trojúhelníku *DEF*. Stopu p^α roviny α najdeme jako spojnici stopníku přímky *BC* a bodu *A*, který leží v průmětně. Stopu p^β roviny β najdeme například jako spojnici stopníků přímek *DE* a *EF*. Roviny α a β mají různoběžné stopy, tudíž jsou různoběžné.

Dále potřebujeme sestrojit průmět průsečnice *a* rovin α a β, na níž se bude měnit viditelnost trojúhelníků *ABC* a *DEF*. Jedním bodem průsečnice rovin *a* je průsečík *G* stop p^α, p^β. Jako druhý bod průsečnice můžeme najít průsečík *I* hlavních přímek o kótě 4. Průmětem hlavní přímky roviny β o kótě 4 je rovnoběžka se stopou p_1^α roviny α vedená bodem D_1. Dále najdeme například na přímce *BC* ve sklopení bod *H* o kótě 4. Rovnoběžka vedená bodem H_1 se stopou p_1^β roviny β je průmětem hlavní přímky roviny β o kótě 4.

O viditelnosti rozhodneme například pomocí průsečíku přímek E_1F_1 a B_1C_1, který je průmětem bodu na přímce *BC* a zároveň bodu na přímce *EF*. Bod na přímce *BC* má větší kótu než bod na přímce *EF*, proto je úsečka *BC* viditelná od průsečnice *a* směrem k bodu *A*. Analogicky dourčíme viditelnost zbývajících úseček daných mnohoúhelníků.



Obr. 34: *Řešení příkladu 8.1*

Příklad 8.2

Zobrazte průnik čtyřúhelníku $ABCD$ a trojúhelníku EFG.

$A = [1; 5; -2]$, $B = [-12; 5; 0]$, $C = [-8; -2; 5]$, $D = [-1; -2; ?]$

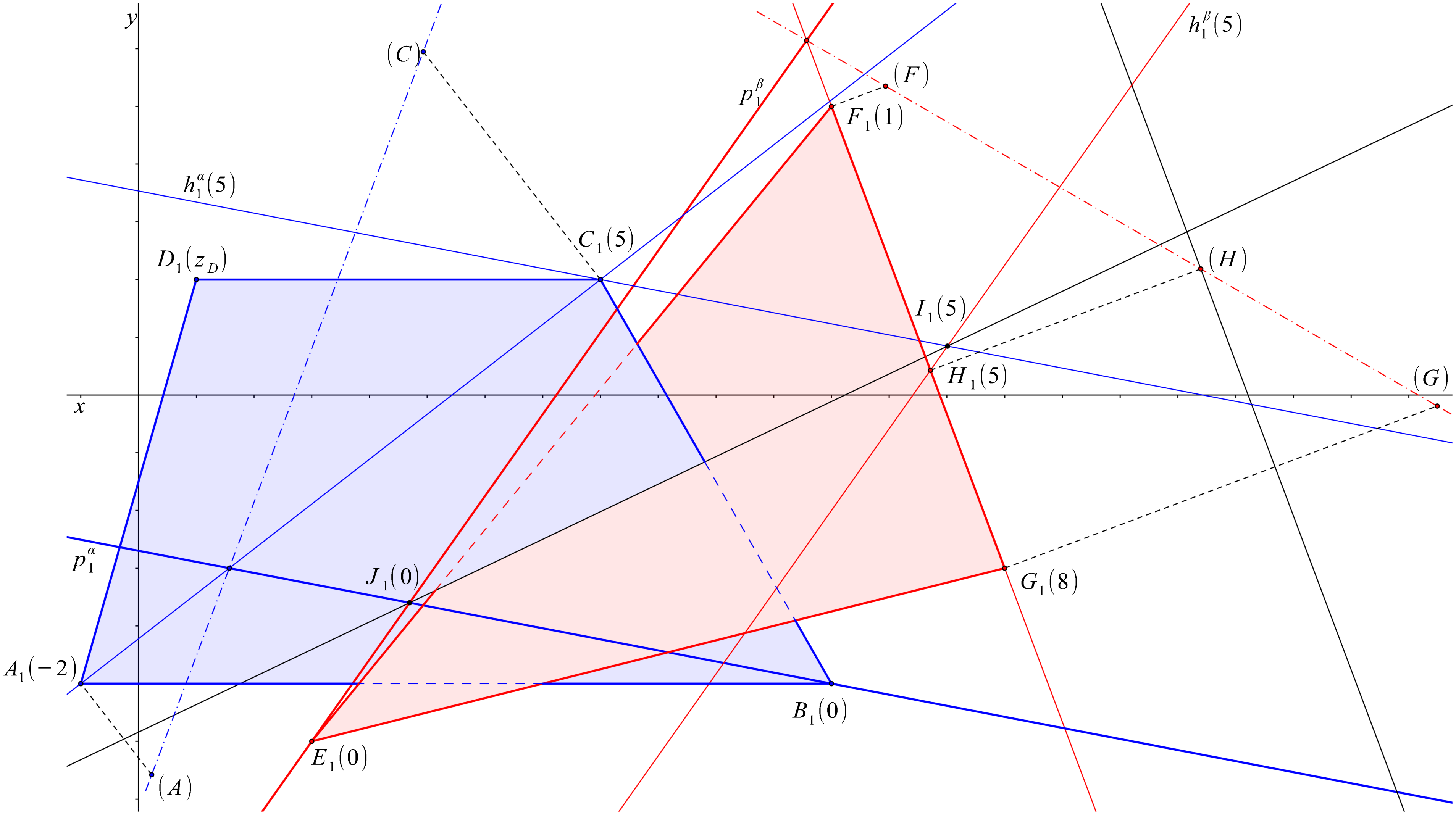
$E = [-3; 6; 0]$, $F = [-12; -5; 1]$, $G = [-15; 3; 8]$

Řešení (obr. 35)

Nejprve najdeme stopy rovin α čtyřúhelníku $ABCD$ a β trojúhelníku EFG. Stopu roviny α určíme například jako spojnici stopníku přímky AC a bodu B, který leží v průmětně. Stopu roviny β najdeme jako spojnici stopníku přímy FG a bodu E, který leží v průmětně. Roviny α a β mají různoběžné stopy, tudíž jsou různoběžné.

Dále potřebujeme najít průmět průsečnice a rovin α a β, na níž se bude měnit viditelnost čtyřúhelníku $ABCD$ a trojúhelníku EFG. Jedním bodem průsečnice rovin α a β je průsečík J jejich stop. Jako druhý bod průsečnice můžeme najít průsečík I hlavních přímek o kótě 5. Průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 5 je rovnoběžka vedená bodem C_1 se stopou p_1^α roviny α. Dále najdeme například na přímce FG ve sklopení bod H o kótě 5. Rovnoběžka vedená bodem H_1 se stopou roviny β je průmětem hlavní přímky h^β roviny β o kótě 5.

O viditelnosti rozhodneme například pomocí průsečíku přímek B_1C_1 a E_1G_1, který je průmětem bodu na přímce BC a zároveň bodu na přímce EG. Bod na přímce BC má menší kótu než bod na přímce EG, proto je úsečka EG viditelná od průsečnice a směrem k bodu F. Analogicky dourčíme viditelnost zbývajících úseček daných mnohoúhelníků.



Obr. 35: *Řešení příkladu 8.2*

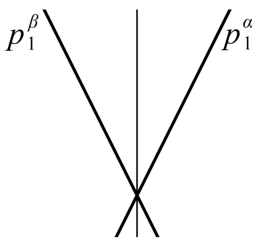
9 Teoretické řešení střech

Kótované promítání se mimo jiné využívá k teoretickému řešení střech. Pro jednoduchost budeme řešit střechy tvořené částmi rovin stejného spádu, tj. všechny roviny mají stejnou odchylku od průmětny. Vodorovnou rovinu, v níž leží okapy, ztotožníme s průmětnou. Střechu budeme zadávat jejím půdorysem. Jako půdorys střechy budeme pro jednoduchost volit obdélník nebo kombinaci obdélníků s rovnoběžnými stranami (viz např. obr. 38). Principy teoretického řešení střech tvořených částmi rovin stejného spádu lze však uplatnit i u složitějších nepravoúhlých půdorysů.

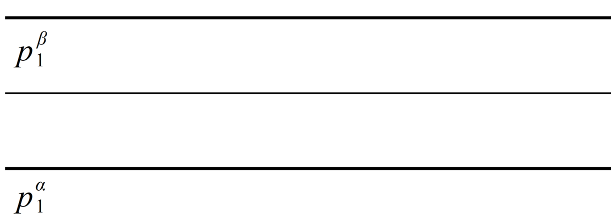
Úsečky na obvodu půdorysu určují stopy jednotlivých rovin, které v řešení použijeme. Řešit střechy znamená najít průsečnice těchto rovin. Pokud jsou jejich stopy různoběžné, jejich průsečnice se zobrazí jako osy úhlů daných jejich stopami (obr. 36). Pokud jsou stopy těchto rovin rovnoběžné, jejich průsečnice se zobrazí jako osy pásů rovnoběžek daného jejich stopami (obr. 37).

Na stranách mnohoúhelníku ležícího ve vodorovné rovině, jehož půdorys je půdorysem budovy, se střecha opírá o vodorovnou rovinu. Těmto stranám se říká římsové hrany střechy. Průsečné hrany rovin s různoběžnými stopami nazýváme úžlabí, pokud voda stéká po střeše směrem k této hraně, nebo nároží, pokud voda stéká po střeše směrem od této hrany. Vodorovné nároží nazýváme hřeben (obr. 39). Vodorovné úžlabí nazýváme žlab. Žlabu se zásadně vyhýbáme, protože by se v něm voda shromažďovala a špatně by ze střechy odtékala.

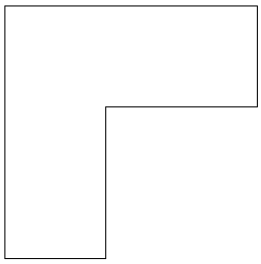
V příkladech je z praktických důvodů vhodné si roviny částí střech očíslovat. Tedy u každé stopy napíšeme číslo roviny, do které patří. Dále průsečnice rovin také očíslujeme podle rovin, kterým náleží. Průsečnici rovin 1 a 2 například označíme 12. Pro lepší představu o tvaru střechy také šipkami vyznačíme směr spádu střechy.



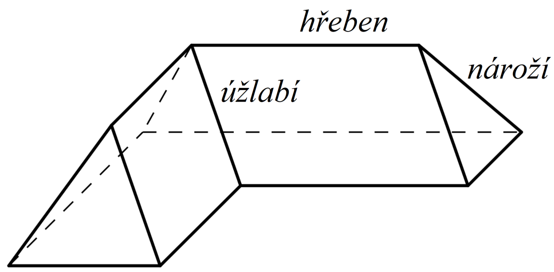
Obr. 36



Obr. 37



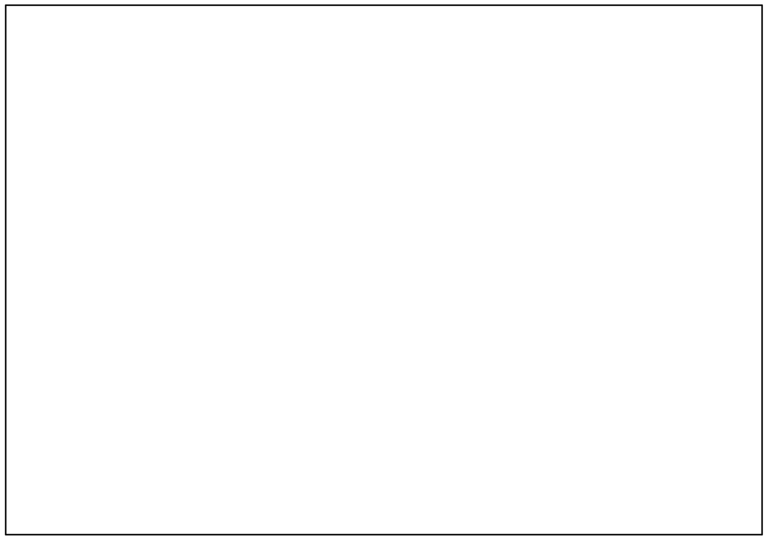
Obr. 38: *Půdorys střechy*



Obr. 39: *Prostorový náhled na střechu*

Příklad 9.1

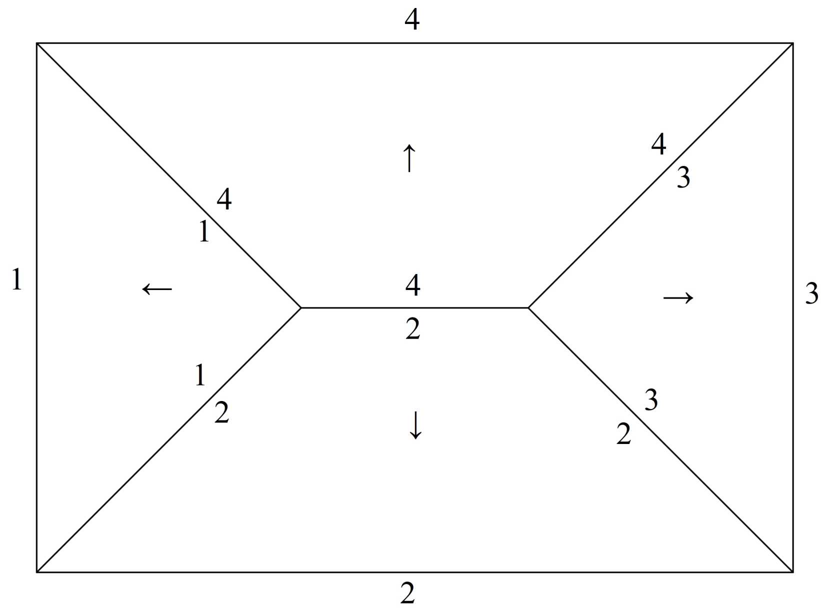
Sestrojte střechu nad daným půdorysem. (obr. 40)



Obr. 40: *Zadání příkladu 9.1*

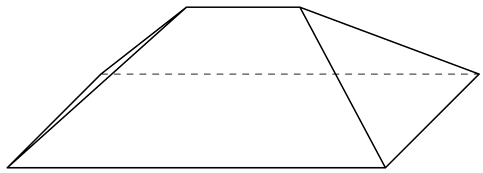
Řešení (obr. 41)

Nejprve očíslujeme stopy rovin čísly 1 až 4. Dále sestrojíme osy úhlů daných stopami rovin 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, 1 a 4. Získáme průsečnice 12, 23, 34 a 14. Průsečnice 12 a 14 se protnou v bodě, který leží v rovinách 1, 2 a 4. Průsečnice 23 a 34 se protnou v bodě, který leží v rovinách 2, 3 a 4. Úsečka určená těmito body je hrana 24. Hrany 12, 23, 34 a 14 jsou nároží. Hrana 24 tvoří hřeben.



Obr. 41: *Řešení příkladu 9.1*

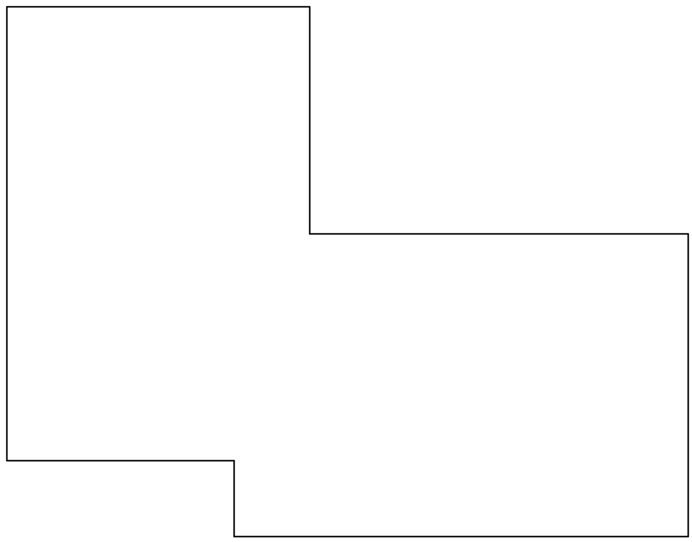
Poznámka:
V tomto příkladu jsme se setkali s jedním ze základních typů střech, který nazýváme valbová střecha (obr. 42).[1]



Obr. 42: *Valbová střecha*

Příklad 9.2

Sestrojte střechu nad daným půdorysem. (obr. 43)



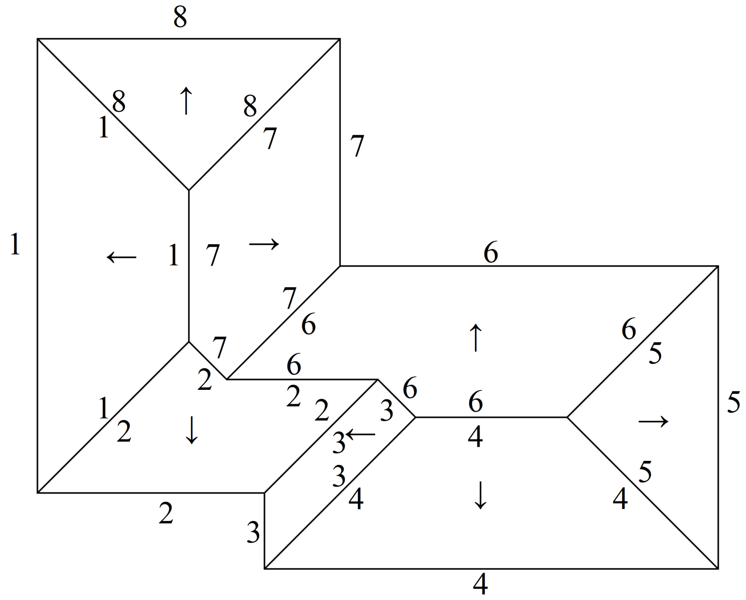
Obr. 43: *Zadání příkladu 9.2*

Řešení (obr. 44)

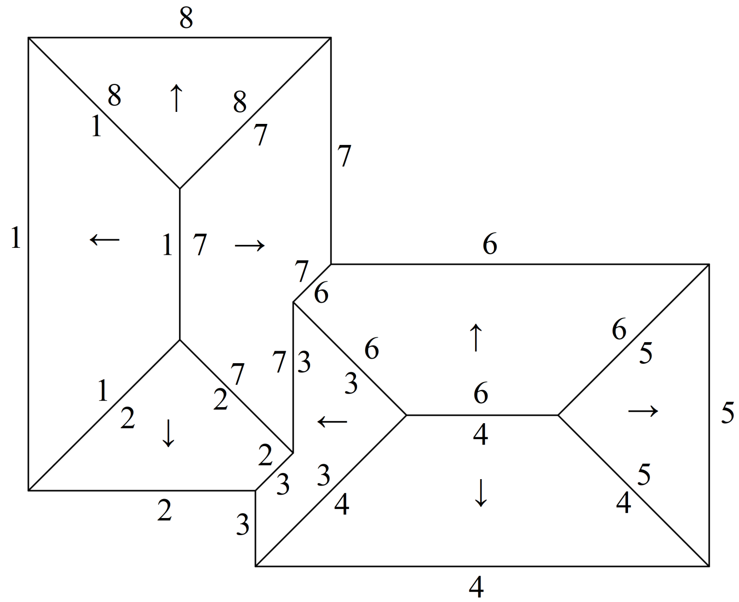
Nejprve sestrojíme průsečnice rovin 1 a 2, 2 a 3, …, 7 a 8, 8 a 1. Průsečík průsečnic 18 a 78 leží v rovinách 1, 7 a 8, leží tedy i na průsečnici rovin 1 a 7, které mají rovnoběžné stopy. Rovnoběžka vedená tímto bodem je tedy průsečnicí rovin 17. Průsečnice 17 protíná nejblíže průsečnici 12 v bodě, který leží v rovinách 1, 2 a 7. Musí jím tedy nutně procházet průsečnice 27. Kdybychom sestrojili průsečnici rovin 27 jako osu úhlu daného stopami rovin 2 a 7, procházela by tímto bodem. To může při konstrukci sloužit jako kontrola. Analogicky postupujeme dále. Hrany 17, 26 a 46 tvoří hřeben. Hrany 12, 27, 36, 34, 45, 56, 78 a 18 tvoří nároží. Hrany 23 a 67 tvoří úžlabí.

Tato úloha má teoreticky řešení dvě. Z praktického hlediska je ale správně pouze první řešení. U druhého řešení hrana 37 tvoří žlab, ve kterém by se hromadila voda. U prvního řešení žádná hrana netvoří žlab, proto je to jediné technicky správné řešení.

1 Valbová střecha a další speciální typy střech viz učebnice [2], str. 87.



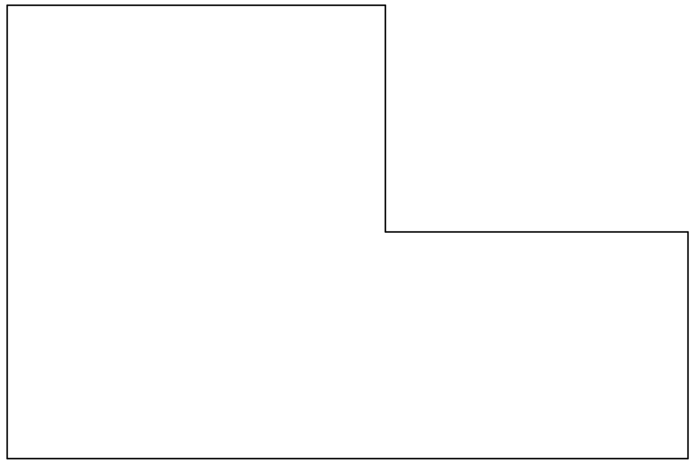
Obr. 44: *První řešení příkladu 9.2*



Obr. 45: *Druhé řešení příkladu 9.2*

Příklad 9.3

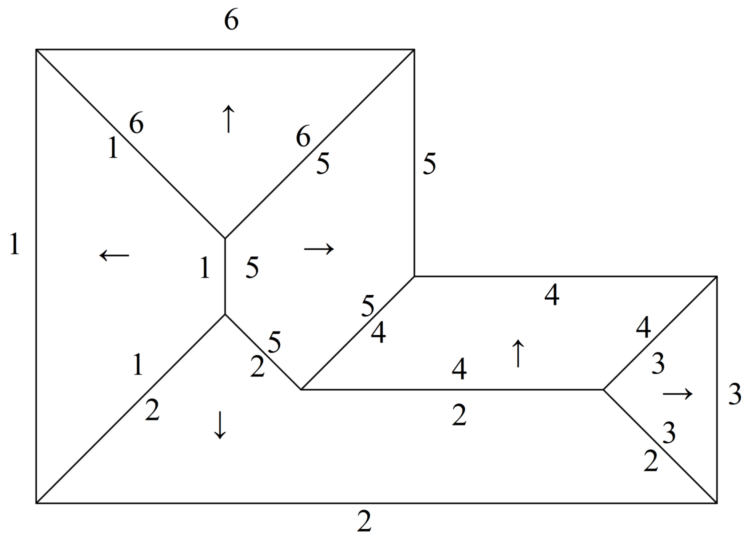
Sestrojte střechu nad daným půdorysem. (obr. 46)



Obr. 46: *Zadání příkladu 9.3*

Řešení (obr. 41)

Nejprve sestrojíme průsečnice rovin 12, 23, …, 56, 16. Průsečík průsečnic 16 a 56 leží v rovinách 1, 5 a 6, leží tedy i na průsečnici rovin 1 a 5, které mají rovnoběžné stopy. Rovnoběžka vedená tímto bodem je tedy průsečnicí rovin 15. Průsečnice 15 protíná nejblíže průsečnici 12 v bodě, který leží v rovinách 1, 2 a 5. Musí jím tedy nutně procházet průsečnice 25. Kdybychom sestrojili průsečnici rovin 25 jako osu úhlu daného stopami rovin 2 a 5, procházela by tímto bodem. To může při konstrukci sloužit jako kontrola. Analogicky postupujeme dále. Hrany 15 a 24 tvoří hřeben. Hrany 12, 25, 23, 34, 56, 16 tvoří nároží. Hrana 45 tvoří úžlabí.

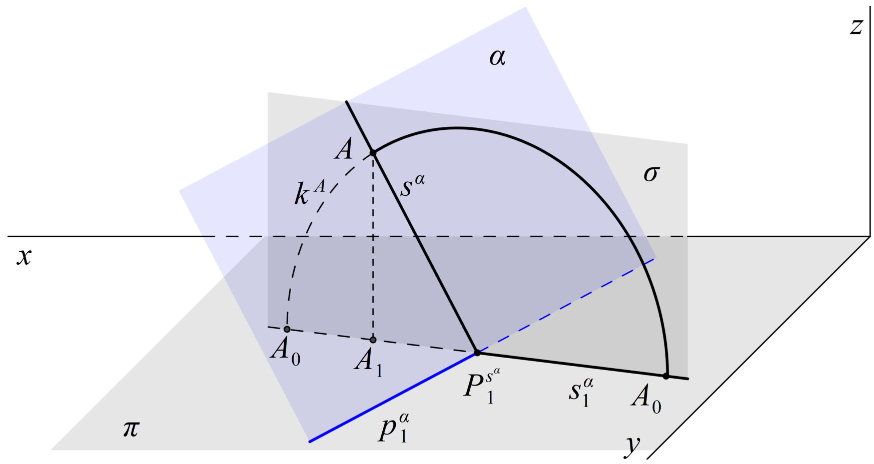


Obr. 47: *Řešení příkladu 9.3*

10 Otáčení roviny

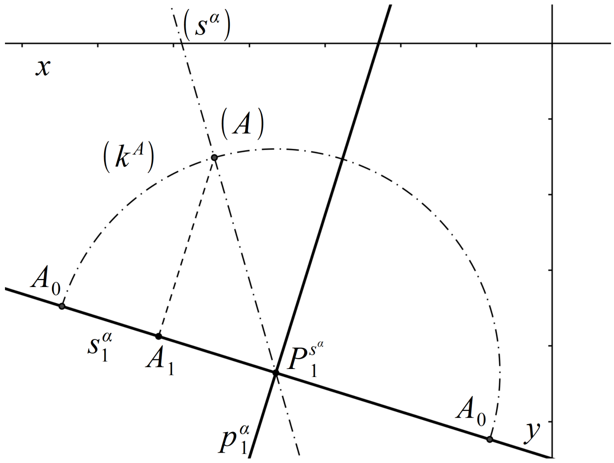
V kótovaném promítání se často setkáme s úlohami, v nichž budeme potřebovat sestrojit průmět rovinného útvaru nebo dourčit nějaké vlastnosti útvaru, který je již zobrazen. Rovinu různoběžnou s průmětnou budeme v dalších úlohách proto často otáčet kolem její stopy tak, aby splynula s průmětnou, abychom útvary v této rovině mohli vidět ve skutečné velikosti.

Každý bod A roviny α, který neleží na její stopě, se otáčí po **kružnici otáčení** k^A, která leží v promítací rovině σ spádové přímky s^α procházející bodem A (obr. 48). Středem kružnice otáčení je stopník P^{s^α} spádové přímky s^α a poloměr kružnice otáčení je roven vzdálenosti bodu A od bodu P^{s^α}. Otočený bod A je průsečíkem kružnice otáčení k^A a průmětny π a značíme jej A_0. Jako bod A_0 můžeme zvolit kterýkoli ze dvou průsečíků kružnice (k^A) a přímky s_1^α (obr. 48). Pokud ale budeme analogicky otáčet více bodů roviny α, musíme dbát na to, aby otočené body s kladnou kótou ležely ve stejné polorovině určené stopou p_1^α a otočené body se zápornou kótou v opačné polorovině. Pro každý bod B stopy roviny α platí, že bod B_0 splývá s bodem B_1. V takovém případě nebudeme bod B_0 značit.



Obr. 48: *Otočení roviny α*

Je-li rovina α promítací, jedná se o otočení o 90° neboli sklopení (viz kapitola 2). Pokud rovina α není promítací, postupujeme následovně. Bodem A vedeme spádovou přímku s^α roviny α (obr. 49). Průmětem této spádové přímky je přímka s_1^α vedoucí bodem A_1 kolmo ke stopě p^α roviny α. V promítací rovině přímky s^α leží kružnice otáčení bodu A. Tuto rovinu sklopíme, konkrétně sestrojíme ve sklopení přímku s^α a kružnici k^A. Bod A_0 je průsečíkem kružnice (k^A) a přímky s_1^α. Na obrázku 49 jsou zobrazeny obě možné polohy bodu A_0. V úlohách pak volíme jen jednu z nich podle vhodnosit umístění.



Obr. 49: *Otočení roviny α*

Lze ukázat, že průměty bodů a přímek roviny α a jim odpovídající body a přímky v otočení jsou ve vztahu kolmé osové afinity v rovině, jejíž osou je stopa p^α roviny α. To znamená, že průmět přímky a odpovídající přímka v otočení se protínají na stopě roviny α a průmět bodu a jemu odpovídající bod v otočení leží na kolmici ke stopě roviny α. Osovou afinitu můžeme využít při otáčení dalších bodů roviny nebo při sestrojování průmětů bodů pomocí otočených bodů (více viz [1], str. 31 až 34).

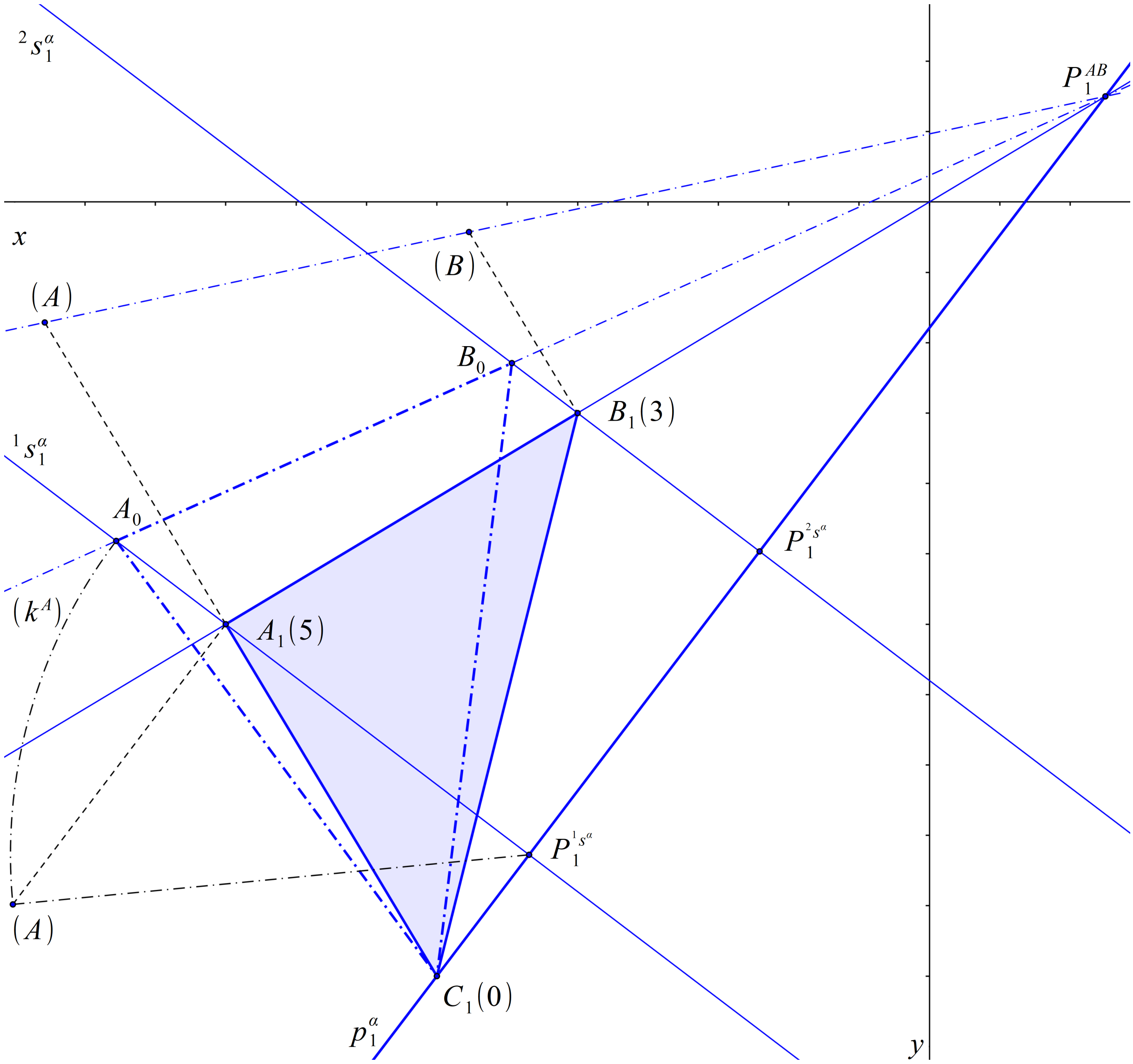
Příklad 10.1

Určete skutečnou velikost trojúhelníku ABC.

