



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Vladimír Berdák

Kvantifikace rizika v pojištění důchodu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Bc. Vladimír Berdák

Chcel by som sa poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za cenné rady, čas a trpezlivosť, ktorú mi venovala počas vypracovania tejto práce.

Ďakujem aj mojim rodičom za podporu počas celého štúdia.

Název práce: Kvantifikace rizika v pojištění důchodu

Autor: Bc. Vladimír Berdák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce zkoumá vliv jednotlivých rizik na důchodový produkt. Zaměřuje se na produkt doživotního důchodu odloženého o k let a na dvě základní rizika, která mají největší vliv na celkovou ztrátu. Jde o riziko úrokových měr a riziko dlouhověkosti. Jako sledované míry rizika jsou zvoleny směrodatná odchylka (σ), hodnota v riziku (VaR) a očekávaná ztráta (ES) na různých hladinách spolehlivosti. Na rozklad celkové ztráty je použita Hoeffdingova dekompozice. Následně je aplikována Eulerova alokační metoda, která odhaluje, jaká zastoupení mají v tomto pojištění jednotlivá rizika pro různé vstupní věky.

Klíčová slova: riziko úrokových měr, riziko dlouhověkosti, Eulerova alokační metoda, Hoeffdingova dekompozice

Title: Risk quantification in annuity insurance

Author: Bc. Vladimír Berdák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis examines the impact of individual risks on an annuity product. It focuses on the deferred whole life annuity and on two basic risks, which affect the overall loss the most. These are interest rate risk and longevity risk. We choose standard deviation (σ), value at risk (VaR) and expected shortfall (ES) at different confidence levels for target risk measures. Hoeffding decomposition is used to split the overall loss. Then Euler allocation principle will show the distribution of individual risks for different entry ages.

Keywords: interest rate risk, longevity risk, Euler allocation principle, Hoeffding decomposition

Názov: Kvantifikácia rizika v poistení dôchodkov

Autor: Bc. Vladimír Berdák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca skúma vplyv jednotlivých rizík na dôchodkový produkt. Zameriava sa na produkt doživotného dôchodku odloženého o k rokov a na dve základné rizika, ktoré majú najväčší vplyv na celkovú stratu. Ide o riziko úrokových mier a riziko dlhovekosti. Ako sledované miery rizika sú zvolené smerodajná odchylka (σ), hodnota v riziku (VaR) a očakávaná strata (ES) na rôznych hladinách spoľahlivosti. Na rozloženie celkovej straty portfólia je použitá Hoeffdingova dekompozícia. Následne je aplikovaná Eulerova alokačná metóda, ktorá odhaľuje, aké zastúpenie majú v tomto poistení jednotlivé riziká pre rôzne vstupné veku.

Kľúčové slová: riziko úrokových mier, riziko dlhovekosti, Eulerova alokačná metóda, Hoeffdingova dekompozícia

Obsah

Úvod	2
1 Poistenie a hlavné rizikové faktory	3
1.1 Poistenie	3
1.2 Poistno-matematické nástroje	4
1.3 Poistenie doživotného dôchodku	8
1.4 Riziko dlhovekosti	8
1.4.1 Lee-Carterov model	9
1.5 Riziko úrokových mier	12
1.5.1 Cox-Ingersoll-Rossov model	13
2 Riziko portfólia	14
2.1 Miery rizika	15
2.2 Axiomatický prístup k meraniu rizika	15
2.2.1 Smerodajná odchýlka - σ	16
2.2.2 Hodnota v riziku - VaR	16
2.2.3 Očakávaná strata - ES	16
2.3 Eulerova alokačná metóda pre subportfólia	17
2.4 Hoeffdingova dekompozícia	22
2.5 Eulerova alokačná metóda s využitím Hoeffdingovej dekompozície	24
3 Aplikácia na poistenie dôchodkov	26
3.1 Pridávanie jednotlivých rizikových faktorov	26
3.2 Použitie Eulerovej alokačnej metódy s využitím Hoeffdingovej dekompozície	28
3.2.1 Smerodajná odchýlka - σ	31
3.2.2 Hodnota v riziku - VaR	32
3.2.3 Očakávaná strata - ES	33
Záver	36
Zoznam použitej literatúry	37
Zoznam obrázkov	39
Zoznam tabuliek	40

Úvod

Správne riadenie finančného rizika je nevyhnutné na to, aby každá finančná inštitúcia mohla bezpečne vykonávať svoju činnosť. Akékoľvek druhy rizík, ktorým čelí finančná inštitúcia, by mali byť nepretržite kvantifikované, hlásené a kontrolované. Podstatou je určiť dostatočný kapitál tak, aby bola daná firma solventná. Tento kapitál sa používa v prípade neočakávaných strát z možných rizík. Je nutné, aby inštitúcia mala potrebné množstvo kapitálu tak, aby bola jej solventnosť na vysokej úrovni. Úlohou teda ostáva identifikácia jednotlivých rizík a ich následná kvantifikácia.

Práca sa inšpiruje článkom Karabey, Kleinow a Cairns (2014). Prínosom tejto práce je použitie iného modelu úmrtnosti, s použitím na české dáta a na odlišný produkt životného poistenia. Rozdiel je taktiež v tom, že v článku je skúmaná budúca cena dôchodkov z pohľadu klienta. V tejto práci ale skúmame náhodnú veličinu predstavujúcu stratu z pohľadu poisťovne vzťahnutú k dnešku.

V prvej kapitole zavedieme základne pojmy a matematicko-poistné nástroje. Následne popíšeme pre túto diplomovú prácu zvolený produkt a rozoberieme hlavné rizikové faktory, ktoré ho ovplyvňujú. Postupne predstavíme model úmrtnosti a model úrokových mier.

V druhej kapitole sa sústredíme na riziko portfólia. Popíšeme jednotlivé vlastnosti mier rizika a vyberieme si tri miery, ktoré budeme neskôr porovnávať pri hodnotení výpočetných výsledkov. Taktiež v tejto kapitole popíšeme teóriu týkajúcu sa Eulerovej alokačnej metódy a Hoeffdingovej dekompozície, ktoré budeme neskôr taktiež používať.

V záverečnej tretej kapitole prezentujeme vlastné výsledky.

1. Poistenie a hlavné rizikové faktory

V úvode prvej kapitoly zopakujeme základné termíny z oblasti poisťovníctva a potrebné poisťno-matematické nástroje. Následne uvedieme popis produktu, s ktorým budeme v diplomovej práci pracovať. Potom rozoberieme hlavné rizikové faktory, ktoré najviac ovplyvňujú zvolený produkt. Nakoniec uvedieme modely, pomocou ktorých budeme modelovať a predikovať miery úmrtnosti, resp. úrokové miery.

1.1 Poistenie

Na poistenie môžeme pozeráť ako na nástroj finančnej eliminácie negatívnych dôsledkov náhody, ako sú napríklad pracovný úraz, choroba, smrť, poškodenie majetku v dôsledku prírodnej katastrofy alebo odcudzenie majetku. Poistenie sa uzatvára poisťnou zmluvou medzi poisťiteľom a poisťníkom. V Českej republike o tom presnejšie hovorí občiansky zákonník upravený zákonom č. 89/2012 Sb., účinný od 1.1.2014: „Poisťnou smlouvou se poisťitel zavazuje vůči poisťníkovi poskytnout jemu nebo třetí osobě poisťné plnění, nastane-li nahodilá událost krytá pojištěním (poisťná událost), a poisťník se zavazuje zaplatit poisťiteli poisťné.“

Rozoberme podrobnejšie niektoré základné pojmy z oblasti poisťovníctva.

Poisťné riziko je nebezpečenstvo, ktoré môže viesť k vzniku poisťnej udalosti.

Poisťné plnenie môžeme deliť do troch kategórií:

1. *jednorázovo vyplatená poisťná čiastka* (v nedôchodkovom životnom poistení),
2. *dôchodok* (v dôchodkovom poistení), ktorý sa môže ešte deliť na:
 - a) životný dôchodok - každá ďalšia výplata dôchodku je podmienená tým, že poistený je nažive,
 - b) istý dôchodok - vypláca sa po stanovenú dobu bez nutnosti, aby poistený bol nažive,

3. *oslobodenie od platenia poisťného* - v prípade invalidity poisťníka. Ten je oslobodený od platenia poisťného a túto povinnosť na seba preberá poisťovňa, ktorá sa na to pozerá ako na ďalší typ poisťného plnenia.

Existujú rôzne spôsoby platenia poisťného. Prvou možnosťou je jednorázové poisťné zaplatené na začiatku poistenia. Druhou možnosťou sú pravidelné splátky v rovnakej výške. Treťou možnosťou sú pravidelné splátky v rôznych výškach.

Pri platení poisťného sa dodržiava, že poisťné sa platí predlehotne, pred uplynutím poisťnej doby a pred nástupom poisťného plnenia.

Technická úroková miera (TÚM) - je úroková miera používaná k vyjadreniu časovej hodnoty peňazí v životnom poistení. Predstavuje také zhodnotenie poisťného, na ktoré má klient zmluvný nárok. Výška TÚM sa volí konzervatívne.

V České republice zákonná vyhláška stanovovala hornú hranicu pre TÚM, ktorú vyhlasovala Česká národná banka (ČNB). Výška maximálnej TÚM začala byť regulovaná v apríli 2002, kedy bola stanovená vo výške 4 %. Do tejto doby bolo možné sa stretnúť aj s výrazne vyššou TÚM, pretože aj úrokové sadzby v devädesiatych rokoch boli vysoké. K poslednej úprave pristúpila ČNB 14.1.2015 a to na 1,3 %.

Avšak s účinnosťou zákona č. 304/2016 Sb., ktorý mení zákon č. 277/2009 Sb., o poisťovníctve, od 23.9.2016 úloha ČNB stanovovať TÚM zaniká a každá poisťovňa si ju určuje sama v rámci vlastného riadenia rizík.

V tejto diplomovej práci sa zameriame len na poistenie osôb, v rámci ktorého je možné zjednať:

1. *poistenie pre prípad smrti*, kde poistnou udalosťou je smrť poisteného,
2. *poistenie pre prípad dožitia*, kde poistnou udalosťou je dožitie poisteného do zjednaného veku,
3. *zmiešané poistenie*, kde poistnou udalosťou je smrť alebo dožitie poisteného do zjednaného veku, podľa toho, čo nastane skôr,
4. *dôchodkové poistenie*, kde sa jedná o špeciálne poistenie pre prípad dožitia, s pravidelne sa opakujúcim poistným plnením vo forme výplaty dôchodku.

V tejto práci sa zameriame len na dôchodkové poistenie, konkrétne na poistenie doživotného dôchodku, ktoré bližšie popíšeme v časti 1.3.

1.2 Poistno-matematické nástroje

Nech T_0 je náhodná veličina vyjadrujúca dĺžku života práve narodeného jedinca. Pravdepodobnostné rozdelenie tejto náhodnej veličiny popisuje distribučná funkcia F_0 :

$$F_0(t) = \mathbb{P}(T_0 \leq t).$$

Zároveň je možné zaviesť funkciu prežitia nasledujúcim spôsobom:

$$S_0(t) = \mathbb{P}(T_0 > t) = 1 - F_0(t).$$

V praxi je však zaujímavejšia náhodná veličina T_x , ktorá vyjadruje zostávajúcu dĺžku života osoby vo veku x . Inými slovami je to doba, po ktorú bude táto osoba ešte nažive.

