MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Lysoněk

Moduly a lokalizace

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kteří mi pomohli a umožnili tuto práci napsat. Panu prof. RNDr. Janu Trlifajovi CSc., DSc. za odborné vedení, motivaci a trpělivost, svým rodičům za péči a umožnění studia a v neposlední řadě svým přátelům a svému partnerovi za neutuchající podporu.

Název práce: Moduly a lokalizace

Autor: Tomáš Lysoněk

katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc., Katedra algebry

Abstrakt: V práci je zaveden pojem lokalizace a zkoumán jeho vztah k vlastnostem modulů nad komutativními okruhy – lokálním vlastnostem a AD-vlastnostem, především projektivitě. Je v ní prezentován důkaz, že projektivita modulů je AD-vlastností, pocházející od Raynauda a Grusona, v opravené verzi od Perryho z roku 2010. Tento důkaz je rozpracován do detailní podoby a doplněn o příklady a význam zkoumaných pojmů v kontextu algebraické geometrie.

Klíčová slova: moduly, lokalizace, komutativní algebra, algebraická geometrie.

Title: Modules and localization

Author: Tomáš Lysoněk

department: Department of Algebra

Supervisor: prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc., Department of Algebra

Abstract: In the Thesis, we define the notion of a localization and explore its connections to properties of modules - local properties and AD-properties, especially the projectivity. We present a proof of the fact that projectivity is an AD propety of modules due to Raynaud and Gruson in the corrected version by Perry from 2010. The proof is presented in full detail and accompanied by examples, and by the role of the investigated notions in the context of algebraic geometry.

Keywords: modules, localization, commutative algebra, algebraic geometry.

Obsah

Úvod

Motivací této práce je problém z algebraické geometrie formulovaný Alexanderem Grothendieckem v šedesátých letech minulého století, otázka lokálnosti pojmu (nekonečně dimenzionálního) vektorového bandlu.

Moderní algebraická geometrie se zabývá schématy a kvazikoherentními svazky modulů nad nimi. Schéma je topologický prostor, jehož některým otevřeným množinám jsou přiřazeny komutativní okruhy, tyto podmnožiny se nazývají afinní. Kvazikoherentní svazek modulů nad schématem potom dostáváme, přiřadíme-li otevřeným afinním množinám jistým způsobem moduly nad příslušnými okruhy. Pro speciální případ (nekonečně dimenzionálních) vektorových bandlů jsou v této reprezentaci tyto moduly (nekonečně generované) projektivní.

Základní otázkou je, jaké vlastnosti kvazikoherentních svazků jsou lokální, tedy nezávislé na „souřadnicích“, to jest volbě otevřeného afinního pokrytí daného schématu.

Cílem této práce je formulovat otázku lokálnosti v jazyce komutativní algebry a vyřešit ji pro případ vektorových bandlů. V reprezentaci uvedené výše jde o problém o projektivních modulech nad komutativními okruhy.

První důkaz tohoto tvrzení byl podán ve slavném článku Raynauda a Grusona [10], tento důkaz byl ovšem nepřesný, jak upozornil sám Gruson v [5]. V této práci sledujeme opravenou verzi důkazu z článku Perryho [9], který je součástí The Stacks Project [11].

Těžiště řešení tohoto problému je v komutativní algebře. Proto je tato práce především algebraická a souvislosti s algebraickou geometrií pouze naznačujeme v několika poznámkách.

Práci lze rozdělit do tří částí.

Kapitoly 1 až 5 jsou věnovány souhrnu relevantních částí teorie okruhů a modulů s důrazem na komutativní případ a zavedení pojmů potřebných pro definice a důkazy ve zbytku práce. Jsou sem zařazeny i definice a připomenutí základních vlastností direktních a inverzních limit a tenzorového součinu, které přesahují obsah bakalářského studia.

V Kapitole 6 je definován pojem lokálních vlastností a související pojem AD-vlastností a jsou uvedeny příklady takových vlastností.

Kapitoly 7 a 8 jsou věnovány důkazu, že projektivita je AD-vlastnost. Tento důkaz je převzat z článku [9].

1. Základní pojmy

V této kapitole definujeme základní pojmy z teorie okruhů a modulů, budeme však předpokládat, že má čtenář základní znalosti o jednoduchých okruhových a modulových konstrukcích. Připomeneme tedy pouze definice pojmů, které jsou pro tuto práci v nějakém smyslu důležité. Používáme standardní značení, v souladu například s [8].

1.1 Okruhy a moduly

Základními objekty zkoumanými v této práci jsou komutativní okruhy moduly nad nimi. Následují definice těchto pojmů a základních pojmů s nimi souvisejících

Definice 1.1. Okruh (s jednotkou) *je pětice* $\mathbf{R} = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$*, taková, že* $(R, +, -, 0)$ *je abelovská grupa,* $(R, \cdot, 1)$ *je monoid a operace* $\cdot$ *je vůči operaci* $+$ *distributivní. Navíc* $0 \neq 1$*.*

Okruh se nazývá komutativní*, je-li komutativní operace* $\cdot$*.*

Definice 1.2. *Buď* $\mathbf{R} = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$ *okruh. Potom na množině* R *definujeme* opačný okruh *jako* $\mathbf{R}^{\mathrm{op}} = (R, +, -, 0, \tilde{\cdot}, 1)$*, kde struktura sčítání a konstanty jsou převzaty z okruhu* $\mathbf{R}$ *a násobení je pro* $r, \ s \in R$ *definováno jako* $r \tilde{\cdot} s = s \cdot r$*.*

Poznámka. Zřejmě okruh $\mathbf{R}$ je komutativní právě tehdy, platí-li $\mathbf{R}^{\mathrm{op}} = \mathbf{R}$.

Poznámka. Je běžné vynechávat symbol násobení, píšeme tedy rs namísto $r \cdot s$. Dále je obvyklé značit okruh jen označením jeho nosné množiny, z kontextu je obvykle zřejmé, který z těchto formálně různých objektů máme namysli. Těchto konvencí se přidržíme.

Pro definici pojmu lokalizace je nezbytná následující definice.

Definice 1.3. *Buď* R *okruh. Prvek* $r \in R$ *nazveme invertibilním, existuje-li prvek* $s \in R$ *takový, že* $r \cdot s = s \cdot r = 1$*. Prvek* s *potom nazýváme inverzním prvkem (inverzem) k prvku* r*. Množinu invertibilních prvků okruhu* R *značíme* R^**.*
Inverzní prvek je určen jednoznačně. Platí-li pro nějaká $r, \ s, \ s' \in R$ *rovnosti* $rs = sr = 1$ *a* $rs' = s'r = 1$*, potom* $s' \cdot 1 = s'rs = 1 \cdot s$*. Jedinečný inverzní prvek k prvku* r *značíme* r^{-1}*.*
Množina R^* *tvoří spolu s operacemi* $\cdot$ *a* $-^{-1}$ *grupu. Neutrálním prvkem je* 1*. Tuto grupu nazýváme multiplikativní grupou okruhu* R*.*

Budeme dále předpokládat, že čtenář zná pojmy okruhového homomorfismu, pravého, levého a oboustranného ideálu a konstrukce a vlastnosti faktorokruhu a direktního součinu okruhů.

Definujme nyní moduly nad okruhy.

Definice 1.4. *Budiž* R *okruh.* Pravý modul $\mathbf{M}$ *nad okruhem* R *(krátce pravým* R*-modulem) je struktura* $(M, +, 0, - \cdot r; r \in R)$*, kde* $(M, +, -, 0)$ *je abelovská grupa, pro* $r \in R$ *je* $- \cdot r$ *unární operace, a pro každá* $r, \ s \in R$ *a* $m, \ n \in M$ *platí*

(i) $m \cdot 1 = m$,

(ii) $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$,

(iii) $m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$,

(iv) $m \cdot (rs) = (m \cdot r) \cdot s$.