$A = [10; 6; 5]$, $B = [5; 3; 3]$, $C = [7; 11; 0]$

Řešení (obr. 50)

Nejdříve sestrojíme stopu p_1^α roviny $\alpha = \leftrightarrow ABC$. Protože je kóta bodu C rovna nule, je bod C jedním bodem stopy. Dalším bodem stopy je stopník P^{AB} přímky AB, který dohledáme sklopením promítací roviny přímky AB. Protože bod C leží na stopě roviny α, bod C_0 splývá s bodem C_1 a nebudeme jej značit. Dále bodem A vedeme spádovou přímku ${}^1s^\alpha$ roviny α a ve sklopení promítací roviny této přímky sestrojíme bod (A) a kružnici (k^A) otáčení bodu A, jejímž středem je stopník $P^{{}^1s^\alpha}$ přímky ${}^1s^\alpha$ a poloměrem vzdálenost bodu $P^{{}^1s^\alpha}$ od bodu (A). Bod A_0 je průsečíkem přímky ${}^1s^\alpha$ a kružnice (k^A). Bod B_0 najdeme pomocí osové afinity, leží na kolmici ${}^2s^\alpha$ vedené bodem B_1 na stopu roviny α a přímky A_0B_0, A_1B_1 se protínají na stopě roviny α.



Obr. 50: *Řešení příkladu 10.1*

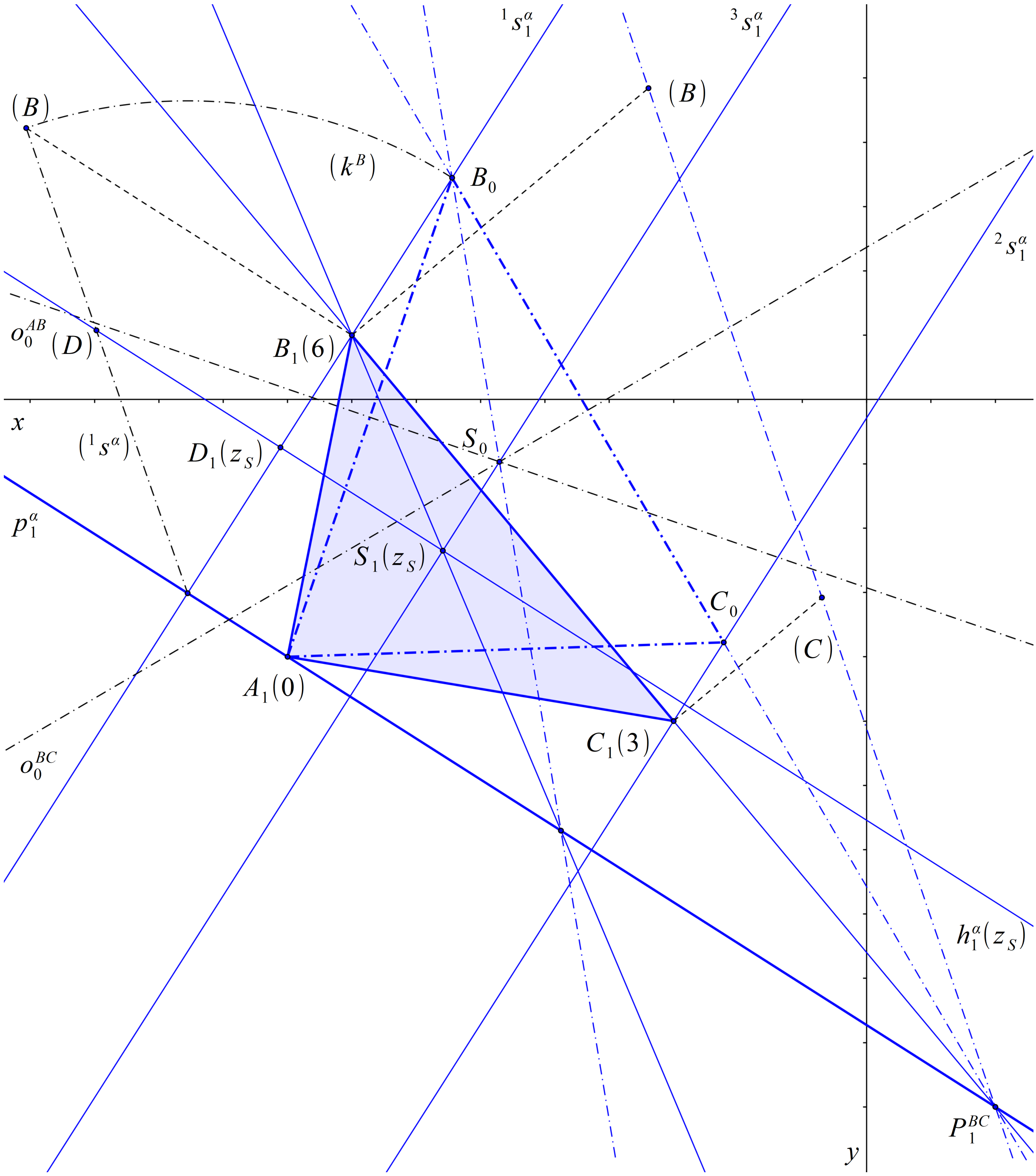
Příklad 10.2

Sestrojte průmět středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC.

$A = [9; 4; 0]$, $B = [8; 1; 6]$, $C = [3; 5; 3]$

Řešení (obr. 51)

Nejdříve sestrojíme stopu p_1^α roviny $\alpha = \leftrightarrow ABC$. Protože je kóta bodu A rovna nule, je bod A jedním bodem stopy. Dalším bodem stopy je stopník P^{BC} přímky BC, který dohledáme sklopením promítací roviny přímky BC. Protože bod A leží na stopě roviny α, bod A_0 splývá s bodem A_1 a nebudeme jej značit. Dále bodem B vedeme spádovou přímku ${}^1s^\alpha$ roviny α a ve sklopení promítací roviny této přímky sestrojíme bod (B) a kružnici (k^B) otáčení bodu B, jejímž středem je stopník $P^{{}^1s^\alpha}$ přímky ${}^1s^\alpha$ a poloměrem vzdálednost bodu $P^{{}^1s^\alpha}$ od bodu (B). Bod B_0 je průsečíkem přímky ${}^1s_1^\alpha$ a kružnice (k^B). Bod C_0 najdeme jako průsečík kolmice ${}^2s^\alpha$ vedené bodem C_1 na stopu roviny α se spojnicí bodů P^{BC} a B_0. V otočení roviny α dále zkonstruujeme bod S_0 jako průsečík os stran trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Sestrojme nyní bod S_0 například jako průsečík os o_0^{AB} strany A_0B_0 a o_0^{BC} strany B_0C_0. Bod S_1 najdeme pomocí osové afinity, leží na kolmici ${}^3s_1^\alpha$ vedené bodem S_0 na stopu roviny α a přímky B_0S_0 a B_1S_1 se protínají na stopě roviny α. Kótu z_S bodu S můžeme určit například následovně. Bodem S_1 vedeme hlavní přímku h^α roviny α o kótě z_S. Tato přímka protne spádovou přímku ${}^1s_1^\alpha$ v bodě D o kótě z_S. Bod (D) je průsečíkem přímek $({}^1s^\alpha)$ a h_1^α. Absolutní hodnota kóty z_S je rovna vzdálenosti bodů D_1 a (D). Protože bod (D) leží ve stejné polorovině určené přímkou ${}^1s_1^\alpha$ jako bod (B) a bod B má kladnou kótu, je kóta z_S také kladná.



Obr. 51: *Řešení příkladu 10.2*

Příklad 10.3

Sestrojte průmět pravidelného šestiúhelníku *DEFGHI*, který leží v rovině $\alpha = \leftrightarrow BDS$ a jehož kružnice opsaná má střed v bodě S.

$B = [2; 4; 0]$, $D = [1; 0; 0]$, $S = [3; -1; 6]$

Řešení (obr. 52)

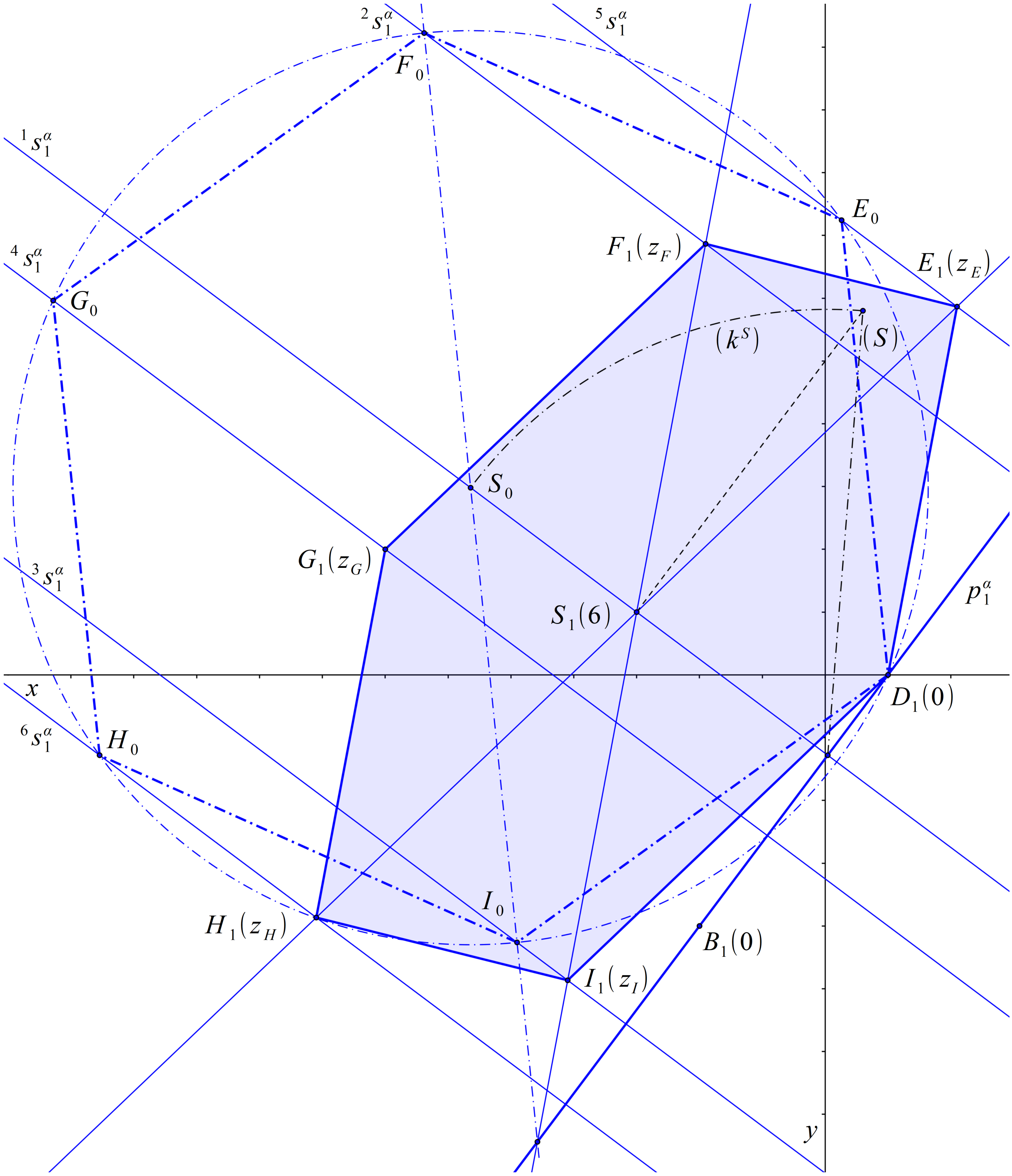
Protože body B a D leží v průmětně, určují stopu p^{α} roviny α. Jelikož bod D leží na stopě roviny α, bod D_0 splývá s bodem D_1 a nebudeme jej značit. Dále bodem S vedeme spádovou přímku ${}^1s^{\alpha}$ roviny α a ve sklopení promítací roviny této přímky sestrojíme bod (S) a kružnici (k^S) otáčení bodu S, jejímž středem je stopník přímky ${}^1s^{\alpha}$ a jejímž poloměrem je vzdálenost stopníku přímky ${}^1s^{\alpha}$ od bodu (S). Bod S_0 je průsečíkem přímky ${}^1s_1^{\alpha}$ a kružnice (k^A). Následně v otočení roviny α sestrojíme kružnici opsanou danému šestiúhelníku, která má střed v bodě S_0 a jejíž poloměr je roven vzdálenosti bodů S_0 a D_0. Této kružnici vepíšeme šestiúhelník a pojmenujeme body jako na obrázku.[5] K sestrojení průmětů vrcholů šestiúhelníku využijeme osovou afinitu. Jako první najděme například bod F_1. Víme, že přímky S_0 a F_0 se protínají na stopě roviny α a bod F_1 leží na kolmici ${}^2s_1^{\alpha}$ vedené bodem F_0 ke stopě roviny α. Protože bod I leží na přímce SF, je bod I_1 průsečíkem přímky S_1F_1 a kolmice ${}^3s_1^{\alpha}$ vedené bodem I_0 ke stopě roviny α. Přímky DI a FG jsou rovnoběžné, bod G_1 proto leží na rovnoběžce vedené bodem F_1 s přímkou D_1I_1. Bod G_1 zároveň leží na kolmici ${}^4s_1^{\alpha}$ vedené bodem G_0 ke stopě roviny α. Přímky ES a FG jsou rovnoběžné, bod E_1 proto leží na rovnoběžce vedené bodem S_1 s přímkou F_1G_1. Bod E_1 zároveň leží na kolmici ${}^5s_1^{\alpha}$ vedené bodem E_0 ke stopě roviny α. Protože bod H leží na přímce SE, je bod H_1 průsečíkem přímky S_1E_1 a kolmice ${}^6s_1^{\alpha}$ vedené bodem H_0 ke stopě roviny α.

Poznámka:

V podobných úlohách obvykle jednotlivé spádové přímky neznačíme.

---

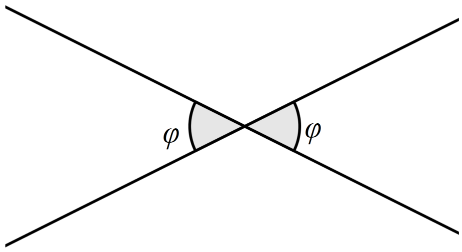
5 V tomto případě lze vrcholy šestiúhelníku pojmenovat dvěma způsoby (po směru hodinových ručiček nebo proti směru hodinových ručiček). V praxi se často setkáme s úlohami, kde je pomocí upřesňující podmínky pojmenování vrcholů specifikováno. V tomto příkladu by pojmenování vrcholů šlo upřesnit například podmínkou, že x-ová souřednice x_E bodu E je menší než x-ová souřadnice x_D bodu D.



Obr. 52: *Řešení příkladu 10.3*

11 Odchylka dvou přímek

V této kapitole se naučíme určovat odchylku dvou přímek v prostoru. Nejdříve si ale musíme zopakovat, co je odchylkou dvou přímek v rovině. Odchylkou φ dvou různoběžných přímek v rovině je velikost každého z ostrých nebo pravých uhlů, které tyto přímky svírají (viz obr. 53). Odchylka dvou rovnoběžných přímek v rovině je rovna 0°.



Obr. 53: *Odchylka φ dvou různoběžných přímek v rovině*

A nyní zpět do prostoru. Odchylka dvou přímek ležících v jedné rovině (tedy dvou rovnoběžných nebo dvou různoběžných přímek) je definována stejně jako v rovině. Odchylka dvou mimoběžných přímek je rovna odchylce dvou různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými přímkami.

Dále se podíváme, jak budeme určovat odchylku dvou přímek v konkrétních příkladech. Jsou-li obě přímky a a b rovnoběžné s průmětnou, jejich odchylka je rovna odchylce přímek a_1 a b_1.

Odchylku dvou různoběžných přímek a a b v případě, že je alespoň jedna z nich různoběžná s průmětnou, určíme tak, že rovinu danou těmito dvěma přímkami otočíme do průmětny. Odchylka přímek a a b je rovna odchylce přímek a_0 a b_0.[1]

Odchylku dvou mimoběžných přímek a a b, z nichž je alespoň jedna různoběžná s průmětnou, určíme následovně. Libovolným bodem přímky b vedeme přímku $\tilde{a}$ rovnoběžnou s přímkou a. Odchylka přímkek a a b je rovna odchylce přímek $\tilde{a}$ a b. Protože jsou přímky $\tilde{a}$ a b různoběžné, můžeme dále postupovat stejně jako v předchozím případě.[2]

Situace se nám zjednoduší, pokud se přímky a a b promítnou do rovnoběžných přímek. V takovém případě stačí promítací roviny přímek a a b sklopit „na stejnou stranu“. Pokud jsou přímky (a) a (b) rovnoběžné, jsou přímky a a b také rovnoběžné (viz kapitola 4) a jejich odchylka je 0°.[3] Pokud jsou přímky (a) a (b) různoběžné, jsou přímky a a b mimoběžné a můžeme postupovat stejně jako v předchozím případu. To ale není nutné, protože odchylka přímek a a b je rovna odchylce přímek (a) a (b).[4]

---

1 Viz příklady 11.1 a 11.2.

2 Viz příklady 11.3, 11.7 a 11.8.

3 Viz příklad 11.4.

4 Viz příklady 11.5 a 11.6.

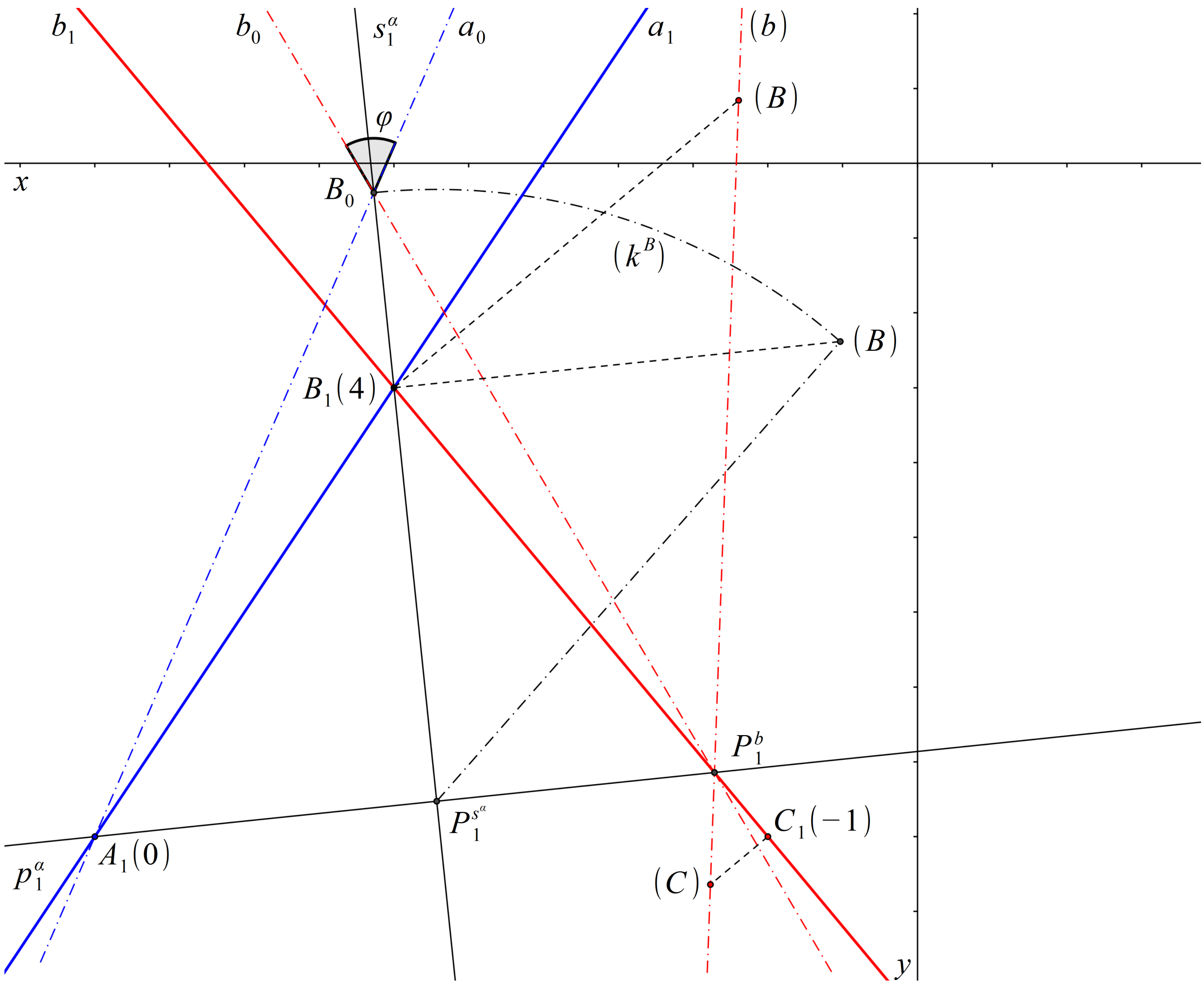
Příklad 11.1

Určete odchylku φ přímek $a = \leftrightarrow AB$ a $b = \leftrightarrow BC$.

$A = [11; 9; 0]$, $B = [7; 3; 6]$, $C = [2; 9; -1]$

Řešení (obr. 54)

Průměty přímek a a b jsou různoběžné přímky a_1 a b_1, které se protínají v bodě B_1. Protože bod B leží na obou přímkách, jsou přímky a a b různoběžné. Abychom určili odchylku přímek a a b, otočíme rovinu α danou těmito dvěma přímkami do průmětny. Nejprve zobrazíme stopu roviny α. Protože je kóta bodu A rovna nule, je bod A jedním bodem stopy roviny α. Dalším bodem stopy roviny α je stopník P^b přímky b, který určíme pomocí sklopení promítací roviny přímky b. Dále ve sklopení promítací roviny spádové přímky s^α roviny α procházející bodem B sestrojíme bod (B) a kružnici otáčení (k^B) bodu B, jejímž středem je stopník P^{s^α} přímky s^α a jejímž poloměrem je vzdálenost bodu P^{s^α} od bodu (B). Bod B_0 je průsečíkem přímky s_1^α a kružnice (k^B). Přímka a_0 je spojnicí bodu B_0 a bodu A. Přímka b_0 je spojnicí bodu B_0 a bodu P^b. Odchylka φ přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek a_0 a b_0.



Obr. 54: *Řešení příkladu 11.1*

Příklad 11.2

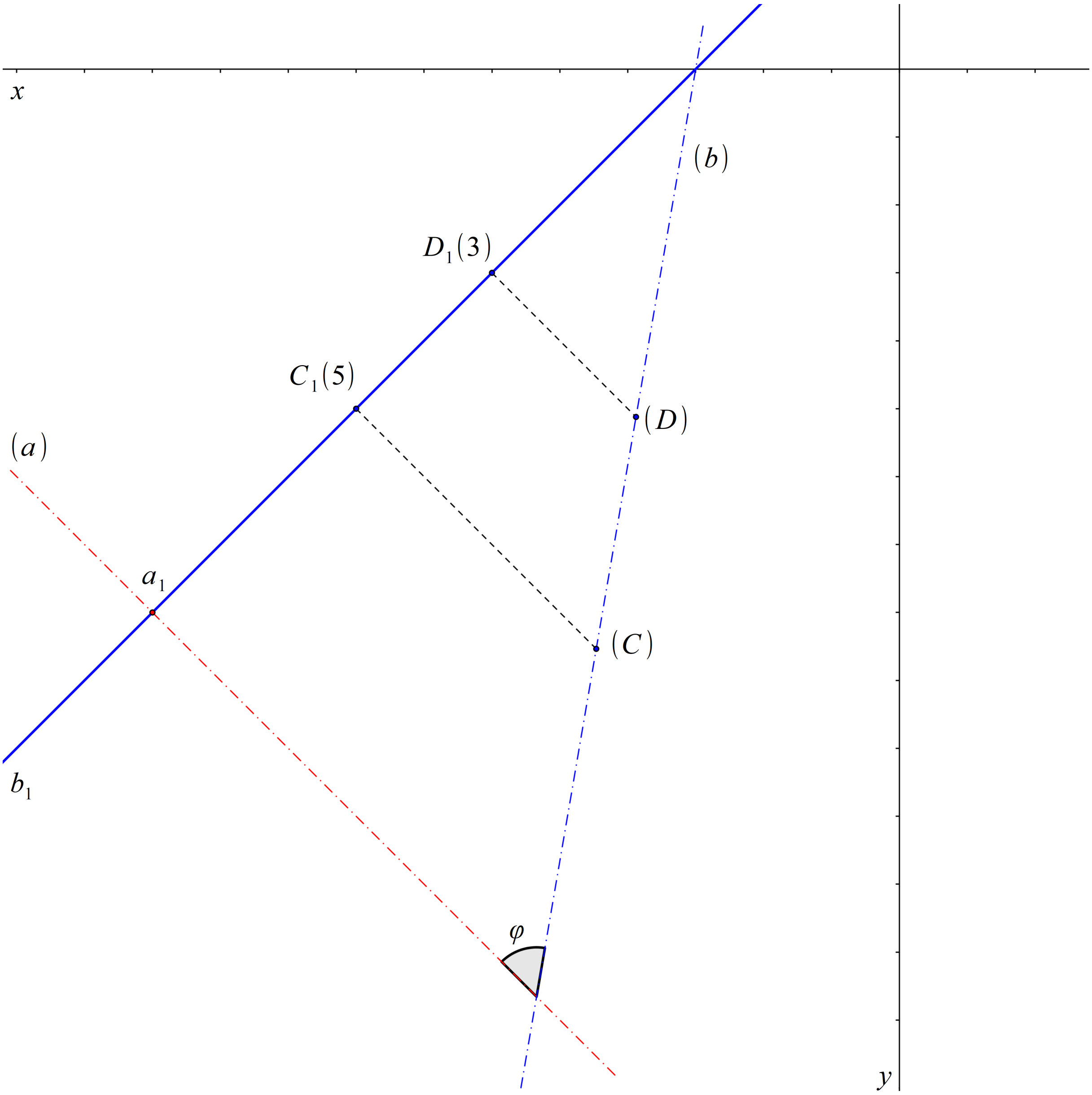
Určete odchylku φ přímek a a b.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [11; 8; 1]$, $B = [11; 8; 3]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [8; 5; 5]$, $D = [6; 3; 3]$

Řešení (obr. 55)

Z průmětů přímek a a b vidíme, že přímka a je kolmá k průmětně a leží v promítací rovině přímky b. Z toho plyne, že přímky a a b jsou různoběžné. Abychom určili odchylku φ přímek a a b, stačí sklopit promítací rovinu přímky b. Odchylka φ přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek (a) a (b).



Obr. 55: *Řešení příkladu 11.2*

Příklad 11.3

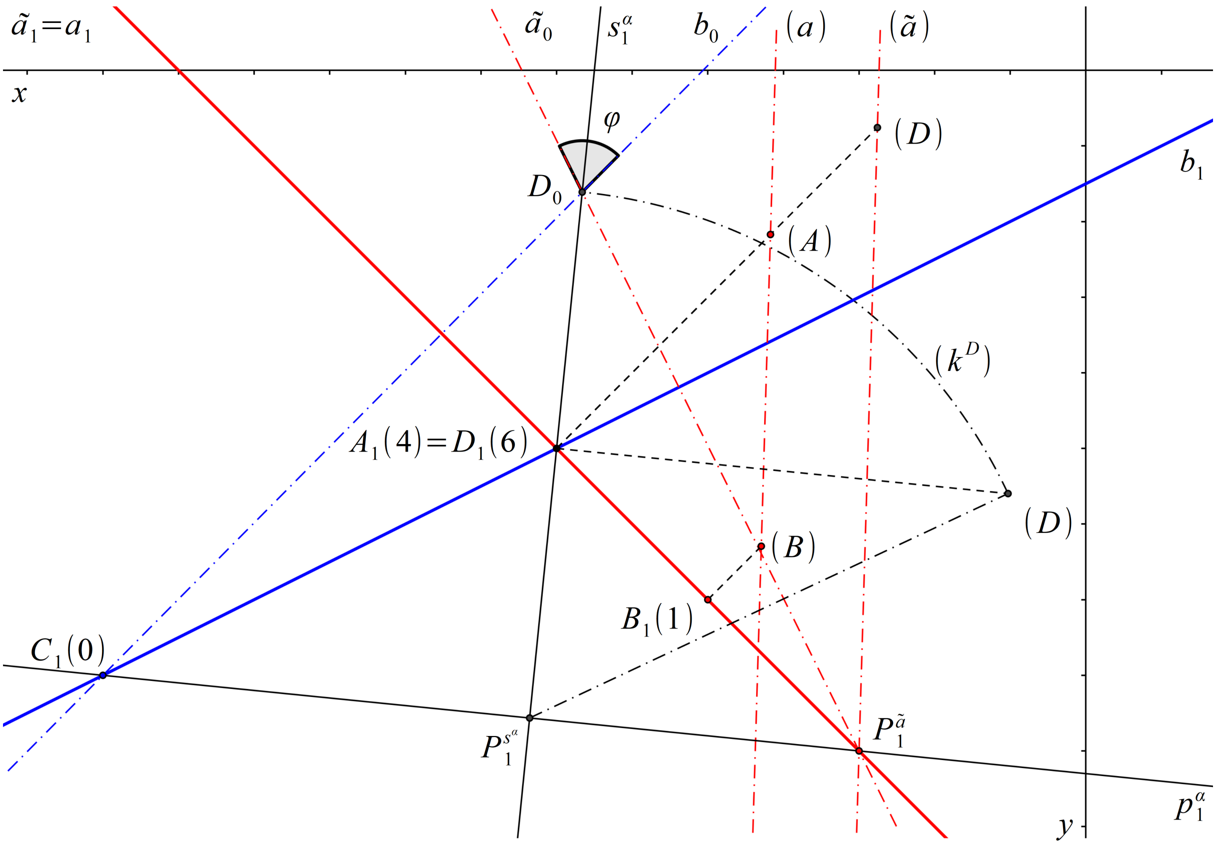
Určete odchylku φ přímek a a b.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [7; 5; 4]$, $B = [5; 7; 1]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [13; 8; 0]$, $D = [7; 5; 6]$

Řešení (obr. 56)

Průměty přímek a a b jsou různoběžné přímky a_1 a b_1, které se protínají v bodě $A_1 = D_1$. Body A a D mají různé kóty, z čehož plyne, že přímky a a b jsou mimoběžné (viz kapitola 3). Proto vedeme libovolným bodem na přímce b přímku $\tilde{a}$ rovnoběžnou s přímkou a. Veďme přímku $\tilde{a}$ například bodem D. Přímky a a $\tilde{a}$ potom leží v jedné promítací rovině a jejich průměty jsou totožné přímky. Odchylka φ mimoběžných přímek a a b je nyní rovna odchylce různoběžných přímek $\tilde{a}$ a b. Abychom určili odchylku přímek $\tilde{a}$ a b, otočíme rovinu α danou těmito dvěma přímkami do průmětny. K tomu potřebujeme sestrojit stopu roviny α. Protože je kóta bodu C rovna nule, je bod C jedním bodem stopy roviny α. Dalším bodem stopy roviny α je stopník $P^{\tilde{a}}$ přímky $\tilde{a}$, který určíme sklopením promítací roviny přímky $\tilde{a}$. Přímka $(\tilde{a})$ je rovnoběžná s přímkou (a) a prochází bodem (D). Dále ve sklopení promítací roviny spádové přímky s^{α} roviny α procházející bodem D sestrojíme bod (D) a kružnici otáčení (k^D) bodu D, jejímž středem je stopník $P^{s^{\alpha}}$ přímky s^{α} a jejímž poloměrem je vzdálednost bodu $P^{s^{\alpha}}$ od bodu (D). Bod D_0 je průsečíkem přímky s_1^{α} s kružnicí (k^D). Přímka b_0 je spojnicí bodu D_0 a bodu C_1. Přímka $\tilde{a}_0$ je spojnicí bodu D_0 a bodu $P^{\tilde{a}}$. Odchylka φ přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek $\tilde{a}_0$ a b_0.