Predpoklad. *Rozdelenie zostávajúcej doby života osoby vo veku $x + s$ (t.j. T_{x+s}) pre $s > 0$, je zároveň podmieneným rozdelením veličiny $T_x - s$ za podmienky $T_x > s$.*

$$\begin{aligned}
F_x(t) &= \mathbb{P}(T_x \leq t) \stackrel{predp.}{=} \mathbb{P}(T_0 \leq x+t | T_0 > x) = \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \\
&= \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}.
\end{aligned}$$

Podobne platí pre funkciu prežitia vo veku x :

$$\begin{aligned}
S_x(t) &= \mathbb{P}(T_x > t) \stackrel{predp.}{=} \mathbb{P}(T_0 > x+t | T_0 > x) = \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \\
&= \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}.
\end{aligned}$$

Častejšie sa ale stretávame s nasledujúcimi aktuárskymi značeniami:

$${}_tq_x = F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t)$$

a

$${}_tp_x = S_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t),$$

kde ${}_tq_x$ je pravdepodobnosť, že osoba vo veku x umrie pred dosiahnutím veku $x+t$ a ${}_tp_x$ je pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa dožije veku $x+t$.

Jednou z najdôležitejších popisných charakteristík náhodnej veličiny T_x je jej stredná hodnota, ktorú označujeme ako strednú dĺžku života vo veku x :

$${}^{\circ}e_x = E(T_x).$$

Tá udáva priemerný počet rokov, ktorých sa ešte dožije jedinec vo veku x . Ďalším používaním pojmom je *intenzita úmrtnosti vo veku x* , ktorú definujeme vzťahom:

$$\mu_x \stackrel{df.}{=} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_x \leq h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{{}_hq_x}{h}.$$

V nasledujúcich riadkoch si vyjadríme intenzitu úmrtnosti μ_{x+t} , kde $t \geq 0$, pomocou rozdelenia náhodnej veličiny T_x :

$$\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_{x+t} \leq h)}{h} \stackrel{predp.}{=} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_x - t \leq h | T_x > t)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(t < T_x \leq t+h)}{h \mathbb{P}(T_x > t)} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{F_x(t+h) - F_x(t)}{h}}_{F'_x(t_+)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - F_x(t)}}_{\frac{1}{{}_tp_x}} = \\
&= \frac{f_x(t)}{{}_tp_x},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

kde sme v poslednej rovnosti použili predpoklad: $F'_x(t_+) = F'_x(t) = f_x(t)$ pre skoro všetky $t \geq 0$.

Celkovo teda dostávame vyjadrenie hustoty náhodnej veličiny T_x ako súčin pravdepodobnosti dožitia veku $x+t$ jedincom žijúcim vo veku x a intenzity úmrtnosti vo veku $x+t$:

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}.$$

To môžeme využiť na vyjadrenie strednej dĺžky života ${}^\circ e_x$ pomocou intenzity úmrtnosti:

$${}^\circ e_x = E(T_x) = \int_0^\infty t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

V tejto práci použijeme vyjadrenie ${}_t p_x$ pomocou (1.1):

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{{}_t p_x} = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F_x(t)) = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x,$$

kde integrovaním dostaneme:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y dy}.$$

Tento vzťah nám umožňuje vychádzať z analyticky určenej intenzity úmrtnosti. Ďalej zavedieme mieru úmrtnosti m_x , pre ktorú platí:

$$m_x = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u) du}.$$

Pre reálnu populáciu v kalendárnom roku t sa používa nasledujúci výpočet:

$$m_x(t) = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}},$$

kde $D_{x,t}$ je počet osôb, ktoré zomreli vo veku x v roku t a $E_{x,t}$ je centrálna expozícia úmrtnosti. V praxi sa používa stredná veľkosť vekovej skupiny v polovici roka.

Predpoklad. *Konštatná intenzita úmrtnosti medzi celočíselnými vekmi.*

Ak zapíšeme tento predpoklad matematicky, tak platí:

$$\mu_{x+t} = \mu, \quad 0 < t < 1,$$

pre pevne zvolený celočíselný vek x . Následne z toho vyplýva

$$m_x(t) = \mu, \quad q_x = 1 - e^{-\mu}.$$

Pre výpočet jednotlivých pravdepodobností úmrtia budeme používať vzťah

$$q_x = 1 - e^{-m_x}.$$

Ďalším poistno-matematickým nástrojom používaným v praxi sú komutačné čísla. Pre ich definíciu potrebujeme zaviesť nasledujúce dve postupnosti:

$$l_x = l_0 \cdot {}_x p_0$$

a

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

kde l_0 je zvolené ľubovoľné prirodzené číslo (väčšinou sa volí 100 000). Toto číslo sa nazýva *koreň* úmrtnostnej tabuľky.

Postupnosť l_x interpretujeme ako počet jedincov, ktorí sa pri danom počiatočnom stave l_0 dožijú veku x a postupnosť d_x interpretujeme ako počet jedincov, ktorí pri danom počiatočnom stave l_0 zomrú vo veku x .

Poznamenajme, že sa väčšinou stanovuje aj horná veková hranica ω , pre ktorú platí

$$l_x = 0, \quad x > \omega.$$

Nultý rád komutačných čísel definujeme ako:

$$D_x = l_x v^x$$

a

$$C_x = d_x v^{x+1},$$

kde v je diskontný faktor k danej technickej úrokovej miere. D_x označuje diskontovaný počet dožívajúcich sa veku x a C_x označuje diskontovaný počet jedincov, ktorí zomreli vo veku x . Definície vyšších rádov komutačných čísel môžeme nájsť v Cipra (2006, časť 7.1.3).

1.3 Poistenie doživotného dôchodku

V poistení doživotného dôchodku poisťovňa vypláca v dohodnutej čiastke dôchodok vždy na začiatku poistného roka, ak je poistený nažive. Teda hovoríme o predlehotnom doživotnom dôchodku. Ďalšou variantou je výplata dôchodku na konci poistného roka. Vtedy hovoríme o polehotnom doživotnom dôchodku. Ak budeme v týchto variantách uvažovať poistenie len na dobu určitú, hovoríme o tzv. predlehotnom, resp. polehotnom dočasnom dôchodku, kedy poisťovňa vypláca dôchodok, pokiaľ poistený žije a súčasne neuplynula poistná doba.

Existujú tiež poistenia odloženého doživotného dôchodku o k rokov, kedy sa prvá výplata dôchodku odkladá o spomenutých k rokov. Poslednou variantou, v praxi najbežnejšou, sú področné dôchodky, ktoré sa vyplácajú m -krát ročne (napr.: $m = 12$ pre mesačné výplaty dôchodku).

Uvedme vyjadrenie jednorázového nettopoistného pre predlehotný jednotkový doživotný dôchodok odložený o k rokov pomocou komutačných čísel:

$${}_k|\ddot{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots}{D_x}.$$

V prípade polehotného jednotkového doživotného dôchodku odloženého o k rokov má jednorázové nettopoistné nasledujúci tvar

$${}_k|a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots}{D_x}.$$

V poistení doživotného dôchodku majú najväčší význam riziko dlhovekosti a riziko úrokových mier. Týmto dvom rizikám sa budeme venovať v nasledujúcich dvoch odstavcoch.

1.4 Riziko dlhovekosti

Riziko dlhovekosti je riziko, ktorým je vystavený dôchodkový fond alebo životná poisťovňa, v dôsledku vyšších výplat ako sa pôvodne očakávalo. Riziko dlhovekosti existuje vzhľadom na rastúci trend očakávanej dĺžky života poistencov a dôchodcov. Najväčšiemu stupňu rizika dlhovekosti sú vystavené dôchodkové plány a životné anuity s definovanými dávkami pre poistencov.

Priemerná dĺžka života stúpa. Aj veľmi malá zmena očakávanej dĺžky života môže spôsobiť vážne problémy s platobnými schopnosťami pre dôchodkové spoločnosti, či pre životné poisťovne. Presné merania rizika dlhovekosti sú stále nedostačujúce, pretože vývoj v oblasti medicíny a liekov stále napreduje a jeho vplyv na očakávanú dĺžku života nebol zatiaľ kvatifikovaný.

Riziku dlhovekosti sú vystavené nie len národné vlády, súkromné dôchodkové spoločnosti alebo životné poisťovne, ale aj jednotlivci, pretože im vo vyššom veku nemusia stačiť ich úspory a budú nútení znížiť svoje životné štandardy. V tomto kontexte, jednotlivci nesú celý rozsah rizika dlhovekosti sami, keďže je toto riziko „nepokryté“.

Súkromné dôchodkové spoločnosti, resp. životné poisťovne pracujú s týmto rizikom tak, že modelujú vývoj úmrtnosti pomocou rôznych modelov. Tým vedú lepšie odhadnúť výšku budúcich záväzkov voči klientom.

1.4.1 Lee-Carterov model

Na modelovanie a predikciu úmrtnosti v tejto diplomovej práci použijeme Lee-Carterov model. Tento model má extrapolatívny charakter, ktorý nezahŕňa znalosti o medicínskych, či sociálnych vplyvoch na zmeny v úmrtnosti. Jeho silnou stránkou je, že spája silný a napriek tomu aj jednoduchý demografický model so štatistickými metódami časových rad. Je postavený na pevných historických dátach, ktoré nám dávajú predstavu o trende. Na základe týchto dát model poskytuje bodové predikcie i intervaly spoľahlivosti.

Model

Nech $m_{x,t}$ označuje mieru úmrtnosti pre vek x v roku t , kde $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ a $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Tieto miery úmrtnosti budeme prekladať modelom:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t},$$

respektíve

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}},$$

pre vhodne zvolené množiny vekovo-špecifických konštánt $\{a_x\}$ a $\{b_x\}$, a v čase sa meniaci index k_t , ktorý reprezentuje úroveň úmrtnosti v roku t .

Reziduálnu zložku modelu predstavuje náhodná veličina $\epsilon_{x,t}$, s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ϵ^2 , ktorá odráža určité vekovo-špecifické historické vplyvy, ktoré nie sú v modeli z najrôznejších dôvodov explicitne uvedené, napr.: prírodné katastrofy, epidémie alebo vojny. Napriek tomu, že miery úmrtnosti môžu kolísať v rádoch tisícov v danom roku, rozptyly v čase vekovo-špecifických zložiek $\epsilon_{x,t}$ nebudú výrazne kolísať, pretože reprezentujú odchýlky od logaritmických hodnôt úmrtnostných mier.

Výraz e^{a_x} je obecný profil naprieč vekmi v úmrtnosti. Pomocou b_x vyjadrujeme citlivosť miery úmrtnosti pre daný vek x voči indexu úmrtnosti (úrovni úmrtnosti v čase t) k_t . Ak index k_t je lineárny v čase, úmrtnosť v každom veku sa mení na vlastnú konštantnú exponenciálnu mieru. Pokiaľ k klesá do mínus nekonečna, potom vekovo-špecifická miera klesá do nuly. Ďalšou výhodou tohto modelu je, že úmrtnostné miery nenadobúdajú záporné hodnoty, čo je výhodou aj pre predikcie.

Pre účely tejto podkapitoly sme sa inšpirovali pôvodným článkom Lee a Carter (1992).