Levým modulem *nad okruhem R (krátce levým R-modulem) rozumíme pravý modul nad okruhem R^{op}. V levém modulu je zvykem psát násobení prvkem okruhu zleva (tedy uvažovat operátory tvaru $r \cdot -$), podmínka* (iv) *z předchozí definice má potom tvar*

(iv) $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$.

Poznámka. Podobně jako u okruhu je zvykem značit modul pouze pomocí jeho nosné množiny.

Poznámka. Nad komutativním okruhem zřejmě splývají pojmy pravého a levého modulu. Pro komutativní okruh R tedy mluvíme typicky pouze o R-modulu.

Poznámka. V následujícím textu budeme důkazy provádět typicky pro pravé moduly. Veškerá tvrzení budou však mutatis mutandis platit pro levé moduly, neboť stačí přejít k opačnému okruhu.

Je možné uvažovat modul, který má současně strukturu pravého a levého modulu nad obecně různými okruhy. Jsou-li tyto struktury navíc v jistém smyslu kompatibilní, vzniká struktura nazývaná *bimodul.* Užitečnost tohoto pojmu vychází z faktu, že modulové konstrukce rušící strukturu pravého modulu typicky pro bimoduly zachovávají strukturu levého modulu. Příkladem takových konstrukcí budou množiny Hom a tenzorový součin.

Definice 1.5. *Buďte R a S okruhy. Strukturu $(M, +, 0, - \cdot r, s \cdot -; r \in R, s \in S)$ nazveme* (S,R)-bimodulem*, je-li $(M, +, 0, - \cdot r; r \in R)$ pravým R-modulem, $(M, +, 0, s \cdot -; s \in S)$ levým S-modulem a navíc pro každé $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$ platí $s \cdot (m \cdot r) = (s \cdot m) \cdot s$.*

Příklad. Pro komutativní okruh R je libovolný R-modul M také (R,R)-bimodulem.

Okruh R má také přirozeně strukturu pravého i levého R-modulu a (R,R)-bimodulu. Tento pravý a levý modul se nazývají pravý resp. levý regulární modul okruhu R.

Příklad. Je-li $f : R \to S$ homomorfismus okruhů, potom S získává strukturu pravého R-modulu, akce okruhu R je dána jako $s \cdot r = s \cdot f(r)$. Podobně získává S strukturu levého R-modulu a vzhledem k asociativitě násobení i (R,R)-bimodulu.

Podobně libovolný pravý S-modul M potom získává strukturu R-modulu, akci okruhu definujeme jako $m \cdot r = m \cdot f(r)$.

Předpokládáme dále, že čtenář zná pojmy modulového homomorfismu, jeho jádra a obrazu, pojem podmodulu a konstrukci a základní vlastnosti faktormodulů a direktních sum a součinů.

Připomeňme základní názvosloví homomorfismů a definici a základní vlastnosti množin homomorfismů mezi danými dvěma moduly.

Definice 1.6. *Homomorfismus $f : M \to N$ nazveme*

(a) monomorfismem*, je-li prostý,*

(b) štěpitelným monomorfismem, *existuje-li homomorfismus* $g : N \to M$ *takový, že* $g \circ f = \mathrm{id}_M$,

(c) epimorfismem, *je-li na,*

(d) štěpitelným epimorfismem, *existuje-li homomorfismus* $g : N \to M$ *takový, že* $f \circ g = \mathrm{id}_N$,

(e) izomorfismem, *je-bijektivní, což nastane právě tehdy, existuje-li homomorfismus* $g : N \to M$ *takový, že* $g \circ f = \mathrm{id}_M$ *a* $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Definice 1.7. *Množinu všech homomorfismů R-modulů z M do N značíme* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Poznámka. Množina $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ má přirozeně strukturu abelovské grupy. Nulou je nulový homomorfismus $m \mapsto 0$ a sčítání a opačný prvek jsou definovány po složkách, tedy pro $f,\ g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ a $m \in M$ položíme $(f+g)(m) = f(m) + g(m)$ a $(-f)(m) = -(f(m))$. Je-li M (S,R)-bimodul, potom má $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ strukturu pravého S/modulu, položíme-li pro $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $s \in S$ a $m \in M$ $(f \cdot s)(m) = f(s \cdot m)$. Je-li N (S,R)-bimodul, má $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ strukturu levého S-modulu, položíme-li $(s \cdot f)(m) = s \cdot f(m)$.

Definujme dále v této práci na několika místech užívaný pojem kojádra.

Definice 1.8. *Buď* $f : M \to N$ *homomorfismus pravých R-modulů. Potom označme* $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f)$. *Tento faktormodul nazveme* kojádro.

Připomeňme dále pojem exaktních posloupností.

Definice 1.9. *Mějme posloupnost modulů a homomorfismů*

$$\cdots \to M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_{-1}} \cdots$$

Řekneme, že je tato posloupnost exaktní v bodě M_i, *platí-li* $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. *Posloupnost nazveme* exaktní, *je-li exaktní v každém bodě. Exaktní posloupnost*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

nazveme krátká exaktní posloupnost. *Zřejmě homomorfismus* $A \to B$ *je monomorfismus a homomorfismus* $B \to C$ *je epimorfismus. Krátkou exaktní posloupnost nazve štěpitelnou, jsou li štěpitelné homomorfismy* $A \to B$ *a* $B \to C$.

Příklad. Pro $N \subseteq M$ je posloupnost

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

exaktní. Posloupnost

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

je exaktní pro libovolný homomorfismus $f : M \to N$.

Poznámka. Je-li posloupnost

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

štěpitelná krátká exaktní posloupnost potom $B \cong A \oplus C$. Z faktu, že pro dvojici homomorfismů $f : M \to N$ a $g : N \to M$ splňující $g \circ f = \mathrm{id}_M$ už platí $N \cong \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ plyne, že krátká exaktní posloupnost $0 \to A \to B \to C \to 0$ je štěpitelná právě tehdy, je-li alespoň jeden z homomorfismů $A \to B$, $B \to C$ štěpitelný.

Připomeňme nakonec definici volných modulů z nich vycházející pojem prezentace modulu.

Definice 1.10. *Modul F nazveme volný, existuje-li množina $X \subseteq M$ taková, že pro libovolný modul M a zobrazení $f' : X \to M$ existuje jediný homomorfismus $f : F \to M$ takový, že $f|_X = f'$. Množinu X nazýváme volná báze.*

Poznámka. Volný R-modul F s volnou bází X je kanonicky izomorfní modulu $R^{\oplus X}$.

Poznámka. Pro libovolný R-modul M existuje volný modul F a epimorfismus $p : F \to M$. Například lze volit $F = R^{\oplus M}$ a homomorfismus definovaný na prvcích báze $m \in M$ jako $m \mapsto m$.

Definice 1.11. *R-modul M nazveme konečně (spočetně) generovaný, existuje-li epimorfismus*

$$R^{\oplus I} \to M$$

kde I je konečná (spočetná) množina.

R-modul M nazveme konečně prezentovaný, existuje-li exaktní posloupnost

$$R^m \to R^n \to M \to 0.$$

Tuto posloupnost potom nazýváme prezentace modulu M.

1.2 Ideály komutativních okruhů

V této práci budeme na mnoha místech pracovat s komutativními okruhy. V komutativních okruzích definujeme následující pojmy. Tyto pojmy mají obdobu v nekomutativních okruzích, ale pro tuto práci není nutné je uvažovat.

Definice 1.12 (Maximální ideál)**.** *Buď R komutativní okruh. Vlastní ideál $M \subseteq R$ nazveme* maximální ideál*, pokud pro každý ideál $I \subseteq R$ platí, že je-li $M \subseteq I$, potom už $I = M$ nebo $I = R$.*

Definice 1.13. *Buď R komutativní okruh. Ideál $P \subseteq R$ nazveme* prvoideál*, platí-li pro libovolné prvky $r, s \in R$ následující. Je-li $rs \in P$, potom $r \in R$ nebo $s \in R$.*

Poznámka. Maximální ideály jsou prvoideály. Je-li M maximální ideál a $rs \in M$, ale $r \notin M$, potom z maximality M už platí $M + rR = R$, existuje tedy vyjádření $1 = \sum s_i + rk$ pro nějaké prvky $s_i \in M$ a $k \in R$. Přenásobením prvkem s potom dostáváme vyjádření $s = \sum s_i s + rsk \in M$.