Obr. 56: *Řešení příkladu 11.3*

Příklad 11.4

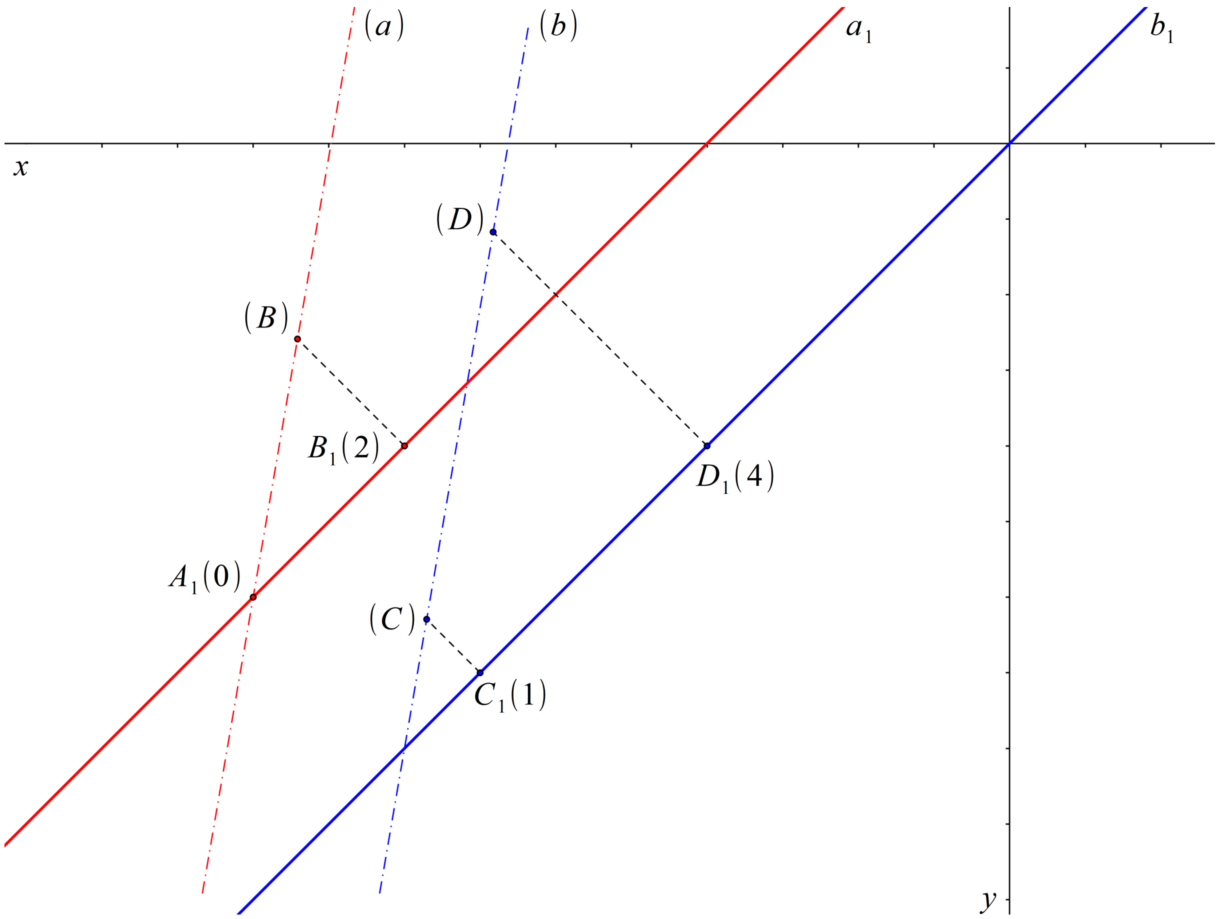
Určete odchylku φ přímek a a b.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [10; 6; 0]$, $B = [8; 4; 2]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [7; 7; 1]$, $D = [4; 4; 4]$

Řešení (obr. 57)

Průměty přímek a a b jsou rovnoběžné přímky a_1 a b_1. Nejprve zjistíme vzájemnou polohu přímek a a b, a to tak, že sklopíme jejich promítací roviny „na stejnou stranu“. V tomto případě jsou přímky (a) a (b) rovnoběžné, přímky a a b jsou tedy také rovnoběžné a jejich odchylka je 0°.



Obr. 57: *Řešení příkladu 11.4*

Poznámka:
Rýsujeme-li klasicky pomocí pravítka, můžeme se dopustit nepřesnosti. U přímek s velmi malou odchylkou se proto nemůžeme konstrukčně přesvědčit, zda jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Budeme je ale považovat za rovnoběžné. O rovnoběžnosti přímek bychom se mohli přesvědčit výpočtem, např. metodami analytické geometrie.

Příklad 11.5

Určete odchylku φ přímek a a b.

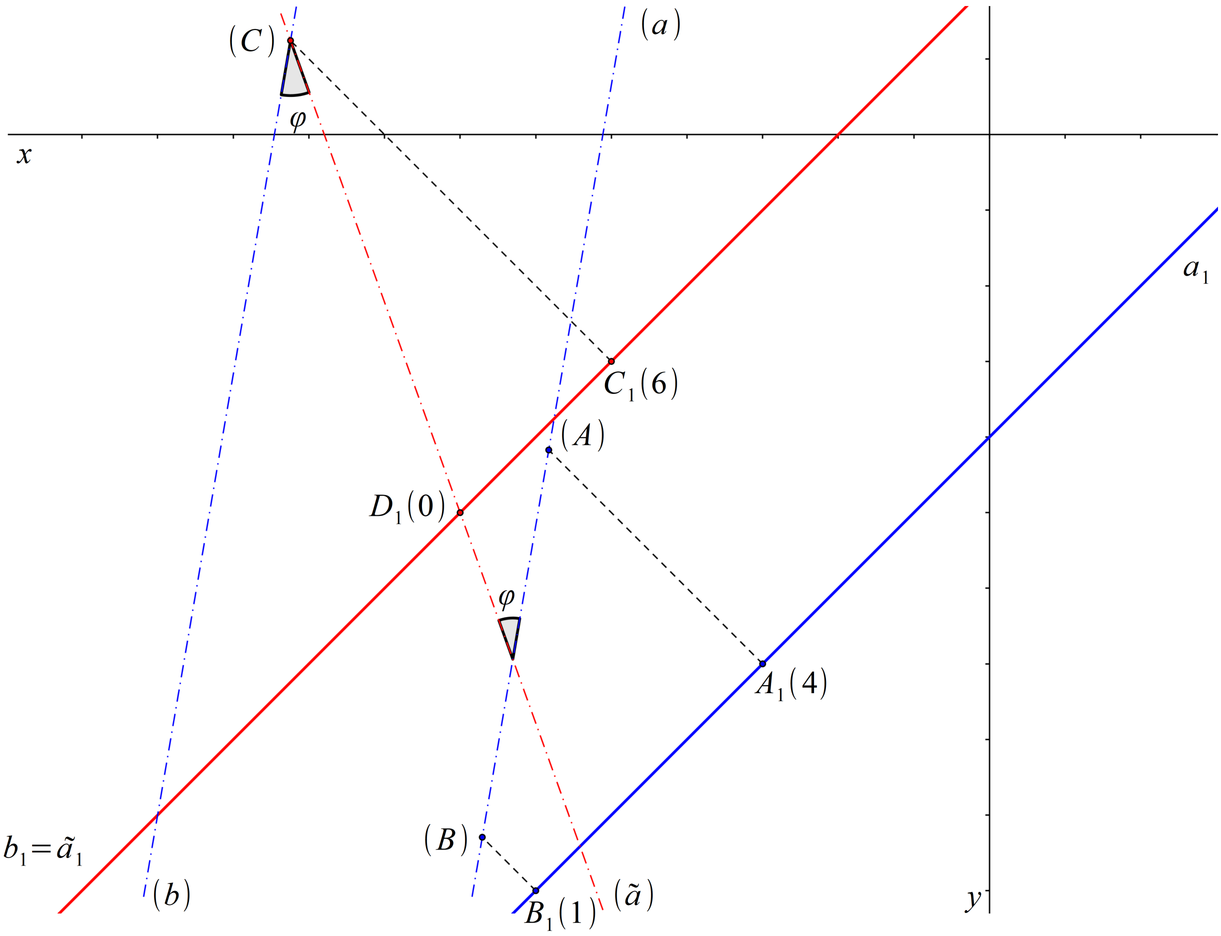
$a = \leftrightarrow AB$, $A = [3; 7; 4]$, $B = [6; 10; 1]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [5; 3; 6]$, $D = [7; 5; 0]$

Řešení (obr. 58)

Průměty přímek a a b jsou rovnoběžné přímky a_1 a b_1. Nejprve zjistíme vzájemnou polohu přímek a a b, a to tak, že sklopíme jejich promítací roviny „na stejnou stranu“. V tomto případě jsou přímky (a) a (b) různoběžné, přímky a a b jsou tedy mimoběžné.

Abychom určili odchylku přímek a a b, vedeme libovolným bodem přímky b přímku $\tilde{a}$ rovnoběžnou s přímkou a. Veďme nyní přímku $\tilde{a}$ například bodem C. Přímky $\tilde{a}$ a b potom leží v jedné promítací rovině, jejich průměty jsou totožné přímky. Odchylka přímek a a b je nyní rovna odchylce přímek $\tilde{a}$ a b. Ve sklopení promítací roviny přímky b bude přímka $\tilde{a}$ rovnoběžná s již sestrojenou přímkou (a). Odchylka přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek $(\tilde{a})$ a (b). Protože jsou přímky (a) a $(\tilde{a})$ rovnoběžné, je odchylka přímek $(\tilde{a})$ a (b) rovna odchylce přímek (a) a (b). To znamená, že jsme nemuseli postupovat stejným postupem jako u obecných mimoběžných přímek, ale stačilo sklopit promítací roviny přímek a a b „na stejnou stranu“. Odchylka přímek a a b v prostoru se rovná odchylce přímek (a) a (b).



Obr. 58: *Řešení příkladu 11.5*

Příklad 11.6

Určete odchylku φ přímek a a b.

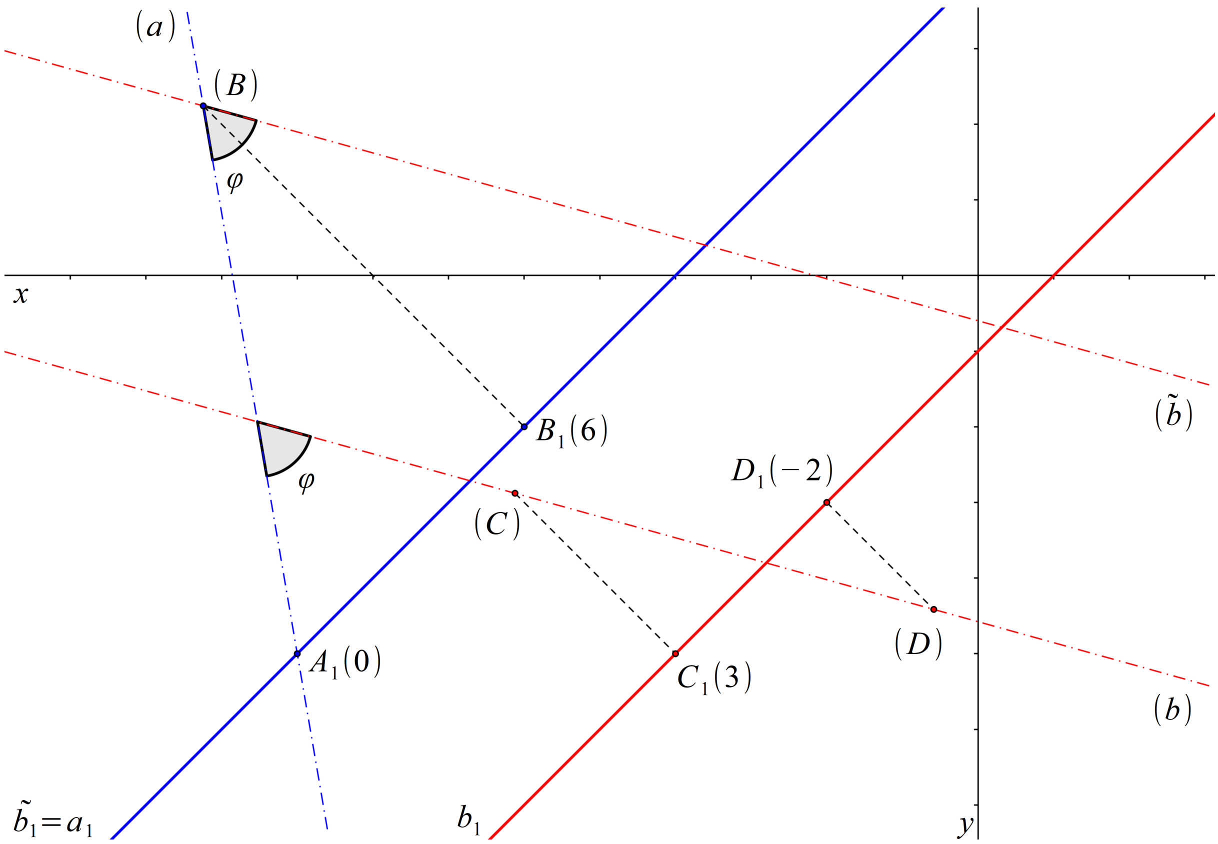
$a = \leftrightarrow AB$, $A = [9; 5; 0]$, $B = [6; 2; 6]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [4; 5; 3]$, $D = [2; 3; -2]$

Řešení (obr. 59)

Průměty přímek a a b jsou rovnoběžné přímky a_1 a b_1. Nejprve zjistíme vzájemnou polohu přímek a a b, a to tak, že sklopíme jejich promítací roviny „na stejnou stranu“. V tomto případě jsou přímky (a) a (b) různoběžné, přímky a a b jsou tedy mimoběžné.

Abychom určili odchylku přímek a a b, vedeme libovolným bodem přímky a přímku $\tilde{b}$ rovnoběžnou s přímkou b. Veďme nyní přímku $\tilde{b}$ například bodem B. Přímky a a $\tilde{b}$ potom leží v jedné promítací rovině, jejich průměty jsou totožné přímky. Odchylka přímek a a b je nyní rovna odchylce přímek a a $\tilde{b}$. Ve sklopení promítací roviny přímky a bude přímka $\tilde{b}$ rovnoběžná s již sestrojenou přímkou (b). Odchylka přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek (a) a $(\tilde{b})$. Protože jsou přímky (b) a $(\tilde{b})$ rovnoběžné, je odchylka přímek (a) a $(\tilde{b})$ rovna odchylce přímek (a) a (b). To znamená, že jsme nemuseli postupovat stejným postupem jako u obecných mimoběžných přímek, ale stačilo sklopit promítací roviny přímek a a b „na stejnou stranu“. Odchylka přímek a a b v prostoru se rovná odchylce přímek (a) a (b).



Obr. 59: *Řešení příkladu 11.6*

Příklad 11.7

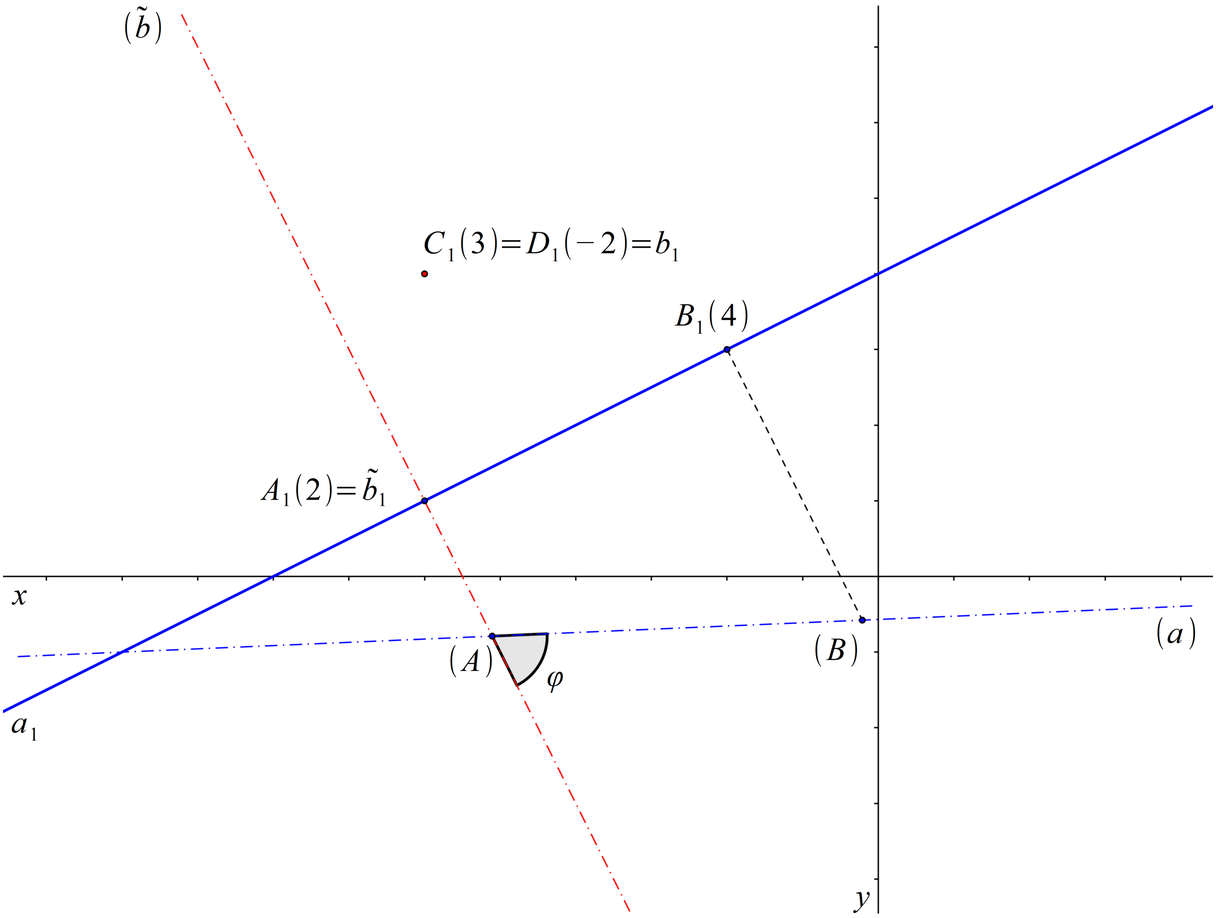
Určete odchylku φ přímek a a b.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [6; 1; 2]$, $B = [2; 3; 4]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [6; 4; 3]$, $D = [6; 4; -2]$

Řešení (obr. 60)

Z průmětů přímek a, b vidíme, že přímka b je kolmá k průmětně a neleží v promítací rovině přímky a. Z toho plyne, že přímky a, b jsou mimoběžné. Proto vedeme libovolným bodem přímky a přímku $\tilde{b}$ rovnoběžnou s přímkou b. Veďme nyní přímku $\tilde{b}$ například bodem A. Přímka $\tilde{b}$ je kolmá k průmětně, promítne se do bodu A_1 a leží v promítací rovině přímky a. Odchylka přímek a a b je nyní rovna odchylce přímek a a $\tilde{b}$. Abychom určili odchylku φ přímek a a $\tilde{b}$, stačí sklopit promítací rovinu přímky a. Odchylka φ přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek (a) a $(\tilde{b})$.



Obr. 60: *Řešení příkladu 11.7*

Příklad 11.8

Určete odchylku φ přímek a a b.

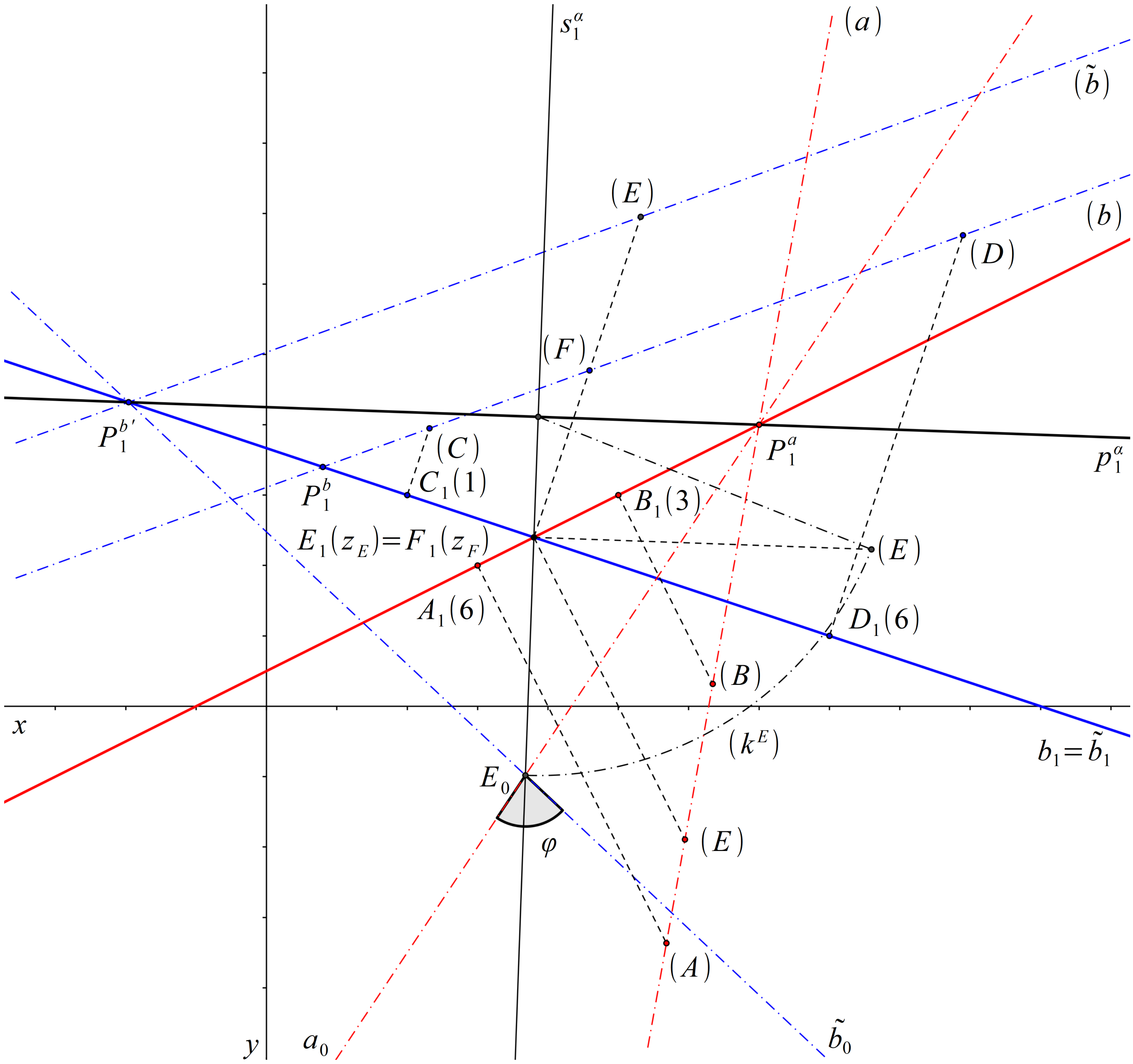
$a = \leftrightarrow AB, A = [-3; -2; 6], B = [-5; -3; 3]$

$b = \leftrightarrow CD, C = [-2; -3; 1], D = [-8; -1; 6]$

Řešení (obr. 61)

Nejprve určíme vzájemnou polohu přímek a a b. Průměty přímek a, b jsou různoběžné přímky. Přímky a, b tedy mohou být různoběžné nebo mimoběžné (viz kapitola 4). Průsečík přímek a_1, b_1 je průmětem bodů E a F, kde $E \in a$ a $F \in b$. Pokud mají body E, F stejnou kótu, splývají. Přímky a, b jsou potom různoběžné. V opačném případě jsou mimoběžné. Kóty bodů E, F zjistíme pomocí sklopení promítacích rovin přímek a, b. Průsečíkem kolmice bodem E_1 k a_1 a přímky (a) je bod (E), průsečíkem kolmice bodem F_1 k b_1 a přímky (b) je bod (F). Nyní vidíme, že $z_E = |E_1(E)| > z_F = |F_1(F)|$, což znamená, že přímky a, b jsou mimoběžné.

Dále proto vedeme libovolným bodem na přímce a přímku $\tilde{b}$ rovnoběžnou s přímkou b. Veďme přímku $\tilde{b}$ například bodem E. Přímky b a $\tilde{b}$ potom leží v jedné promítací rovině a jejich průměty jsou totožné přímky. Odchylka φ mimoběžných přímek a a b je nyní rovna odchylce různoběžných přímek a a $\tilde{b}$. Abychom určili odchylku přímek a a $\tilde{b}$, otočíme rovinu α danou těmito dvěma přímkami do průmětny. K tomu potřebujeme sestrojit stopu roviny α. Stopa roviny α prochází stopníkem P^a přímky a a stopníkem $P^{\tilde{b}}$ přímky $\tilde{b}$. Stopník $P^{\tilde{b}}$ určíme pomocí sklopení promítací roviny přímky $\tilde{b}$. Přímka $(\tilde{b})$ prochází bodem (E) a je rovnoběžná s přímkou (b). Dále ve sklopení promítací roviny spádové přímky s^α roviny α procházející bodem E sestrojíme bod (E) a kružnici otáčení (k^E) bodu E, jejímž středem je stopník P^{s^α} přímky s^α a poloměrem vzdálenost bodu P^{s^α} od bodu (E). Bod E_0 je průsečíkem přímky s_1^α s kružnicí (k^E). Přímka a_0 je spojnicí bodu E_0 a bodu P^a. Přímka $\tilde{b}_0$ je spojnicí bodu E_0 a bodu $P^{\tilde{b}}$. Odchylka φ přímek a a b v prostoru je rovna odchylce přímek a_0 a $\tilde{b}_0$.



Obr. 61: *Řešení příkladu 11.8*

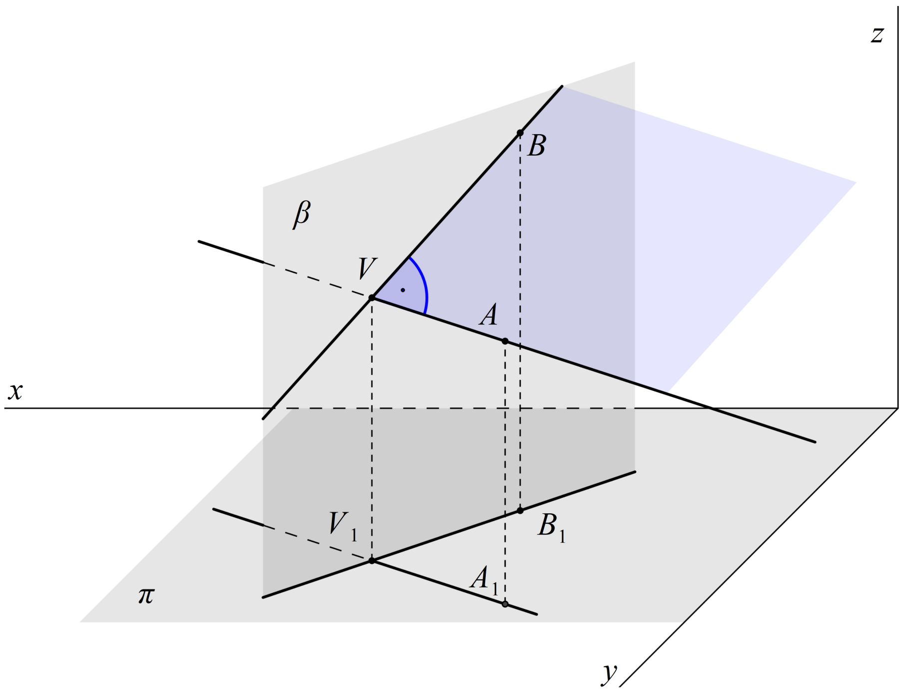
12 Kolmost přímky a roviny

Nejprve připomeneme, kdy je přímka kolmá k rovině a co pro takovou přímku platí. Podle definice je přímka a kolmá k rovině α, je-li kolmá ke všem přímkám roviny α. Pokud bychom vycházeli z definice, museli bychom tedy ověřovat kolmost přímky a s nekonečně mnoha přímkami roviny α, což není v praxi možné. Víme ale, že platí tzv. kritérium kolmosti přímky a roviny, které říká, že pokud je přímka a kolmá ke dvěma různoběžným přímkám roviny α, je kolmá k rovině α. Abychom mohli říct, že přímka a a rovina α jsou k sobě kolmé, stačí tedy v rovině α najít dvě různoběžné přímky, které jsou k přímce a kolmé.

V následující části budeme řešit metrické úlohy, které jsou v podstatě úlohami o kolmosti přímky a roviny. Než ale přejdeme ke kolmosti přímky a roviny, musíme si říci něco o průmětu pravého úhlu v kótovaném promítání.

Na obr. 58 je zobrazen pravý úhel AVB, jehož rameno VA je rovnoběžné s průmětnou a rameno VB není k průmětně kolmé, a jeho pravoúhlý průmět $A_1V_1B_1$. Přímka VA je kolmá k přímce VB a k přímce VV_1, tedy je podle kritéria kolmosti přímky a roviny kolmá k promítací rovině β přímky VB. Protože je přímka VA rovnoběžná s průmětnou, je rovnoběžná se svým průmětem V_1A_1. Proto je i přímka V_1A_1 kolmá k rovině β. Přímka V_1A_1 je tedy kolmá ke všem přímkám roviny β, tzn. i k přímce V_1B_1, a úhel $A_1V_1B_1$ je pravý.

Ovodili jsme, že pokud je jedno rameno pravého úhlu rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno není k průmětne kolmé, je průmětem tohoto úhlu pravý úhel.



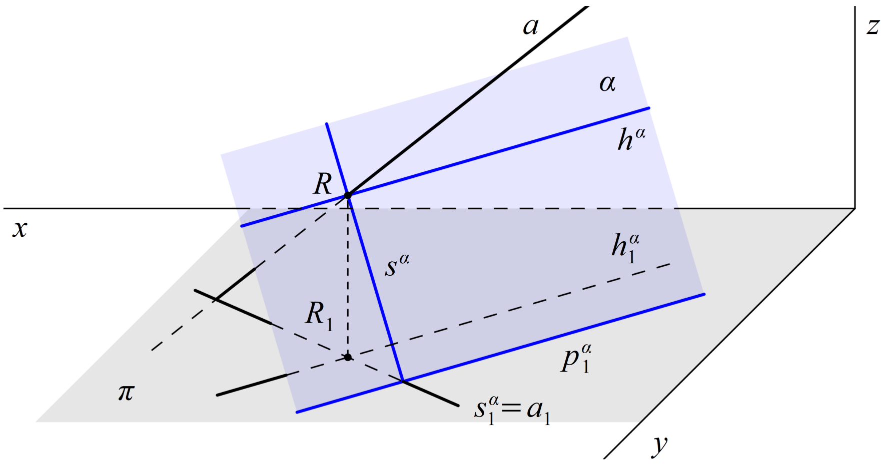
Obr. 62: *Průmět pravého úhlu*

Snadno si představíme, jak by vypadal průmět pravého úhlu v ostatních případech. Pokud by jedno rameno pravého úhlu bylo rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno by bylo kolmé k průmětně, úhel by se promítl na polopřímku.

Pokud by žádné rameno pravého úhlu nebylo rovnoběžné s průmětnou, průmětem tohoto úhlu by byl ostrý úhel, tupý úhel, případně přímka nebo polopřímka, pokud by úhel ležel v promítací rovině.

Nyní se vraťme ke kolmosti přímky a roviny. Ve speciálním případě, kdy je rovina α rovnoběžná s průmětnou, se přímka kolmá k rovině α promítne do bodu. V situaci, kdy rovina α není rovnoběžná s průmětnou, využijeme předchozího poznatku o průmětu pravého úhlu.

Je-li přímka a kolmá k rovině α, je podle definice kolmá ke všem přímkám roviny α, tedy i k hlavní přímce h^α procházející průsečíkem R přímky a a roviny α (obr. 59). Protože jsou přímky a a h^α k sobě kolmé a přímka h^α je rovnoběžná s průmětnou, je průmět a_1 přímky a kolmý k průmětu h_1^α přímky h^α. Jelikož se do přímek kolmých k průmětům hlavních přímek promítají i spádové přímky roviny, průměty kolmic k rovině α splývají s průměty spádových přímek s^α roviny α.



Obr. 63: *Přímka kolmá k rovině*

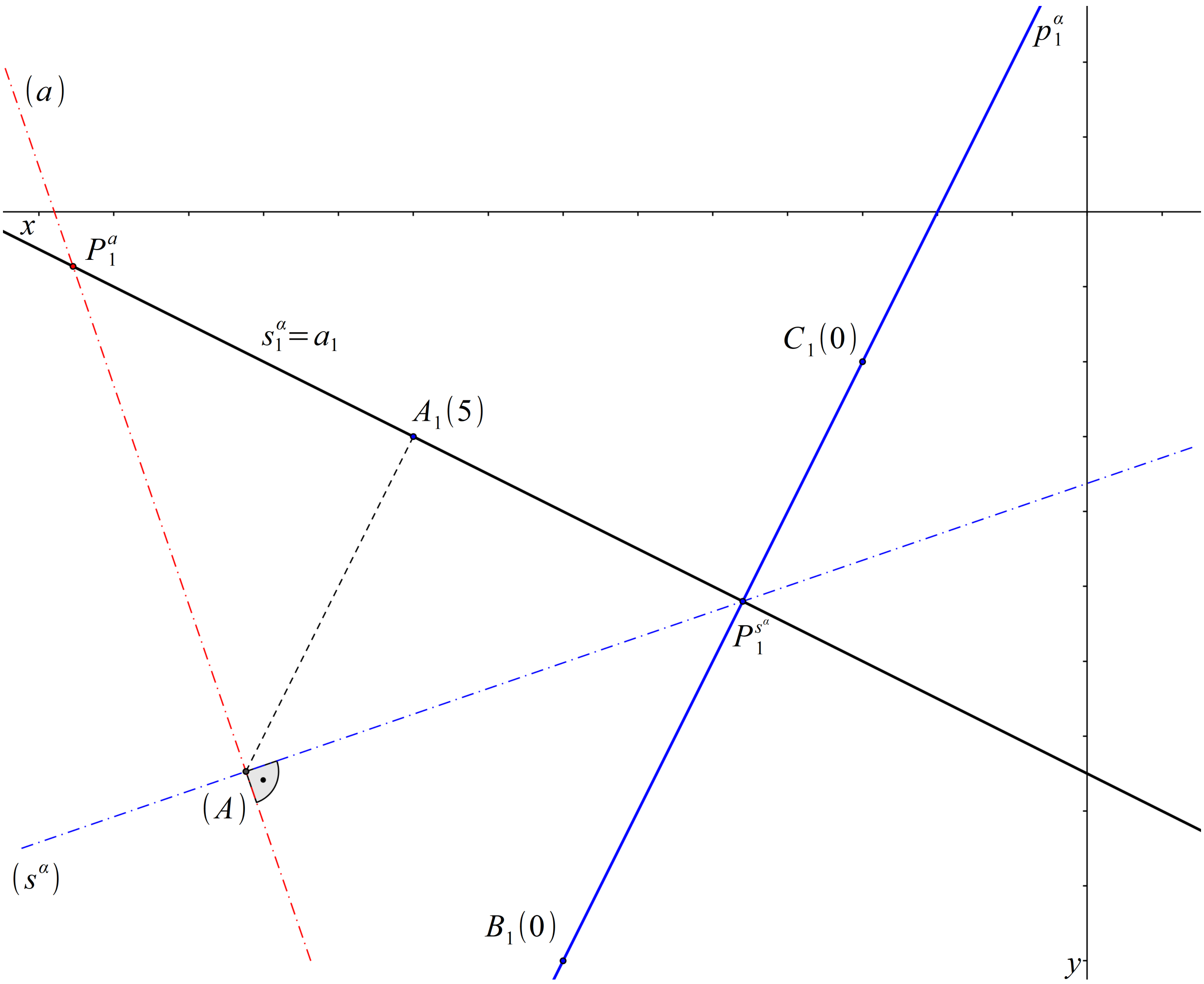
Příklad 12.1

Zobrazte přímku a kolmou k rovině α procházející bodem A. Určete stopník kolmice a.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [9; 3; 5]$, $B = [7; 10; 0]$, $C = [3; 2; 0]$

Řešení (obr. 64)

Jelikož body B, C leží v průmětně, určují stopu roviny α. Jak již víme, přímka kolmá k rovině se promítá jako kolmice k hlavním přímkám roviny. Přímka a_1 bude tedy procházet bodem A_1 a bude kolmá ke stopě roviny α, čili splyne s průmětem s_1^α spádové přímky s^α roviny α procházející bodem A. Stopník P^a přímky a dohledáme sklopením její promítací roviny. Nejprve ve sklopení sestrojíme spádovou přímku s^α ležící v této rovině. Přímka (a) prochází bodem (A) a je na přímku (s^α) kolmá. Stopník P^a přímky a je průsečíkem přímek a_1 a (a).