Odhad modelu

Nie je možné jednoznačne určiť parametre modelu. Z toho dôvodu zavedieme nasledujúce normalizačné podmienky pre b_x a k_t :

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} b_x = 1, \quad (1.2)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0. \quad (1.3)$$

Na odhad modelu nemôžeme použiť regresné metódy, pretože sa v modeli nenáchadzajú žiadne regresory. Na pravej strane rovnice máme len parametre, ktoré chceme odhadnúť a neznámy index k_t . Použijeme teda metódu najmenších štvorcov. Minimalizujeme funkciu, ktorá má tvar:

$$O_{LS}(a, b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2.$$

Začneme s odhadom a_x . Funkciu O_{LS} zderivujeme podľa a_x a deriváciu položíme rovnú nule. Úpravou dostaneme:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t) = 0.$$

Rozpísaním a použitím vyššie spomenutej podmienky (1.3) dostávame:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}) = \sum_{t=t_1}^{t_n} a_x,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}) = (t_n - t_n + 1)a_x.$$

A teda dostávame finálny odhad:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{(t_n - t_n + 1)} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}).$$

Na odhad b_x a k_t použijeme metódu „Singular value decomposition (SVD)“.

Veta 1. Pre ľubovoľnú reálnu maticu A dimenzie $m \times n$ existuje rozklad

$$A = U\Sigma V^T,$$

kde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U je reálna ortonormálna matica typu $m \times m$, V je reálna ortonormálna matica typu $n \times n$ a S je reálna diagonálna matica ($S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, kde $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$).

Dôkaz. Vid Klema a Laub (1980). □

Keďže diagonálne prvky matice Σ sú zostupne zoradené, tým pádom je matica určená jednoznačne. Ďalej maticu A môžeme aproximovať pomocou k najväčších hodnôt

$$A = U\Sigma V^T \approx \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Vektory \mathbf{u}_i sú ľavé singulárne vektory. Sú to vlastné vektory matice AA^T . Podobne vektory \mathbf{v}_i sú pravé singulárne vektory, ktoré sú vlastné vektory matice $A^T A$.

Zavedme maticu centrovaných logaritmov miery úmrtnosti $r_{x,t} = \ln(\hat{m}_{x,t}) - \hat{a}_x$. Na túto maticu použijeme metódu SVD. Tým pádom odhady \hat{b}_x a \hat{k}_t minimalizujú

$$\tilde{O}_{LS}(b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (r_{x,t} - b_x k_t)^2$$

a najlepšia aproximácia matice R v zmysle metódy najmenších štvorcov má tvar

$$R \approx R^* = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T,$$

kde \mathbf{u}_1 a \mathbf{v}_1 postupne odpovedajú prvým vlastným vektorom matice RR^T , resp. $R^T R$ a λ_1 je prvý prvok zo singulárneho rozkladu matice R , vid Veta 1.

Týmto dostaneme nasledujúce odhady:

$$\hat{b}_x = \frac{\mathbf{u}_1}{u},$$

$$\hat{k}_t = \sqrt{\lambda_1} u \mathbf{v}_1,$$

kde u predstavuje súčet vektora \mathbf{u}_1 po zložkách. Samozrejme sme predpokladali, že tento súčet nie je nulový.

Tým pádom máme odhadnuté všetky potrebné parametre. Aj samotní autori Lee a Carter (1992) uvádzajú, že ak by sme odhadovali budúce miery úmrtnosti pomocou týchto odhadov \hat{a}_x , \hat{b}_x a \hat{k}_t a použili ich na súčasné vekové rozdelenie populácie, tak si obecné nebudú odpovedať. Je to dôsledkom toho, že odhad parametru k_t minimalizuje chyby voči logaritmickým hodnotám miery úmrtnosti a nie voči samotným mieram úmrtnosti. Preto tento parameter znova odhadneme. Použijeme k tomu rovnicu:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_m} E_{x,t} e^{a_x + k_t b_x},$$

kde $D_{x,t}$ sú pozorované počty úmrtí pre každý vek v jednotlivých rokoch a $E_{x,t}$ je centrálna expozícia úmrtnosti, t.j. koľko ľudí v danom veku x čelí riziku smrti v roku t . Pre a_x a b_x použijeme vyššie získané odhady. Nový odhad parametru k_t získame napríklad pomocou Newton-Raphsonovho algoritmu. Jeho popis uvádza Weisstein (2002). Takto odhadnuté parametre ešte musíme preškálovať, aby spĺňali normalizačné podmienky (1.2) a (1.3):

$$\begin{aligned} \hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k} &\rightarrow \hat{a}_x, \\ (\hat{k}_t - \bar{k}) \hat{b}_\bullet &\rightarrow \hat{k}_t, \\ \frac{\hat{b}_x}{\hat{b}_\bullet} &\rightarrow \hat{b}_x, \end{aligned}$$

kde \bar{k} predstavuje priemer cez \hat{k}_t a \hat{b}_\bullet predstavuje súčet \hat{b}_x . Túto korekciu parametrov môžeme nájsť v Pitacco a kol. (2009, str. 194).

Predikcia

Parameter k_t je jediným zástupcom časovej zložky v Lee-Carterovom modeli. Na predikciu tohto parametru použijeme model náhodnej prechádzky s driftom:

$$k_t = k_{t-1} + \alpha + \epsilon_t,$$

kde $\epsilon_t \sim N(0,1)$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny.

1.5 Riziko úrokových mier

Riziko úrokových mier predstavuje riziko zmeny hodnoty investície v dôsledku zmeny absolútnej výšky úrokových mier, zmeny v rozpätí medzi dvomi úrokovými mierami, zmeny tvaru výnosovej krivky alebo zmeny vzťahu k inej úrokovej miere.

Tieto zmeny priamo aj nepriamo vplyvajú na hodnotu cenných papierov. Vieme ich zredukovať pomocou diverzifikácie, investovanie do cenných papierov

s pevným výnosom s rôznou dĺžkou trvania, alebo „hedgovaním“, t.j. pomocou finančného derivátu na úrokovú mieru, konkrétne SWAP-u.

Riziko úrokových mier viac vplýva na dlhopisy ako na akcie. Predstavuje najzávažnejšie riziko pre držiteľov dlhopisov s pevným kupónom. Ak totiž úrokové sadzby stúpajú, hodnota dlhopisov s pevným kupónom klesá a naopak. Je to dané tým, že pri náraste úrokových mier, klesajú náklady na držanie dlhopisu s pevným kupónom a tým pádom by investor bol schopný realizovať vyšší výnos zainvestovaním do iných investícií, ktoré reflektujú vyššiu úrokovú mieru.

1.5.1 Cox-Ingersoll-Rossov model

Na modelovanie a predikciu úrokovej miery použijeme Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR model), ktorý je rozšírením Vašíčkovho modelu, ktorý môžeme nájsť v Brigo a Mercurio (2001, časť 3.2.1). Tento model zaraďujeme medzi tzv. „jednofaktorové modely“, pretože iba jeden faktor v modeli odpovedá tržnému riziku. Môže sa napríklad použiť na oceňovanie finančných derivátov úrokových mier.

Model

Podľa Brigo a Mercurio (2001, časť 3.2.3) CIR model vymedzuje, že okamžitá úroková miera je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (1.4)$$

s počiatočnou podmienkou $r(0) = r_0$ a kde $W(t)$ je Wienerov proces, ktorý predstavuje náhodný tržný rizikový faktor. Parameter $\alpha > 0$ je tzv. „mean-reversion“ parameter, ktorý má vplyv na to, ako rýchlo sa úroková miera v čase vracia k priemernej hodnote $\mu > 0$. Parameter $\sigma > 0$ predstavuje volatilitu.

Ďalšou vlastnosťou CIR modelu je, že úrokové miery nenadobudajú záporných hodnôt. To je zaručené splnením nasledujúcej nerovnosti: $2\alpha\mu > \sigma^2$. Je to dané tým, že ak $r(t)$ je blízko nule, tak aj $\sigma\sqrt{r(t)}$ je blízko nule, čím tlmí účinok náhodného šoku. Následne v rovnici má dominantnú pozíciu faktor posunutia, $\alpha(\mu - r(t))$, ktorý začne posúvať mieru od nuly k priemernej hodnote μ .

Odhad modelu a predikcia

Pre ďalšie použitie v diplomovej práci prejdeme k diskretizácii modelu (1.4):

$$r(t) = r(t-1) + \alpha(\mu - r(t-1)) + \sigma\sqrt{r(t-1)}\epsilon(t),$$

kde $\epsilon(t) \sim N(0,1)$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny. Nájdenie najlepšieho CIR modelu nie je predmetom tejto práce. Parametre zvolené v numerických ilustráciach nie sú odhadované z reálnych dát.

2. Riziko portfólia

V druhej kapitole vychádzame z článkov Rosen a Saunders (2010) a Karabey a kol. (2014).

Úlohou každého rizikového manažmentu spoločnosti (poistovne) je identifikácia, kvantifikácia a riadenie rizík. Pre najlepšie riadenie rizík je dôležité stanovenie hlavných rizík a kalkulácia rizikových prírastkov do celkového rizika portfólia. Spoločne so správnymi alokačnými metódami a vhodnými rizikovými mierami, dokáže rizikový manažment stanoviť hodnotu rizika. Na rizika, a hlavne na rizikové prírastky, sa dá pozeráť dvomi spôsobmi:

1. cez jednotlivé zložky portfólia (subportfólia),
2. cez rizikové faktory.

Pohľad cez subportfólia má veľký význam pre podporu manažérskych rozhodnutí a biznisového plánovania, merania výkonosti, vytvárania optimálnych stratégií a pod. V tomto prípade môžeme celkovú stratu portfólia napísať ako súčet strát z jednotlivých subportfólií. Pre túto sumu bola zavedená teória aditívnych rizikových prírastkov, založená na koncepte marginálnych prírastkov, niekedy označovaná ako Eulerova alokačná metóda.

Čo sa týka druhého pohľadu na riziká, stratu portfólia obecně nemôžeme napísať ako lineárnu funkciu individuálnych rizikových faktorov. Je to z toho dôvodu, že existuje niekoľko rizikových faktorov, ktoré vzájomne na seba pôsobia naprieč celým portfóliom a tým predstavujú potencionálne hrozby, resp. straty. Z tohto dôvodu nemôžeme priamo použiť teóriu aditívnych prírastkov.

Avšak riešením je rozšírenie Eulerovej alokačnej metódy tak, aby sa dala aplikovať aj na nelineárne funkcie. Technika je založená na Hoeffdingovej dekompozícií. Hlavná myšlienka metodiky je veľmi jednoduchá: zatiaľ čo stratu portfólia nemôžeme napísať ako súčet funkcií individuálnych rizikových faktorov, použitie Hoeffdingovej dekompozície nám umožní túto stratu portfólia napísať ako súčet funkcií cez všetky podmnožiny rizikových faktorov. Následne na túto novú dekompozíciu straty bude použitá klasická Eulerova alokačná metóda. Cenou za túto metodiku je to, že musíme uvažovať nie len jednotlivé rizikové faktory, ale aj jednotlivé interakcie medzi nimi.

Pohľad cez rizikové faktory je dôležitý z dôvodu porozumenia zdrojom rizík v portfóliu. Špeciálne u komplexných portfólií s mnohými subportfóliami, kde individuálne zložky nie sú až tak viditeľné zdroje rizík. Taktiež pomáhajú k pochopeniu rizík u komplikovaných finančných derivátov.