Podívejme se na vztah ideálů okruhů propojených homomorfismem.

Definice 1.14. *Buď $f : R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a buď $I \subseteq R$ ideál. Potom ideál $J \subseteq S$ generovaný obrazem $f(I)$ označíme IS*

Definice 1.15. *Buď $f : R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a buď $J \subseteq I$ ideál. Potom ideál $f^{-1}(J) \subseteq R$ označíme $I \cap R$*

Ukažme několik základních vlastností těchto ideálů.

Tvrzení 1.16. *Buď $f : R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a buďte $I \subseteq R$ a $J \subseteq S$ ideály. Potom $I \subseteq IS \cap R$ a $(J \cap R)S \subseteq J$*

Důkaz. Toto je zřejmé z definice

□

Tvrzení 1.17. *Buď $f : R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a buď $J \subseteq I$ vlastní ideál. Potom $J \cap R$ je vlastní ideál.*

Důkaz. Je-li $J \cap R = R$, potom už $1 \in J \cap R$ a tedy $1 \in (J \cap R)S \subseteq J$ a $J = R$.

□

Tvrzení 1.18. *Buď $f : R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a buď $P \subseteq S$ prvoideál. Potom $P \cap R$ je prvoideál okruhu R.*

Důkaz. Buďte $r,\ r' \in R$ prvky takové, že $rr' \in P \cap R$. Potom $f(r)f(r') = f(rr') \in P$. Protože P je prvoideál, je jeden z těchto činitelů také jeho prvkem, bez újmy na obecnosti tedy $f(r) \in P$ a tedy $r \in P \cap R$.

□

Na několika místech této práce používáme dále pojem anihilátoru prvku

Definice 1.19. *Buď R komutativní okruh a buď $r \in R$. Potom množina $\{s \in R;\ r \cdot s = 0\}$ tvoří ideál okruhu R. Tento ideál nazýváme* anihilátor prvku r *a značíme jej* $\mathrm{Ann}(r)$.

1.3 Funktoriální chování

Pro definice mnoha pokročilejších pojmů je nutné zavést pojem funktoru. Jde o pojem z teorie kategorií, který je v moderní algebře hojně používaný. Obecnější definice a důkladnější poznatky o následujících pojmech lze nalézt například v [7].

Definice 1.20. *Buďte $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nějaké třídy struktur, mezi jejichž objekty jsou definovány homomorfismy (takové třídy nazýváme kategorie).*

(a) Kovariantním funktorem *nazveme třídové zobrazení $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ spolu se zobrazeními* $\mathrm{Hom}(A,A') \to \mathrm{Hom}(F(A),F(A'))$ *(která typicky označujeme shodně F), pro něž platí následující. Pro $A \in \mathcal{A}$ je $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ a pro $f \in \mathrm{Hom}(A',A)$, $g \in \mathrm{Hom}(A,A'')$ platí $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$.*

(b) Kontravariantním funktorem *nazveme třídové zobrazení* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *spolu se zobrazeními* $\mathrm{Hom}(A,A') \to \mathrm{Hom}(F(A'),F(A))$, *pro něž platí následující. Pro* $A \in \mathcal{A}$ *je* $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ *a pro* $f \in \mathrm{Hom}(A',A)$, $g \in \mathrm{Hom}(A,A'')$ *platí* $F(f) \circ F(g) = F(g \circ f)$.

Pojem funktoru je užitečný především proto, že většina modulových konstrukcí dává vzniknout nějakému funktoru a vztahy těchto funktorů jsou potom zásadní v důkazech mnoha zajímavých skutečností.

Příklad. Konstrukce $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ dává kovariantní funktor z kategorie pravých R-modulů do kategorie abelovských grup. Chování na homomorfismech je definováno následovně. Pro $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ definujeme

$$\mathrm{Hom}_R(M,f) : \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B),\ \ g \mapsto f \circ g.$$

Příklad. Konstrukce $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ dává kontravariantní funktor. Chování na homomorfismech je předepsáno podobně. Pro $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ definujeme

$$\mathrm{Hom}_R(f,M) : \mathrm{Hom}_R(B,M) \to \mathrm{Hom}_R(A,M),\ \ g \mapsto g \circ f.$$

Pro funktory mezi kategoriemi modulů je důležité, jak působí na exaktní posloupnosti.

Definice 1.21. *Buď F funktor mezi kategoriemi modulů. Funktor F nazveme*

(a) zprava exaktní*, je-li posloupnost $F(\mathcal{S})$ exaktní ve středním a pravém bodě;*

(b) zleva exaktní*, je-li posloupnost $F(\mathcal{S})$ exaktní ve středním a levém bodě;*

(c) exaktní*, je-li posloupnost $F(\mathcal{S})$ exaktní*

pro libovolnou krátkou exaktní posloupnost $\mathcal{S}$ ve výchozí kategorii.

Funktor F nazveme věrně exaktní*, platí-li pro libovolnou posloupnost $\mathcal{S}$ ve výchozí kategorii, že $\mathcal{S}$ je exaktní posloupnost právě tehdy je-li $F(\mathcal{S})$ exaktní posloupnost.*

Příklad. Je snadným cvičením dokázat, že funktory $\mathrm{Hom}(-,M)$ a $\mathrm{Hom}(M,-)$ pro fixovaný modul M jsou zleva exaktní.

Posledním důležitým základním pojmem je přirozený izomorfismus.

Definice 1.22. *Buďte F a G funktory mezi stejným kategoriemi modulů, buď oba kovariantní nebo oba kontravariantní. Potom říkáme, že existuje* přirozený izomorfismus $F \cong G$*, existuje-li pro každý modul A výchozí kategorie izomorfismus $\phi_A : F(A) \to G(A)$ a pro každý homomorfismus $A \to A'$ ve výchozí kategorii komutuje čtverec*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & F(A') \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi_A} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_{A'}} \\ G(A) & \longrightarrow & G(A') \end{array}.$$

Poznámka. Přítomnost přirozeného izomorfismu umožňuje bez ztráty jakýchkoliv vlastností zaměňovat objekty získané různými konstrukcemi. Tuto možnost využijeme mnohokrát v pokročilejších důkazech v této práci.

2. Lokalizace

V následující kapitole jsou všechny okruhy komutativní. V této kapitole zavedeme pojem lokalizace – základní a titulní pojem této práce. Definice a značení jsou veskrze přejaté z [8, Kapitola 2], lokalizace modulu je doplněná o definici pomocí univerzální vlastnosti.

2.1 Lokalizace okruhů

Volně řečeno je lokalizace konstrukcí, která přidává inverzní prvky k nějaké zvolené množině prvků okruhu. Základním předpokladem je tedy volba okruhu R a nějaké množiny jeho prvků $S \subseteq R$, která neobsahuje nulu, neboť ta invertibilní být nemůže. Výsledkem by potom měl být okruh, v němž jsou prvky zvolené množiny invertibilní. Navíc by to měl být okruh v jistém smyslu nejlepší – co nejbližší okruhu původnímu. Tyto požadavky reflektuje následující definice pomocí tzv. univerzální vlastnosti.

Definice 2.1. *Buď R komutativní okruh a $S \subseteq R$ nějaká podmnožina jeho prvků, taková, že $0 \notin S$.* Lokalizací okruhu R v množině S *nazveme okruh L a okruhový homomorfismus $l : R \to L$ takové, že $l(S) \subseteq L^*$ a navíc pro každý okruh R' a homomorfismus $l' : R \to R'$ splňující $l'(S) \subseteq L'^*$ existuje právě jeden homomorfismus $f : L \to L'$ takový, že $l' = f \circ l$.*

Poznámka. Někdy se za lokalizaci označuje pouze okruh L z předchozí definice, je však třeba mít na paměti, že zmíněný homomorfismus k definici neodmyslitelně patří. Z jeho přítomnosti navíc vyplývá, že lokalizace má strukturu R-algebry.