Obr. 64: *Řešení příkladu 12.1*

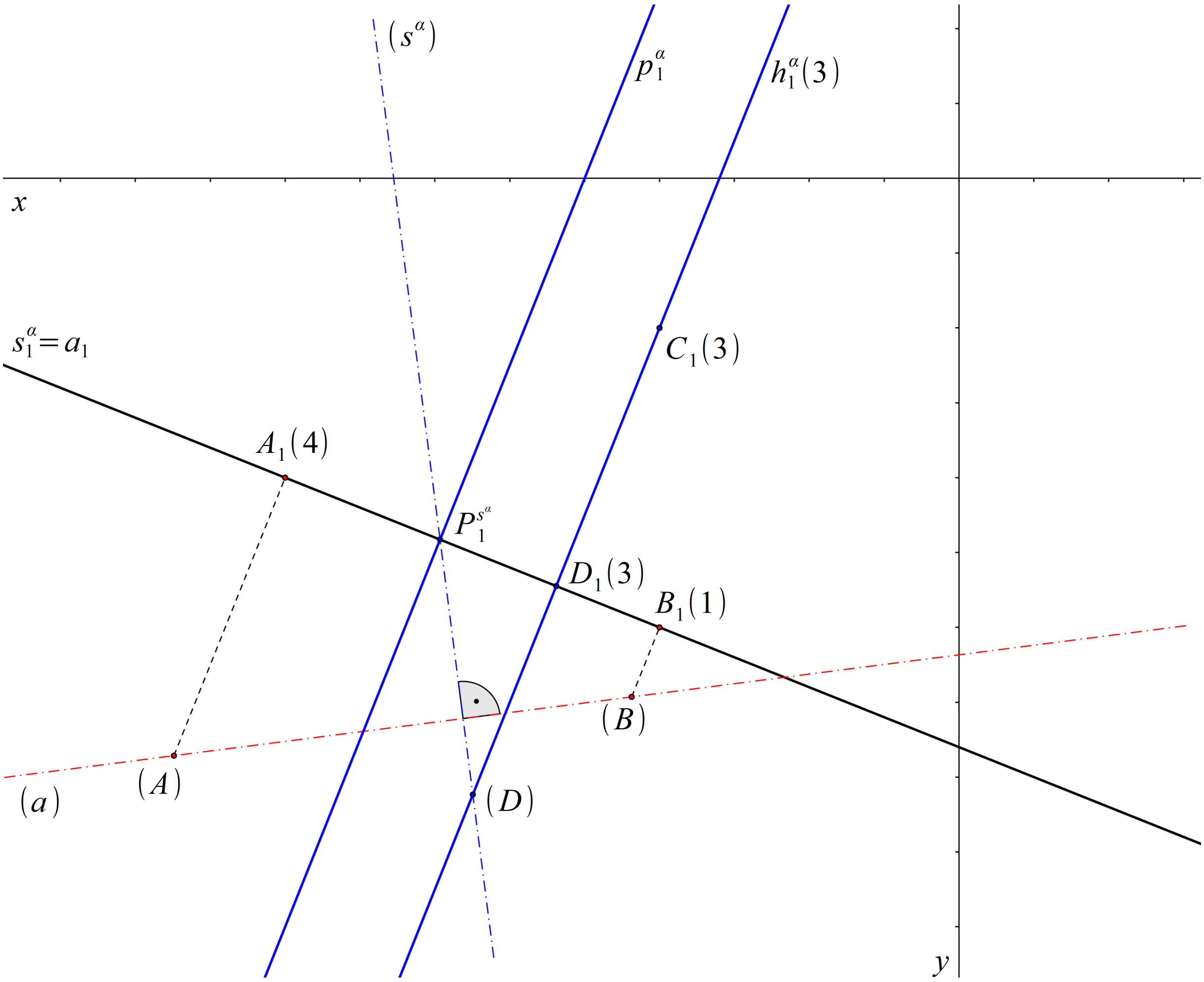
Příklad 12.2

Zobrazte rovinu α kolmou k přímce $a = \leftrightarrow AB$ procházející bodem C. Sestrojte stopu roviny α.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [9; 4; 4]$, $B = [4; 6; 1]$, $C = [4; 2; 3]$

Řešení (obr. 65)

Jak již víme, přímka kolmá k rovině se promítá jako kolmice k hlavním přímkám roviny. Přímka vedená bodem C_1 kolmo k průmětu přímky a je proto průmětem h_1^α hlavní přímky h^α roviny α o kótě 3. Označme bod této hlavní přímky, který se promítne do průsečíku jejího průmětu s přímkou a_1, bodem D. Dále sklopíme promítací rovinu přímky a. V tomto sklopení sestrojíme přímku a a spádovou přímku s^α roviny α procházející bodem D. Přímka (s^α) prochází bodem (D) kolmo k přímce (a). Průsečík přímek s^α a (s^α) je stopníkem P^{s^α} přímky s^α. Stopa p^α roviny α prochází bodem P^{s^α} a je kolmá k přímce a_1.



Obr. 65: *Řešení příkladu 12.2*

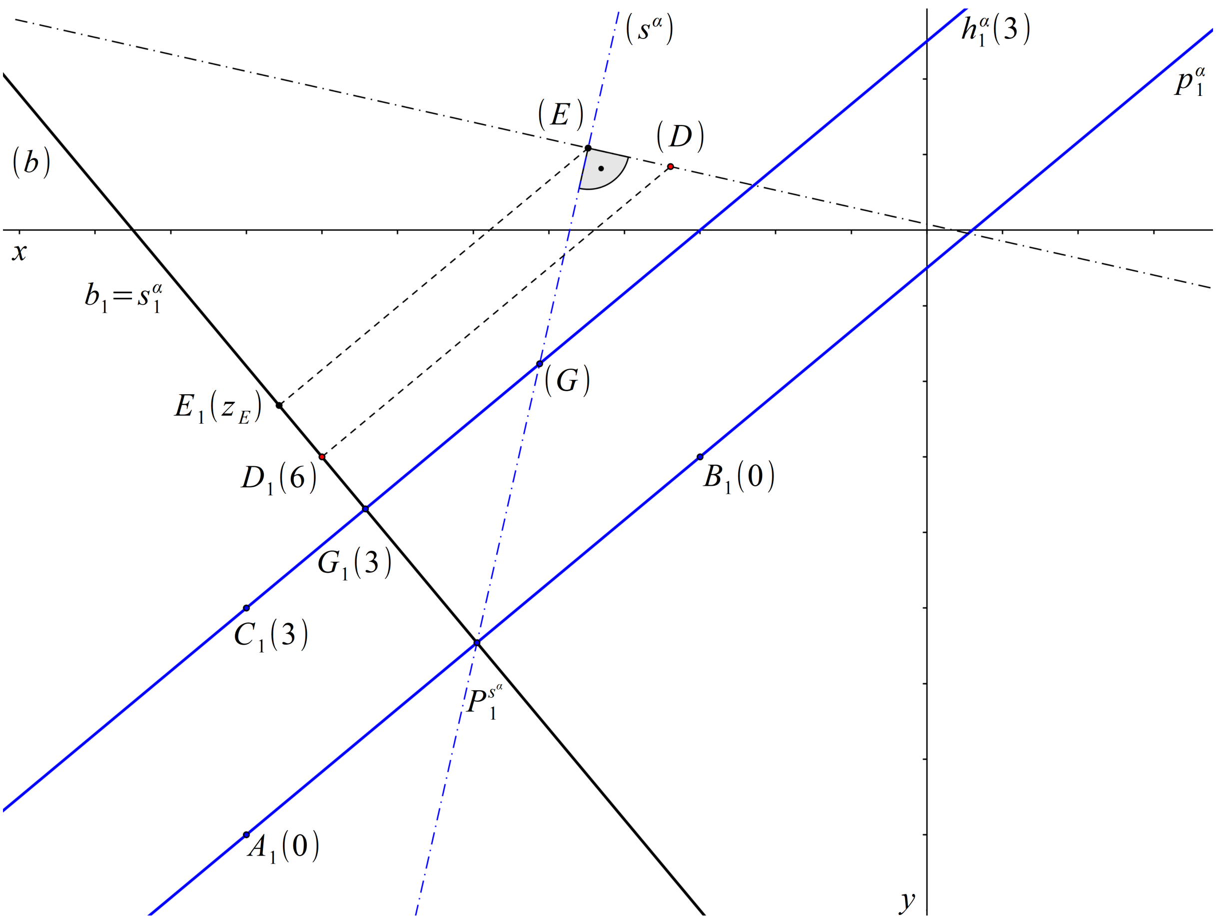
Příklad 12.3

Zobrazte pravoúhlý průmět E bodu $D = [8; 3; 6]$ do roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [9; 8; 0], B = [3; 3; 0], C = [9; 5; 3]$

Řešení (obr. 66)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Hledaný bod E je průsečíkem kolmice b vedené bodem D k rovině α a roviny α. Dále postupujeme tedy analogicky jako v příkladu 5.1. Přímka b_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě roviny α. Ve sklopení promítací roviny přímky b sestrojíme spádovou přímku s^α roviny α, která v této promítací rovině leží, a to pomocí známého stopníku P^{s^α} a průsečíku G spádové přímky s hlavní přímkou h^α o kótě 3. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku b. Přímka (b) prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (s^α). Průsečík přímek (s^α) a (b) je sklopeným pravoúhlým průmětem E bodu D do roviny α. Bod E_1 je patou kolmice vedené z bodu (E) na přímku b_1. Vzdálenost bodů E_1 a (E) je rovna absolutní hodnotě kóty z_E bodu E. Protože bod (E) leží ve stejné polorovině určené přímkou a_1 jako bod (D) a bod D má kladnou kótu, je kóta bodu E také kladná.



Obr. 66: *Řešení příkladu 12.3*

Příklad 12.4

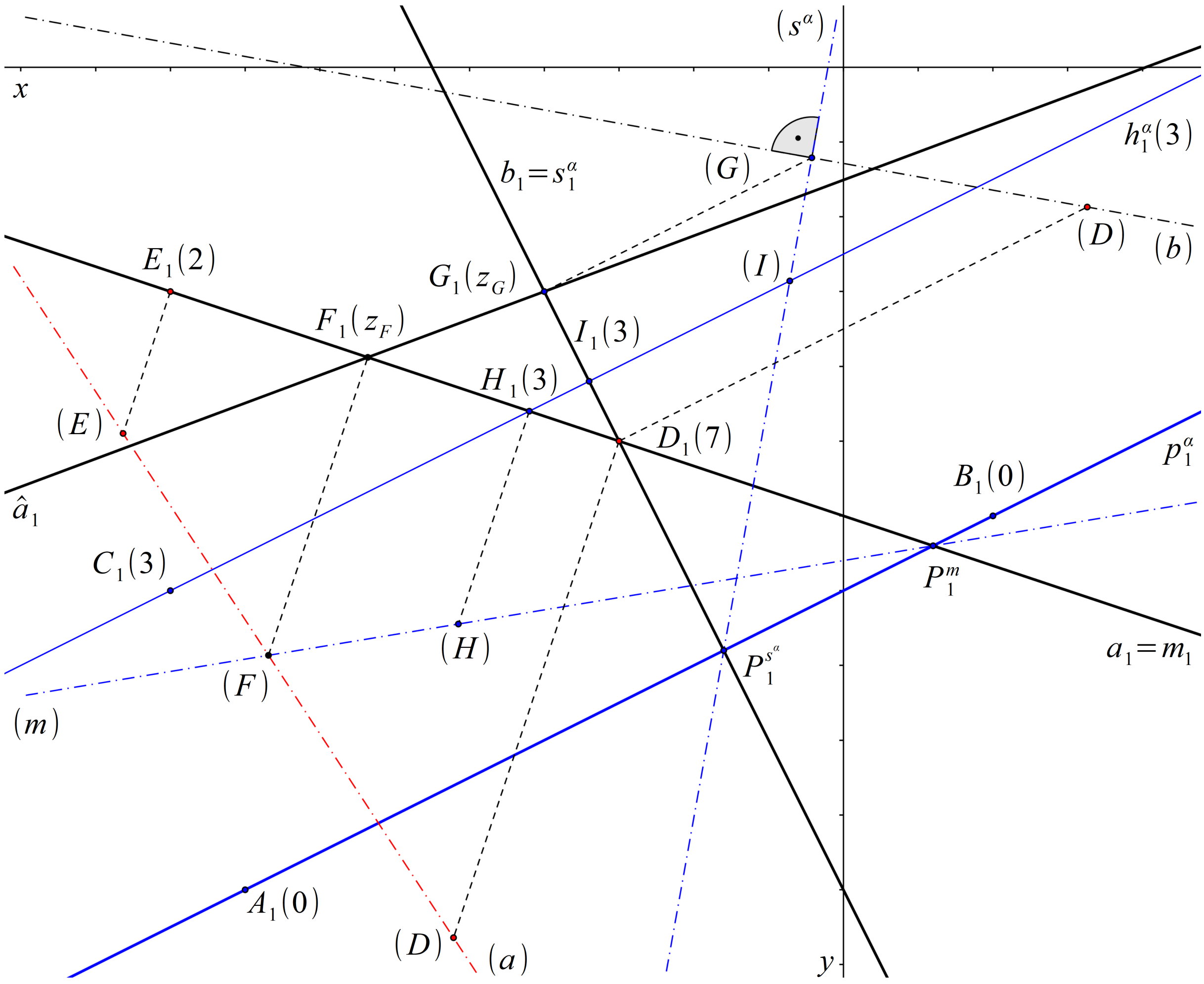
Zobrazte pravoúhlý průmět $\hat{a}$ přímky a do roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [8; 11; 0], B = [-2; 6; 0], C = [9; 7; 3]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [3; 5; 7], E = [9; 3; 2]$

Řešení (obr. 67)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Jedním bodem přímky $\hat{a}$ bude průsečík F přímky a s rovinou α, který dohledáme analogickým způsobem jako v příkladu 5.1 pomocí krycí přímky m ležící v rovině α. Přímka m protíná hlavní přímku h^α v bodě H o kótě 3 a její stopník P^m leží na stopě roviny α. Dále vedeme bodem D kolmici b k rovině α. Přímka b_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě roviny α. Ve sklopení promítací roviny přímky b sestrojíme spádovou přímku s^α roviny α, která v této promítací rovině leží, a to pomocí známého stopníku P^{s^α} a průsečíku I spádové přímky s hlavní přímkou o kótě 3. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku b. Přímka (b) prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (s^α). Průsečík přímek (s^α) a (b) je sklopeným pravoúhlým průmětem G bodu D do roviny α. Bod G_1 je patou kolmice vedené z bodu (G) na přímku b_1. Přímka $\hat{a}$ je nyní určena body F a G.



Obr. 67: *Řešení příkladu 12.4*

13 Odchylka přímky od roviny

V této kapitole budeme určovat odchylku přímky od roviny. Pojďmě si tedy nejprve připomenout pojem odchylky přímky a roviny v prostoru. Odchylka přímky a roviny je v případě, že přímka není kolmá k rovině, definována jako odchylka přímky od jejího pravoúhlého průmětu do roviny. Odchylka přímky od roviny k ní kolmé je 90°.

A nyní se podíváme na to, jak budeme odchylku přímky od roviny určovat v konkrétních příkladech. Odchylka dané přímky a a roviny α je v případě, že je rovina α i přímka a rovnoběžná s průmětnou, rovna 0°.

Pokud je rovina α rovnoběžná s průmětnou a přímka a nikoli, je odchylka přímky a od roviny α stejná jako ve speciálním případě, kdy rovina α splývá s průmětnou. Pokud rovina α splývá s průmětnou, odchylku přímky a od roviny α dohledáme tak, že sklopíme promítací rovinu přímky a. Hledaná odchylka je rovna odchylce přímek a_1 a (a).[1]

Pokud rovina α není rovnoběžná s průmětnou a přímka a není kolmá k průmětně, sestrojíme pravoúhlý průmět $\hat{a}$ přímky a do roviny α. Odchylka přímky a a roviny α je rovna odchylce přímek a a $\hat{a}$.[2] Situace se nám zde zjednoduší, pokud se přímka a bude promítat do přímky kolmé k hlavním přímkám roviny α. Kolmým průmětem přímky a do roviny α zde bude ta spádová přímka roviny α, jejímž průmětem je totožná přímka s přímkou a_1.[3] Jednoduchá situace nastane i v případě, že rovina α bude kolmá k průmětně a přímka a bude rovnoběžná s průmětnou. V tomto případě je odchylka přímky a a roviny α rovna odchylce přímek a_1 a α_1.

V případě, kdy rovina α není rovnoběžná s průmětnou a přímka a je kolmá k průmětně, stačí sklopit promítací rovinu té spádové přímky roviny α, která je různoběžná s přímkou a. Odchylka přímek (a) a (s^α) je rovna odchylce přímky a od roviny α.[4] Jednoduchá situace zde nastane, pokud rovina α bude kolmá k průmětně. Odchylka přímky a a roviny α potom bude 0°.

---

1 Viz příklad 13.1.

2 Viz příklad 13.3.

3 Viz příklad 13.4.

4 Viz příklad 13.2.

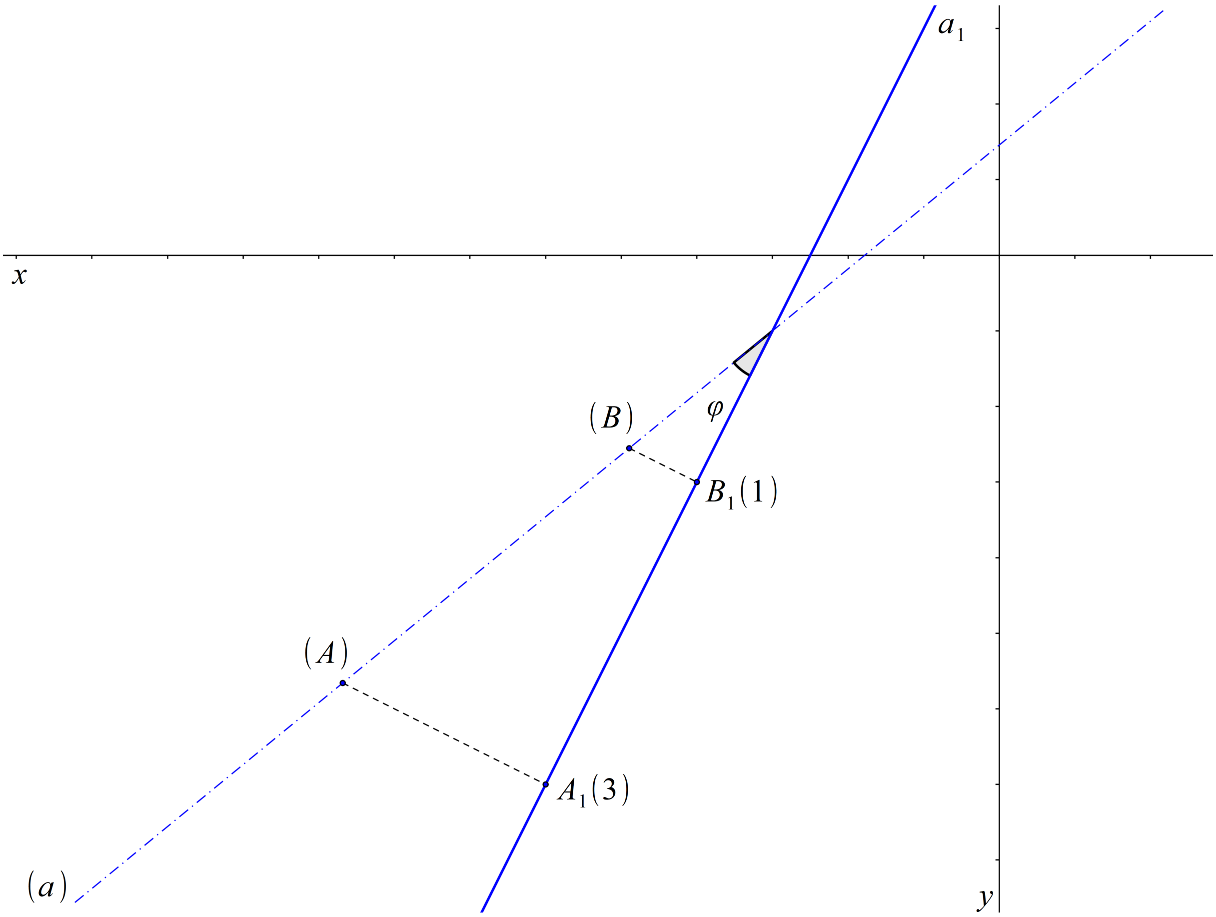
Příklad 13.1

Určete odchylku φ přímky a od průmětny.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [6; 7; 3]$, $B = [4; 3; 1]$

Řešení (obr. 68)

Abychom určili odchylku přímky a od průmětny, sklopíme promítací rovinu přímky a. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímky a_1 od přímky (a).



Obr. 68: *Řešení příkladu 13.1*

Příklad 13.2

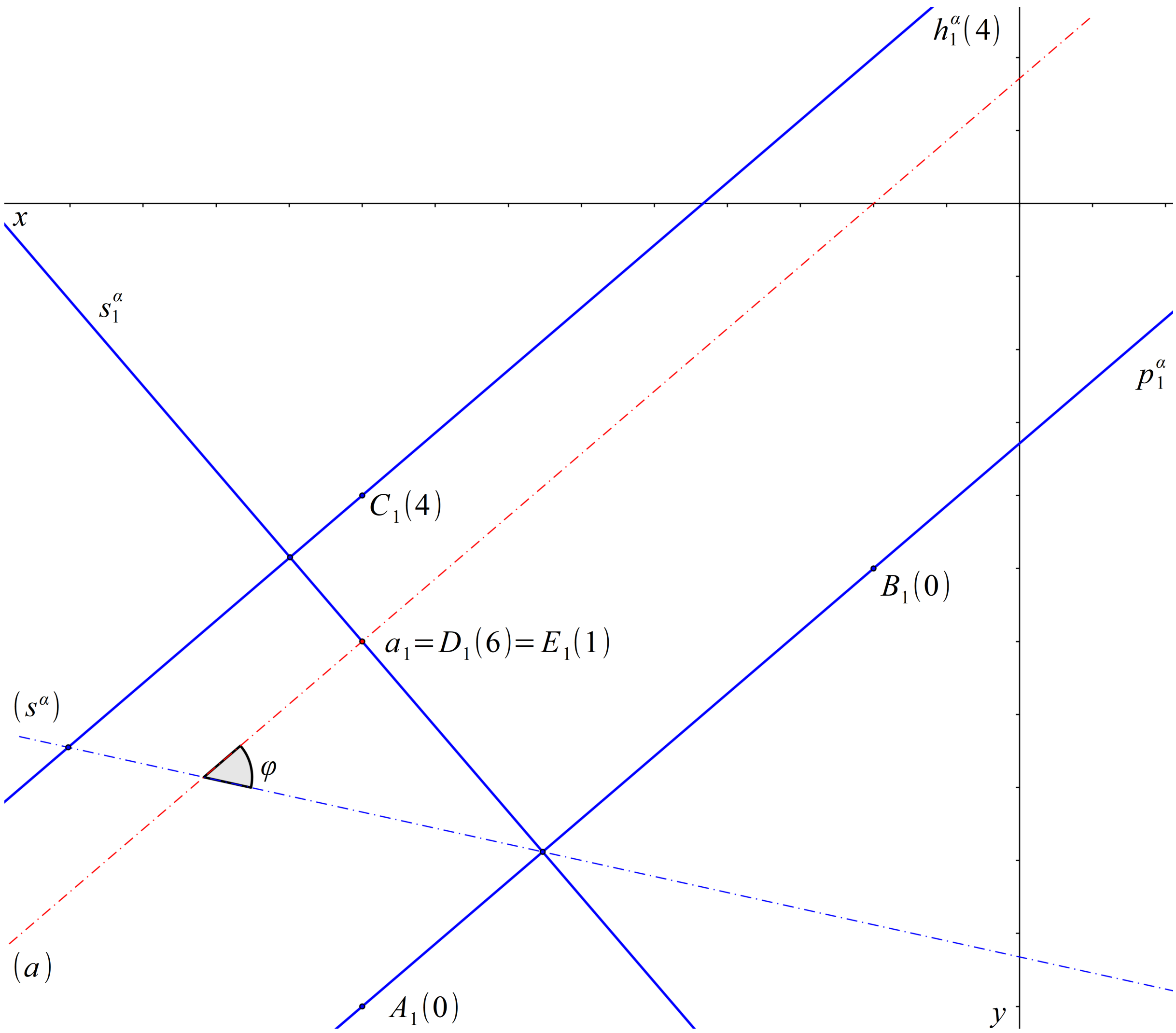
Určete odchylku φ přímky a od roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [9; 11; 0]$, $B = [2; 5; 0]$, $C = [9; 4; 4]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [9; 6; 6]$, $E = [9; 6; 1]$

Řešení (obr. 69)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Rovina α je různoběžná s průmětnou a přímka a je kolmá k průmětně. Abychom zjistili odchylku přímky a od roviny α, zobrazíme spádovou přímku s^α roviny α, která je různoběžná s přímkou a. Průmět s_1^α přímky s^α je kolmý ke stopě roviny α a prochází bodem $D_1 = E_1$. Dále sklopíme promítací rovinu spádové přímky s^α. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímky (a) od přímky (s^α).



Obr. 69: *Řešení příkladu 13.2*

Příklad 13.3

Určete odchylku φ přímky a od roviny α.

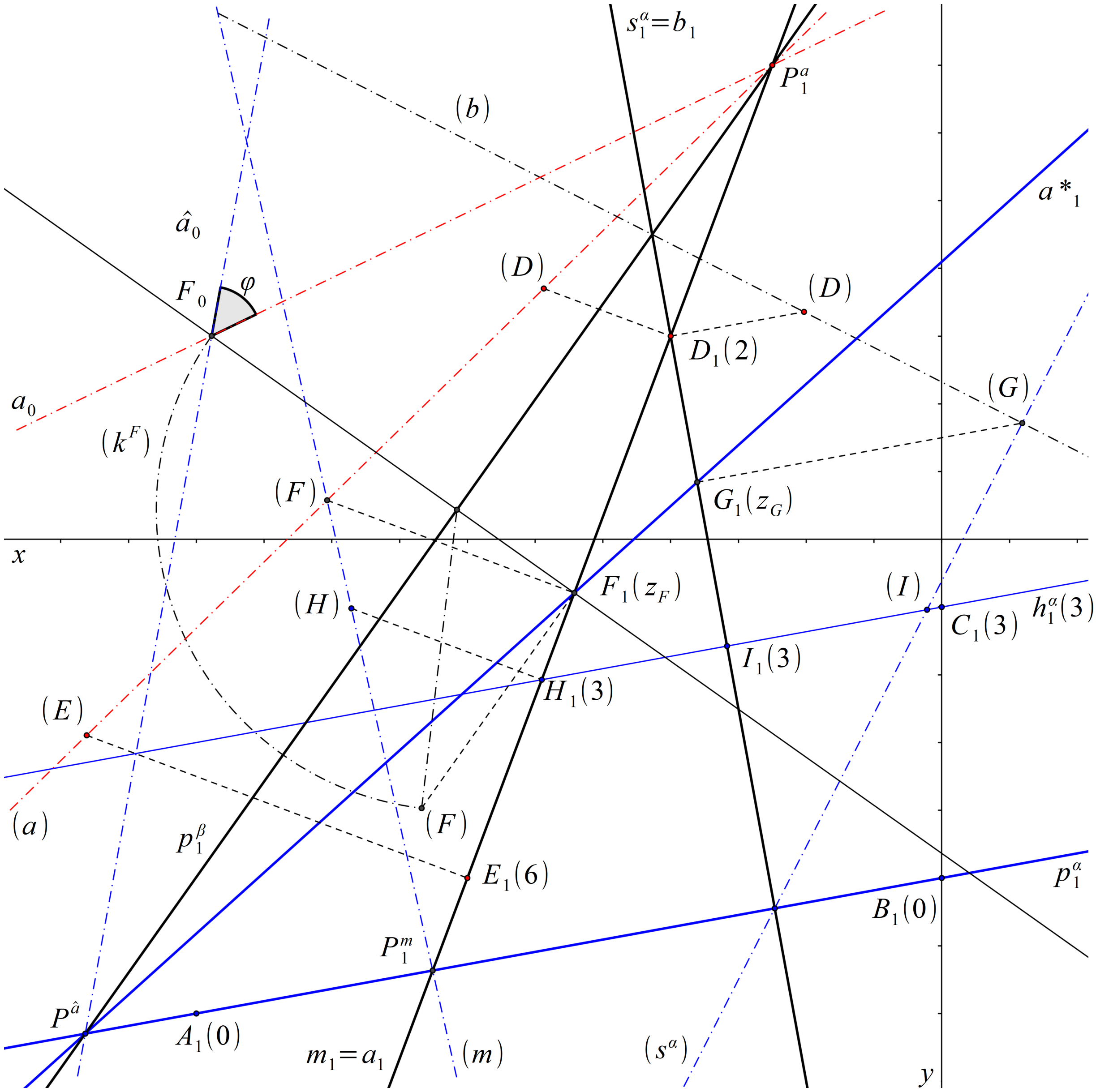
$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [11; 7; 0], B = [0; 5; 0], C = [0; 1; 3]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [4; 3; 2], E = [7; 5; 6]$

Řešení (obr. 70)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Rovina α není rovnoběžná s průmětnou a přímka a není kolmá k průmětně. Abychom určili odchylku φ přímky a a roviny α, sestrojíme pravoúhlý průmět $\hat{a}$ přímky a do roviny α (viz příklad 11.4). Jedním bodem přímky a^* bude průsečík F přímky a s rovinou α, který dohledáme analogickým způsobem jako v příkladu 5.1 pomocí krycí přímky m, která protíná hlavní přímku h^α v bodě H o kótě 3 a jejíž stopník P^m leží na stopě roviny α. Dále vedeme bodem D kolmici b k rovině α. Přímka b_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě p^α roviny α. Ve sklopení promítací roviny přímky b sestrojíme spádovou přímku s^α roviny α, která v této promítací rovině leží, a přímku b. Přímka (b) prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (s^α). Průsečík (G) přímek (s^α) a (b) je sklopeným pravoúhlým průmětem G bodu D do roviny α. Bod G_1 je patou kolmice vedené z bodu (G) na přímku b_1. Body F a G určují přímku $\hat{a}$, která je pravoúhlým průmětem přímky a do roviny α.

Hledaná odchylka φ přímky a od roviny α je nyní rovna odchylce přímek a a $\hat{a}$. K dourčení odchylky φ už stačí jen rovinu β danou těmito dvěma přímkami otočit do průmětny. K tomu potřebujeme sestrojit stopu roviny β. Stopa roviny β prochází stopníkem P^a přímky a a stopníkem $P^{\hat{a}}$ přímky $\hat{a}_1$. Stopník P^a najdeme pomocí sklopení promítací roviny přímky a. Jelikož přímka $\hat{a}$ leží v rovině α, stopník $P^{\hat{a}}$ je průsečíkem přímek p_1^α a $\hat{a}_1$. V otočení roviny β konkrétně sestrojíme bod F konstrukcí znázorněnou na obr. 49. Přímka a_0 prochází body F_0 a P^a. Přímka $\hat{a}_0$ prochází body F_0 a $P^{\hat{a}}$. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímek a_0 a $\hat{a}_0$.