V tejto kapitole uvedieme požadované vlastnosti rizikových mier a vyberieme tri rizikové miery, s ktorými budeme neskôr pracovať. Následne vysvetlíme Eulerovu alokačnú metódu pre subportfólia, Hoeffdingovu dekompozíciu a jej využitie pri aplikácii Eulerovej alokačnej metódy pre rizikové faktory.

2.1 Miery rizika

S mierami rizika sa väčšinou stretávame pri stanovovaní výšky kapitálu potrebného k zaisteniu adekvátnej ochrany proti neočakávaným budúcim strátam. Ďalej je ich možné použiť pri manažérskych rozhodnutiach, alebo v poisťovniach pri stanovovaní výšky poistného.

Existuje mnoho spôsobov ako pristupovať k meraniu rizika. V tejto práci popíšeme axiomatický prístup k meraniu rizika.

2.2 Axiomatický prístup k meraniu rizika

V axiomatickom prístupe k meraniu rizika sa najprv stanovujú minimálne požadované vlastnosti miery rizika a až potom sa začne hľadať ich konkrétna podoba. Rizika budeme interpretovať ako množinu M náhodných veličín X na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ktorý je konvexným kuželom (t.j. $X_1, X_2 \in M \Rightarrow X_1 + X_2 \in M$ a súčasne $X \in M \Rightarrow \lambda \cdot X \in M$ pre každé $\lambda > 0$).

V rámci axiomatického prístupu sú rizikovými mierami rôzne funkcie $\rho : M \rightarrow (-\infty, \infty)$, ktoré predstavujú množstvo potrebného kapitálu, ktorý by mala mať spoločnosť k dispozícii, ak strata X nastane.

Prejdime k jednotlivým axiómom tak, ako ich uvádzajú napríklad Artzner a kol. (1999):

Axióm 1 (Translačná invariancia). *Pre každé $X \in M$ a $c \in (-\infty, \infty)$ je $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.*

Axióm 2 (Subaditivita). *Pre každé $X_1, X_2 \in M$ je $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.*

Axióm 3 (Pozitívna homogenita). *Pre každé $X \in M$ a $\lambda > 0$ je $\rho(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho(X)$.*

Axióm 4 (Monotónia). *Pre každé $X_1, X_2 \in M$ splňujúce $X_1 \leq X_2$ s pravdepodobnosťou jedna je $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.*

Definícia 1 (Koherentná riziková miera). *Riziková miera sa nazýva koherentná na M , ak súčasne splňuje axióm translačnej invariancie, subaditivity, pozitívnej homogenity a monotónie.*

Takáto koherentná riziková miera sa považuje za rizikovú mieru s dobrými vlastnosťami. Príkladom koherentnej rizikovej miery je „očakávaná strata“ ES (z ang. „Expected Shortfall“, niekedy taktiež nazývaná presnejšie *očakávaná extramálna strata*).

Je pravdou, že v praxi, a aj v tejto práci, je veľmi používanou rizikovou mierou „hodnota v riziku“ VaR (z ang. „Value at Risk“), ktorá ale nie je koherentnou mierou (nesplňuje axióm subaditivity). Taktiež smerodajná odchýlka nie je koherentnou mierou.

Pre naše použitie je ale dôležité, že všetky tri nami uvažované miery rizika splňajú axióm pozitívnej homogenity.

2.2.1 Smerodajná odchýlka - σ

Definícia 2. Smerodajná odchýlka σ náhodnej veličiny X je odmocnina z jej rozptylu:

$$\sigma = \sqrt{\text{var} X} = \sqrt{E(X - EX)^2}.$$

Smerodajná odchýlka je najčastejším predstaviteľom rozptylových mier rizika, ktoré merajú riziko ako fluktuáciu okolo danej hodnoty (napr. okolo priemeru). Pre svoju jednoduchosť patrí k jedným z najpoužívanejších mier rizík.

2.2.2 Hodnota v riziku - VaR

Nech $F_X(x)$ je distribučná funkcia rozdelenia straty za pevné časové obdobie.

Definícia 3. Majme danú hladinu spoľahlivosti $\alpha \in (0,1)$. Hodnota v riziku na hladine α je také najmenšie číslo x , pre ktoré pravdepodobnosť, že strata neprekročí hodnotu x , nie je väčšia ako $1 - \alpha$. Teda:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Druhý výraz na pravej strane odpovedá definícii kvantilovej funkcie príslušnej distribučnej funkcie F_X . Inými slovami, hodnota v riziku je α -kvantil rozdelenia straty X , t.j. $VaR_\alpha = q_\alpha(F_X)$. Hladina α sa často volí na úrovni 0,95 až 0,995.

2.2.3 Očakávaná strata - ES

Definícia 4. Pre stratu X s $E(|X|) < \infty$ a s distribučnou funkciou F_X definujeme očakávanú stratu na hladine spoľahlivosti $\alpha \in (0,1)$ vzťahom:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_X) du,$$

kde $q_u(F_X)$ je kvantilová funkcia príslušnej distribučnej funkcie F_X .

Z tejto definícií vyplýva súvislosť medzi mierami VaR_α a ES_α :

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

ES_α je teda akýmsi priemerom hodnôt VaR na všetkých hladinách $u \geq \alpha$. Tým pádom platí, že

$$ES_\alpha \geq VaR_\alpha.$$

Ak je distribučná funkcia F_X spojitá, môžeme potom písať

$$ES_\alpha = \frac{E[X; X \geq q_\alpha(F_X)]}{1-\alpha} = E(X|X \geq VaR_\alpha),$$

kde $E[Y; A] = E(YI_A)$.

ES_α môžeme teda interpretovať ako očakávanú hodnotu straty za podmienky, že strata prekročí hodnotu VaR_α .

2.3 Eulerova alokačná metóda pre subportfólia

Informácie v tejto podkapitole sú prebraté z článku Tasche (2008).

Predpokladajme reálne náhodné veličiny X_1, \dots, X_n , ktoré predstavujú straty, z jednotlivých subportfólií. Nech X predstavuje celkovú stratu z portfólia a teda:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (2.1)$$

Ekonomický kapitál (EC z anglického „economic capital“) potrebný pre prípadné vysoké straty z portfólia je určený rizikovou mierou ρ :

$$EC = \rho(X) - E(X). \quad (2.2)$$

V praxi je ρ obvykle naviazané na rozptyl alebo kvantil rozdelenia straty.

Niekedy je vhodné zaviesť váhy $u = (u_1, \dots, u_n)$:

$$X(u) = X(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i X_i. \quad (2.3)$$

V (2.1) teda máme $X = X(1, \dots, 1)$. Premennú u_i je možné interpretovať ako objem peňazí investovaných do aktíva, ktorému odpovedá X_i . Pre potreby tejto kapitoly budeme predpokladať, že pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektoru (X_1, \dots, X_n) je nemenné. Potom je vhodné zaviesť funkciu:

$$f_{\rho, X}(u) = \rho(X(u)). \quad (2.4)$$

Keďže predpokladáme, že rozdelenie X je nemenné, môžeme index X vynechať a písať f_ρ , namiesto $f_{\rho, X}$. Ďalej sa zameriame na (pozitívne) homogénne rizikové miery ρ a funkcie f_ρ .

Definícia 5. Riziková miera ρ má stupeň homogenity τ , ak pre všetky $h > 0$ platí:

$$\rho(hX) = h^\tau \rho(X).$$

Funkcia $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má stupeň homogenity τ , ak pre všetky $h > 0$, $u \in U$ a $hu \in U$ platí:

$$f(hu) = h^\tau f(u).$$

Poznamenajme, že funkcia f_ρ z (2.4), vzhľadom k rizikovej miere ρ , má stupeň homogenity τ , ak ρ je rizikovou mierou so stupňom homogenity τ . V prípade spojite diferencovateľných funkcií, je možné homogénne funkcie popísať nasledujúcou Eulerovou vetou, ktorú preberáme v znení podľa Tasche (1999).

Veta 2 (Eulerova veta homogenicity). *Nech $U \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom f má stupeň homogenity τ vtedy a len vtedy, keď platí:*

$$\tau f(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f(u)}{\partial u_i}, \quad \text{pre } u = (u_1, \dots, u_n) \in U, \quad h > 0.$$

Dôkaz. Dôkaz môžeme nájsť v Tasche (1999, Tvrdenie 3.5(b)). □

Ak je ekonomický kapitál portfólia stanovený na základe (2.2), je vhodné si zodpovedať otázku: Aký veľký je príspevok subportfólia i do EC ? Niektoré potenciálne odpovede na túto otázku nájdeme nižšie. Ďalej označujeme rizikový prírastok X_i vzhľadom k $\rho(X)$ ako $\rho(X_i|X)$.

Definícia 6. *Nech $\mu_i = E(X_i)$. Potom*

- *návratnosť rizikovo upraveného kapitálu (RORAC – z anglického „Return on Risk Adjusted Capital“) celého portfólia je definovaná vzťahom:*

$$RORAC(X) = \frac{E(X)}{\rho(X)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{\rho(X)},$$

- *návratnosť rizikovo upraveného kapitálu i -tého subportfólia je definovaná vzťahom:*

$$RORAC(X_i|X) = \frac{E(X_i)}{\rho(X_i|X)} = \frac{\mu_i}{\rho(X_i|X)}.$$

Na základe tejto definície je vhodné uviesť dve vlastnosti rizikových prírastkov z ekonomického pohľadu.

Definícia 7. *Nech X predstavuje celkovú stratu z portfólia.*

- *Rizikové prírastky $\rho(X_1|X), \dots, \rho(X_n|X)$ splňujú úplnú alokáciu voči $\rho(X)$ ak*

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i|X) = \rho(X). \quad (2.5)$$

- *Rizikové prírastky $\rho(X_i|X)$ sú RORAC kompatibilné, ak pre nejaké $\epsilon_i > 0$*

$$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$$

pre všetky $0 < h < \epsilon_i$.

Tvrdenie 3. *Nech ρ je riziková miera a f_ρ je funkcia k nej prislúchajúca na základe (2.3) a (2.4). Predpokladajme, že f_ρ je spojitě diferencovateľná. Ak rizikové prírastky $\rho(X_1|X), \dots, \rho(X_n|X)$ sú RORAC kompatibilné v zmysle Definície 7, potom $\rho(X_i|X)$ je jednoznačne určená ako*

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \rho}{\partial h}(X + hX_i)|_{h=0} = \frac{\partial f_\rho}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n). \quad (2.6)$$

Dôkaz. Dôkaz môžeme nájsť v Tasche (1999, Veta 4.4). □

Pozrime sa ešte na vlastnosť úplnej alokácie z Definície 7. Predpokladajme, že funkcia f_ρ vzhľadom k rizikovej miere ρ je spojitě diferencovateľná. Potom na základe Eulerovej vety homogenicity (Veta 2) pre f_ρ platí rovnica

$$f_\rho(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_\rho(u)}{\partial u_i},$$

pre všetky $u \in U$ vtedy a len vtedy, keď f_ρ má stupeň homogenity 1.

Poznámka. *Ak ρ je riziková miera, ktorá má stupeň homogenity 1 (vo význame Definície 5), potom rizikové prírastky dané vzťahom (2.6) nazývame Eulerove prírastky. Tieto Eulerove prírastky majú vlastnosti zavedené v Definícii 7. Metóda, ktorá prerozdeľuje kapitál do aktív na základe spočítania Eulerových prírastkov sa nazýva Eulerova alokačná metóda.*

Nasledujúce tvrdenia a vzťahy sú prebraté z článku Tasche (1999). Zaujímá nás použitie Eulerovej alokačnej metódy pre rizikové miery používané v tejto diplomovej práci.