Tvrzení 2.2. *Buď R okruh a $S \subseteq R$ množina jeho prvků. Jsou-li L a L' lokalizacemi okruhu R v množině S, pak $L \cong L'$.*

Důkaz. Buďte L a L' lokalizace okruhu a l a l' příslušné homomorfismy. Podle Definice 2.1 existují homomorfismy $f : L \to L'$ a $g : L' \to L$, takové, že $l' = g \circ l$ a $l = f \circ l'$. Ověříme- li, že tyto homomorfismy jsou vzájemně inverzní, tedy $g \circ f = id_L$ a $f \circ g = id_{L'}$, pak již jde o vzájemně inverzní izomorfismy a skutečně $L \cong L'$.

Platí $l = g \circ l' = g \circ f \circ l$. Ovšem také $l = id_L \circ l$. Podle Definice 2.1 však existuje jediný homomorfismus $h : L \to L$ splňující $l = h \circ l$, a tedy už nutně $g \circ f = id_L$. Druhá z rovností se dokáže stejně.

□

Obsahem Tvrzení 2.2 je fakt, že lokalizace, existuje-li, je až na izomorfismus určena jednoznačně. Než přikročíme ke konstrukci a tedy důkazu existence, prozkoumejme, v jakých množinách je třeba lokalizaci uvažovat. Je snadno k nahlédnutí, že součin invertibilních prvků je invertibilní, stejně tak jednotka je invertibilní v každém okruhu. Zdá se tedy, že zvětšení množiny S o prvek 1 nebo o libovolný konečný součin jejích prvků nepřidává další podmínky pro lokalizaci. Mohlo by tedy stačit uvažovat lokalizace v množinách na konečné součiny uzavřených. Tato úvaha motivuje Definici 2.3 a, jak se ukáže v Tvrzení 2.4, je správná.

Definice 2.3. *Buď R okruh. Podmnožinu $S \subseteq R$ nazveme* multiplikativní, *je-li*

(i) $1 \in S$, $0 \notin S$

(ii) *pokud $r,\ s \in S$, pak také $r \cdot s \in S$.*

Je-li $S \subseteq R$ množina, označme $\bar{S}$ vzhledem k inkluzi nejmenší multiplikativní množinu v R obsahující S jako podmnožinu. Tuto množinu nazýváme multiplikativní uzávěr *S v okruhu R.*

Poznámka. Ověříme snadno, že

$$\bar{S} = \tilde{S} := \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n; n \in \mathbb{N}_0,\ (\forall 1 \leq i \leq n) s_i \in S\}.$$

Nahlédněme, že jde o multiplikativní množinu. Jednotku dostaneme pro $n = 0$ (jako výsledek prázdného součinu) a součin dvou konečných součinů prvků z S je sám jistě konečným součinem prvků z S. Dále jistě $S \subseteq \tilde{S}$. Zbývá ověřit, že jde o nejmenší takovou množinu. Skutečně, multiplikativní množina obsahující S obsahuje každý konečný součin prvků S. Ty však tvoří právě množinu $\tilde{S}$. Tedy $\tilde{S}$ je nejmenší multiplikativní množinou obsahující S a $\tilde{S} = \bar{S}$.

Tvrzení 2.4. *Buď R okruh a $S \subseteq R$ množina jeho prvků. Buď dále L lokalizace R v S a l příslušný homomorfismus. Potom L je také lokalizací R v množině $\bar{S}$.*

Důkaz. Ověřme nejprve, že $l(\bar{S}) \subseteq L^*$. Zvolme libovolně $s \in \bar{S}$, $s = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n$ pro nějaká $s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n \in S$. Víme, že $l(S) \subseteq L^*$, můžeme tedy uvažovat prvky $l(s_1)^{-1}, \ldots, l(s_n)^{-1} \in L$. Potom ovšem dostáváme prvek $t = l(s_n)^{-1} \cdot l(s_{n-1})^{-1} \cdot \ldots \cdot l(s_1)^{-1} \in L$. Zřejmě $t \cdot l(s) = 1 = l(s) \cdot t$, tedy $t = l(s)^{-1}$ a $l(s) \in L^*$. Vzhledem k libovolné volbě prvku $s \in \bar{S}$ už dostáváme $l(\bar{S}) \subseteq L^*$.

Buďte nyní L' a $l' : R \to L'$ takové, že $l'(\bar{S}) \subseteq L'^*$. Ovšem potom $l'(S) \subseteq l'(\bar{S}) \subseteq L'^*$ a protože L je lokalizace R v S existuje podle Definice 2.1 jediný homomorfismus $f : L \to L'$ takový, že $l' = f \circ l$. Tím je ovšem dokázáno, že L je spolu s homomorfismem l lokalizací okruhu R v množině $\bar{S}$.

□

Z tohoto tvrzení vychází, že stačí uvažovat lokalizace v multiplikativních množinách, neboť lokalizace v libovolné množině splývá s lokalizací v jejím multiplikativním uzávěru. To je stěžejní poznatek pro konstrukci a důkaz existence lokalizace, neboť konstrukce se tradičně provádí pro S multiplikativní.

Konstrukce lokalizace okruhu

V této části provedeme konkrétní konstrukci lokalizace okruhu v multiplikativní množině.

Mějme okruh R a multiplikativní množinu $S \subseteq R$. Uvažujme na množině $R \times S$ ekvivalenci $\sim$ určenou následovně.

$(r_1,\ s_1) \sim (r_2,\ s_2)$ právě, když existuje $s' \in S$ takové, že $s' \cdot (r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1) = 0$.

Třídu ekvivalence $\sim$ určenou prvkem $(r,\ s)$ značíme $\frac{r}{s}$ a množinu $(R \times S) / \sim$ označujeme RS^{-1}. Na množině RS^{-1} zavedeme strukturu okruhu.

(a) $1 = \frac{1}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$,

(b) $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1}{s_1 \cdot s_2}$,

(c) $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{s_1 \cdot s_2}$.

Díky multiplikativitě množiny S jsou výsledky operací jistě prvky RS^{-1}. Ověřme, že jsou dobře definované a že odpovídají definici okruhu. Ověřme dobrou definovanost pro sčítání, pro násobení se využije podobná úvaha.

Mějme rovnosti zlomků $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_1'}{s_1'}$ a $\frac{r_2}{s_2} = \frac{r_2'}{s_2'}$. Existují tedy prvky $t_1,\ t_2 \in S$ takové, že $(r_1 s_1' - r_1' s_1)t_1 = 0$ a $(r_2 s_2' - r_2' s_2)t_2 = 0$. Chceme ukázat rovnost

$$\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r_1' s_2' + r_2' s_1'}{s_1' s_2'}$$

Ovšem

$$\begin{aligned}((r_1 s_2 + r_2 s_1)s_1' s_2' - (r_1' s_2' + r_2' s_1')s_1 s_2)t_1 t_2& \\ = (r_1 s_1' - r_1' s_1)t_1 t_2 s_2 s_2' + (r_2 s_2' - r_2' s_2)t_2 t_1 s_2 s_2' = 0\end{aligned}$$

a tím je rovnost ověřena.

Snadno se dále ověří, že 0 a 1 jsou neutrálními prvky vzhledem ke sčítání a násobení. Z komutativity a asociativity okruhu R snadno nahlédneme komutativitu a asociativitu sčítání i násobení. Zbývá ověřit distributivitu. Uvažujme tedy zlomky $\frac{r_1}{s_1}$, $\frac{r_2}{s_2}$, $\frac{r_3}{s_3} \in RS^{-1}$. Potom

$$\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) \cdot \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 \cdot s_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot s_1 \cdot r_3}{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3}$$

a

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_3}{s_3} + \frac{r_2}{s_2} \cdot \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 \cdot r_3 \cdot s_2 \cdot s_3 + r_2 \cdot r_3 \cdot s_1 \cdot s_3}{s_1 \cdot s_3 \cdot s_2 \cdot s_3}.$$

Rovnost výrazů na pravé straně se snadno ověří z definice. Označme čitatele těchto výrazů r' a r'' a jmenovatele s' a s''. Po aplikaci distributivity a komutativity okruhu R zjistíme, že $r''s' = r's''$, z čehož vyplývá rovnost zlomků $\frac{r'}{s'} = \frac{r''}{s''}$.