Obr. 70: *Řešení příkladu 13.3*

Příklad 13.4

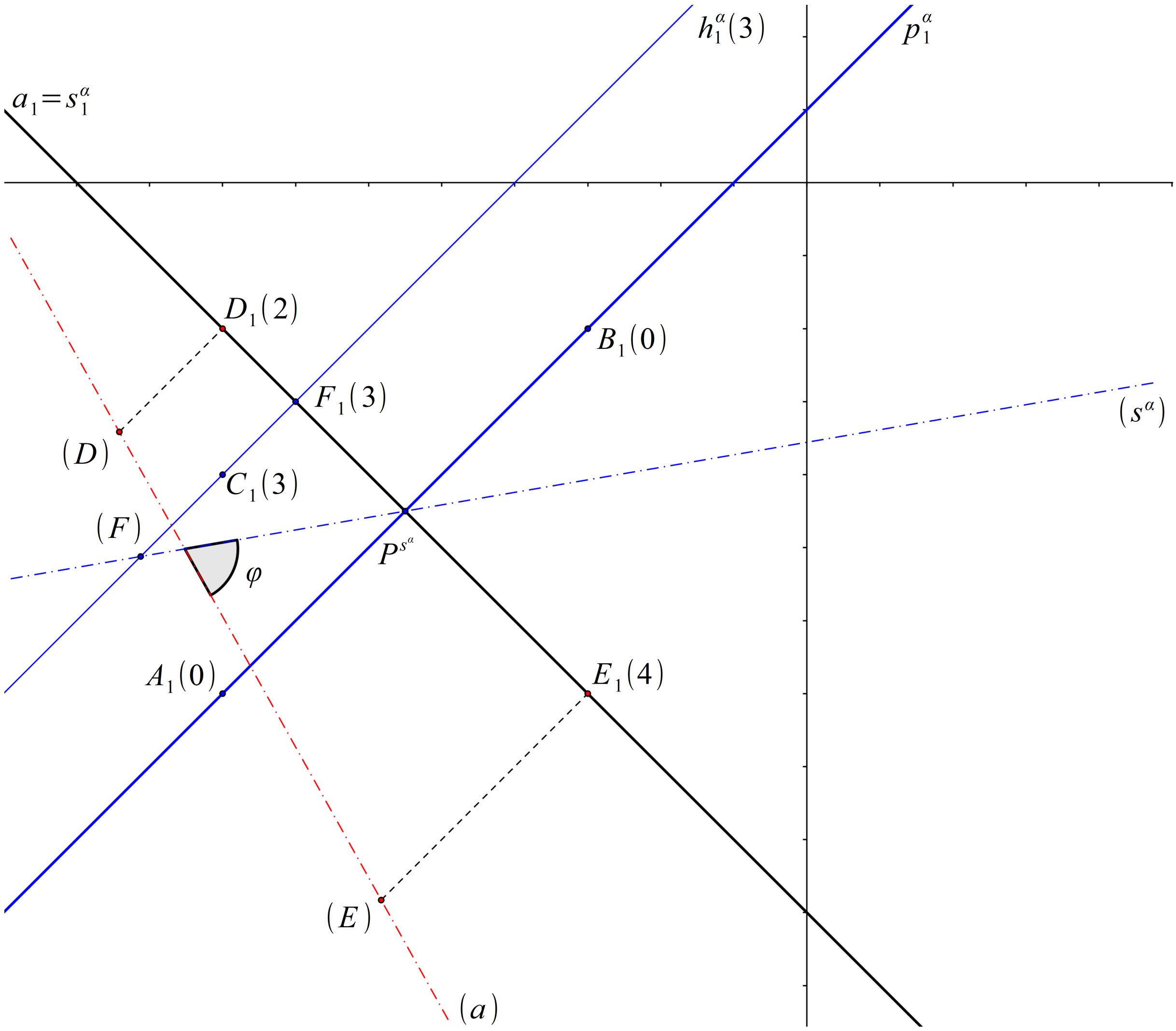
Určete odchylku φ přímky a od roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [8; 7; 0], B = [3; 2; 0], C = [8; 4; 3]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [8; 2; 2], E = [3; 7; 4]$

Řešení (obr. 71)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Rovina α není rovnoběžná s průmětnou a průmět a_1 přímky a je kolmý ke stopě roviny α. Kolmým průmětem přímky a do roviny α bude tedy spádová přímka s^α roviny α, která se promítá do totožné přímky s přímkou a_1. Pro určení odchylky φ přímky a od roviny α stačí sklopit promítací rovinu přímky a. V tomto sklopení sestrojíme přímku a a přímku s^α, a to pomocí bodu F o kótě 3 a stopníku P^{s^α}. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímek (a) a (s^α).



Obr. 71: Řešení příkladu 13.4

14 Odchylka dvou rovin

V této kapitole se naučíme určit odchylku dvou rovin. Nejprve si ale připomeneme pojem odchylky dvou rovin. Odchylka dvou rovin je rovna odchylce jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

Dále se podíváme, jak určíme odchylku dvou rovin v konkrétních příkladech. Odchylka dvou rovin α a β, které jsou rovnoběžné s průmětnou, je 0°.

Je-li rovina α různoběžná s průmětnou a rovina β rovnoběžná s průmětnou, je odchylka rovin α a β stejná jako ve speciálním případě, kdy rovina β splývá s průmětnou. Pokud rovina β splývá s průmětnou, odchylku roviny α od roviny β dohledáme tak, že sklopíme promítací rovinu libovolné spádové přímky s^{α} roviny α. Odchylka přímek (s^{α}) a s_1^{α} je rovna odchylce roviny α od průmětny.[1]

Pokud jsou roviny α a β různoběžné s průmětnou, postupujeme dále podle toho, zda jsou stopy rovin α a β rovnoběžné nebo různoběžné. Pokud jsou rovnoběžné, stačí sklopit libovolnou promítací rovinu kolmou ke stopám rovin α a β. V této promítací rovině leží spádová přímka s^{α} roviny α i spádová přímka s^{β} roviny β. Odchylka přímek (s^{α}) a (s^{β}) je rovna odchylce rovin α a β.[2]

Pokud jsou stopy daných rovin různoběžné, sestrojíme průsečnici c rovin α a β a libovolným bodem této průsečnice vedeme rovinu γ k ní kolmou. Odchylka rovin α a β je rovna odchylce průsečnice a rovin α a γ a průsečnice b rovin β a γ.

V případě, že jsou stopy daných rovin různoběžné, můžeme postupovat ještě druhým způsobem. Libovolným bodem L vedeme přímku a kolmou k rovině α a přímku b kolmou k rovině β. Odchylka rovin α a β je rovna odchylce přímek a a b a můžeme tedy dále postupovat podle kapitoly 11 (str. 59).[3]

---

1 Viz příklad 14.1.

2 Viz příklad 14.3.

3 Viz příklad 14.2.

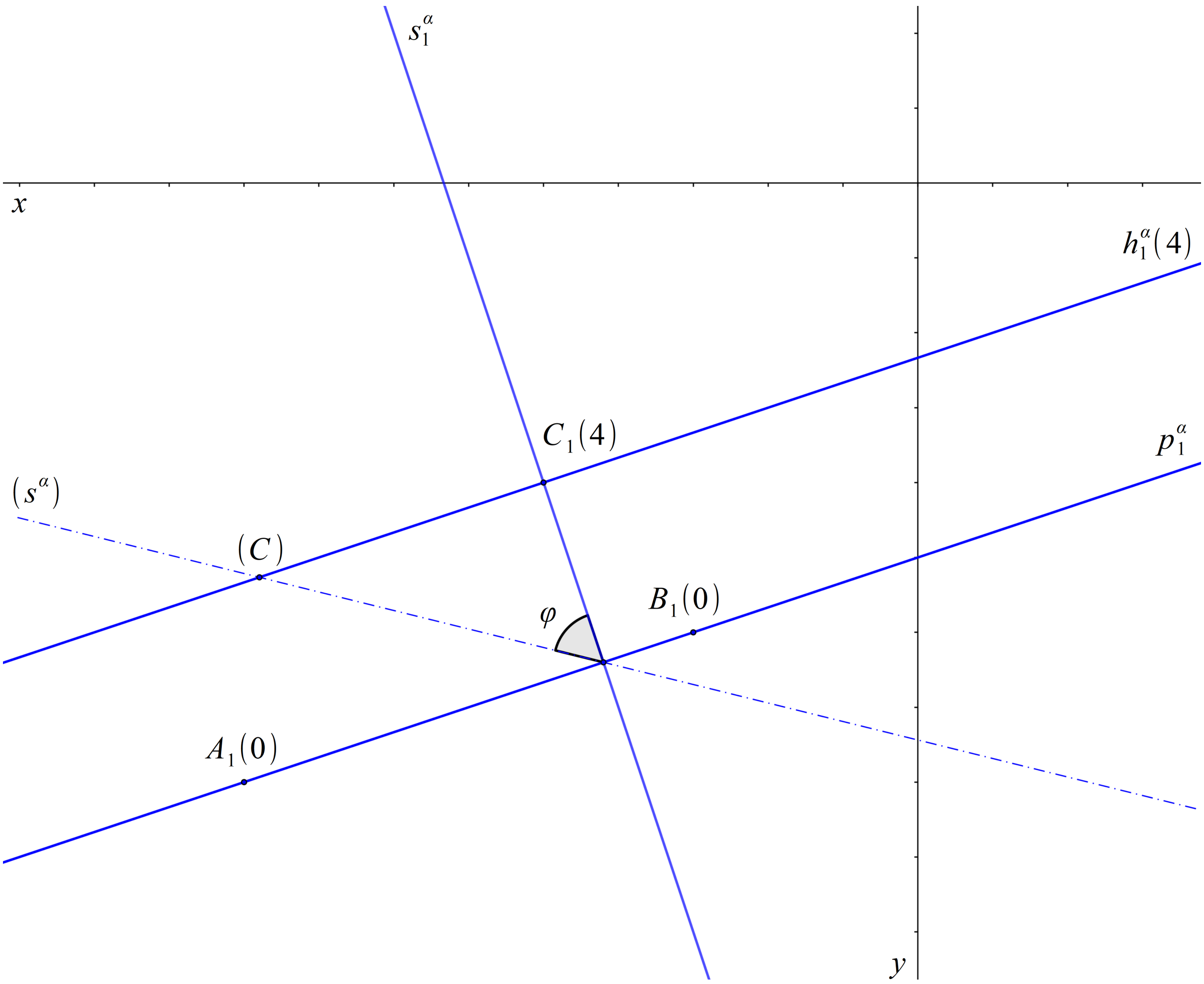
Příklad 14.1

Určete odchylku φ roviny α od průmětny.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [9; 8; 0]$, $B = [3; 6; 0]$, $C = [5; 4; 4]$

Řešení (obr. 72)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Odchylka roviny α od průmětny je rovna odchylce její libovolné spádové přímky od průmětny. Sklopme například promítací rovinu spádové přímky s^α roviny α procházející bodem C. Odchylka přímky (s^α) a přímky s_1^α je rovna hledané odchylce φ.



Obr. 72: *Řešení příkladu 14.1*

Příklad 14.2

Určete odchylku φ rovin α a β.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [8; 9; 0], B = [11; 5; 0], C = [4; 12; 1]$

$\beta = \leftrightarrow DEF, D = [5; 8; 0], E = [3; 5; 0], F = [10; 10; 3]$

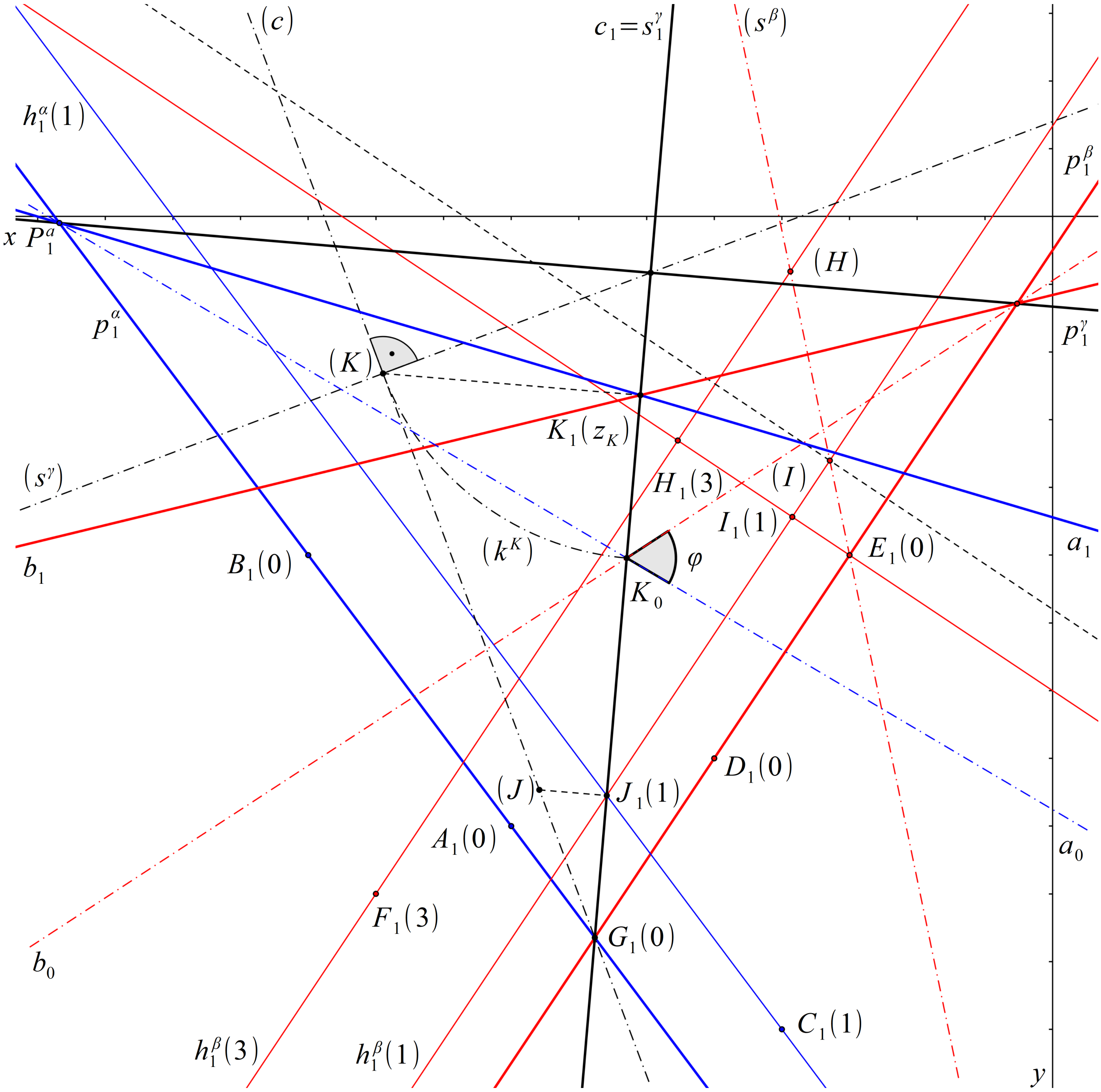
Řešení – 1. způsob (obr. 73)

Roviny α a β jsou různoběžné s průmětnou a jejich stopy jsou různoběžné, proto sestrojíme průmět průsečnice c rovin α a β a libovolným bodem této průsečnice vedeme rovinu γ k ní kolmou. Dále zobrazíme průsečnici a rovin α a γ a průsečnici b rovin β a γ. Odchylka rovin α a β je rovna odchylce přímek a a b.

Jedním bodem průsečnice c je průsečík G stop p^α a p^β. Jako druhý bod průsečnice c můžeme najít průsečík hlavních přímek o kótě 1. Průmětem hlavní přímky roviny α o kótě 1 je přímka vedená bodem C_1 rovnoběžně se stopou roviny α. U roviny β najdeme hlavní přímku o kótě 1 například pomocí sklopení promítací roviny spádové přímky s^β procházející bodem E. Tuto promítací rovinu sklopíme pomocí bodu E a bodu H o kótě 3. Ve sklopení na spádové přímce najdeme bod I o kótě 1. Jeho průmětem vedeme rovnoběžku se stopou roviny β, která je průmětem hledané hlavní přímky roviny β o kótě 1. Spojnice průsečíku J hlavních přímek rovin α, β o kótě 1 a průsečíku G stop rovin α, β je průsečnice c rovin α, β.

Dále libovolným bodem K přímky c vedeme rovinu γ k ní kolmou (analogickým postupem jako v příkladu 12.2). Nejprve sklopíme promítací rovinu přímky c. Na přímce (c) zvolíme bod (K). Zvolme bod (K) například jako na obrázku. Ve sklopení promítací roviny přímky c dále sestrojíme spádovou přímkou s^γ roviny γ, která v této promítací rovině leží. Přímka (s^γ) prochází bodem (K) a je kolmá k přímce (c). Průsečík přímek (s^γ) a s_1^γ je stopníkem přímky s^γ. Kolmice vedená tímto stopníkem k přímce s_1^γ je stopou roviny γ. Průmět průsečnice a rovin α a γ prochází bodem K_1 a průsečíkem P^a stop rovin α a γ. Průmět průsečnice b rovin β a γ prochází bodem K_1 a průsečíkem P^b stop rovin β a γ. Odchylka rovin α a β je nyní rovna odchylce přímek a a b.

Rovinu γ, v níž přímky a a b leží, otočíme do průmětny. Konkrétně otočíme bod K konstrukcí znázorněnou na obr. 49 (str. 52). Přímka a_0 prochází body K_0 a P^a. Přímka b_0 prochází body K_0 a P^b. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímek a_0 a b_0.



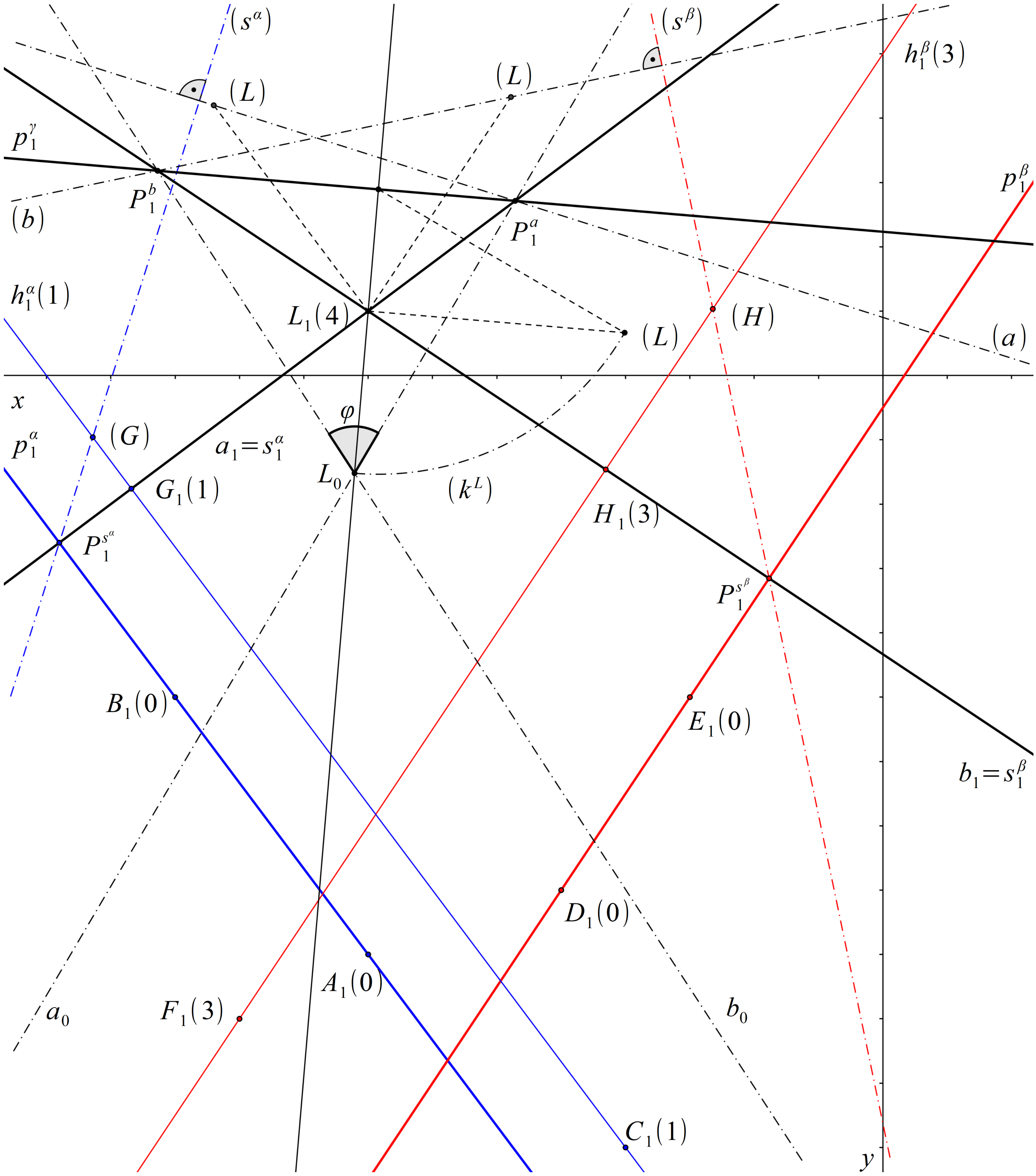
Obr. 73: *Řešení příkladu 14.2 – 1. způsob*

Řešení – 2. způsob (obr. 74)

Roviny α a β jsou různoběžné s průmětnou i navzájem. Zvolíme libovolný bod L a tímto bodem vedeme přímku a kolmou k rovině α a přímku b kolmou k rovině β (analogickým postupem jako v příkladu 12.1). Zvolme například $L = [8; 1; 4]$[1]. Průmět a_1 přímky a prochází bodem L_1 kolmo ke stopě roviny α. Průmět b_1 přímky b rovněž prochází bodem L_1 a je kolmý ke stopě roviny β. Přímky a, b dourčíme například pomocí jejich stopníků P^a, P^b. Stopník P^a najdeme sklopením promítací roviny přímky a. Nejprve v tomto sklopení sestrojíme přímku s^α, a to pomocí známého stopníku P^{s^α} a průsečíku G spádové přímky s hlavní přímkou roviny α o kótě 1. Přímka (a) prochází bodem (L) a je kolmá k přímce (s^α). Stopník P^a je průsečíkem přímek (a) a s_1^α. Stopník P^b najdeme analogicky sklopením promítací roviny přímky b.

Odchylka rovin α a β je nyní rovna odchylce přímek a a b. Abychom tuto odchylku určili, otočíme rovinu γ danou přímkami a a b do průmětny. K tomu potřebujeme sestrojit stopu roviny γ. Stopa roviny γ prochází stopníkem P^a přímky a a stopníkem P^b přímky b. Bod L otočíme konstrukcí znázorněnou na obr. 2 (str. 2). Přímka a_0 prochází body L_0 a P^a, přímka b_0 prochází body L_0 a P^b. Hledaná odchylka φ je rovna odchylce přímek a_0 a b_0.

1 Bod L není nutné volit pomocí souřadnic. Stačí libovolně v průmětně zvolit bod L_1 a zvolit libovolnou kótu.



Obr. 74: *Řešení příkladu 14.2 – 2. způsob*

Závěr:

Oba uvedené postupy řešení jsou přibližně stejně náročné. Druhý způsob je naprosto univerzální, neboť jej můžeme aplikovat pro jakoukoli dvojici rovin. Oproti tomu první způsob lze použít jen pro různoběžné roviny.

Příklad 14.3

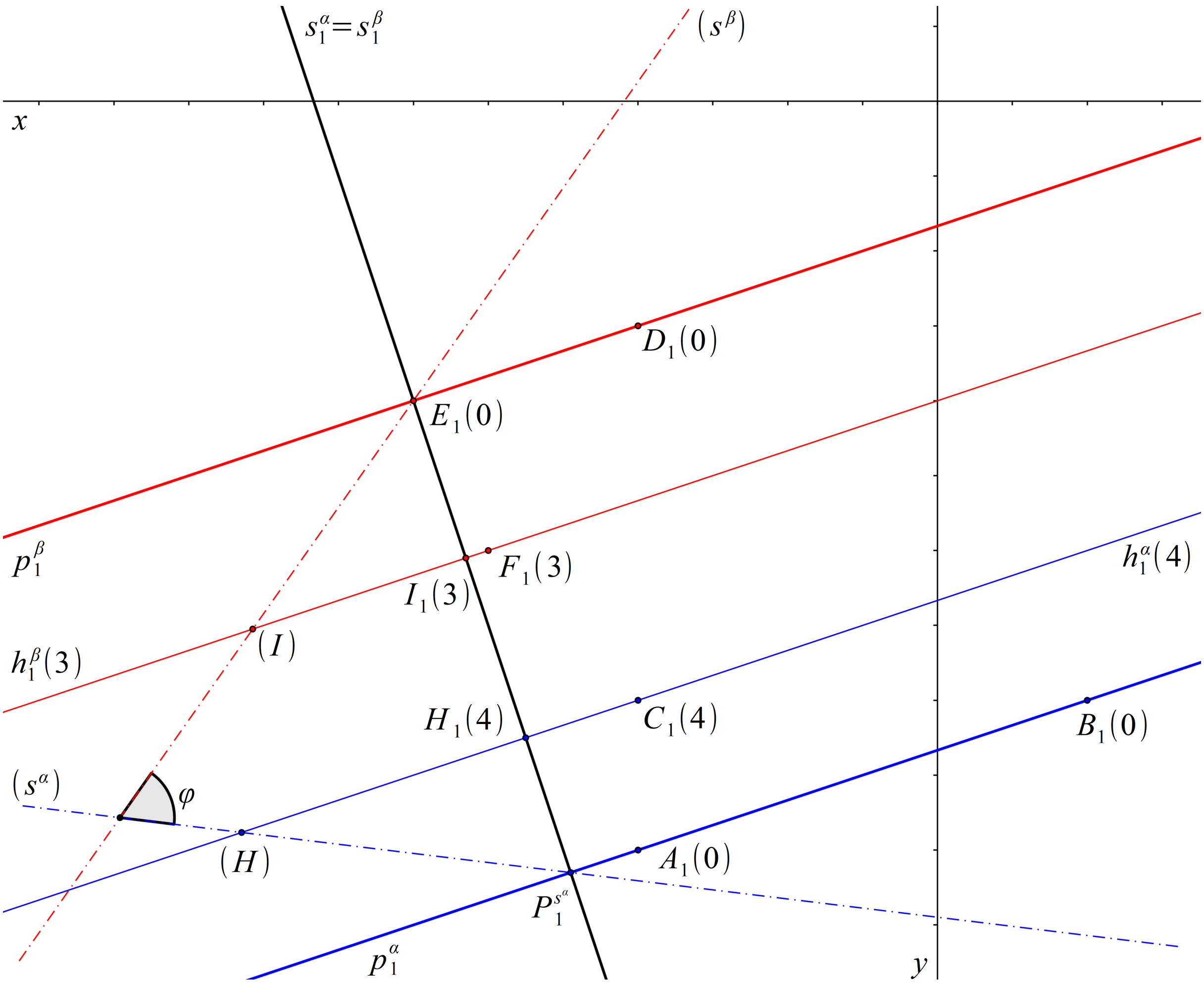
Určete odchylku φ rovin α a β.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [4; 10; 0]$, $B = [-2; 8; 0]$, $C = [4; 8; 4]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [4; 3; 0]$, $E = [7; 4; 0]$, $F = [6; 6; 3]$

Řešení (obr. 75)

Roviny α a β jsou obě různoběžné s průmětnou a jejich stopy jsou rovnoběžné. Proto sklopíme libovolnou promítací rovinu kolmou k oběma zadaným rovinám. V této promítací rovině leží spádová přímka s^α roviny α i spádová přímka s^β roviny β. Hledaná odchylka φ rovin α a β je rovna odchylce přímek (s^α) a (s^β).



Obr. 75: *Řešení příkladu 14.3*

15 Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost dvou bodů A, B definujeme jako délku úsečky AB.

Vzdálenost dvou splývajících bodů je 0.

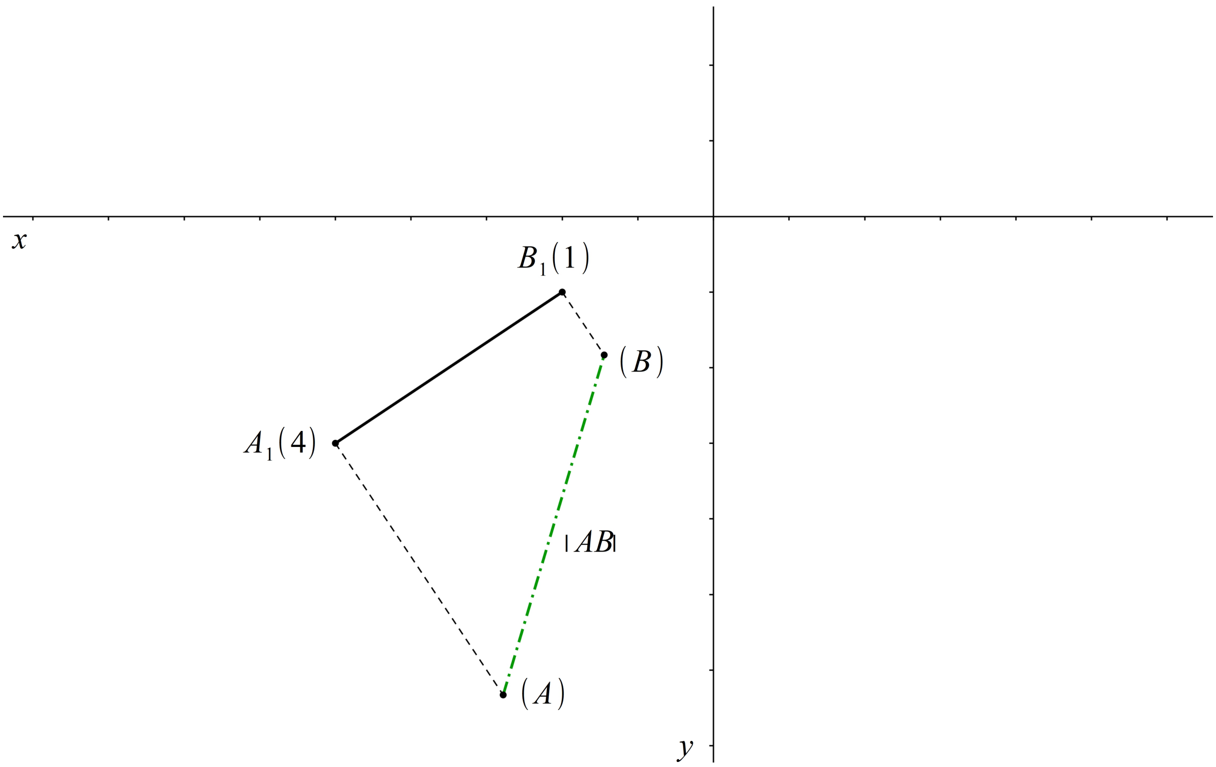
Délku úsečky AB určíme sklopením promítací roviny, v níž oba dané body leží. Délka úsečky AB je rovna vzdálenosti bodů (A) a (B).[1] Ve speciálním případě, kdy je kóta bodů A a B stejná, je úsečka AB rovnoběžná s průmětnou a její délka je rovna vzdálenosti bodů A_1 a B_1.[2]

Příklad 15.1

Určete skutečnou délku úsečky AB, kde $A = [5; 3; 4]$, $B = [2; 1; 1]$.

Řešení (obr. 76)

Ze souřadnic bodů A a B vidíme, že úsečka AB není rovnoběžná s průmětnou. Abychom zjistili její skutečnou délku, musíme sklopit promítací rovinu přímky AB do průmětny. Hledaná délka úsečky AB je rovna délce úsečky $(A)(B)$.