Smerodajná odchýlka - σ

Vzťah pre použitie Eulerovej alokačnej metódy pre rizikovú mieru σ má tvar:

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \sigma(X(u))}{\partial u_i} = \frac{cov(X_i, X)}{\sqrt{var(X)}}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Dôkaz.

$$\frac{\partial \sigma(X(u))}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \sqrt{var\left(\sum_{j=1}^n u_j X_j\right)} = \frac{1}{2} \left(var\left(\sum_{j=1}^n u_j X_j\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_i} var\left(\sum_{j=1}^n u_j X_j\right)}_{(*)}$$

Posledný výraz sme si označili ako (*) a budeme ho ďalej upravovať.

$$(*) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n u_j u_l cov(X_j, X_l) \right)$$

Deriváciou podľa u_i získame:

$$(*) = 2 \sum_{j=1}^n u_j cov(X_i, X_j) = 2 cov\left(X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j\right) = 2 cov(X_i, X).$$

Celkovo dosadením za (*) dostávame:

$$\frac{\partial \sigma(X(u))}{\partial u_i} = \frac{cov(X_i, X)}{\sqrt{var(X)}}.$$

□

Hodnota v riziku - VaR

Predpoklad (S). *Nech $\alpha \in (0,1)$. Hovoríme, že náhodný vektor $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ spĺňa Predpoklad (S) ak $n \geq 2$ a podmienené rozdelenie X_1 vzhľadom k $(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ má hustotu $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$, $(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto \phi(t, x_2, \dots, x_n)$, ktorá spĺňa nasledujúce štyri podmienky:*

(i) *Pre pevné x_2, \dots, x_n je funkcia $t \mapsto \phi(t, x_2, \dots, x_n)$ spojitá v t .*

(ii) *Zobrazenie*

$$(t, u) \mapsto E\left(\phi\left(u_1^{-1}\left(t - \sum_{j=2}^n u_j X_j\right), X_2, \dots, X_n\right)\right), \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$$

má konečné hodnoty a je spojité.

(iii) Pre každé $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$0 < E\left(\phi\left(u_1^{-1}(VaR_\alpha(u) - \sum_{j=2}^n u_j X_j), X_2, \dots, X_n\right)\right),$$

kde $VaR_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X(u) \leq x) \geq \alpha\}$, $u \in U$,

(iv) Pre každé $i = 2, \dots, n$ má zobrazenie

$$(l, u) \mapsto E\left(X_i \phi\left(u_1^{-1}\left(l - \sum_{j=2}^n u_j X_j\right), X_2, \dots, X_n\right)\right), \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \infty$$

konečné hodnoty a je spojité.

Lemma 4. *Majme danú hladinu spoľahlivosti $\alpha \in (0, 1)$. Nech $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ spĺňa Predpoklad (S) a $U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Majme $X(u)$ dané vzťahom (2.3). Potom funkcia $VaR_\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ je parciálne diferencovateľná na U so spojitémi deriváciami*

$$\frac{\partial VaR_\alpha(u)}{\partial u_1} = u_1^{-1} \left(VaR_\alpha(u) - \frac{E\left(\left(\sum_{j=2}^n u_j X_j\right) \phi\left(u_1^{-1}(VaR_\alpha(u) - \sum_{j=2}^n u_j X_j), X_2, \dots, X_n\right)\right)}{E\left(\phi\left(u_1^{-1}(VaR_\alpha(u) - \sum_{j=2}^n u_j X_j), X_2, \dots, X_n\right)\right)} \right)$$

a

$$\frac{\partial VaR_\alpha(u)}{\partial u_i} = \frac{E\left(X_i \phi\left(u_1^{-1}(VaR_\alpha(u) - \sum_{j=2}^n u_j X_j), X_2, \dots, X_n\right)\right)}{E\left(\phi\left(u_1^{-1}(VaR_\alpha(u) - \sum_{j=2}^n u_j X_j), X_2, \dots, X_n\right)\right)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v Tasche (1999, Lemma 5.3). □

Tasche (1999) ďalej uvádza, ako pomocou tejto Lemmy, získal vzťah pre použitie Eulerovej alokačnej metódy pre rizikovú mieru VaR, ktorý má tvar:

$$\rho_{Euler}(X_i | X) = \frac{\partial VaR(X(u))}{\partial u_i} = E(X_i | X = VaR_\alpha(X)), \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Očakávaná strata - ES

Lemma 5. *Nech platia predpoklady Lemmy 4 a predpokladajme*

$$E(|X_i|^d) < \infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

pre nejaké $d \geq 1$. Nech

$$T_{\alpha,d} \stackrel{def}{=} E(X(u)^d | X(u) \geq VaR_\alpha(u)), \quad u \in U.$$

Potom $T_{\alpha,d}$ na U je spojité a parciálne diferencovateľná v $u_i, i = 1, \dots, n$, so spojitými deriváciami

$$\frac{\partial T_{\alpha,d}(u)}{\partial u_i} = dE(X_i X(u)^{d-1} | X(u) \geq VaR_\alpha(u)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v Tasche (1999, Lemma 5.6). □

Ak si za d dosadíme 1, dostávame vzťah pre použitie Eulerovej alokačnej metódy pre rizikovú mieru ES a teda:

$$\rho_{Euler}(X_i | X) = \frac{\partial ES(X(u))}{\partial u_i} = E(X_i | X \geq VaR_\alpha(X)), \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Poznámka. Na základe Vety 2 všetky tri vzťahy pre použitie Eulerovej alokačnej metódy ((2.7), (2.8) a (2.9)) sňajú vlastnosť úplnej alokácie rizikových prírastkov (2.5).

V tejto práci sa ale chceme zaoberať pohľadom na riziká cez rizikové faktory.

2.4 Hoeffdingova dekompozícia

V tejto časti práce ozrejmieme koncept Hoeffdingovej dekompozície náhodnej veličiny a pridáme aj jej finančnú interpretáciu. Demonštrovať obecnú dekompozíciu budeme na príklade s malým počtom rizikových faktorov.

Predpokladajme, že strata portfólia X je ovplyvňovaná dvoma nezávislými faktormi Z_1 a Z_2 . Potom môžeme náhodnú veličinu X zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
X &= E(X) + \\
&+ E(X|Z_1) - E(X) + \\
&+ E(X|Z_2) - E(X) + \\
&+ X - [E(X|Z_1) - E(X)] - [E(X|Z_2) - E(X)] - E(X).
\end{aligned}$$

Táto dekompozícia je tautológiou, avšak tiež poskytuje dôležité finančné informácie. Prvý výraz (konštanta) nám udáva najlepšie zaistenie straty, ktoré môžeme dosiahnuť použitím riziko-neutrálneho nástroja. Druhý výraz nám udáva najlepšie zaistenie zostávajúceho rizika, ktoré získame použitím nástrojov závislých na faktore Z_1 , bez ohľadu na riziko vyplývajúce z faktora Z_2 . Tretí výraz je obdobou druhého, ale s tým rozdielom, že uvažujeme len riziko vyplývajúce z faktora Z_2 a úplne ignorujeme vplyv faktoru Z_1 . Posledný výraz nám uvádza zvyšné riziko, ktoré nemôže byť zaistené nástrojmi závislými len na jednotlivých faktoroch, ale namiesto toho musí byť zaistené nástrojmi, ktoré závisia na interakcii faktorov.

Pristúpme k formálnejšej definícii Hoeffdingovej dekompozície v obecnom prípade s viacerými faktormi. Nech Z_1, \dots, Z_K sú nezávislé systematické faktory s konečnými rozptylmi a nech $X = g(Z_1, \dots, Z_K)$ má tiež konečný rozptyl. Hoeffdingova dekompozícia dáva jedinečný kanonický spôsob zápisu straty X , ako sumu nekorelovaných výrazov zahŕňujúcich podmienené stredné hodnoty, dané množinami faktorov Z_j . Matematický zápis vyzerá nasledovne:

$$X = \sum_{A \subseteq \{1, \dots, K\}} g_A(Z_j; j \in A), \quad (2.10)$$

kde

$$g_A(Z_j; j \in A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} E(X|Z_k, k \in B). \quad (2.11)$$

Suma (2.10) ide cez všetky možné podmnožiny faktorov $A \subseteq \{1, \dots, K\}$. Každý výraz v dekompozícii má finančnú interpretáciu. Výraz $g_A(Z_j; j \in A)$ udáva najlepšie zaistenie zvyšného rizika daného interakciou systematických faktorov $Z_j, j \in A$, ktoré nemôže byť zaistené uvažovaním inej menšej podmnožiny faktorov $B \subset A$. Túto interpretáciu nájdeme v článku Rosen a Saunders (2010).

Hoeffdingovu dekompozíciu teda môžeme využiť na rozpísanie celkovej straty portfólia do jednotlivých zaistení, ktoré zahrňajú nástroje s rastúcou zložitosťou. Prvý výraz (konštanta) $E(X)$ odpovedá prázdnej množine faktorov. Udáva nám najlepšie zaistenie použitím len riziko-neutrálneho nástroja. Výrazy „prvého rádu“ $g_k = E(X|Z_k) - E(X)$ zaistujú zvyšné riziko portfólia dané k -tým faktorom, ktorý je v izolácii od ostatných faktorov. Výrazy „druhého rádu“ $g_{k,j}$ zaistujú zostávajúce riziko dané interakciou faktorov Z_k a Z_j . Týmto spôsobom sa ďalej pokračuje.

Výrazy (2.11) v Hoeffdingovej dekompozícii majú nasledujúce vyjardenia

$$\begin{aligned} g_0 &= E(X), \\ g_k &= E(X|Z_k) - E(X), && \text{pre } k = 1, \dots, K, \\ g_{k,j} &= E(X|Z_k, Z_j) - E(X|Z_k) - E(X|Z_j) + E(X), && \text{pre } k, j = 1, \dots, K, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Analogicky sa postupuje ďalej pre všetky možné interakcie rizikových faktorov.

2.5 Eulerova alokačná metóda s využitím Hoeffdingovej dekompozície

Ako bolo skôr spomenuté, Hoeffdingova dekompozícia nám umožňuje zapísať celkovú stratu portfólia ako sumu funkcií cez všetky podmnožiny rizikových faktorov. Následne môžeme použiť Eulerovu alokačnú metódu.

Rizikový prírastok daný Eulerovou alokačnou metódou s využitím Hoeffdingovej dekompozície daný vzorcom (2.6) môžeme prepísať do tvaru:

$$C_A = \frac{\partial \rho}{\partial h} \left(X + h g_A(Z_k; k \in A) \right) \Big|_{h=0},$$

kde C_A je alokovaný rizikový kapitál pre výraz g_A . Interpretácia rizikového prírastku daného výrazom g_A vzhľadom k celkovému riziku portfólia je, že to je reziduálny prírastok vyplývajúci z interakcie rizikových faktorov $Z_k, k \in A$, ktorý nebol zahrnutý vplyvmi akejkoľvek podmnožiny týchto faktorov. Túto interpretáciu a aj nasledujúci text sme prebrali z Rosen a Saunders (2010).