Ověřili jsme tedy, že RS^{-1} je okruh.

Popsaná konstrukce dává navíc kanonický homomorfismus $l : R \to RS^{-1}$, $r \mapsto \frac{r}{1}$. Ověřme nyní, že zkonstruovaný okruh je skutečně hledanou lokalizací.

Tvrzení 2.5. *Buď R komutativní okruh a $S \subseteq R$ multiplikativní množina. Potom okruh RS^{-1} spolu s homomorfismem $l : r \mapsto \frac{r}{1}$ je lokalizace okruhu R v množině S.*

Důkaz. Zvolme prvek $s \in S$. Potom $\frac{1}{s} \in RS^{-1}$ a dále $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = 1$, neboť $1 \cdot (s \cdot 1 - 1 \cdot s) = 0$. Odtud $\frac{s}{1} \in (RS^{-1})^*$ a vzhledem k libovolné volbě $s \in S$ už $l(S) \subseteq (RS^{-1})^*$.

Mějme nyní okruh L' a homomorfismus $l' : R \to L'$ takové, že $l'(S) \in (L')^*$. Hledáme nyní homomorfismus $f : RS^{-1} \to L'$, takový, že $l' = f \circ l$ a chceme navíc ukázat, že je jedinečný. Ukážeme během konstrukce, že je tvar homomorfismu vynucen, odtud také vyplyne jednoznačnost. Předpokládejme, že f je homomorfismus s požadovanými vlastnostmi. Potom jistě $f(\frac{r}{s}) = f(\frac{r}{1} \cdot (\frac{s}{1})^{-1}) =$

$f(\frac{r}{1}) \cdot f(\frac{s}{1})^{-1} = (f \circ l)(r) \cdot (f \circ l)(s)^{-1} = l'(r) \cdot l'(s)^{-1}$. Každý homomorfismus s požadovanými vlastnostmi tedy musí být definován právě tímto předpisem. Ověřme, že tento předpis zadává dobře definovaný okruhový homomorfismus.

Pro dobrou definovanost předpokládejme, že $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$, tedy existuje $s' \in S$, takové, že $s' \cdot (r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1) = 0$. Aplikací homomorfismu l' dostáváme

$$l'(s') \cdot l'(r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1) = 0$$

$$l'(r_1) \cdot l'(s_2) - l'(r_2) \cdot l'(s_1) = 0$$
$$l'(r_1) \cdot l'(s_1)^{-1} = l'(r_2) \cdot l'(s_2)^{-1}$$
$$f\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = f\left(\frac{r_2}{s_2}\right)$$

Jde tedy o dobře definované zobrazení. Jde také skutečně o okruhový homomorfismus. Platí zřejmě

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = l'(1) \cdot l'(1)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1.$$

Sčítání je zachováno, neboť

$$\begin{aligned} f\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) = f\left(\frac{r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1}{s_1 \cdot s_2}\right) &= (l'(r_1 \cdot s_2) + l'(r_2 \cdot s_1)) \cdot l'(s_1 \cdot s_2)^{-1} \\ &= l'(r_1) \cdot l'(s_1)^{-1} + l'(r_2) \cdot l'(s_2)^{-1} = f\left(\frac{r_1}{s_1}\right) + f\left(\frac{r_2}{s_2}\right), \end{aligned}$$

a násobení je zachováno, neboť

$$f\left(\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}\right) = l'(r_1) \cdot l'(r_2) \cdot l'(s_1)^{-1} \cdot l'(s_2)^{-1} = f\left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot f\left(\frac{r_2}{s_2}\right).$$

Oba výpočty využívají komutativitu. Tímto jsme tedy dokázali, že RS^{-1} je skutečně hledanou lokalizací.

□

Nadále budeme lokalizaci komutativního okruhu R v multiplikativní množině S značit RS^{-1}, příslušný homomorfismus budeme značit l. Za pomoci konkrétní konstrukce lokalizace je možné odpovědět na některé otázky, například lze přesně popsat jádro lokalizačního homomorfismu. Dále se zjednoduší pohled na vztah svazu ideálů původního okruhu a jeho lokalizace.

Tvrzení 2.6. *Buď R okruh, $S \subseteq R$ multiplikativní množina a $l : R \to RS^{-1}$ lokalizace. Potom jádro l je právě množina*

$$\mathrm{Ker}(L) = \{r \in R; (\exists s \in S)\ r \cdot s = 0\}$$

Důkaz. Prvek $r \in R$ je prvkem jádra právě tehdy, pokud $l(r) = \frac{r}{1} = 0$, tedy pokud existuje $s \in S$ takové, že $s \cdot r = s \cdot (r \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$.

□

Důsledek. Je-li R obor integrity, potom $\mathrm{Ker}(l) = \{0\}$ a lokalizace je prostý homomorfismus, neboli vnoření.

Vyslovme nyní několik tvrzení, která ukazují vztah mezi ideály okruhu a ideály jeho lokalizace. Rozšíření ideál $I(RS^{-1})$ budeme značit kratším IS^{-1}.

Tvrzení 2.7. *Pro vlastní ideál $J \subseteq RS^{-1}$ platí $(J \cap R) \cap S = \emptyset$ a navíc $J = (J \cap R)RS^{-1}$.*

Důkaz. Připomeňme, že platí $(J \cap R)RS^{-1} \subseteq J$. Kdyby tedy existoval prvek $r \in (J \cap R) \cap S$, potom by ideál $(J \cap R)S^{-1}$ obsahoval invertibilní prvek $\frac{r}{1}$ a platilo by už $R = (J \cap R)S^{-1} = J$.
Dokažme nyní inkluzi $(J \cap R)RS^{-1} \supseteq J$. Zvolme libovolně prvek $\frac{r}{s} \in J$. Potom také $\frac{r}{1} = \frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1} \in J$ a tedy $r \in J \cap R$. Odtud ovšem už zřejmě plyne, že $\frac{r}{1} \in (J \cap R)RS^{-1}$ a tedy $\frac{r}{s} \in (J \cap R)RS^{-1}$.

□

Tvrzení 2.8. *Je-li $P \subseteq R$ prvoideál a $P \cap S = \emptyset$, potom PS^{-1} je prvoideál okruhu RS^{-1} a $P = PS^{-1} \cap R$.*

Důkaz. Inkluze $P \subseteq PS^{-1} \cap R$ je známá. Ukažme inkluzi $P \supseteq PS^{-1} \cap R$. Zvolme prvek $r \in PS^{-1} \cap R$. Potom jistě $\frac{r}{1} \in PS^{-1}$, a existuje tedy vyjádření $\frac{r}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s_i}$, kde $r_i \in P$ a $s_i \in S$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Označme $s = s_1 s_2 \dots s_n$ a $s_i' = \frac{s}{s_i} \in S$. Vynásobením předchozí rovnosti prvkem s potom dostáváme rovnost

$$\frac{rs}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i'}{1}.$$

Existuje tedy prvek $s' \in S$ takový, že $rss' = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i' s' \in P$. Z toho, že P je prvoideál a $P \cap S = \emptyset$ už plyne $r \in P$.

Zvolme nyní prvky $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in RS^{-1}$ takové, že $\frac{rr'}{ss'} \in PS^{-1}$. Potom už jistě $\frac{rr'}{1} \in PS^{-1}$ a tedy $rr' \in PS^{-1} \cap R = P$. Ideál P je prvoideál, bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat $r \in P$. Potom však už $\frac{r}{1} \in PS^{-1}$ a také $\frac{r}{s} \in PS^{-1}$.