Obr. 76: *Řešení příkladu 15.1*

1 Viz příklady 15.1 a 15.3.

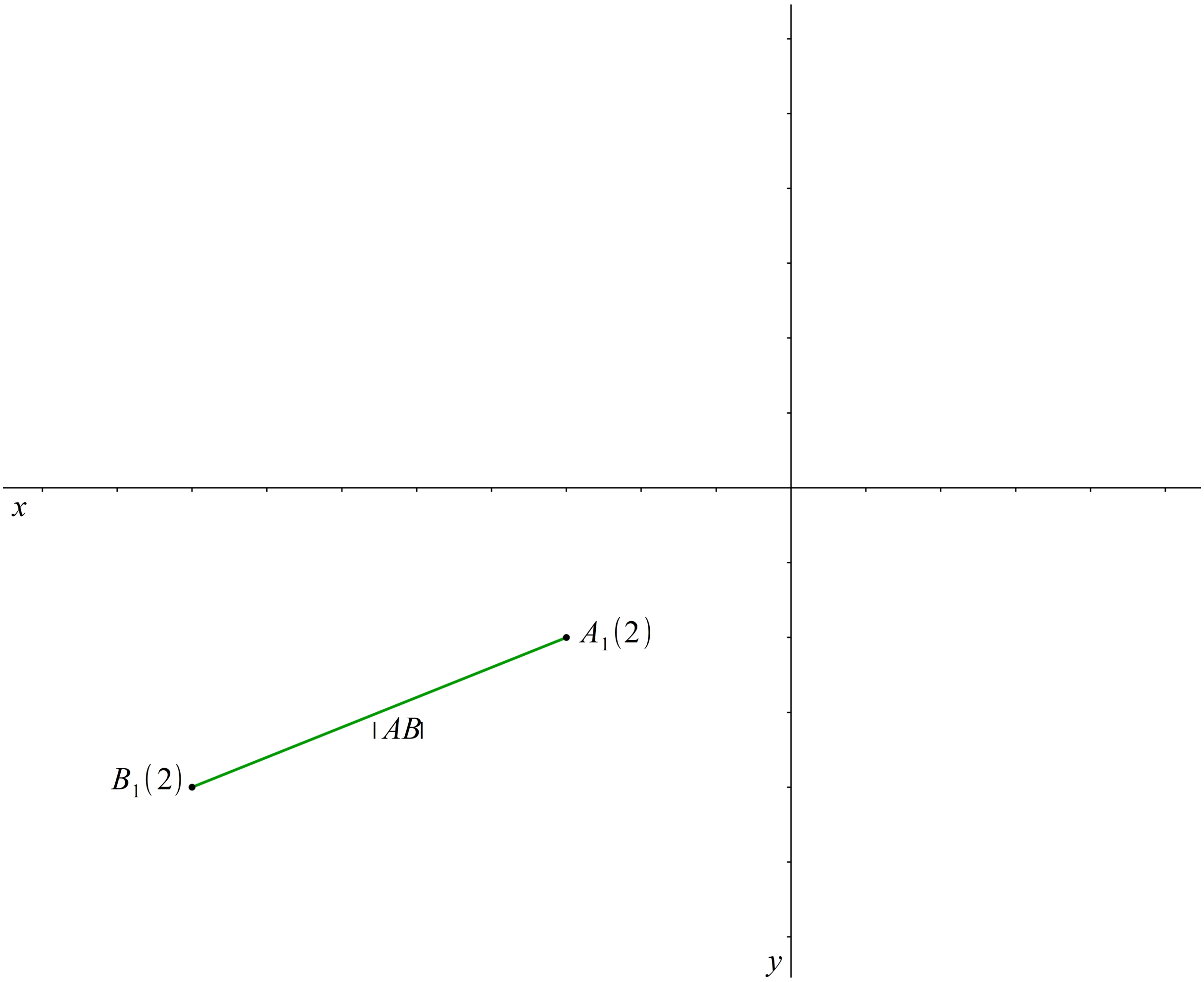
2 Viz příklad 15.2.

Příklad 15.2

Určete skutečnou délku úsečky AB, kde $A = [3; 2; 2]$, $B = [8; 4; 2]$.

Řešení (obr. 77)

Ze souřadnic bodů A a B vidíme, že úsečka AB je rovnoběžná s průmětnou. Skutečná délka úsečky AB je tedy rovna délce úsečky A_1B_1.



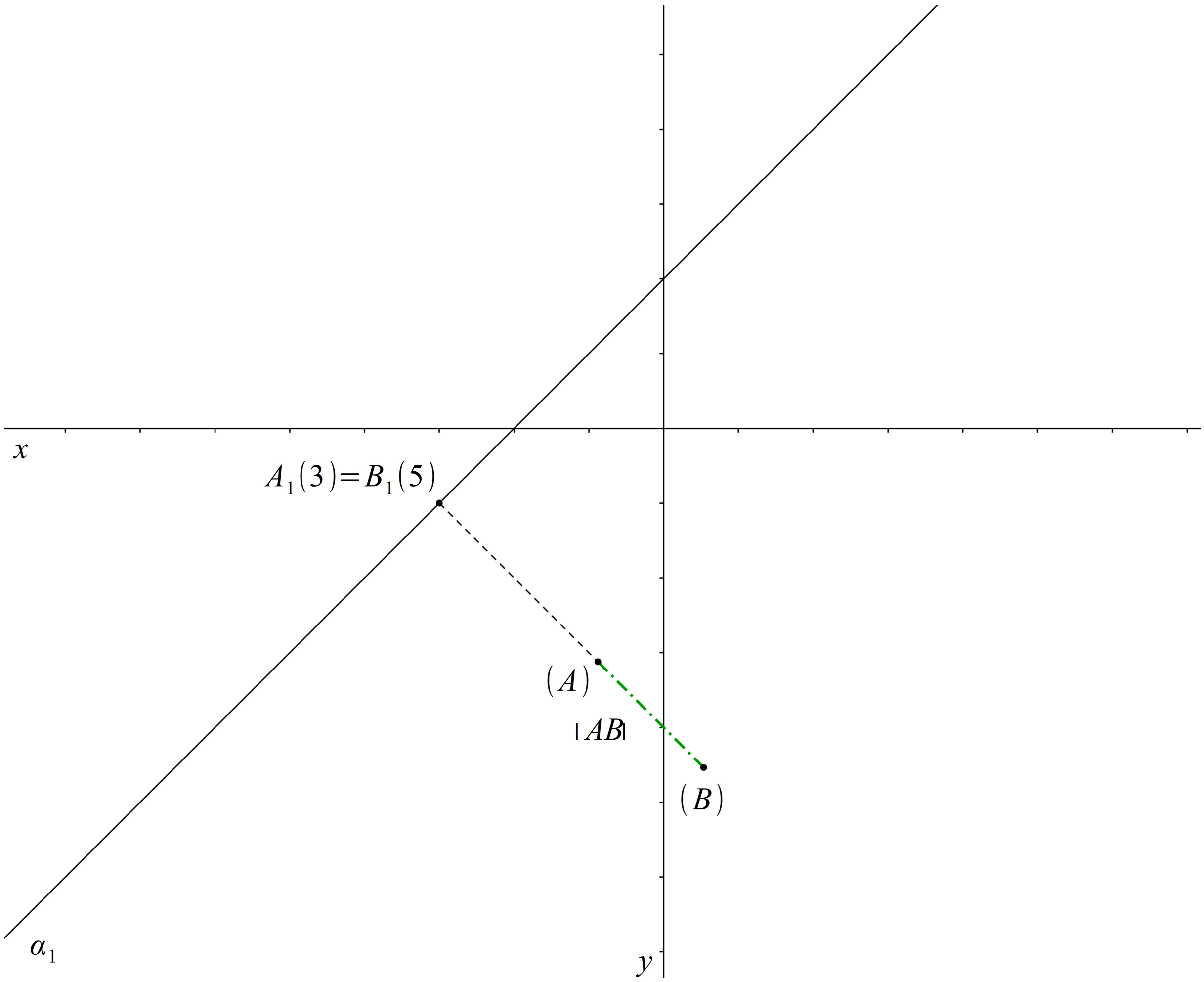
Obr. 77: *Řešení příkladu 15.2*

Příklad 15.3

Určete skutečnou délku úsečky AB, kde $A = [3; 1; 3]$, $B = [3; 1; 5]$.

Řešení (obr. 78)

Ze souřadnic bodů A a B vidíme, že úsečka AB není rovnoběžná s průmětnou. Abychom zjistili její skutečnou délku, musíme sklopit promítací rovinu přímky AB do průmětny. Průměty A_1, B_1 bodů A, B splývají, přímka AB je tedy kolmá k průmětně. V takovém případě lze přímkou AB proložit nekonečně mnoho promítacích rovin, přičemž každá z nich se promítne do přímky procházející bodem $A_1 = B_1$. Zvolme například promítací rovinu α jako na obrázku 31. Tuto promítací rovinu sklopíme. Hledaná délka úsečky AB je rovna délce úsečky $(A)(B)$.



Obr. 78: *Řešení příkladu 15.3*

Poznámka:

V případě, kdy průměty bodů A a B splývají, platí, že $|AB| = |z_A - z_B|$ a délku úsečky AB tedy můžeme sestrojit jako absolutní hodnotu rozdílu z_A a z_B.

16 Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu od roviny je rovna vzdálenosti bodu od jeho pravoúhlého průmětu do roviny (viz příklad 12.3).

V příkladech tedy určíme vzdálenost bodu A od roviny α tak, že sestrojíme kolmici jdoucí bodem A k rovině α a najdeme průsečík B této kolmice s rovinou α. Vzdálenost bodu A od roviny α je pak rovna vzdálenosti bodů A a B, proto dále můžeme postupovat jako v předchozí kapitole.[1]

Tohoto postupu využijeme i při hledání vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin.[2] Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin α a β definujeme jako vzdálenost libovolného bodu roviny α od roviny β. V příkladech[3] tedy zvolíme libovolný bod roviny α a najdeme uvedeným postupem vzdálenost tohoto bodu od roviny β.

Výše popsaný postup také použijeme při hledání vzdálenosti přímky a od roviny α, která je s ní rovnoběžná.[4] Tuto vzdálenost definujeme jako vzdálenost libovolného bodu přímky a od roviny α. V příkladech[5] tedy zvolíme libovolný bod přímky a a pokračujeme stejným postupem jako při hledání vzdálenosti bodu od roviny.

---

1 Viz příklady 16.1 a 16.2.

2 Pro připomenutí viz kritérium rovnoběžnosti dvou rovin v učebnici [1], str. 13.

3 Viz příklady 16.3 a 16.4.

4 Pro připomenutí viz kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny v učebnici [1], str. 12.

5 Viz příklady 16.5, 16.6 a 16.7.

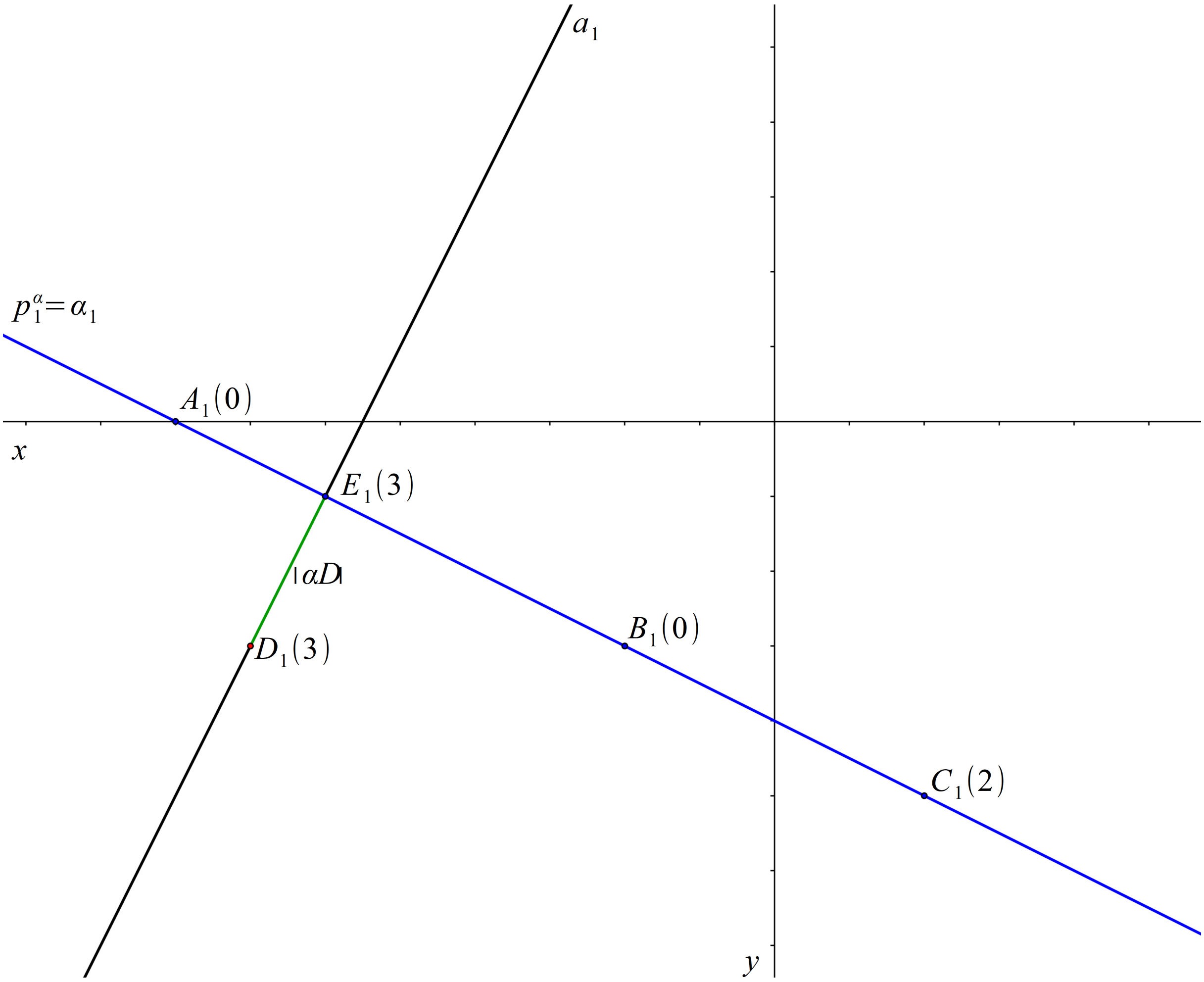
Příklad 16.1

Určete vzdálenost bodu $D = [7; 3; 3]$ od roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [8; 0; 0], B = [2; 3; 0], C = [-2; 5; 2]$

Řešení (obr. 79)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Bod C_1 leží na přímce p_1^{α}, rovina α je tedy promítací. Kolmice a vedená bodem D k rovině α je rovnoběžná s průmětnou. Všechny body přímky a mají kótu 3, stejně jako bod D. Průmět přímky a prochází bodem D_1 kolmo k přímce α_1. Průsečík E přímky a a roviny α se promítne do průsečíku E_1 přímek a_1 a α_1. Kóta bodu E je 3, protože bod E je bodem přímky a. Vzdálenost bodu D od roviny α je nyní rovna vzdálenosti bodů D a E. Poněvadž je kóta bodů D a E stejná, je hledaná vzdálenost rovna vzdálenosti bodů D_1 a E_1.



Obr. 79: *Řešení příkladu 16.1*

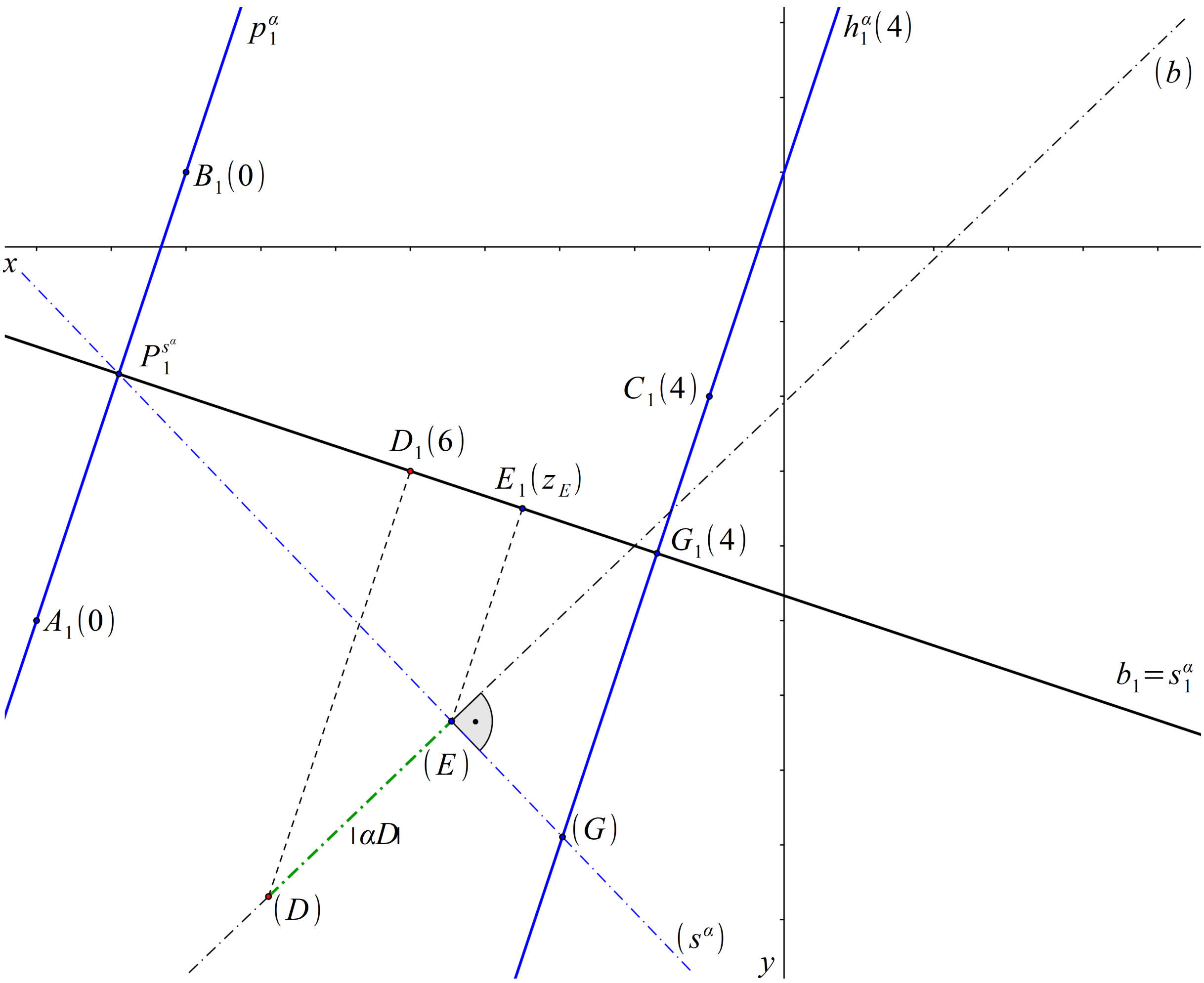
Příklad 16.2

Určete vzdálenost bodu $D = [5; 3; 6]$ od roviny α.

$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [10; 5; 0]$, $B = [8; -1; 0]$, $C = [1; 2; 4]$

Řešení (obr. 80)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Abychom zjistili vzdálenost bodu D od roviny α, najdeme pravoúhlý průmět E bodu D do roviny α (stejným způsobem, jako v příkladu 12.3). Bod E je patou kolmice b vedené bodem D k rovině α. Přímka b_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě roviny α a splývá s průmětem s_1^α spádové přímky s^α roviny α. Ve sklopení promítací roviny společné přímkám b a s^α sestrojíme spádovou přímku (s^α), a to pomocí známého stopníku P^{s^α} a průsečíku G spádové přímky s hlavní přímkou o kótě 4. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku (b), která prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (s^α). Průsečík (E) přímek (s^α) a (b) je sklopeným pravoúhlým průmětem E bodu D do roviny α. Hledaná vzdálenost bodu D od roviny α je rovna vzdálenosti bodů (E) a (D).



Obr. 80: *Řešení příkladu 16.2*

Příklad 16.3

Přesvědčte se, že jsou roviny α a β rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost.

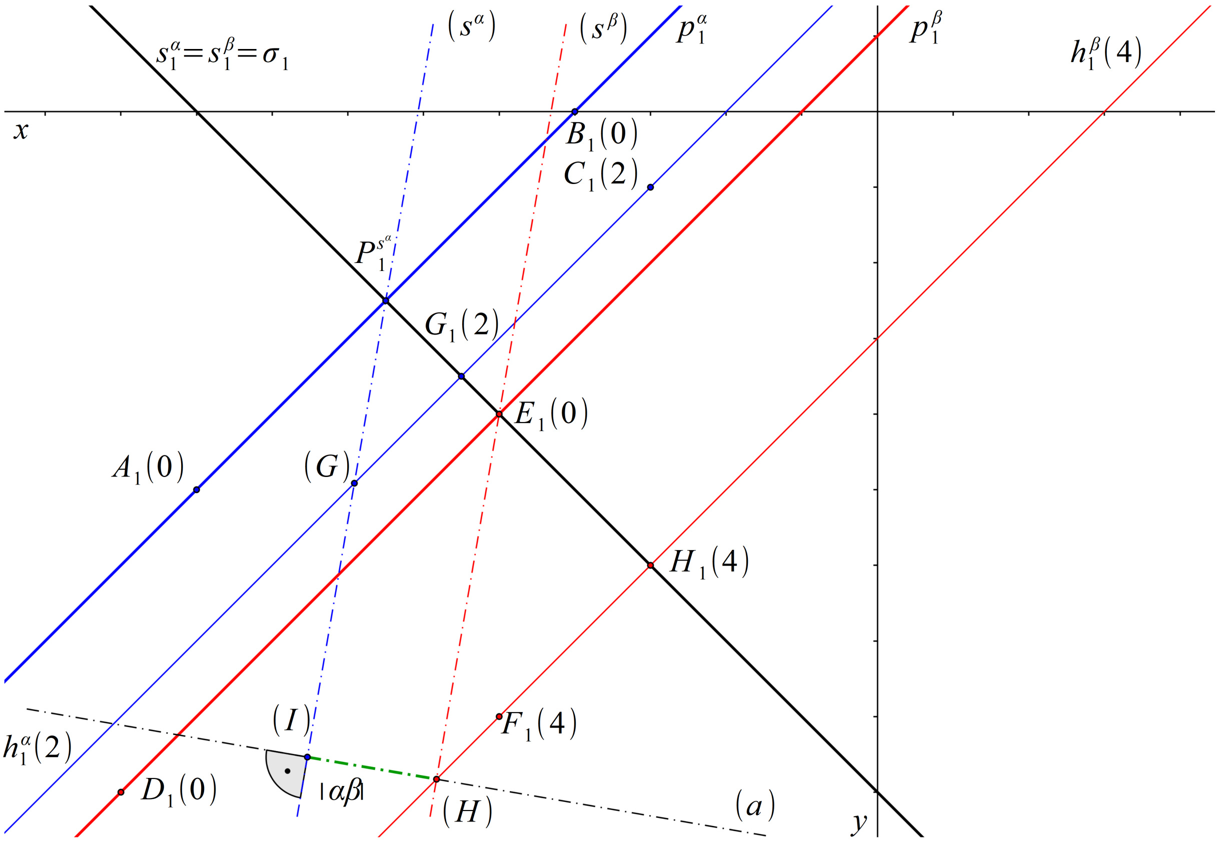
$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [9; 5; 0], B = [-4; 0; 0], C = [3; 1; 2]$

$\beta = \leftrightarrow DEF, D = [10; 9; 0], E = [5; 4; 0], F = [5; 8; 4]$

Řešení (obr. 81)

Nejprve se přesvědčíme o rovnoběžnosti zadaných rovin. Stopy rovin α a β jsou rovnoběžné, roviny α a β mohou tedy být rovnoběžné nebo různoběžné (viz kapitola 7). Vzájemnou polohu rovin α a β zjistíme sklopením promítací roviny σ kolmé ke stopám rovin α a β. V této promítací rovině leží spádová přímka s^α roviny α a spádová přímka s^β roviny β. Přímku (s^α) sestrojíme pomocí známého stopníku a bodu G o kótě 2. Přímku (s^β) sestrojíme pomocí známého stopníku a bodu H o kótě 4. Přímky (s^α) a (s^β) jsou rovnoběžné, tudíž jsou roviny α, β rovnoběžné.

Vzdálenost rovin α a β je rovna vzdálenosti libovolného bodu roviny β od roviny α. Určeme nyní vzdálenost daných rovin jako vzdálenost bodu H od roviny α. Bodem H vedeme kolmici a k rovině α a najdeme průsečík I přímky a s rovinou α. Hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky HI. Přímka a leží v promítací rovině σ. Ve sklopení této promítací roviny sestrojíme přímku (a) jako kolmici vedenou bodem (H) k přímce (s^α). Průsečík přímek (a) a (s^α) je sklopeným průsečíkem I přímky a a roviny α. Hledaná vzdálenost rovin α a β je rovna délce úsečky $(H)(I)$.



Obr. 81: *Řešení příkladu 16.3*

Příklad 16.4

Přesvědčte se, že jsou roviny α a β rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost.

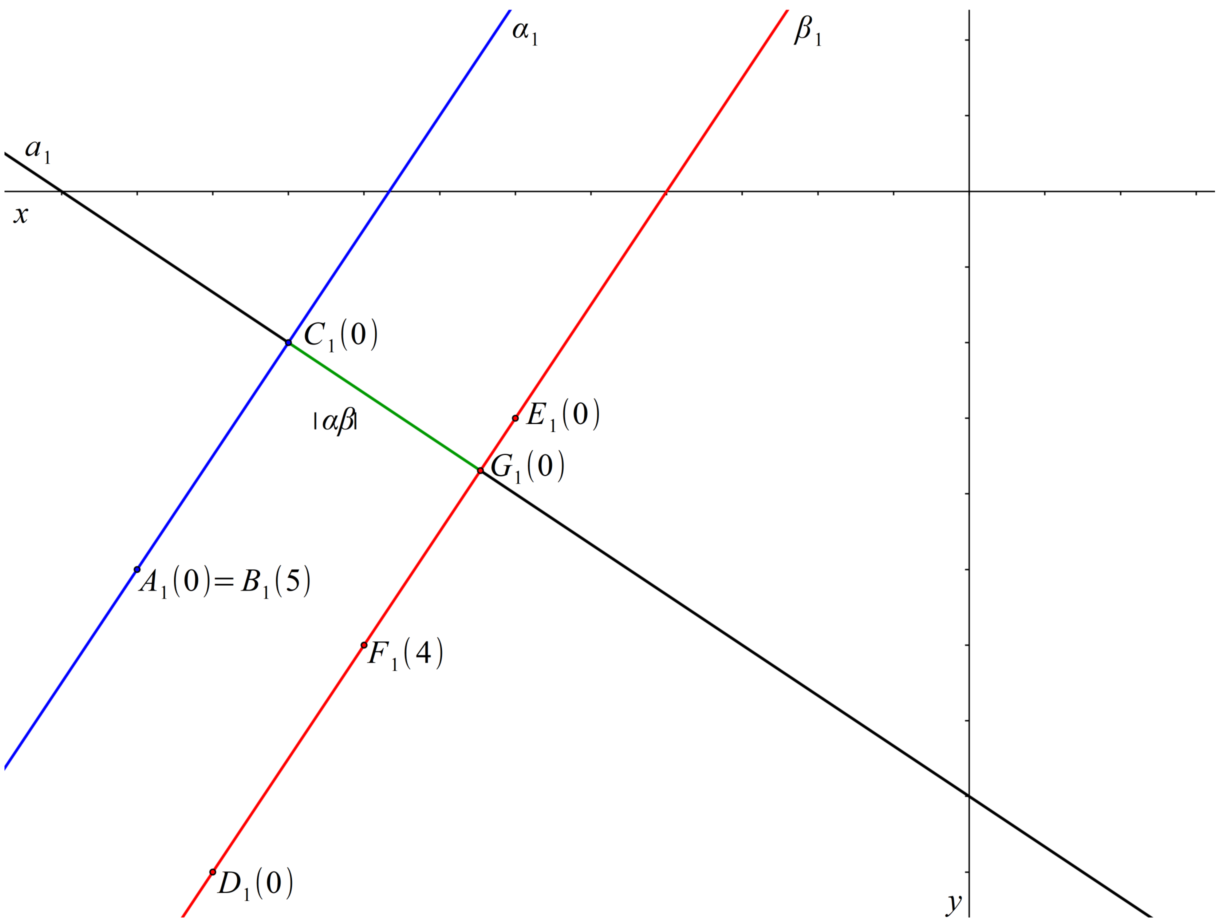
$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [11; 5; 0]$, $B = [11; 5; 5]$, $C = [9; 2; 0]$

$\beta = \leftrightarrow DEF$, $D = [10; 9; 0]$, $E = [6; 3; 0]$, $F = [8; 6; 4]$

Řešení (obr. 82)

Roviny α a β jsou promítací a promítají se do dvou rovnoběžných přímek. Z toho plyne, že jsou rovnoběžné.

Abychom určili vzdálenost zadaných rovin, vedeme libovolným bodem roviny α kolmici a k rovině β. Veďme přímku a například bodem C. Vzdálenost rovin α a β je nyní rovna vzdálenosti bodu C od průsečíku G přímky a s rovinou β. Protože je rovina α promítací a přímka a je k rovině α kolmá, je přímka a rovnoběžná s průmětnou. Délka úsečky CG je tedy rovna délce úsečky C_1G_1.



Obr. 82: *Řešení příkladu 16.4*

Příklad 16.5

Přesvědčte se, že je přímka a rovnoběžná s rovinou α, a určete vzdálenost přímky a a roviny α.

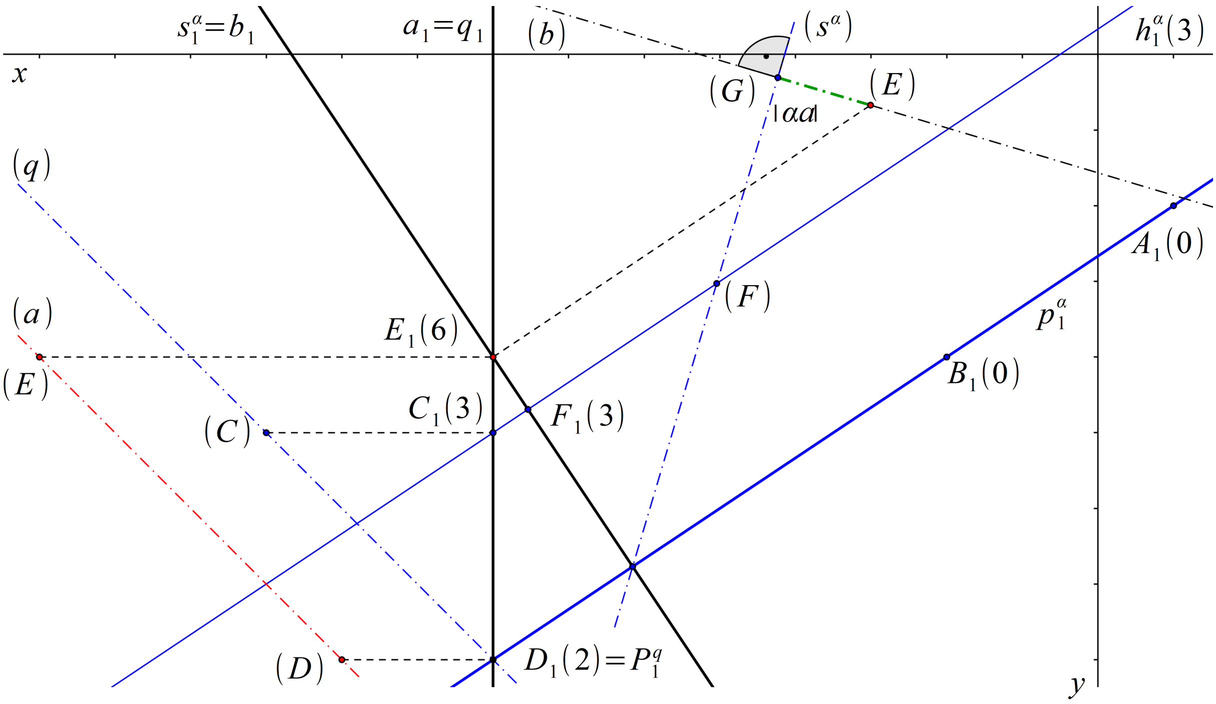
$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [-1; 2; 0], B = [2; 4; 0], C = [8; 5; 3]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [8; 8; 2], E = [8; 4; 6]$

Řešení (obr. 83)

Jelikož body A, B leží v průmětně, určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 3. Rovina α není promítací a přímka a také ne. Přímka a a rovina α tedy mohou být různoběžné i rovnoběžné (viz kapitola 7). V takovém případě si pomůžeme krycí přímkou q, pro kterou platí, že $q_1 = a_1$ a $q \subset \alpha$. Přímka q protíná hlavní přímku h^α v bodě C o kótě 3 a stopník P^q přímky q leží na stopě roviny α. Sklopíme promítací rovinu přímek a, q. Přímky (a), (q) jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že přímky a, q jsou rovnoběžné. Přímka a je tedy rovnoběžná s rovinou α a neleží v rovině α.

Vzdálenost roviny α a přímky a je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky a od roviny α. Určeme nyní hledanou vzdálenost jako vzdálenost bodu E od roviny α. Bodem E tedy vedeme kolmici b k rovině α a najdeme průsečík G přímky b s rovinou α. Hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky EG. Přímka b_1 prochází bodem E_1 kolmo ke stopě roviny α a splývá s průmětem s_1^α spádové přímky s^α roviny α. Promítací rovinu přímek b a s^α sklopíme. Sestrojíme přímku (s^α), a to pomocí známého stopníku a průsečíku F s hlavní přímkou o kótě 3. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku (b) jako kolmici vedenou bodem (E) k přímce (s^α). Průsečík (G) přímek (b) a (s^α) je sklopeným průsečíkem G přímky b a roviny α. Hledaná vzdálenost přímky a a roviny α je rovna délce úsečky $(E)(G)$.



Obr. 83: *Řešení příkladu 16.5*

Příklad 16.6

Přesvědčte se, že je přímka a rovnoběžná s rovinou α, a určete vzdálenost přímky a a roviny α.