Vplyv faktora Z_k , ktorý nebol zahrnutý v celkovej očakávanej strate $E(X)$ je meraný pomocou $g_k(Z_k)$. Prírastok $g_{j,k}(Z_k, Z_j)$ je reziduálny prírastok k stratám spoločného pôsobenia faktorov Z_k a Z_j , ktorý nebol zahrnutý v celkovej očakávanej strate $E(X)$ a v podmienených očakávaných stratách $E(X|Z_k)$ a $E(X|Z_j)$.

Uvedme vzťahy pre výpočet rizikového prírastku pre jeden rizikový faktor Z_k pre jednotlivé rizikové miery pomocou Eulerovej alokačnej metódy (vychádzame zo vzťahov (2.7), (2.8) a (2.9)) s využitím Hoeffdingovej dekompozície (2.12).

Smerodajná odchylka - σ

$$\frac{\text{cov}(E(X|Z_k) - EX, X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}. \quad (2.13)$$

Hodnota v riziku - VaR

$$E(E(X|Z_k) - EX | X = VaR_\alpha(X)) = \frac{1}{1 - \alpha} E\left((E(X|Z_k) - EX) \mathbf{1}_{[X = VaR_\alpha(X)]} \right). \quad (2.14)$$

Očakávaná strata - ES

$$E\left(E(X|Z_k) - EX|X \geq VaR_\alpha(X)\right) = \frac{1}{1-\alpha} E\left(\left(E(X|Z_k) - EX\right)\mathbf{1}_{[X \geq VaR_\alpha(X)]}\right). \quad (2.15)$$

Analogicky by sa vyjadrili rizikové prírastky pre rizikový faktor Z_j , resp. rizikové prírastky dané interakciou rizikových faktorov Z_k a Z_j atď.

3. Aplikácia na poistenie dôchodkov

Ako bolo uvedené v prvej kapitole, zameriame sa v tejto diplomovej práci na produkt životného poistenia, konkrétne na doživotný dôchodok odložený o k rokov. Uvažujeme štyri vstupné veky: 20, 30, 40 a 50. Vstupný vek do výplatnej fázy poistenia sme stanovili na 65 rokov. Pre jednoduchosť vyplácame každému klientovi, ktorý sa dožil veku 65 a viac, na začiatku takéhoto roku jednu korunu. Hornú vekovú hranicu sme stanovili 102 rokov, t.j. $\omega = 102$. Poistenie zaniká smrťou poisteného bez ďalších výplat. Zaujímá nás budú súčasné hodnoty plnení, ktoré budú pre nás predstavovať straty.

V prvej podkapitole budeme uvažovať 4 rôzne prípady, kde postupne budeme pridávať jednotlivé rizikové faktory a následne sledovať zvolené miery rizika. V druhej podkapitole sa už zameriame na použitie Eulerovej alokačnej metódy s využitím Hoeffdingovej dekompozície.

Do všetkých prípadov vstupujú:

- a) pravdepodobnosti úmrtia pre jednotlivé veky v rôznych rokoch,
- b) úrokové miery pre jednotlivé roky.

Potrebné historické dáta pre modelovanie úmrtnosti sme čerpali z verejne dostupnej internetovej databázy „The Human Mortality Database“. Na týchto stránkach sme našli všetky potrebné údaje, ktoré sme potrebovali pre použitie Lee-Carterovho modelu. Zamerali sme sa na českú populáciu. Rozsah údajov od roku 1950 až do roku 2016 považujeme za veľmi dobrý. Dáta za rok 2017 sa na vyššie uvedenej stránke aktuálne nenachádzajú.

Pre CIR model, sme použili nasledujúce parametre:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,5, \\ \mu &= 0,024, \\ \sigma &= 0,01.\end{aligned}$$

Generátory stochastických scenárov pre oba modely boli naprogramované v programe Wolfram Mathematica 9.0. Tento program bol použitý aj na stanovenie súčasných hodnôt plnení. Štatistický program R bol následne použitý na získanie popisné štatistiky. Všetky zdrojové kódy a príslušné súbory je možné nájsť na priloženom CD.

3.1 Pridávanie jednotlivých rizikových faktorov

V tejto podkapitole si postupne rozoberieme jednotlivé prípady:

1. prípad: Uvažujeme pravdepodobnosti úmrtia pre jednotlivé veky platné pre rok 2016. Budeme predpokladať, že vývoj úmrtnosti sa v ďalších rokoch nijak nemení, inými slovami napr. pravdepodobnosť úmrtia 45 ročného človeka v roku

2016 je zhodná s pravdepodobnosťou úmrtia 45 ročného človeka v roku 2050. Čo sa týka úrokových mier, budeme predpokladať konštantnú úrokovú mieru na úrovni 2,4 %. Voľba takejto úrokovej miery je v súčasnej dobe trochu optimistická, ale z dlhodobého hľadiska nie je nereálna.

2. prípad: Rovnako ako v prvom prípade aj tu budeme predpokladať, že sa úmrtnosť populácie v čase nemení. Avšak na rozdiel od prvého prípadu, budeme uvažovať stochastické správanie úrokových mier a vymodelujeme 1 000 rôznych scenárov jej vývoja.

3. prípad: V tomto prípade vymodelujeme 1 000 rôznych scenárov pravdepodobností úmrtia. Na druhú stranu, ale budeme predpokladať konštantnú úrokovú mieru, opäť na úrovni 2,4 %.

4. prípad: V poslednom prípade spojíme 1 000 rôznych scenárov úrokových mier z druhého prípadu s 1 000 rôznymi scenármi pravdepodobností úmrtia z tretieho prípadu.

Pre každý z vyššie uvedených prípadov a pre každý vstupný vek sme na začiatku vždy uvažovali kmeň o veľkosti 1 000 ľudí, ktorý postupne vymieral.

V prvom prípade máme vždy len jedno číslo, ktoré odpovedá priemernej súčasnej hodnote plnenia pre daný kmeň. Pre 2. a 3. prípad už máme 1 000 hodnôt a pre 4. prípad 1 000 000 hodnôt. Môžeme už vyčíslieť priemery, smerodajné odchytky, hodnoty v riziku a očakávané straty pre 95% a 99,5% hladiny spoľahlivosti.

Priemerné hodnoty s narastajúcim vstupným vekom stúpajú (viď Tabuľka 3.1). Je to logické, pretože sa skracuje doba odkladu, tým pádom sa viac ľudí dožije výplatnej fázy. Všimnime si, že pre všetky vstupné veku prechodom od 1. k 2. prípadu, kde sme pridali stochastické scenáre úrokových mier sa priemerná

		<i>Priemer</i>	<i>Smerodajná odchyľka</i>
20 ročný	<i>1. prípad</i>	4,3940	
	<i>2. prípad</i>	4,3980	0,0962
	<i>3. prípad</i>	5,6646	0,0823
	<i>4. prípad</i>	5,6700	0,1497
30 ročný	<i>1. prípad</i>	5,5924	
	<i>2. prípad</i>	5,5969	0,1101
	<i>3. prípad</i>	6,8783	0,0985
	<i>4. prípad</i>	6,8839	0,1688
40 ročný	<i>1. prípad</i>	7,1589	
	<i>2. prípad</i>	7,1638	0,1216
	<i>3. prípad</i>	8,4067	0,1084
	<i>4. prípad</i>	8,4127	0,1810
50 ročný	<i>1. prípad</i>	9,2358	
	<i>2. prípad</i>	9,2420	0,1258
	<i>3. prípad</i>	10,3715	0,1161
	<i>4. prípad</i>	10,3784	0,1850

Tabuľka 3.1: Priemery a smerodajné odchytky pre jednotlivé prípady.

súčasná hodnota plnení skoro vôbec nezmenila. Prechod od 3. k 4. prípadu je veľmi podobný, kde zmena sa pohybuje na úrovni okolo 0,006. Oproti tomu prechod medzi 1. a 3. prípadom je už výraznejší, v priemere 1,24.

Dané výsledky sú samozrejme značnou mierou ovplyvnené voľbou parametrov pre CIR model a Lee-Carterov model. Ďalší vplyv na to bude mať vlastnosť „mean-reversion“ v CIR modeli (návrat k priemernej hodnote), zatiaľ čo Lee-Carterov model bude, na základe historických dát, skôr modelovať nižšiu úmrtnosť pre fixné veky s pribudajúcim časom.

Toto tvrdenie potvrdzujú aj hodnoty v riziku a očakávané straty pre obe hladiny spoľahlivosti, keď v tretích prípadoch sú vždy väčšie hodnoty ako v druhých prípadoch (viď Tabuľka 3.2). Jediné smerodajné odchylky sú vždy väčšie v druhých prípadoch ako v tretích prípadoch (viď Tabuľka 3.1). To nás upozorňuje na väčšiu volatilitu u scenárov úrokových mier oproti volatilitu u scenárov úmrtnosti.

Poznamenajme ešte, že rozdiely pri prechodoch hladiny spoľahlivosti od 0,95 k 0,995 u hodnôt v riziku (resp. u hodnôt očakávaných strát) sú malé (viď Tabuľka 3.3). V ďalšej podkapitole upustíme od hladiny spoľahlivosti 0,995.

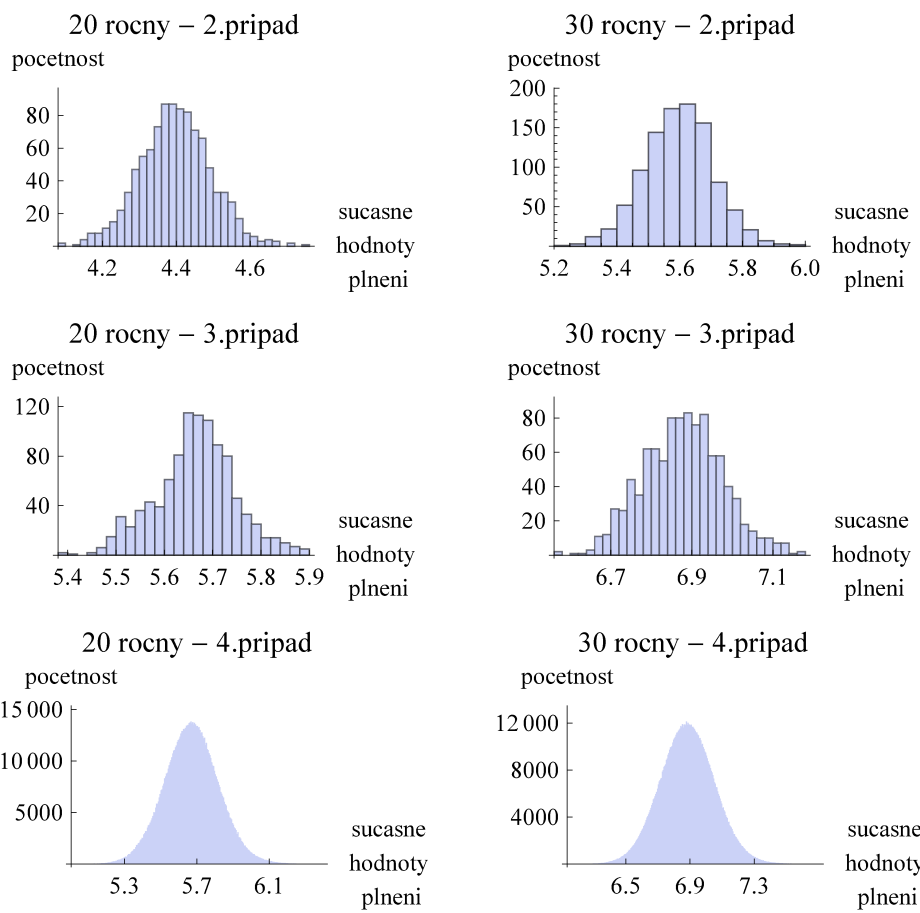
Na konci tejto podkapitoly sa ešte pozrime na jednotlivé histogramy, viď Obr. (3.1) a Obr. (3.2).