□

Tvrzení 2.7 a 2.8 společně dávají charakterizaci prvoideálů lokalizace.

Tvrzení 2.9. *Prvoideály okruhu RS^{-1} jsou právě ideály tvaru PS^{-1}, kde $P \subseteq R$ je prvoideál a $P \cap S = \emptyset$. Navíc korespondence $P \leftrightarrow PS^{-1}$ je jednoznačná.*

Důkaz. První část tvrzení vychází z Tvrzení 2.7 a toho, že vzor prvoideálu je prvoideál (Tvrzení 1.18). Jednoznačnost plyne z Tvrzení 2.8.

□

Speciální druhy lokalizace

V této části popíšeme speciální druhy lokalizací – lokalizace v prvoideálu a v prvku. Jak se ukáže v Kapitole 6, tyto konstrukce jsou stěžejní pro pojem lokálních vlastností okruhů a modulů.

Lze snadno nahlédnout, že je-li P prvoideál okruhu R, jeho doplňkem je multiplikativní množina. Má tedy smysl uvažovat lokalizaci v tomto doplňku.

Definice 2.10. *Buď R okruh a $P \subseteq R$ jeho prvoideál. Lokalizace $R(R \setminus P)^{-1}$ se nazývá* lokalizace v prvoideálu P *a značí se R_P.*

Pozorování 2.11. *R_P je lokální okruh, jeho maximálním ideálem je ideál PR_P.*

Důkaz. Podle charakterizace ideálů lokalizace je jsou všechny ideály okruhu R_P tvaru IR_P pro nějaký ideál $I \subseteq R$. Ovšem pokud $I \subseteq P$, potom i $IR_P \subseteq PR_P$ a pokud naopak $I \not\subseteq P$, potom $I \cap (R \setminus P) \neq \emptyset$ a $IR_P = R_P$.

□

V některých situacích záleží na invertibilitě jediného prvku. Potom lze volit množinu S z definice lokalizace jako jednoprvkovou. Pro konstrukci je však nutné uvažovat její multiplikativní uzávěr, tedy množinu obsahující jedničku a všechny mocniny daného prvku. Tento prvek tedy zřejmě nelze volit nilpotentní, jinak by jeho multiplikativní uzávěr obsahoval nulu.

Definice 2.12. *Buď R okruh a $f \in R$ jeho prvek, který není nilpotentní. Potom lokalizaci v multiplikativní množině $S = \{f^n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ nazýváme* lokalizace v prvku f *a značíme ji R_f.*

Tvrzení 2.13. *Prvoideály R_f jsou právě ideály tvaru PR_f kde $P \subseteq R$ je prvoideál R a $f \notin P$.*

Důkaz. Podle charakterizace prvoideálů ideálů lokalizace je každý prvoideál R_f tvaru PR_f, kde $P \subseteq R$ je prvoideál a $P \cap S = \emptyset$. Ovšem pokud $f \notin P$, potom $f^n \notin P$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, neboť P je prvoideál.

□

Tvrzení 2.14. *Pro prvek $f \in R$ je jádrem lokalizačního homomorfismu $R \to R_f$ právě ideál* $\mathrm{Ann}(f)$.

Důkaz. Jde o zřejmý důsledek Tvrzení 2.6.

□

2.2 Lokalizace modulů

Máme-li modul M nad okruhem R a provedeme-li lokalizaci okruhu R v nějaké multiplikativní množině, nabízí se otázka, je-li možné převést modul nad okruhem R na modul nad jeho lokalizací. Vzhledem k tomu, že lokalizace má strukturu R algebry, bude mít každý modul nad ní také strukturu modulu nad okruhem R. Hledáme tedy modul, který je opět v jistém smyslu nejblíže modulu původnímu, má však navíc strukturu modulu nad lokalizovaným okruhem. Tento požadavek je opět reflektován v definici pomocí univerzální vlastnosti.

Definice 2.15. *Buď R okruh, M modul nad R a $S \subseteq R$ multiplikativní množina. Potom* lokalizací modulu M v množině S *rozumíme modul N nad okruhem RS^{-1} a $l : M \to N$ homomorfismus R-modulů, takový, že pro každý RS^{-1}-modul N' a homomorfismus $l' : M \to N'$ existuje jediný homomorfismus RS^{-1}-modulů $f : N \to fN'$ takový, že $l' = f \circ l$ jako R-homomorfismy.*

Podobně jako v případě okruhů i tato definice pomocí univerzální vlastnosti má za rychlý důsledek jedinečnost výsledného objektu až na izomorfismus. Podobně ovšem neříká nic o jeho existenci.

Tvrzení 2.16. *Buď R okruh, $S \subseteq R$ multiplikativní množina, M modul nad R a N, N' lokalizace M v množině S. Potom $N' \cong N$.*

Důkaz. Provede se stejně jako u Tvrzení 2.2.

□

Důkaz existence provedeme opět konstrukcí, která je velmi podobná konstrukci lokalizace okruhu.

Konstrukce lokalizace modulu

Mějme R okruh, M modul nad R a $S \subseteq R$ multiplikativní množinu. Uvažujme nyní ekvivalenci $\sim$ na množině $M \times S$ zadanou následovně

$(m_1,s_1) \sim (m_2,s_2)$, právě když existuje $s' \in S$ takové, že $(m_1 \cdot s_2 - m_2 \cdot s_1) \cdot s' = 0$.

Blok této ekvivalence určený prvkem (m,s) je zvykem označovat $\frac{m}{s}$. Množinu $(M \times S) / \sim$ označíme MS^{-1} a zavedeme na ní strukturu modulu nad okruhem RS^{-1}. Pro $\frac{m_1}{s_1}$, $\frac{m_2}{s_2} \in MS^{-1}$ a $\frac{r}{s} \in RS^{-1}$ položíme

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{m_1 \cdot s_2 + m_2 \cdot s_2}{s_1 \cdot s_2}, \qquad \frac{m_1}{s_1} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m_1 \cdot r}{s_1 \cdot s}.$$

Snadno se ověří, že popsaná konstrukce má za výsledek modul nad RS^{-1}, tento modul značíme MS^{-1}. Definujeme kanonický homomorfismus R-modulů $l : M \to MS^{-1}$, $m \mapsto \frac{m}{1}$. Zbývá opět dokázat, že získaný objekt je žádanou lokalizací, tedy ověřit univerzální vlastnost.

Tvrzení 2.17. *Buď R okruh, M modul nad R a $S \subseteq R$ multiplikativní množina. Potom modul MS^{-1} spolu s homomorfismem $l : m \mapsto \frac{m}{1}$ je lokalizace modulu M v množině S.*

Důkaz. Jak bylo okomentováno během konstrukce, MS^{-1} je skutečně modul nad okruhem RS^{-1} a l je R-homomorfismus. Buď nyní N nějaký modul nad RS^{-1} a $l' : M \to N$ R-homomorfismus. Hledáme nyní RS^{-1}-homomorfismus $f : MS^{-1} \to N$ splňující $l' = f \circ l$. Nahlédněme, že tvar tohoto homomorfismu je podmínkami vynucen. Pro $\frac{m}{s} \in MS^{-1}$ musí jistě platit

$$f\left(\frac{m}{s}\right) = f\left(\frac{m}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = f\left(\frac{m}{1}\right) \cdot \frac{1}{s} = (f \circ l)(m) \cdot \frac{1}{s} = l'(m) \cdot \frac{1}{s}.$$

Výpočtem se snadno ověří, že tento předpis zadává dobře definovaný homomorfismus. Protože jeho tvar je vynucen podmínkami, jde jistě o jediný homomorfismus se zadanou vlastností. Ověřili jsme, že modul MS^{-1} je skutečně lokalizací M v množině S.