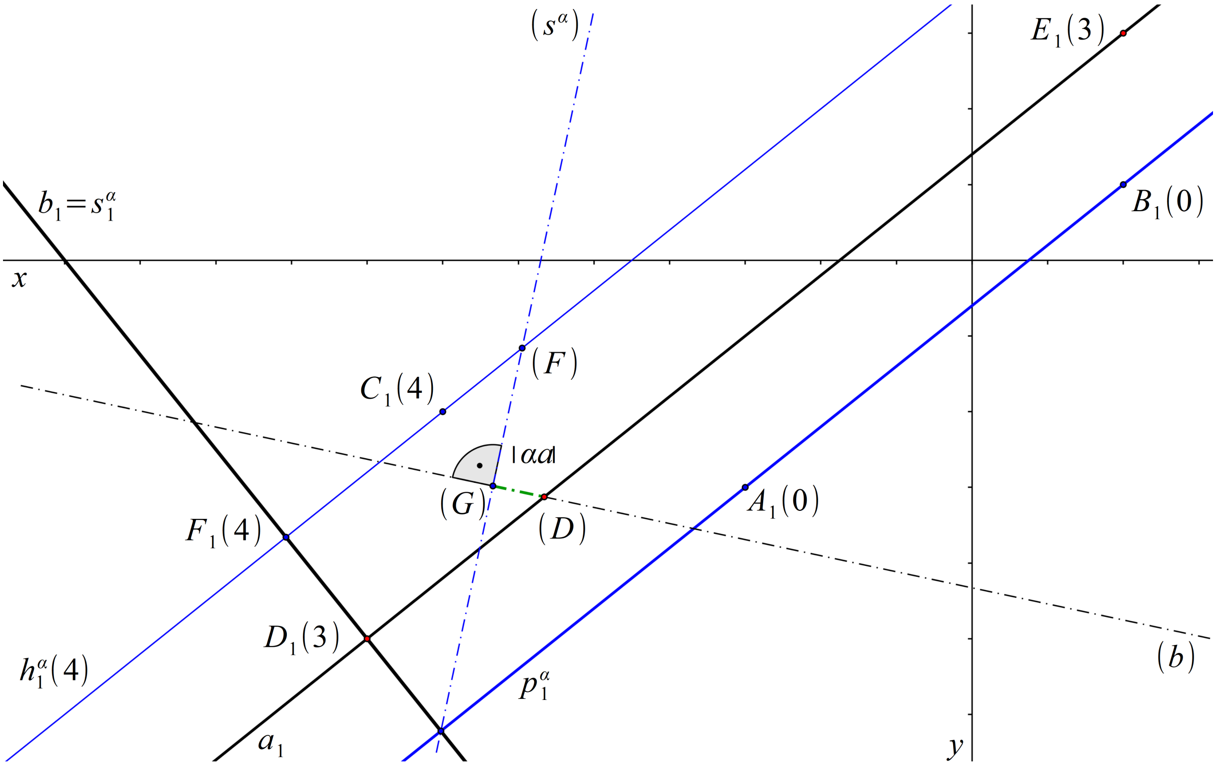
$\alpha = \leftrightarrow ABC$, $A = [3; 3; 0]$, $B = [-2; -1; 0]$, $C = [7; 2; 4]$

$a = \leftrightarrow DE$, $D = [8; 5; 3]$, $E = [-2; -3; 3]$

Řešení (obr. 84)

Body A, B leží v průmětně, proto určují stopu roviny α. Přímka h_1^α rovnoběžná se stopou roviny α vedená bodem C_1 je průmětem hlavní přímky h^α roviny α o kótě 4. Přímka a je rovnoběžná s p^α, protože body D a E mají navzájem stejnou kótu a přímka a_1 je rovnoběžná s p_1^α. Přímka a a rovina α jsou tedy rovnoběžné (viz kapitola 6).

Vzdálenost roviny α a přímky a je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky a od roviny α. Určeme nyní hledanou vzdálenost jako vzdálenost bodu D od roviny α. Bodem D vedeme kolmici b k rovině α a najdeme průsečík G přímky b s rovinou α. Hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky DG. Přímka b_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě roviny α a splývá s průmětem s_1^α spádové přímky s^α roviny α. Promítací rovinu přímek b a s^α sklopíme. Sestrojíme přímku (s^α), a to pomocí známého stopníku a průsečíku F s hlavní přímkou o kótě 4. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku (b) jako kolmici vedenou bodem (D) k přímce (s^α). Průsečík (G) přímek (b) a (s^α) je sklopeným průsečíkem G přímky b a roviny α. Hledaná vzdálenost roviny α a přímky a je rovna délce úsečky $(D)(G)$.



Obr. 84: *Řešení příkladu 16.6*

Příklad 16.7

Přesvědčte se, že je přímka a rovnoběžná s rovinou α, a určete vzdálenost přímky a a roviny α.

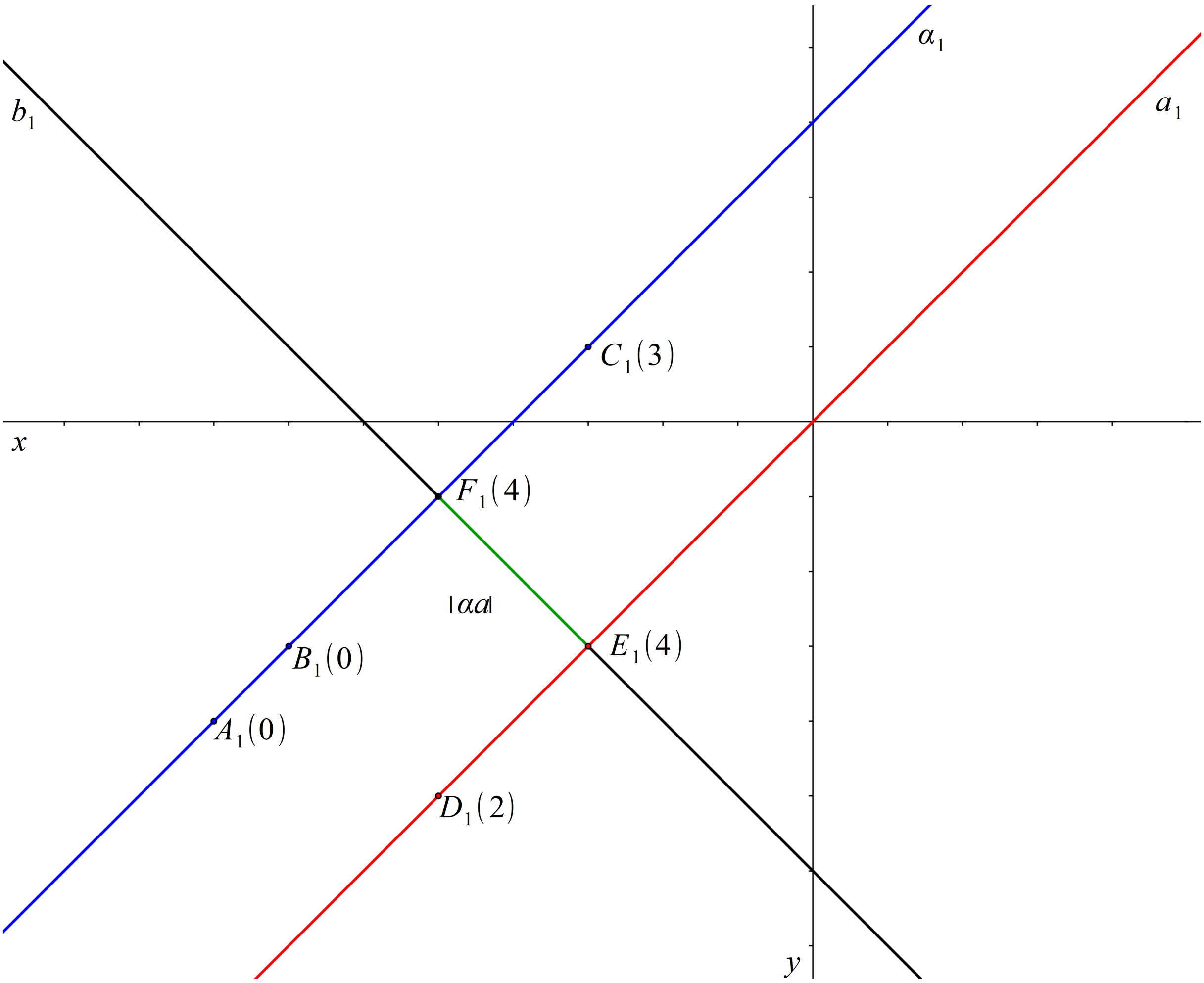
$\alpha = \leftrightarrow ABC, A = [8; 4; 0], B = [7; 3; 0], C = [3; -1; 3]$

$a = \leftrightarrow DE, D = [5; 5; 2], E = [3; 3; 4]$

Řešení (obr. 85)

Rovina α je promítací a promítá se do rovnoběžné přímky s průmětem a_1 přímky a. Z toho plyne, že rovina α a přímka a jsou rovnoběžné.

Abychom určili vzdálenost roviny α a přímky a, vedeme libovolným bodem přímky a kolmici b k rovině α. Veďme přímku b například bodem E. Vzdálenost roviny α a přímky a je nyní rovna vzdálenosti bodu E od průsečíku F přímky b s rovinou α. Protože je rovina α promítací a přímka b je k rovině α kolmá, je přímka b rovnoběžná s průmětnou. Délka úsečky EF je tedy rovna délce úsečky E_1F_1.



Obr. 85: *Řešení příkladu 16.7*

17 Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu od přímky je rovna vzdálenosti bodu od průsečíku dané přímky s rovinou, která prochází daným bodem a je k dané přímce kolmá.

V příkladech tedy určíme vzdálenost bodu A od přímky a tak, že bodem A proložíme rovinu α kolmou k přímce a. Najdeme průsečík B této roviny s přímkou a. Vzdálenost bodu A od přímky a je rovna vzdálenosti bodů A a B, proto dále můžeme postupovat jako v kapitole 15.[1]

Úlohu lze však řešit i jiným způsobem. Daný bod A a přímka a určují rovinu (pokud $A \notin a$). Vzdálenost bodu A a přímky a můžeme najít pomocí otočení této roviny do průmětny.[2]

Situace se nám zjednoduší, pokud daná přímka a daný bod určují hlavní rovinu. V takovém případě je vzdálenost bodu A od přímky a rovna vzdálenosti bodu A_1 od přímky a_1.

Situace se nám zjednoduší i v případě, že je daná přímka a promítací. V takovém případě je vzdálenost bodu A od přímky a rovna vzdálenosti bodů a_1 a A_1.[3]

Analogickým způsobem jako při určování vzdálenosti bodu od přímky budeme postupovat při hledání vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek. Vzdáleno st dvou rovnoběžných přímek definujeme jako vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. V příkladu tedy zvolíme libovolný bod jedné z daných přímek a najdeme výše uvedeným postupem vzdálenost tohoto bodu od druhé přímky.[4]

1 Viz příklad 17.1 – 1. způsob.

2 Viz příklady 17.3 a 17.1 – 2. způsob.

3 Viz příklad 17.2.

4 Viz příklady 17.4, 17.5 a 17.6.

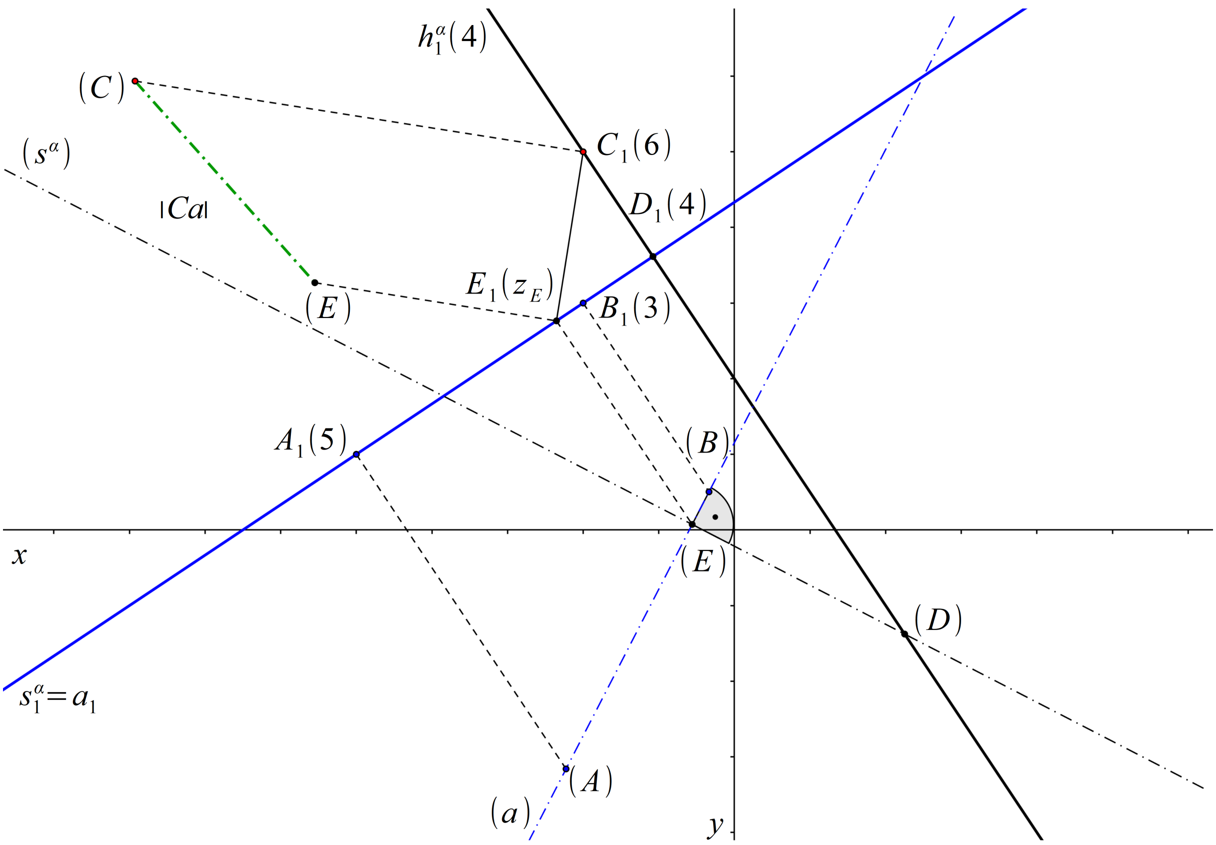
Příklad 17.1

Určete vzdálenost bodu $C = [2; -5; 6]$ od přímky a.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [5; -1; 5]$, $B = [2; -3; 3]$

Řešení – 1. způsob (obr. 86)

Abychom zjistili vzdálenost bodu C a přímky a, proložíme bodem C rovinu α kolmou k přímce a. Hledaná vzdálenost je rovna vzdálenosti bodu C od průsečíku E přímky a a roviny α. Rovnoběžka vedená bodem C_1 kolmo k přímce a_1 je průmětem hlavní přímky roviny α o kótě 4. Průsečík přímek a_1 a h_1^α je průmětem bodu D o kótě 4, který leží v rovině α i v promítací rovině přímky a. Dále sklopíme promítací rovinu přímky a. V tomto sklopení sestrojíme přímku a a spádovou přímku s^α roviny α, která v této promítací rovině leží. Přímka (s^α) prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (a). Průsečík přímek (a) a (s^α) je sklopeným průsečíkem E přímky a s rovinou α. Bod E_1 je patou kolmice vedené z bodu (E) na přímku a_1. Kóta z_E bodu E je kladná a je rovna vzdálenosti bodů (E) a E_1. Vzdálenost bodu C od přímky a je nyní rovna vzdálenosti bodů C a E. Abychom tuto vzdálenost určili, sklopíme promítací rovinu úsečky CE. Hledaná vzdálenost bodu C od přímky a je rovna vzdálenosti bodů (C) a (E).

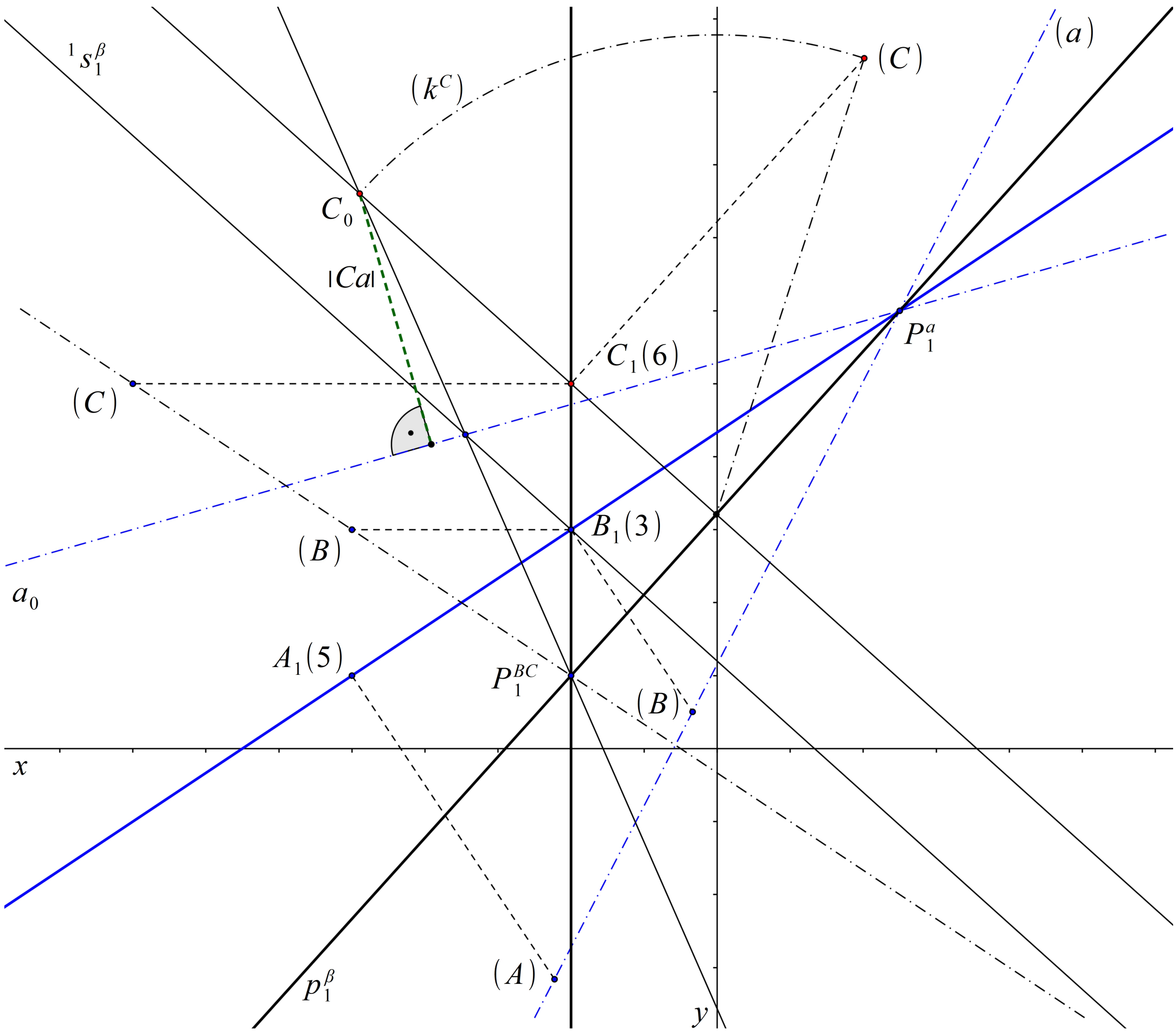


Obr. 86: *Řešení příkladu 17.1 – 1. způsob*

Řešení – 2. způsob (obr. 87)

Tento příklad rovněž můžeme řešit otočením roviny $\beta = \leftrightarrow ABC$ do průmětny, k čemuž budeme potřebovat stopu roviny β. Jedním bodem stopy p^β roviny β je stopník P^a přímky a. Jako druhý bod najdeme stopník P^{BC} přímky BC sklopením promítací roviny přímky BC.

Dále konstrukcí znázorněnou na obrázku 49 sestrojíme bod C_0. Otočíme také přímku a. Přímka a_0 prochází body B_0 a P^a. Bod B_0 najdeme pomocí osové afinity, je průsečíkem přímek C_0P^{BC} a průmětu ${}^1s_1^\beta$ spádové přímky ${}^1s^\beta$ roviny β procházející bodem B. Hledanou vzdálenost bodu C od přímky a nyní vidíme v otočení jako vzdálenost bodu C_0 od přímky a_0.



Obr. 87: *Řešení příkladu 17.1 – 2. způsob*

Závěr:

Druhý uvedený způsob řešení je konstrukčně pracnější. Oba postupy jsou naprosto univerzální, můžeme je aplikovat při jakémkoli zadání bodu a přímky.

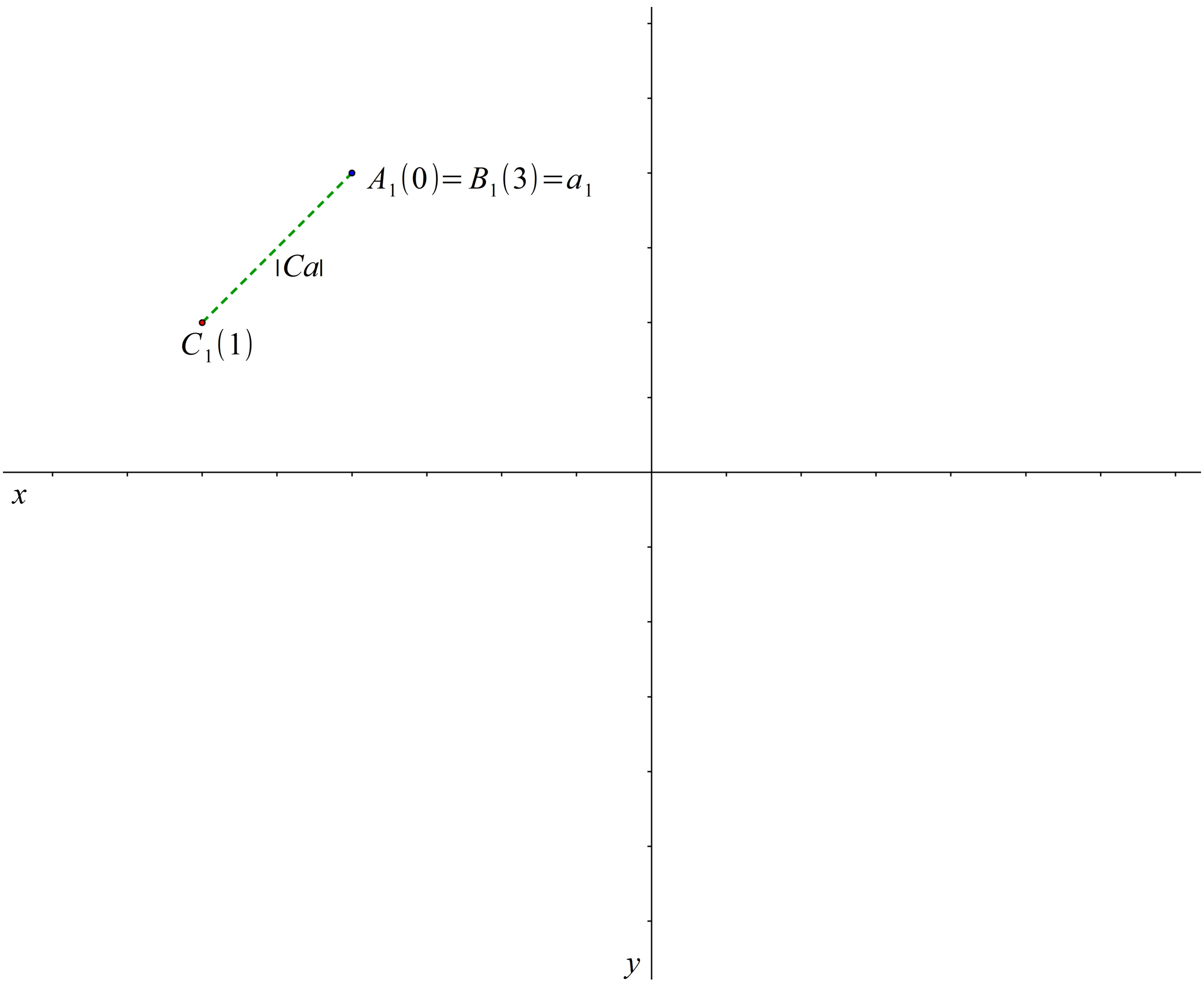
Příklad 17.2

Určete vzdálenost bodu $C = [6; -2; 1]$ od přímky a.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [4; -4; 0]$, $B = [4; -4; 3]$

Řešení (obr. 88)

Protože je zadaná přímka a kolmá k průmětně, vzdálenost bodu C od přímky a je rovna vzdálenosti bodů C_1 a a_1.



Obr. 88: *Řešení příkladu 17.2*

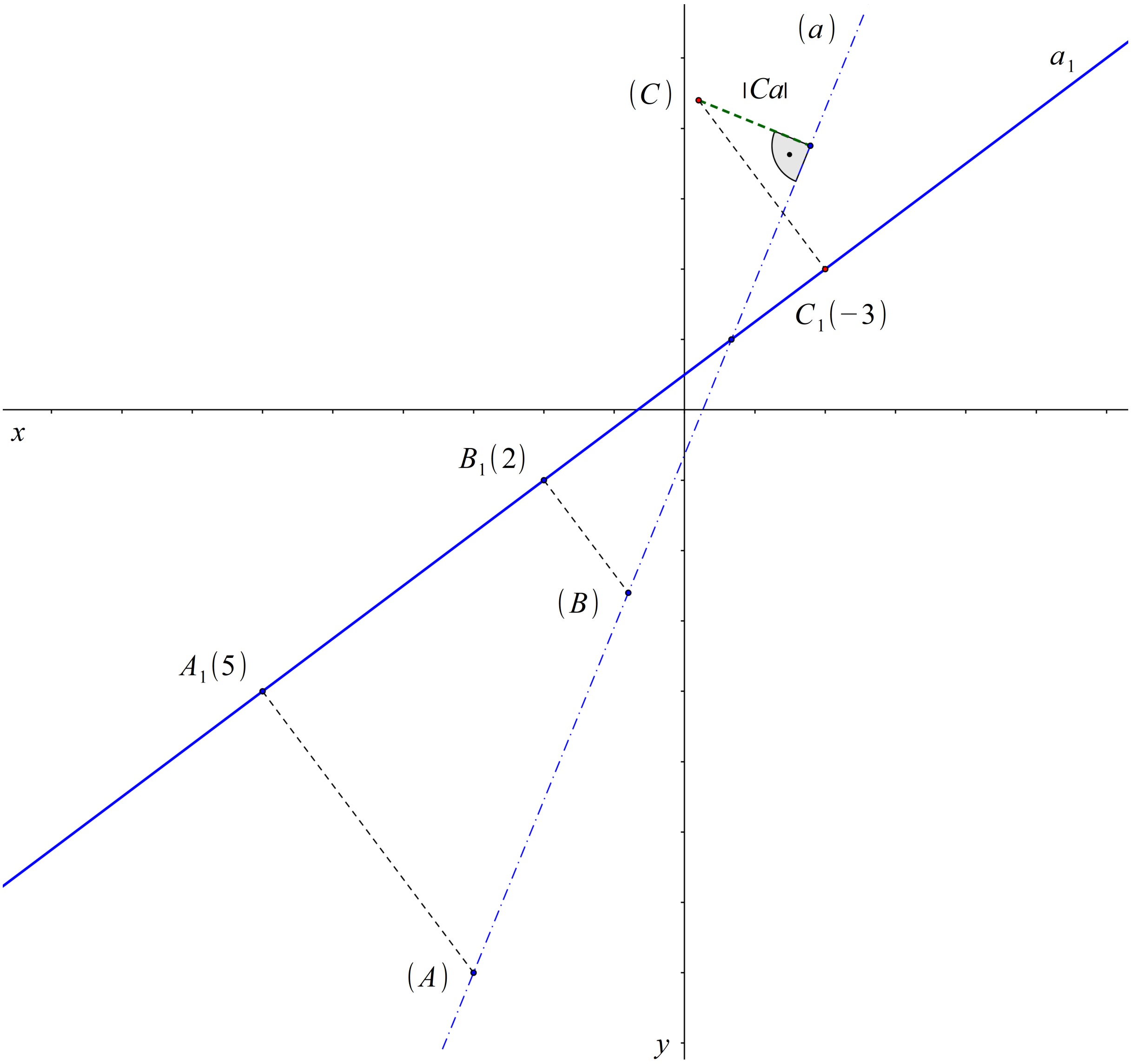
Příklad 17.3

Určete vzdálenost bodu $C = [-2; -2; -3]$ od přímky a.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [6; 4; 5]$, $B = [2; 1; 2]$

Řešení (obr. 89)

Bod C se promítá na přímku a_1. To znamená, že bod C leží v promítací rovině přímky a. Abychom určili vzdálenost bodu C od přímky a, stačí tuto promítací rovinu sklopit. Hledaná vzdálenost bodu C od přímky a je rovna vzdálenosti bodu (C) od přímky (a).



Obr. 89: *Řešení příkladu 17.3*

Příklad 17.4

Přesvědčte se, že jsou přímky a a b rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost.

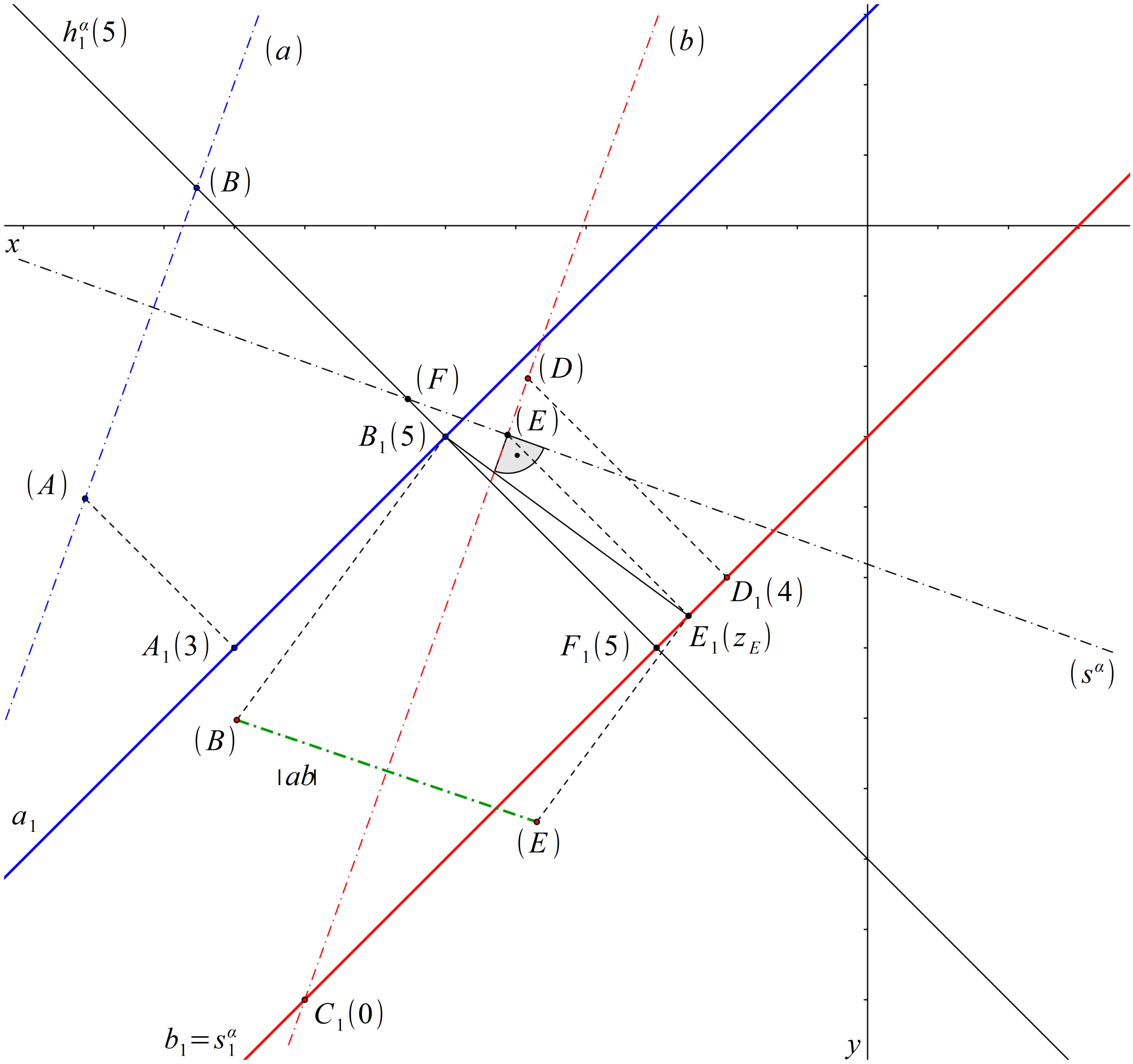
$a = \leftrightarrow AB$, $A = [9; 6; 3]$, $B = [6; 3; 5]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [8; 11; 0]$, $D = [2; 5; 4]$

Řešení (obr. 90)

Abychom se přesvědčili, že jsou přímky a a b rovnoběžné, sklopíme jejich promítací roviny „na stejnou stranu“. Přímky (a) a (b) jsou rovnoběžné, přímky a a b jsou proto také rovnoběžné (viz kapitola 4).

