Oponentský posudek na bakalářskou práci

Tomáš Lysoněk: Moduly a lokalizace

Práce se zabývá důkazem faktu, že býti projektivním modulem nad komutativním okruhem je Zariski lokální vlastnost (dokonce obecněji AD-vlastnost). Pro konečně generované projektivní moduly je toto standardní fakt z komutativní algebry, pro nekonečně generované projektivní moduly (které jsou předmětem této práce) jde ovšem o silně netriviální výsledek od Raynauda a Grusona s následnými korekcemi od Perryho. Samotný problém pochází of Alexandera Grothendiecka v souvislosti se studiem potenciálně nekonečně dimenzionálních vektorových bandlů v algebraické geometrii.

Ačkoli je práce čistě kompilační, téma je rozhodně nadprůměrně náročné, což se projevuje i na jejím větším rozsahu. Důkaz je podán pečlivě, s velkou mírou detailů a podrobným vysvětlením použitých pojmů, kterých je rovněž značné množství. Při čtení působí trochu rušivě překlepy, které ale na srozumitelnost nemají vliv (zamýšlené znění je zcela jasné). Několik konkrétních připomínek k práci uvádím níže:

1. Nejmenší multiplikativní množina $\bar{S}$ obsahující $S \subseteq R$ v definici 2.3 (str. 12) existuje jen, pokud není žádný konečný součin prvků S nulový (je-li S jednoprvková, jde přesně o vyloučení nilpotence daného prvku, jak je uvedeno dále v definici 2.12).

2. Jádro lokalizace $R \to R_f$ v tvrzení 2.14 není uvedeno správně, ve skutečnosti je rovno
$$\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ann}(f^n).$$
Podobně v poznámce na str. 18 má být jádro homomorfismu $M \to M_f$ správně
$$\{m \in M; (\exists n \geq 1)(m \cdot f^n = 0)\}.$$
Drobnou opravu v této souvislosti vyžaduje i závěr důkazu tvrzení 5.12 (str. 38).

3. U důkazu věty 5.6 (str. 33–35) by měly být uvedeny zdroje, odkud jsou argumenty převzaty.

4. K druhému odstavci na str. 34: morfismy $g\colon R^n \to R^m$ a $h''\colon R^m \to R^{m'}$ splňující dané vlastnosti bychom takto mohli nalézt jen, pokud by $x \in \mathrm{Ker}(g')$ místo $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Takto mi argument nepřipadá úplně korektní.

5. Popis grupy A_z na straně 43 není zcela korektní, je-li z složené číslo. Pak totiž obecně nelze předpokládat, že zlomek $\frac{a}{bz^n}$ je v základním tvaru (např. pro $z = 8$ máme tento problém pro $\frac{1}{4} \in A_z$).

6. Řádek 5 na str. 50: uspořádání na množině I obecně není úplné, proto nemusí nastat ani jedna z možností $k \leq j$ a $k > j$!

7. Řádky 13–14 na str. 50: Použití univerzální vlastnosti kolimity v konstrukci homomorfismu $g\colon M \to M_j$ mi v daném kontextu přijde nekorektní. Musela by totiž platit pro každé $l \geq k \geq i$ (nebo aspoň nějak kofinálně) komutativita

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "f_{lk}"] \arrow[dr, "g_k"'] & M_l \arrow[d, "g_l"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

8. Str. 53 dole: Proč přesně $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ implikuje $\mathrm{Im}(f \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Im}(g \otimes_R \mathrm{id}_N)$?

9. Protože $\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = 0$, homomorfismus

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \prod_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

   na str. 55 *je* surjektivní.

10. V důkazu lemmatu 8.10 je potřeba zdůvodnit, proč lze surjektivní homomorfismus S-modulů $S^{\oplus\omega} \to P \otimes_R S$ volit tak, aby byl tvaru $f \otimes_R S$ pro nějaký homorfismus R-modulů $R^{\oplus\omega} \to P$. Jinak by nešla věrná plochost S nad R použít.

Práci **doporučuji k obhajobě** a hodnocení přikládám zvlášť.

V Praze dne 25. 8. 2018 doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.