3.2 Použitie Eulerovej alokačnej metódy s využitím Hoeffdingovej dekompozície

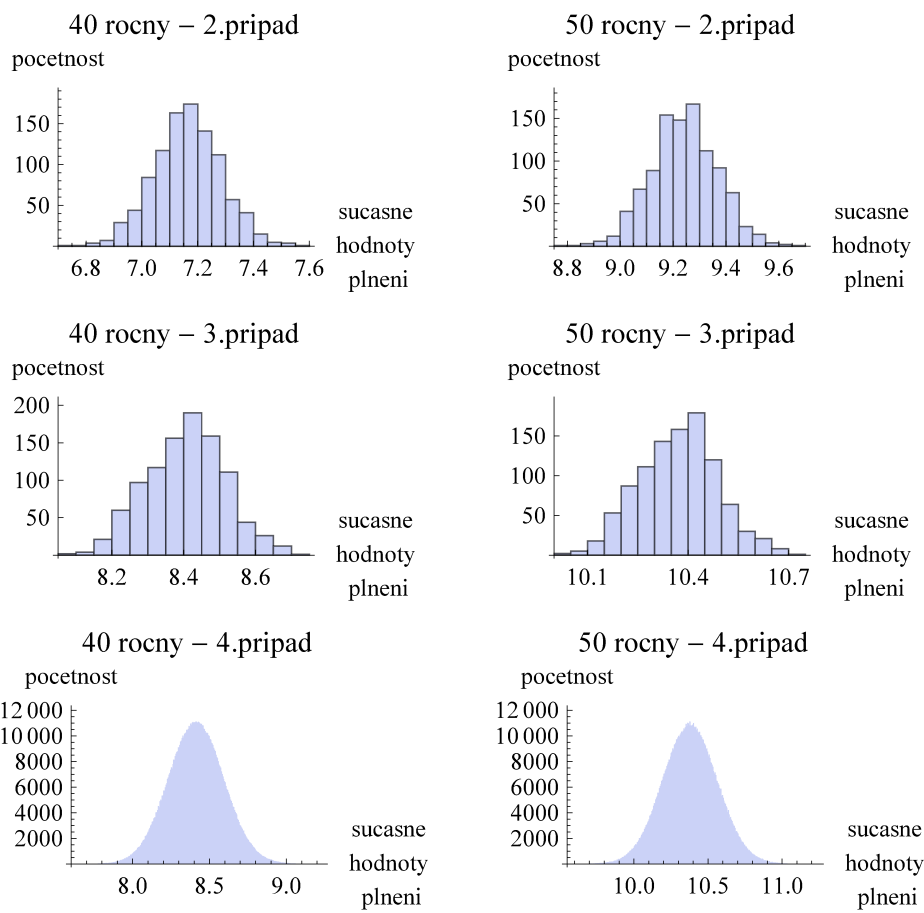
V tejto časti diplomovej práce budeme pracovať s obdobia 4. prípadu z predchádzajúcej podkapitoly, t.j. budeme uvažovať stochastické scenáre úrokových mier a stochastické scenáre úmrtnosti.

		$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,995}$	$ES_{0,95}$	$ES_{0,995}$
20 ročný	2. prípad	4,5558	4,6675	4,6018	4,7064
	3. prípad	5,7994	5,8749	5,8396	5,8854
	4. prípad	5,9164	6,0788	5,9874	6,1351
30 ročný	2. prípad	5,7734	5,8790	5,8279	5,9390
	3. prípad	7,0415	7,1287	7,0886	7,1503
	4. prípad	7,1627	7,3352	7,2400	7,3962
40 ročný	2. prípad	7,3605	7,4940	7,4158	7,5285
	3. prípad	8,5791	8,6738	8,6288	8,6922
	4. prípad	8,7108	8,8884	8,7894	8,9469
50 ročný	2. prípad	9,4419	9,5673	9,5006	9,6149
	3. prípad	10,5571	10,6701	10,6144	10,6928
	4. prípad	10,6834	10,8624	10,7630	10,9221

Tabuľka 3.2: Hodnoty v riziku a očakávané straty pre jednotlivé prípady.



Obr. 3.1: Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veku 20 a 30.



Obr. 3.2: Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veku 40 a 50.

3.2.1 Smerodajná odchýlka - σ

Vygenerovali sme 1 000 rôznych scenárov úrokových mier a 1 000 scenárov úmrtnosti (vymieranie hypotetickej populácie). Ich kombináciou sme získali milión súčasných hodnôt plnení, ktoré sme usporiadali do matice M . Označme jednotlivé súčasné hodnoty plnení ako $x_{i,j}$, kde presne táto hodnota závisí na scenároch $z_i^{(q)}$ a $z_j^{(i)}$, kde $z_i^{(q)}$ odpovedá i -tému scenáru úmrtnosti a $z_j^{(i)}$ odpovedá j -tému scenáru úrokových mier, dostávame

$$z_i^{(q)} \begin{pmatrix} & & z_j^{(i)} & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & x_{i,j} & \cdots & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} = M. \quad (3.1)$$

Rizikový prírastok daný rizikovým faktorom úrokových mier je daný vzťahom (2.13).

Najskôr potrebujeme simulovať hodnoty $E(X|Z)$. Zafixujeme jednotlivé scenáre $z_j^{(i)}$ a spočítame priemery cez odpovedajúce súčasne hodnoty plnení $x_{i,j}$, t.j.

$$\bar{x}_j^{(i)} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} x_{i,j}. \quad (3.2)$$

Týmto dostaneme 1 000 priemerov. K týmto 1 000 hodnotám potrebujeme vybrať vhodných 1 000 hodnôt $x_{i,j}$ tak, aby sme následne mohli z týchto dvoch výberov spočítať výberovú kovarianciu. Zvolili sme diagonálu matice M . Tým

		$VaR_{0,995} - VaR_{0,95}$	$ES_{0,995} - ES_{0,95}$
20 ročný	2. prípad	0,1117	0,1046
	3. prípad	0,0755	0,0458
	4. prípad	0,1624	0,1377
30 ročný	2. prípad	0,1056	0,1111
	3. prípad	0,0872	0,0617
	4. prípad	0,1725	0,1562
40 ročný	2. prípad	0,1335	0,1127
	3. prípad	0,0947	0,0634
	4. prípad	0,1776	0,1575
50 ročný	2. prípad	0,1254	0,1143
	3. prípad	0,1130	0,0784
	4. prípad	0,1790	0,1591
Celkový priemer		0,1282	0,1085

Tabuľka 3.3: Rozdiely medzi $VaR_{0,995}$ a $VaR_{0,95}$ (resp. $ES_{0,995}$ a $ES_{0,95}$).

je zachovaná určitá závislosť medzi týmito dvomi výbermi, pretože prvé hodnoty v jednotlivých výberoch odpovedajú prvému scenáru úrokových mier, druhé hodnoty druhému scenáru úrokových mier atď.

Diagonálne hodnoty matice M taktiež použijeme pre spočítanie výberového rozptylu a následnej odmocniny z neho.

Týmto postupom sme získali rizikový prírastok vyplývajúci z rizika úrokových mier. Obdobným spôsobom získame aj rizikový prírastok vyplývajúci z rizika dlhovekosti. Rizikový prírastok vyplývajúci z interakcie oboch rizík vypočítame cez doplnok, pretože platí vlastnosť úplnej alokácie (2.5).

Aplikovaním Eulerovej alokačnej metódy s využitím Hoeffdingovej dekompozície na smerodajnú odchylku sme zistili, že pre 20 ročného človeka tvorí riziko úrokových mier až dve tretiny z celkového rizika (viď Tabuľka 3.4). S narastajúcim vstupným vekom podiel tohto rizika klesá, ale nijak zásadne.

Rastúci trend má podiel rizika dlhovekosti, ktorý so stúpajúcim vstupným vekom narastá, avšak ani tento nárast nie je výrazný (v priemere o 3,3 %).

Zaujímavý je vývoj rizikového prírastku daný interakciou týchto dvoch rizík. Najprv má malý nárast o 0,5 % a následne dvakrát pokles o 0,5 % a 1,3 %. Tieto pohyby sú relatívne zanedbateľné a tým sa nám podsúva tvrdenie, že vplyv interakcie týchto dvoch rizikových faktorov je nezávislý na vstupnom veku do poistenia a pohybuje sa na úrovni okolo 7,2 %.

3.2.2 Hodnota v riziku - VaR

V tomto prípade sme si vygenerovali súčasné hodnoty plnení pre 100 scenárov úrokových mier, 100 scenárov úmrtnosti a to celkovo v 100 vrstvách. Tým sme dostali 1 000 000 súčasných hodnôt plnení usporiadaných do kocky, kde hodnota $x_{i,j,k}$ odpovedá scenáru úmrtnosti $z_{i,k}^{(q)}$ na vrstve k a scenáru úrokových mier $z_{j,k}^{(i)}$ na vrstve k .

		σ	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	0,0987	66,03
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0395	26,41
	<i>interakcia rizík</i>	0,0113	7,56
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	0,1046	61,98
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0508	30,11
	<i>interakcia rizík</i>	0,0133	7,91
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	0,1095	60,49
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0582	32,15
	<i>interakcia rizík</i>	0,0133	7,36
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	0,1067	57,65
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0674	36,43
	<i>interakcia rizík</i>	0,0109	5,92

Tabuľka 3.4: Použitie Eulerovej alokačnej metódy - smerodajná odchylka.

Rizikový prírastok úrokových mier je daný vzťahom (2.14).

Pre každú vrstvu k nájdeme súčasnú hodnotu plnenia, ktorá je rovná $VaR_{0,95}$. Tak získame pozície „i“ a „j“. Opäť si zafixujeme parameter $z_{j,k}^{(i)}$ a spočítame priemer cez súčasne hodnoty plnení $x_{i,j,k}$, ktoré odpovedajú tomuto scenáru na tejto vrstve:

$$\bar{x}_k^{(i)} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_{i,j,k}, \quad \text{pre zafixované } j.$$

Od každého priemeru pre jednotlivú vrstvu odčítame ešte konštantu odpovedajúcu celkovému priemeru súčasných hodnôt plnení cez všetky scenáre a cez všetky vrstvy. Z týchto výsledných 100 hodnôt (pretože máme 100 vrstiev) spočítame priemer, ktorý ešte nakoniec prenásobíme konštantou $1/(1 - \alpha)$:

$$\frac{1}{1 - 0,95} \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} \left(\bar{x}_k^{(i)} - \frac{1}{1\,000\,000} \sum_{i,j,k=1}^{100} x_{i,j,k} \right).$$

Analogicky získame rizikový prírastok vyplývajúci z rizika dlhovekosti. Riziko, ktoré vzniká interakciou opäť dopočítame cez doplnok do celkovej hodnoty v riziku.

Môžeme si všimnúť, že podiel rizika úrokových mier pre 20 ročného človeka je na úrovni 55 %. S narastajúcim vstupným vekom tento podiel lineárne klesá približne o 8 % (viď Tabuľka 3.5).