Vzdálenost přímek a a b je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky a od přímky b. Určeme nyní vzdálenost přímek a a b například jako vzdálenost bodu B od přímky b. Abychom zjistili vzdálenost bodu B od přímky b, proložíme bodem B rovinu α kolmou k přímce b. Hledaná vzdálenost je rovna vzdálenosti bodu B od průsečíku E přímky b a roviny α. Přímka vedená bodem B_1 kolmo k přímce b_1 je průmětem hlavní přímky roviny α o kótě 5. Průsečík přímek b_1 a h_1^α je průmětem bodu F o kótě 5, který leží v rovině α i v promítací rovině přímky b. Dále ve sklopení promítací roviny přímky b sestrojíme spádovou přímku s^α roviny α, která v této promítací rovině leží. Přímka (s^α) prochází bodem (F) a je kolmá k přímce (b). Průsečík přímek (b) a (s^α) je sklopeným průsečíkem E přímky b s rovinou α. Bod E_1 je patou kolmice vedené z bodu (E) na přímku b_1. Kóta z_E bodu E je kladná a je rovna vzdálenosti bodů (E) a E_1. Vzdálenost bodu B od přímky b je nyní rovna vzdálenosti bodů B a E. Abychom tuto vzdálenost určili, sklopíme promítací rovinu úsečky BE. Hledaná vzdálenost přímek a, b je rovna vzdálenosti bodů (B) a (E).



Obr. 90: *Řešení příkladu 17.4*

Příklad 17.5

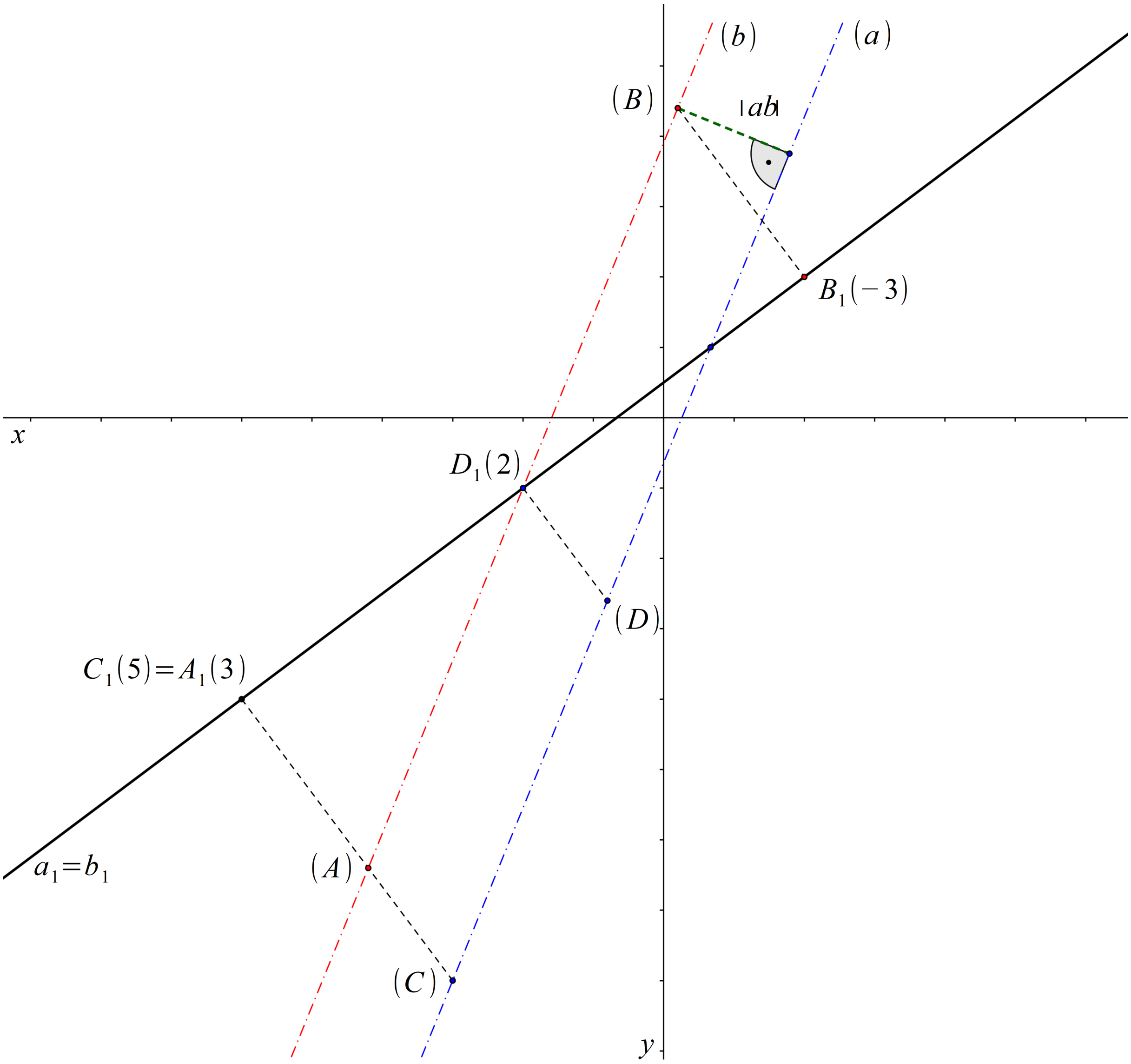
Přesvědčte se, že jsou přímky a a b rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [6; 4; 3]$, $B = [-2; -2; -3]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [6; 4; 5]$, $D = [2; 1; 2]$

Řešení (obr. 91)

Průměty přímek a, b jsou totožné přímky. Přímky a, b tedy leží v jedné promítací rovině a jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. Abychom mohli určit vzájemnou polohu těchto přímek, musíme sklopit jejich promítací rovinu. Přímky (a), (b) jsou rovnoběžné různé, a proto jsou přímky a, b rovnoběžné různé (viz kapitola 4). Vzdálenost přímek a a b je rovna vzdálenosti přímek (a) a (b).



Obr. 91: *Řešení příkladu 17.5*

Příklad 17.6

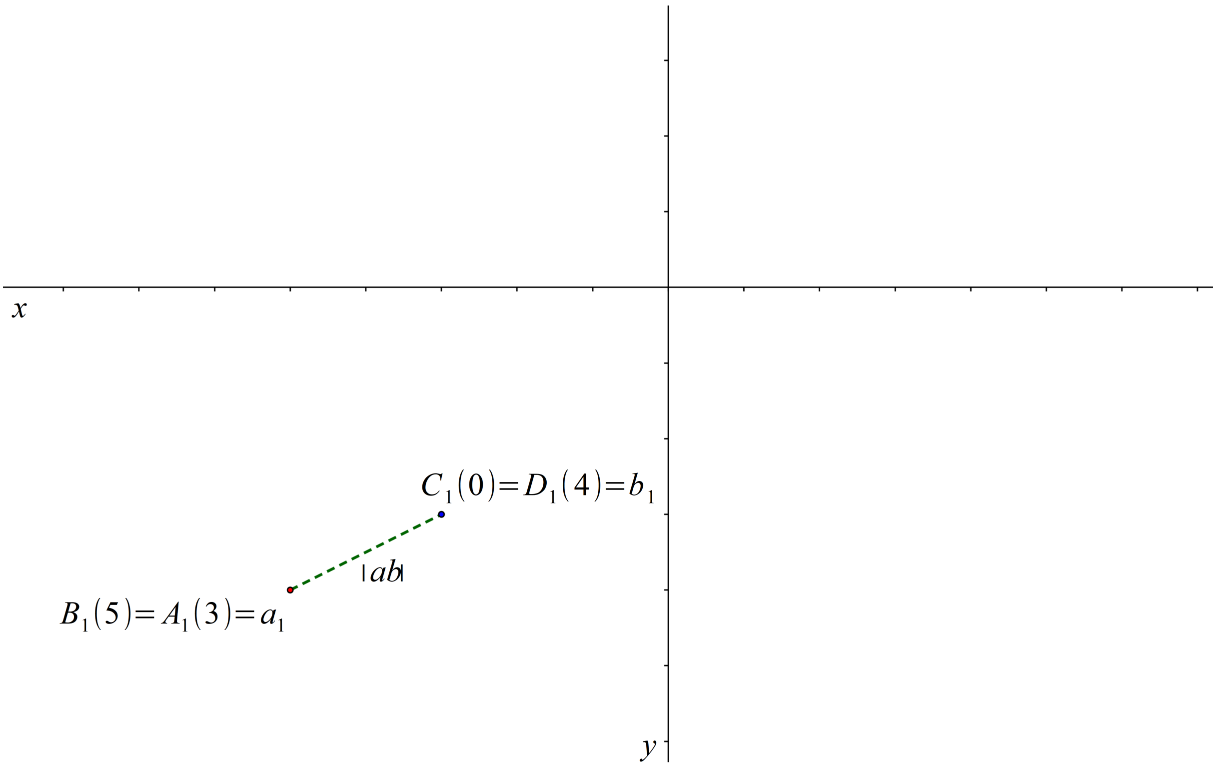
Přesvědčte se, že jsou přímky a a b rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [5; 4; 3]$, $B = [5; 4; 5]$

$b = \leftrightarrow CD$, $C = [3; 3; 0]$, $D = [3; 3; 4]$

Řešení (obr. 92)

Přímky a, b jsou promítací, což znamená, že jsou rovnoběžné. Jejich vzdálenost je rovna vzdálenosti bodů a_1 a b_1.



Obr. 92: *Řešení příkladu 17.6*

18 Vzdálenost mimoběžných přímek

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek a, b je rovna vzdálenosti rovnoběžných rovin α a β takových, že, $a \subset \alpha$ a $b \subset \beta$.

Z rovnoběžnosti rovin α a β plyne, že každá přímka roviny β, tedy i přímka b, je rovnoběžná s rovinou α.

V příkladech budeme vzdálenost mimoběžných přímek a a b hledat tak, že přímkou a proložíme rovinu α rovnoběžnou s přímkou b. Rovina α je jednoznačně určena přímkou a a přímkou $\tilde{b}$ vedenou libovolným bodem přímky a rovnoběžně s přímkou b. Protože je vzdálenost roviny β od roviny α rovna vzdálenosti libovolného bodu roviny β od roviny α a $b \subset \beta$, stačí dále najít vzdálenost libovolného bodu přímky b od roviny α stejným způsobem, jako v kapitole 16.[1]

1 Viz příklady 18.1 a 18.2.

Příklad 18.1

Přesvědčte se, že jsou přímky a a b mimoběžné, a určete jejich vzdálenost.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [1; 9; 0]$, $B = [2; 3; 4]$

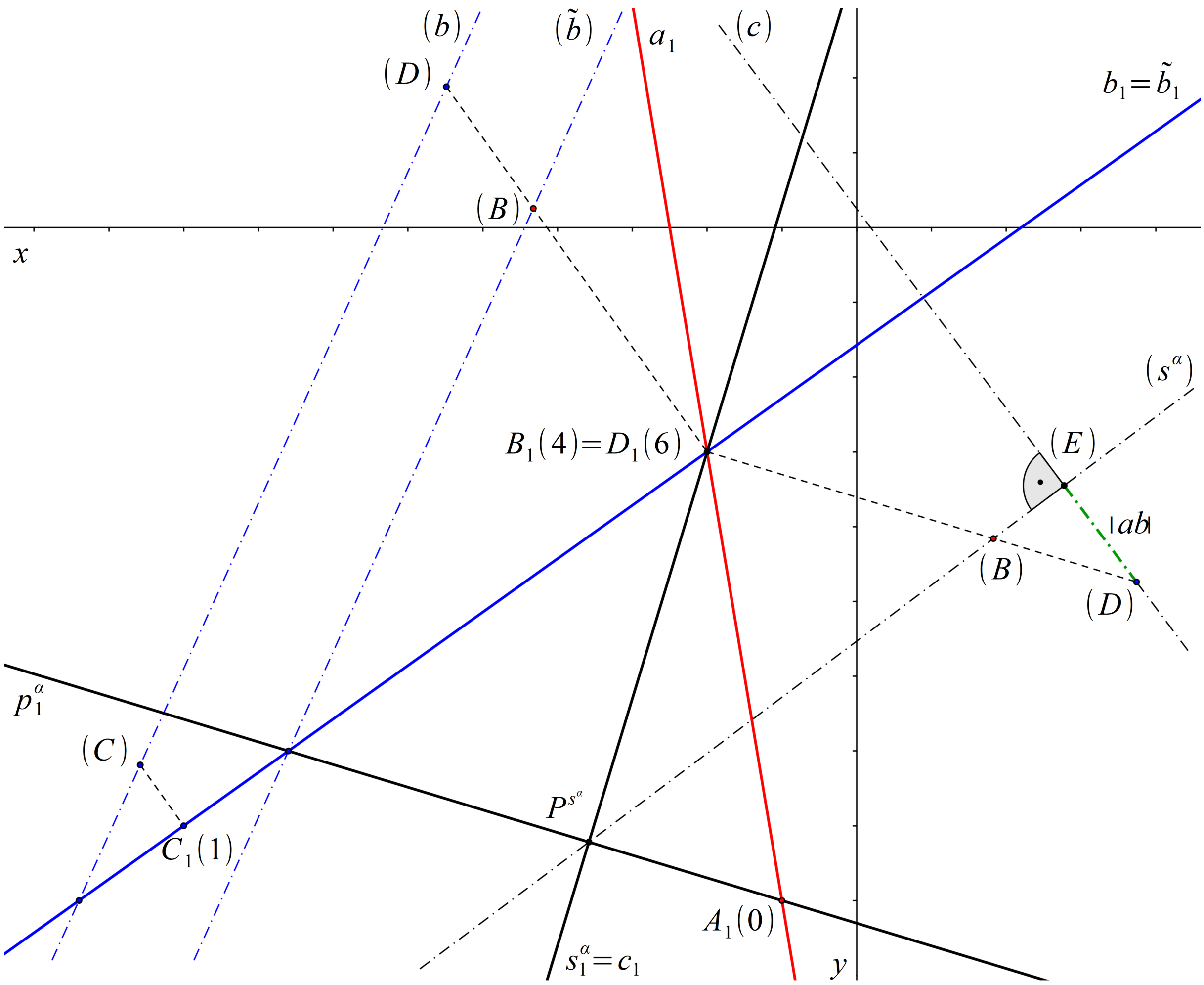
$b = \leftrightarrow BC$, $C = [9; 8; 1]$, $D = [2; 3; 6]$

Řešení (obr. 93)

Průměty přímek a a b jsou různoběžné přímky a_1 a b_1, které se protínají v bodě $B_1 = D_1$. Body B a D mají různé kóty, z čehož plyne, že přímky a a b jsou mimoběžné (viz kapitola 4).

Abychom zjistili vzdálenost přímek a a b, proložíme přímkou a rovinu α rovnoběžnou s přímkou b. Vzdálenost přímek a a b je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky b od roviny α. Rovina α je jednoznačně určena přímkou a a přímkou $\tilde{b}$ vedenou libovolným bodem přímky a rovnoběžně s přímkou b. Veďme přímku $\tilde{b}$ například bodem B. Přímky b a $\tilde{b}$ potom leží v jedné promítací rovině a jejich průměty b_1, $\tilde{b}_1$ jsou totožné přímky. Sestrojíme stopu roviny α. Protože je kóta bodu A rovna nule, je bod A jedním bodem stopy roviny α. Dalším bodem stopy roviny α je stopník $P^{\tilde{b}}$ přímky $\tilde{b}$, který určíme sklopením promítací roviny přímek b a $\tilde{b}$. Přímka $(\tilde{b})$ je rovnoběžná s přímkou (b) a prochází bodem (B).

Vzdálenost přímek a, b je nyní rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky b, například bodu D, od roviny α. Abychom zjistili vzdálenost bodu D od roviny α, najdeme pravoúhlý průmět E bodu D do roviny α (viz př. 12.3). Bod E je patou kolmice c vedené bodem D k rovině α. Přímka c_1 prochází bodem D_1 kolmo ke stopě roviny α a splývá s průmětem s_1^{α} spádové přímky s^{α} roviny α. Ve sklopení promítací roviny přímek c a s^{α} sestrojíme přímku (s^{α}) pomocí známého stopníku $P^{s^{\alpha}}$ a bodu B. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku c. Přímka (c) prochází bodem (D) a je kolmá k přímce (s^{α}). Průsečík přímek (s^{α}) a (c) je sklopeným pravoúhlým průmětem E bodu D do roviny α. Hledaná vzdálenost bodu D od roviny α je rovna vzdálenosti bodů (E) a (D).



Obr. 93: *Řešení příkladu 18.1*

Příklad 18.2

Přesvědčte se, že jsou přímky a a b mimoběžné, a určete jejich vzdálenost.

$a = \leftrightarrow AB$, $A = [-3; 1; 6]$, $B = [-7; -3; 3]$

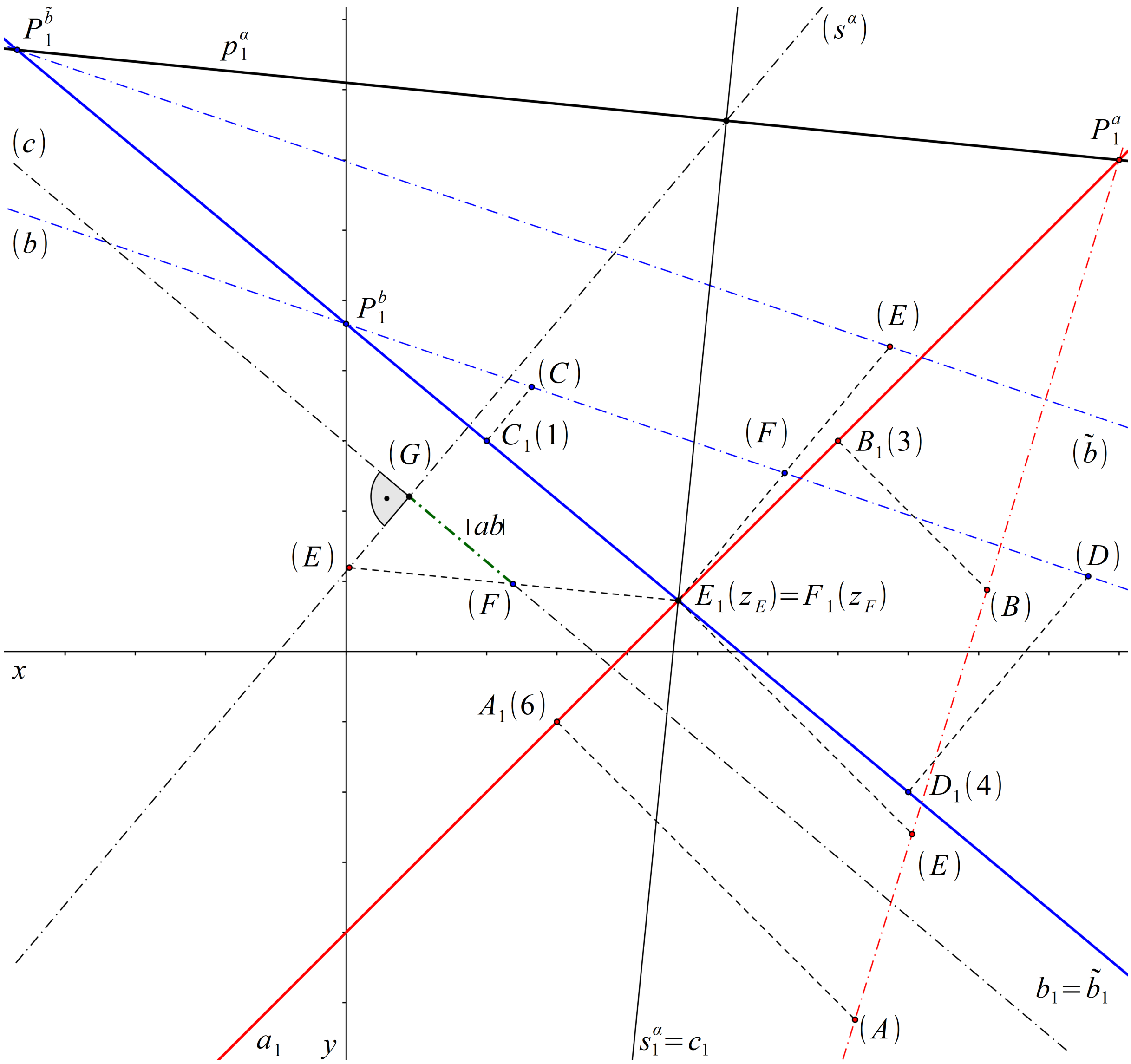
$b = \leftrightarrow CD$, $C = [-2; -3; 1]$, $D = [-8; 2; 4]$

Řešení (obr. 94)

Průměty přímek a, b jsou různoběžné přímky. Přímky a, b tedy mohou být různoběžné nebo mimoběžné (viz příklad 4.1). Průsečík přímek a_1, b_1 je průmětem bodů E a F, kde $E \in a$ a $F \in b$. Pokud mají body E, F stejnou kótu, josu totožné. Přímky a, b jsou potom různoběžné. V opačném případě jsou mimoběžné. Kóty bodů E, F zjistíme pomocí sklopení promítacích rovin přímek a, b. Vidíme, že $z_E = |E_1(E)| > z_F = |F_1(F)|$, což znamená, že přímky a, b jsou mimoběžné.

Abychom zjistili vzdálenost přímek a a b, proložíme přímkou a rovinu α rovnoběžnou s přímkou b. Vzdálenost přímek a a b je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky b od roviny α. Rovina α je jednoznačně určena přímkou a a přímkou $\tilde{b}$ vedenou libovolným bodem přímky a rovnoběžně s přímkou b. Veďme přímku $\tilde{b}$ například bodem E. Přímky b a $\tilde{b}$ potom leží v jedné promítací rovině a jejich průměty b_1, $\tilde{b}$ jsou totožné přímky. Sestrojíme stopu roviny α, která je spojnicí stopíků P^a přímky a a $P^{\tilde{b}}$ přímky $\tilde{b}$. Jedním bodem stopy roviny α je stopním P^a přímky a. Dalším bodem stopy roviny α je stopník $P^{\tilde{b}}$ přímky $\tilde{b}$, který určíme sklopením promítací roviny přímek b a $\tilde{b}$. Přímka ($\tilde{b}$) je rovnoběžná s přímkou (b) a prochází bodem (B).

Vzdálenost přímek a, b je nyní rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky b, například bodu F, od roviny α. Abychom zjistili vzdálenost bodu F od roviny α (viz př. 12.3), najdeme pravoúhlý průmět G bodu F do roviny α. Bod G je patou kolmice c vedené bodem F k rovině α. Přímka c_1 prochází bodem F_1 kolmo ke stopě roviny α a splývá s průmětem s_1^α spádové přímky s^α roviny α. Ve sklopení promítací roviny přímek c a s^α sestrojíme přímku (s^α) pomocí známého stopníku P^{s^α} a bodu E. Dále v tomto sklopení sestrojíme přímku c. Přímka (c) prochází bodem (F) a je kolmá k přímce (s^α). Průsečík přímek (s^α) a (c) je sklopeným pravoúhlým průmětem G bodu F do roviny α. Hledaná vzdálenost bodu F od roviny α je rovna vzdálenosti bodů (F) a (G).



Obr. 94: *Řešení příkladu 18.2*

Závěr

V předloženém učebním materiálu jsme podali výklad části středoškolského učiva kótovaného promítání. V tomto promítaní jsme řešili vzájemné polohy přímek a rovin. Také jsme se zabývali průnikem mnohoúhelníků a teoretickým řešením střech, kde jsme aplikovali poznatky o vyšetřování vzájemné polohy dvou rovin. Rovněž jsme určovali odchylky přímek a rovin nebo vzdálenosti bodů, přímek a rovin.

Vybrali jsme nejčastěji vyučovaná témata podle toho, co vyplynulo z dotazníkového šetření (viz tab. 5). Snažili jsme se řešenými příklady podchytit co nejvíce různých vzájemných poloh zadaných objektů včetně případů, kdy mají speciální polohy vůči průmětně, protože jsme zjistili, že takových řešených úloh v současných výukových materiálech nelze najít mnoho. Z našich zkušeností vyplývá, že je na tyto případy kladen menší důraz a žáci s nimi mívají potíže.

Práce by měla být přínosem pro středoškolské žáky a učitele deskriptivní geometrie. Žáci v ní najdou podrobný výklad učiva a popis řešení konstrukčních úloh doplněný o obrázky se samotnou konstrukcí. Učitelé zde mohou čerpat zadání úloh do výuky a promítnout krokované konstrukce.

Celá práce je zpřístupněna také pomocí přehledných internetových stránek, které v budoucnu bude možné rozšířit o další kapitoly, například *Hranaté těleso v obecné poloze*, *Průnik přímky s hranatým tělesem* nebo *Topografické plochy.*

Použitá literatura

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.

[2] MUSÁLKOVÁ, Bohdana. *Deskriptivní geometrie II*. 1. vydání. Praha: Sobotáles, 2000. ISBN 80-85920-65-4.

[3] DRS, Ladislav. *Deskriptivní geometrie pro střední školy I*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-321-6.

[4] DVOŘÁKOVÁ, Miroslava. *Kótované promítání.* Brno, 2007. Diplomová práce. Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně, Katedra matematiky.

[5] MAŇÁSKOVÁ, Eva. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 80-85920-65-4.

[6] KUPČÁKOVÁ, Marie. *Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-244-1.

[7] HARANT, M., LANTA, O., URBAN, A., MENŠÍK, M. *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*. Praha: SPN, 1965.

[8] Deskriptivní geometrie. In: *Metodický portál RVP* [online]. 21. 10. 2005 [cit. 2018-07-12]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/370/deskriptivni-geometrie.html/

Literatura doporučená k dalšímu studiu

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. 3., nezměněné vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1982.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Přehled použitých znaků a symbolů

$A \in a$ bod A leží na přímce a

$a \subset \alpha$ přímka a leží v rovině α

A_1 průmět bodu A

(A) sklopený bod A

a_1 průmět přímky a

(a) sklopená přímka a

P^a stopník přímky a

p^α stopa roviny α

h^α hlavní přímka roviny α

s^α spádová přímka roviny α

Přílohy

A Krokované konstrukce

Součástí této práce jsou jako přílohy také krokované konstrukce ve formátu *.pdf, které jsou uloženy na přiloženém CD. Ke zhlédnutí je třeba mít nainstalovaný prohlížeč dokumentů ve formátu *.pdf, např. Adobe Reader.

Krokované konstrukce jsou uloženy ve stejnojmenné složce. Po kliknutí na číslo kapitoly se rozbalí seznam jednotlivých konstrukcí značených podle textové části.

Jednotlivé kroky prezentace odpovídají popisu řešení příkladu v textové části.

3 Zobrazení přímky

- Příklad 3.2
- Příklad 3.3

4 Vzájemná poloha dvou přímek

- Příklad 4.1
- Příklad 4.4
- Příklad 4.8

5 Zobrazení roviny

- Příklad 5.2
- Příklad 5.3

6 Vzájemná poloha přímky a roviny

- Příklad 6.1
- Příklad 6.3

7 Vzájemná poloha dvou rovin

- Příklad 7.1
- Příklad 7.2
- Příklad 7.5

10 Otáčení roviny

- Příklad 10.1

11 Odchylka dvou přímek

Příklad 11.1

12 Kolmost přímky a roviny

Příklad 12.2

Příklad 12.4

13 Odchylka přímky od roviny

Příklad 13.3

14 Odchylka dvou rovin

Příklad 14.3

16 Vzdálenost bodu od roviny

Příklad 16.2

Příklad 16.3

Příklad 16.6

17 Vzdálenost bodu od přímky

Příklad 17.3

Příklad 17.4

B Dotazník

DOTAZNÍK ZJIŠŤUJÍCÍ SOUČASNÝ STAV VÝUKY KÓTOVANÉHO PROMÍTÁNÍ A PRAVOÚHLÉ AXONOMETRIE NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vážená paní učitelko, vážený pane učiteli,

právě jste otevřeli dotazník, v němž zjišťujeme, co se vyučuje na středních školách v hodinách deskriptivní geometrie. Vaše odpovědi pomohou dvěma vznikajícím diplomovým pracím, jejichž cílem je poskytnout žákům studijní podklady a vyučujícím materiály, které budou moci použít ve své výuce. Děkujeme za čas, který nám věnujete.

Lenka Janišová a Martina Magová,

studentky učitelství M+DG na MFF UK v Praze

Dotazník je rozdělen na tři části: část obecnou, která se týká celkově výuky deskriptivní geometrie (DG), a dvě části konkrétní, ve kterých pokládáme otázky k výuce kótovaného promítání a pravoúhlé axonometrie. Pokud některé partie nevyučujete, nevadí. Vyplnění dotazníku je pro nás i tak cenné.

Odpovídejte pokud možno **jménem celého pedagogického sboru**. Zajímá nás přístup Vaší školy, nikoliv jednotlivých učitelů.

Obecné otázky

Je-li políčko s odpovědí prázdné, napište slovní odpověď. Pokud je vyplněné možnostmi ANO / NE, smažte nehodící se nebo zvýrazněte vhodné odpovědi.

otázka:	**odpověď:**
Napište prosím, v jakém **oboru** vyučujete DG[1]:	gymnázium / technické lyceum / v jiném:
Napište **název předmětu**, ve kterém DG vyučujete:	
Skládají absolventi maturitní zkoušku?	ANO – všichni povinně / ANO – zkouška je volitelná či dobrovolná / NE
Jaká je forma maturitní zkoušky z DG?	písemná / ústní / samostatná práce[2]
Uveďte týdenní **hodinovou dotaci DG** v tomto	

1 Pokud vyučujete deskriptivní geometrii ve více oborech, **vyplňte prosím dotazník pro každý obor zvlášť**.
2 Zde nerozlišujeme maturitní práci od absolventského projektu, příp. jinak pojmenované samostatné práce.

předmětu v 1./2./3./4. ročníku[3]:	
Vypište za sebou promítání v tom pořadí, v jakém je probíráte. K vypsaným promítáním udejte celkovou hodinovou dotaci za studium[4].	1. 2. …
Uveďte **počet rysů**, které ročně zadáváte: (rysem rozumíme dlouhodobou domácí práci, NE BĚŽNÝ DOMÁCÍ ÚKOL)	
Vypište učebnice, ze kterých nejčastěji čerpáte **výklad kótovaného promítání**:	
Vypište učebnice, ze kterých nejčastěji čerpáte **výklad pravoúhlé axonometrie**:	
Vypište učebnice, ze kterých nejčastěji čerpáte **příklady na kótované promítání**:	
Vypište učebnice, ze kterých nejčastěji čerpáte **příklady na pravoúhlou axonometrii**:	
Používáte v úlohách pravotočivou nebo levotočivou soustavu souřadnic?	pravotočivou / levotočivou / obě, snažíme se je prostřídat
Používáte ve výuce DG dataprojektor?	ANO / NE
Rýsují žáci na počítači?	ANO, rýsujeme v hodinách / ANO, zejména domácí práce / ANO, ale v jiném předmětu / NE
– Pokud ano, jaký software používáte?	

Kótované promítání

V políčku pro odpověď smažte nehodící se nebo zvýrazněte vhodné odpovědi.

otázka:	**odpověď:**
Předchází kótované promítání Mongeovu promítání?	ANO / NE

Uveďte prosím, zda se v KÓTOVANÉM PROMÍTÁNÍ věnujete následujícím tématům:

téma:	**odpověď:**
vzdálenost bodu od roviny	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
vzdálenost bodu od přímky	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE

3 Zadejte např. 0231, je-li dotace 0 hodin v 1. ročníku, 2 hodiny ve 2. ročníku, 3 hodiny ve 3. ročníku a 1 hodina ve 4. ročníku.
4 Odpovězte např. 1. kótované promítání 40 hodin, 2. Mongeovo promítání 100 hodin, …

odchylka dvou přímek	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
hranaté těleso v obecné poloze	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
průnik přímky s hranatým tělesem	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
řezy hranatých těles	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
oblá tělesa	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
průnik těles	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
teoretické řešení střech	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
topografické plochy	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
osvětlení	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE

Pravoúhlá axonometrie

V políčku pro odpovědi smažte nehodící se nebo zvýrazněte vhodné odpovědi.

otázka:	**odpověď:**
Předchází zobrazení bodu zadaného souřadnicemi polohovým úlohám?	ANO / NE
Jaké modely používáte pro demonstraci axonometrické roviny a souřadnicových rovin?	žádné / kout místnosti / každý žák (nebo skupinka) má k dispozici vlastní model / jiné:
Do jaké hloubky se v PRAVOÚHLÉ AXONOMETRII věnujete řezu sféry?	**provádíme řezy rovinami, které jsou:** rovnoběžné se souřadnicovými rovinami a prochází středem sféry / rovnoběžné se souřadnicovými rovinami, ale nemusí procházet středem sféry / rovnoběžné se souřadnicovými osami / provedeme i řez obecnou rovinou

Uveďte prosím, zda se v PRAVOÚHLÉ AXONOMETRII věnujete následujícím tématům:

téma:	**odpověď:**
vzdálenost bodu od počátku	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
délka úsečky v prostoru	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
rovinný útvar v obecné rovině (otočení obecné roviny do axonometrické roviny)	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
řez tělesa rovinou, která NENÍ KOLMÁ k pomocné průmětně	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
osvětlení	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE
průnik těles	ANO, látku zkoušíme / ANO, látku pouze vysvětlíme / NE