□

Poznámka. V definici lokalizace modulu by jistě šlo nahradit okruh RS^{-1} jiným okruhem R'. K tomu, aby zbytek definice dával smysl, postačí, aby měl okruh R' strukturu R-modulu, neboť potom jsou homomorfismy R'-modulů také homomorfismy R-modulů. Definici tedy lze přeformulovat pro případ, kdy máme libovolný okruhový homomorfismus $R \to R'$ namísto homomorfismu lokalizačního. Taková konstrukce se potom nazývá *rozšíření okruhu skalárů*, je proveditelná i v nekomutativním případě a v následující kapitole bude představen prostředek k její realizaci.

Speciální druhy lokalizace modulů

Podobně jako u okruhů se používá zvláštní značení pro lokalizace v jistých multiplikativních množinách. Tyto konvence jsou shrnuty v následujících dvou definicích.

Definice 2.18. *Buď R okruh, M modul nad R a $P \subsetneq R$ prvoideál. Potom lokalizaci M v množině $S = R \setminus P$ nazýváme* lokalizace M v prvoideálu P *a značíme ji M_P*

Definice 2.19. *Buď R okruh, M modul nad R a $f \in R$ prvek, nikoli nilpotentní. Potom lokalizaci M v množině $S = \{f^n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ nazýváme* lokalizace M v prvku f *a značíme ji M_f.*

Poznámka. Snadno se nahlédne, že pro prvek $f \in R$ je jádro lokalizačního homomorfismu $M \to M_f$ množina $\{m \in M;\ m \cdot f = 0\}$.

2.3 Lokalizace jako funktor

Definice 2.20. *Buď R komutativní okruh, $S \subseteq R$ multiplikativní množina a $f : M \to N$ buď homomorfismus R-modulů. Potom označme $fS^{-1} : MS^{-1} \to NS^{-1}$ homomorfismus RS^{-1}-modulů definovaný následovně.*

$$fS^{-1}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}.$$

Tvrzení 2.21. *Buď R komutativní okruh, $S \subseteq R$ multiplikativní množina a $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ buďte homomorfismy R-modulů. Potom*

$$(g \circ f)S^{-1} = gS^{-1} \circ fS^{-1}.$$

Tímto jsme ověřili, že lokalizace ve fixované multiplikativní množině zadává funktor. Tento funktor je dokonce exaktní.

Tvrzení 2.22. *Buď R komutativní okruh, $S \subseteq R$ multiplikativní množina a*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

buď krátká exaktní posloupnost R-modulů. Potom

$$0 \to M_1S^{-1} \to M_2S^{-1} \to M_3S^{-1} \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost RS^{-1}-modulů.

Důkaz. Dokážeme pouze exaktnost v levém bodě. Zbytek důkazu provedeme v příští kapitole. Stačí tedy ověřit, že pro prostý homomorfismus $\nu : M_1 \to M_2$ je homomorfismus $\nu S^{-1} : M_1 S^{-1} \to M_2 S^{-1}$ prostý. Ať tedy pro nějaké prvky $\frac{m_1}{s_1}, \frac{m_2}{s_2} \in M_1 S^{-1}$ platí $f S^{-1}\left(\frac{m_1}{s_1}\right) = f S^{-1}\left(\frac{m_2}{s_2}\right)$. Pak podle definice νS^{-1} dostáváme $\frac{\nu(m_1)}{s_2} = \frac{\nu(m_2)}{s_2}$ a podle konstrukce $M_2 S^{-1}$ tedy existuje $s' \in S$ takové, že $(\nu(m_1) \cdot s_2 - \nu(m_2) \cdot s_1) \cdot s' = 0$. Ovšem ν je homomorfismus R-modulů, takže dostáváme rovnost $\nu((m_1 \cdot s_2 - m_2 \cdot s_2) \cdot s') = 0$ a vzhledem k prostosti ν už máme $(m_1 \cdot s_2 - m_2 \cdot s_2) \cdot s' = 0$, tedy přesně $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$.

□

3. Direktní a inverzní limity

V této práci je na několika místech užívaný pojem direktního či inverzního systému a direktní či inverzní limity. V této kapitole tyto pojmy zavedeme a popíšeme jejich základní vlastnosti, které budou užitečné pro tuto práci.

Definice 3.1. *Buď $(I, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Množinu $(I, \leq)$ nazveme* nahoru usměrněnou, *pokud pro každá i, $j \in I$ existuje $k \in I$ takové, že $i \leq k$ a $j \leq k$.*

Poznámka. Dále budeme částečně uspořádané množiny značit pouze označením nosné množiny a nebude-li řečeno jinak, uspořádáním bude relace $\leq$.

Definice 3.2. *Buď $(I, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Podmnožinu $J \subseteq I$ nazveme* kofinální podmnožinou *v I, pokud pro libovolné $i \in I$ existuje $j \in J$ takové, že $i \leq j$.*

Tvrzení 3.3. *Buď I spočetná nahoru usměrněná množina. Potom existuje monotónní zobrazení $\mathbb{N} \to I$, jehož obraz je v I kofinální.*

Důkaz. Množina I je spočetná, lze tedy předpokládat $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ Zkonstruujme monotónní zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to I$ následovně. Položme $\varphi(1) = i_1$. Dále postupujme indukcí. Je-li definováno $\varphi(n) = j$, položme $\varphi(n+1) = j'$, kde $j' \geq j$ a $j' \geq i_n$. Takové hodnoty lze volit, neboť I je nahoru usměrněná. Takto zkonstruované zobrazení je zřejmě monotónní a jeho obraz je kofinální podmnožina, neboť jistě pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\varphi(k) \geq i_k$.

□

Definice 3.4. *Buď I nahoru usměrněná množina.*

(a) Direktním systémem *(A_i,f_{ji}) indexovaným množinou I rozumíme systém množin $\{A_i; i \in I\}$ spolu se systémem zobrazení $\{f_{ji} : A_i \to A_j; i,j \in I, j \geq i\}$ takovým, že pro každé $k \geq j \geq i$ platí $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$ a pro libovolné $i \in I$ je $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$.*

(b) Inverzním systémem *(A_i,f_{ij}) indexovaným množinou I rozumíme systém množin $\{A_i; i \in I\}$ spolu se systémem zobrazení $\{f_{ij} : A_j \to A_i; i,j \in I, j \geq i\}$ takovým, že pro každé $k \geq j \geq i$ platí $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ a pro libovolné $i \in I$ je $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$.*

Mluvíme-li o direktním respektive inverzním systému R-modulů, požadujeme navíc, aby všechna zobrazení byla modulovými homomorfismy.

Definice 3.5. *Buď I nahoru usměrněná množina.*

(a) *Buď (A_i,f_{ji}) direktní systém množin indexovaný množinou I.* Direktní limitou *tohoto systému rozumíme množinu A spolu se systémem zobrazení $f_i : A_i \to A$ takovým, že pro každá i, $j \in I$, $j \geq i$ platí $f_j \circ f_{ji} = f_i$. Navíc pro libovolnou množinu A' a systém $f'_i : A_i \to A'$ splňující totéž existuje právě jedno zobrazení $g : A \to A'$ takové, že pro každé $i \in I$ je $g \circ f_i = f'_i$. Direktní limitu systému (A_i,f_{ji}) značíme $\varinjlim A_i$.*

(b) *Buď* (A_i, f_{ij}) *inverzní systém množin indexovaný množinou* I. Inverzní limitou *tohoto systému rozumíme množinu* A *spolu se systémem zobrazení* $f_i : A \to A_i$ *takovým, že pro každá* i, $j \in I$, $j \geq i$ *platí* $f_{ij} \circ f_j = f_i$. *Navíc pro libovolnou množinu* A' *a systém* $f'_i : A' \to A_i$ *splňující totéž existuje právě jedno zobrazení* $g : A' \to A$ *takové, že pro každé* $i \in I$ *je* $f_i \circ g = f'_i$. *Direktní limitu systému* (A_i, f_{ij}) *značíme* $\varprojlim A_i$.

Podobně jako u lokalizace, plyne z definice okamžitě jednoznačnost direktních i inverzních limit až na izomorfismus. Navíc nahlédněme, že pro limity stačí uvažovat podsystém indexovaný kofinální podmnožinou.