Naopak, s pribúdajúcim vekom stúpa podiel rizika daný interakciou oboch rizík. Pre 20 ročného človeka je tento podiel na úrovni 20,4 %, u 30 ročného človeka to je 24,9 %. Pre vstupné veky 40 a 50 je tento podiel postupne na úrovni 34,6 % a 45,8 %. Vidíme, že nárast medzi 20. a 30. vstupným vekom je o 4,5 %, ale prechodmi medzi ďalšími vstupnými vekmi podiel tohto rizika narastá v priemere o 10,5 %.

Zaujímavé zastúpenie má riziko dlhovekosti pre rôzne vstupné veky. Najprv zastúpenie tohto rizika mierne narastá (u 20 ročného človeka je to 24,4 % a u 30 ročného človeka to je 27,4 %). Následne ale podiel tohto rizika už len klesá (u 40 ročného človeka je 26,3 % a u 50 ročného človeka je 22,6 %).

Celkovo sa podiel rizika dlhovekosti pre všetky vstupné veky pohybuje v intervale od 22,6 % do 27,4 % (pri zvolení hodnoty v riziku ako uvažovanej rizikovej miere).

3.2.3 Očakovaná strata - ES

Rizikový prírastok daný rizikovým faktorom úrokových mier je daný vzťahom (2.15).

Pri tejto rizikovej miere sme opäť zostrojili maticu M (3.1), obdobne ako v prípade smerodajnej odchýlky.

Najprv určíme súčasnú hodnotu plnení, ktorá je rovná $VaR_{0,95}$ a označíme ju ako h . Teraz potrebujeme identifikovať všetky $x_{i,j}$, ktoré sú väčšie alebo rovné ako

h . Zostrojíme nula-jednotkovú maticu V , ktorá vznikne transformáciou matice M , kde

$$v_{i,j} = \begin{cases} 1 & ,\text{ak } x_{i,j} \geq h \\ 0 & ,\text{inak} \end{cases}$$

t.j. bude mať jednotky na tých pozíciách, ktoré odpovedajú súčasným hodnotám plnení $x_{i,j}$, ktoré sú väčšie alebo rovne hodnote v riziku h . Keďže hľadáme rizikový prírastok daný rizikovým faktorom úrokových mier, vytvoríme vektor dĺžky 1 000, ktorý vznikne súčtami jednotlivých stĺpcov matice V . Označme ho ako \mathbf{w} , kde

$$w_j = \sum_{i=1}^{1000} v_{i,j}.$$

Tento vektor použijeme neskôr ako váhy k výpočtu váženého priemeru.

Ešte potrebujeme zostrojiť vektor, ktorý bude priemerovať súčasne hodnoty plnení po stĺpcoch. Označme ho \mathbf{y} , kde

$$y_j = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} x_{i,j}.$$

Od každého čísla y_j ešte musíme odčítať celkový priemer cez všetky $x_{i,j}$. Tým získame nový vektor \mathbf{u} :

$$u_j = y_j - \frac{1}{1\,000\,000} \sum_{i,j=1}^{1000} x_{i,j}.$$

		$VaR_{0,95}$	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	3,2597	55,16
	<i>riziko dlhovekosti</i>	1,4441	24,44
	<i>interakcia rizík</i>	1,2052	20,40
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	3,4172	47,76
	<i>riziko dlhovekosti</i>	1,9588	27,38
	<i>interakcia rizík</i>	1,7791	24,86
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	3,4008	39,12
	<i>riziko dlhovekosti</i>	2,2888	26,33
	<i>interakcia rizík</i>	3,0027	34,55
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	3,3579	31,52
	<i>riziko dlhovekosti</i>	2,4121	22,64
	<i>interakcia rizík</i>	4,8846	45,84

Tabuľka 3.5: Použitie Eulerovej alokačnej metódy - hodnota v riziku.

Hľadaný rizikový prírastok daný rizikovým faktorom úrokových mier spočítame ako:

$$\frac{1}{1 - 0,95} \frac{\sum_{j=1}^{1000} u_j w_j}{\sum_{j=1}^{1000} w_j}.$$

Tak ako u predošlých rizikových mierach aj tu sa rizikový prírastok daný rizikom dlhovekosti spočíta analogicky (priemerujeme cez riadky) a taktiež rizikový prírastok daný interakciou rizík dopočítame cez doplnok.

Keď sa pozrieme na výsledky, tak podiel rizika úrokových mier tvorí až tri štvrtiny celkového rizika (viď Tabuľka 3.6). Tak ako u predchádzajúcich rizikových mierach (smerodajná odchýlka, hodnota v riziku), tak aj v tomto prípade zastúpenie tohto rizika s narastajúcim vstupným vekom klesá (v priemere o 10,8 %).

Rovnako, ako keď sme uvažovali hodnotu v riziku ako rizikovú mieru, aj v tomto prípade zastúpenie rizika vyplývajúceho z interakcie oboch rizík so vstupným vekom narastá. Zaujímavosťou je, že pre 20 ročného človeka je tento podiel záporný. Avšak pre 50 ročného človeka je tento podiel na úrovni necelých 30 %.

Čo sa týka podielu rizika dlhovekosti na celkovej strate, tak má rovnaký priebeh ako tomu bolo u hodnoty v riziku, t.j. najprv tento podiel narastá (prechod medzi 20. a 30. vstupným vekom) a následne už len klesá. Zastúpenie tohto rizika sa pre rôzne vstupné veku pohybuje v intervale od 27,9 % do 32,7 %.

		$ES_{0,95}$	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	4,5098	75,32
	<i>riziko dlhovekosti</i>	1,7839	29,80
	<i>interakcia rizík</i>	-0,3063	-5,12
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	4,6786	64,62
	<i>riziko dlhovekosti</i>	2,3694	32,73
	<i>interakcia rizík</i>	0,1915	2,65
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	4,8803	55,52
	<i>riziko dlhovekosti</i>	2,5882	29,45
	<i>interakcia rizík</i>	1,3208	15,03
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	4,6274	42,99
	<i>riziko dlhovekosti</i>	3,0030	27,90
	<i>interakcia rizík</i>	3,1327	29,11

Tabuľka 3.6: Použitie Eulerovej alokačnej metódy - očakovaná strata.

Záver

V diplomovej práci sme sa zamerali na dve základne riziká, s ktorými musí každá poisťovňa v rámci rizikového manažmentu pracovať, konkrétne sa jednalo o riziko dlhovekosti a riziko úrokových mier.

V prvých dvoch kapitolách sme uviedli potrebnú teóriu, ktorú sme následne v tretej kapitole použili na produkt doživotného dôchodku odloženého o k rokov. Analýzu sme vykonávali s použitím údajov pre Českú republiku aplikovaním Eulerovej alokačnej metódy s využitím Hoeffdingovej dekompozície.

Výsledky potvrdili, že obe riziká výraznou mierou ovplyvňujú takýto produkt.

Ak si porovnáme zastúpenie jednotlivých rizík a ich percentuálne zastúpenie, tak si môžeme všimnúť, že pre všetky vstupné veky a pre všetky rizikové miery je riziko úrokových mier vždy väčšie ako riziko dlhovekosti. U každej jednej rizikovej miery je tento rozdiel najväčší pre vstupný vek 20 rokov. Pre ďalšie vstupné veky sa tento rozdiel znižuje. Je to dané hlavne tým, že riziko úrokových mier klesá pre kratšie časové úseky.

Ďalším zaujímavým poznatkom je, že podiel rizika dlhovekosti jedine u smerodajnej odchylky vykazoval rásajúci trend s narastajúcim vstupným vekom. Ale u hodnoty v riziku a u očakávanej strate podiel tohto rizika najprv narastal a následne klesal.

Taktiež sme sa zamerali na vývoj podielu rizika vznikajúceho interakciou týchto dvoch rizík. Jedine u smerodajnej odchylky podiel tohto rizika mal mierny klesajúci trend. Na druhú stranu, u hodnoty v riziku a u očakávanej straty s narastajúcim vstupným vekom podiel tohto rizika výrazne narastá. Dokonca u niektorých rizikových mier a u niektorých vstupných vekov malo toto riziko najväčšie zastúpenie.

Z výsledkov, ku ktorým sme sa v tejto diplomovej práci dopracovali vyplýva, že poisťovne by mali v rámci riadenia rizík uvažovať nie len jednotlivé rizikové faktory, ale taktiež riziká vznikajúce interakciou rizikových faktorov medzi sebou.

Zoznam použitej literatúry

- ANTOLIN, P. (2007). Longevity Risk and Private Pensions. *OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions*, OECD Publishing. Dostupné tiež v online verzii: doi 10.1787/261260613084
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999). Cohorent measure of risk. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203-228.
- BRIGO, D., MERCURIO, F. (2001). *Interest rate models theory and practice*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-41772-9.
- CIPRA, T. (2013). *Finanční ekonometrie*. 2. upravené vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-93-4.
- CIPRA, T. (2006). *Pojistná matematika - teorie a praxe*. 2. aktualizované vydání. Ekopress, Praha. ISBN 80-86929-11-6.
- CIPRA, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. 1. vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-87865-24-8.
- HAUGH, M. (2010). Risk Measures, Risk Aggregation and Capital Allocation. *IEOR E4602: Quantitative Risk Management*, Columbia University. Dostupné z: <http://www.columbia.edu/~mh2078/RiskMeasures.pdf>
- KARABEY, U., KLEINOW, T., CAIRNS, A. J. G. (2014). Factor risk quantification in annuity models. *Insurance: Mathematics and Economics*, **58**, 34-45.
- KLEMA, V. C., LAUB, A. J. (1980). The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **25**(2), 164-176.
- LEE, R. D., CARTER, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, **87**(419), 659-671.
- PITACCO, E., DENUIT, M., HABERMAN, S., OLIVIERI, A. (2009). *Modeling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press. ISBN 978-0-19-954727-2.
- ROSEN, D., SAUNDERS, D. (2010). Risk factor contributions in portfolio credit risk models. *Journal of Banking & Finance*, **34**, 336-349.
- TASCHE, D. (1999). *Risk contributions and performance measurement*. Working paper. Technische Universität München. Dostupné z: <https://pdfs.semanticscholar.org/2659/60513755b26ada0b4fb688460e8334a409dd.pdf>
- TASCHE, D. (2008). *Capital Allocation to Business Units and Sub-Portfolios: the Euler Principle* [online]. [Cit. 2008-06-22]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/0708.2542.pdf>

WEISSTEIN, E. W. (2002). *Newton's Method*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>

Zákon č. 89/2012 Sb., Občanský zákoník.

Zákon č. 304/2016 Sb., kterým se mění zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví, ve znění pozdějších předpisů, a další související zákony.

Zoznam obrázkov

- 3.1 Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 20 a 30. . . 29
- 3.2 Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 40 a 50. . . 30

Zoznam tabuliek

3.1	Priemery a smerodajné odchytky pre jednotlivé prípady.	27
3.2	Hodnoty v riziku a očakávané straty pre jednotlivé prípady.	28
3.3	Rozdiely medzi $VaR_{0,995}$ a $VaR_{0,95}$ (resp. $ES_{0,995}$ a $ES_{0,95}$).	31
3.4	Použitie Eulerovej alokačnej metódy - smerodajná odchytky.	32
3.5	Použitie Eulerovej alokačnej metódy - hodnota v riziku.	34
3.6	Použitie Eulerovej alokačnej metódy - očakávaná strata.	35