Tvrzení 3.6. *Buď* I *nahoru usměrněná množina a* $I' \subseteq I$ *kofinální.*

(a) *Buď* (A_i, f_{ji}) *direktní systém indexovaný* I. *Potom* $\varinjlim_{i\in I} A_i \cong \varinjlim_{i\in I'} A_i$.

(b) *Buď* (A_i, f_{ij}) *inverzní systém indexovaný* I. *Potom* $\varprojlim_{i\in I} A_i \cong \varprojlim_{i\in I'} A_i$.

Důkaz. Označme f_i pro $i \in I$ zobrazení z definice $\varinjlim_{i\in I} A_i$ a g_i pro $i \in I'$ zobrazení z definice $\varinjlim_{i\in I'} A_i$.

Zřejmě $\varinjlim_{i\in I} A_i$ splňuje spolu se zobrazeními $\{f_i;\ i \in I'\}$ základní podmínku pro direktní limitu systému $(A_i, f_{ji}; i \in I')$.

Naopak pro $\varinjlim_{i\in I'} A_i$ dodefinujme pro $j \notin I'$ zobrazení $g_j = g_k \circ f_{kj}$, kde $k \in I'$ a $k \geq j$ musí existovat vzhledem ke kofinalitě $I' \subseteq I$. Potom $\varinjlim_{i\in I'} A_i$ se zobrazeními $\{g_i;\ i \in I\}$ zřejmě splňuje základní podmínku pro limitu systému $(A_i, f_{ji}; i \in I)$.

Podle univerzální vlastnosti direktní limity dostáváme homomorfismy

$$\varinjlim_{i\in I} A_i \to \varinjlim_{i\in I'} A_i \text{ a } \varinjlim_{i\in I'} A_i \to \varinjlim_{i\in I} A_i.$$

Podobně jako v případě jednoznačnosti se potom ukáže, že to již musí být inverzní izomorfismy.

Pro inverzní limity dokážeme tvrzení stejně, jen v úvahách povedou zobrazení opačným směrem.

□

3.1 Konstrukce a vlastnosti direktních limit

Existenci direktních limit direktních systémů modulů dokážeme přímou konstrukcí. Správnost této konstrukce je známá, její důkaz je například v [12, 24.2]

Buď (M_i, f_{ji}) direktní systém modulů indexovaný množinou I. Uvažujme direktní sumu $\bigoplus_{i\in I} M_i$ a její podmodul E generovaný prvky tvaru

$$\nu_i(m) - \nu_j(f_{ji}(m))$$

pro i, $j \in I$, $i \leq j$, $m \in M_i$. Potom direktní limita $\varinjlim_{i\in I} M_i$ je izomorfní $(\bigoplus_{i\in I} M_i)/E$, zobrazeními z definice jsou potom homomorfismy $f_i = \pi \circ \nu_i$, kde π je kanonická projekce faktorizace.

Následuje několik užitečných vlastností direktních limit. Některé důkazy jsou z prostorových důvodů opět vynechány.

Tvrzení 3.7. *Buď (M_i,f_{ji}) direktní systém modulů indexovaný množinou I, buď $M = \varinjlim M_i$ a $f_i : M_i \to M$ příslušná zobrazení. Potom pro prvek $m \in M_i$ platí $f_i(m) = 0$ právě tehdy, existuje-li $j \in I$ takové, že $f_{ji}(m) = 0$.*

Důkaz. Toto je [12, 24.3 (1)].

□

Tvrzení 3.8. *Buď (M_i,f_{ji}) direktní systém R-modulů indexovaný množinou I, buď $M = \varinjlim M_i$ a $f_i : M_i \to M$ příslušná zobrazení. Buď dále Q konečně generovaný R-modul a mějme $j \in I$ a homomorfismy $g : Q \to M_j$ a $h : Q \to M_j$ takové, že $f_j \circ g = f_j \circ h$. Potom už existuje $k \in I, k \geq j$ takové, že $f_{kj} \circ g = f_{kj} \circ h$.*

Důkaz. Uvažujme nejprve $h = 0$. Uvažujme dále konečnou množinu generátorů modulu Q $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Pro $1 \leq l \leq n$ máme $f_j(g(q_l)) = 0$ a podle 3.7 potom existuje $k_l \in I$ takové, že $f_{k_l j}(g(q_l)) = 0$. Označme k maximum z $\{k_l; l = 1, \ldots, n\}$. Potom ovšem pro každé $1 \leq l \leq n$ platí $f_{kj}(g(q_l)) = 0$ ale protože jde o množinu generátorů modulu Q máme už $f_{kj} \circ g = 0$. Pokud volíme homomorfismus h nenulový, proveďme předchozí úvahu pro homomorfismus $(g-h)$. Potom pro nalezené k a libovolné $q \in Q$ máme $f_{kj}((g-h)(q)) = 0$, ovšem odtud a z definice $(g-h)$ plyne $f_{kj}(g(q)) = f_{kj}(h(q))$. Máme tedy požadovanou rovnost $f_{kj} \circ g = f_{kj} \circ h$

□

Tvrzení 3.9. *Buď (M_i,f_{ji}) direktní systém R-modulů indexovaný množinou I, buď $M = \varinjlim M_i$ a $f_i : M_i \to M$ příslušná zobrazení. Buď dále Q konečně prezentovaný R-modul a $h : Q \to M$ homomorfismus. Potom existují $j \in I$ a $h' : Q \to M_j$ takové, že $h = f_j \circ h'$.*

Důkaz. Toto je [4, Lemma 2.8].

□

Pro tuto práci je dále užitečný fakt, že lze každý modul zkonstruovat jako direktní limitu konečně prezentovaných modulů.

Tvrzení 3.10. *Buď M pravý R-modul. Potom existuje direktní systém konečně prezentovaných modulů $(M_d,\ f_{dd'})$ takový, že $M \cong \varinjlim M_d$.*

Důkaz. Pro nějakou množinu I existuje surjekce $f : R^{\oplus I} \to M$. Uvažujme potom množinu D tvořenou dvojicemi (J,N) kde $J \subseteq I$ je konečná podmnožina a $N \subseteq \operatorname{Ker}(f|_{R^{J'}}$ je konečně generovaný podmodul. Tato množina je uspořádána relací $(J,N) \leq (J',N')$ právě když $J \subseteq J'$ a $N \subseteq N'$ a snadno se ověří, že je nahoru usměrněná. Sestrojme nyní direktní systém indexovaný touto množinou. Pro $(J,N) \in D$ vezmeme $M_{(J,N)} = R^{\oplus J}/N$. Pro $d = (J,N)$, $d' = (J',N')$ položíme $f_{dd'} : R^{\oplus J}/N \to R^{\oplus J'}/N'$, $x + N \mapsto x + N'$. Direktní limita tohoto systému je potom skutečně izomorfní M. Neprovedeme zde celé ověření, jen konstatujme, že zobrazení f_d z definice limity jsou $f_{(J,N)} : R^{\oplus J}/N \to R^{\oplus I}/\operatorname{Ker}(f) \cong M$, $x + N \to x + \operatorname{Ker}(f)$.

□

3.2 Konstrukce inverzních limit

Pro důkaz existence inverzních limit modul a inverzních limit množin provedeme opět explicitní konstrukci. Důkaz správnosti této konstrukce je například v [12, 29.2]

Buď (A_i, f_{ij}) inverzní systém množin indexovaný množinou I. Uvažujme množinu $\prod_{i\in I} A_i$ a její podmnožinu A' tvořenou prvky $(a_i)_{i\in I}$ jež splňují $f_{ij}(a_j) = a_i$ pro každé $i \leq j \in I$. Množina A' spolu s restrikcemi kanonických projekcí $\pi_i|_{A'} : A' \to A_i$ je limitou systému (A_i, f_{ij}). Jsou-li A_i moduly a f_{ij} modulové homomorfismy, potom se snadno nahlédne, že A' je podmodulem modulu $\prod_{i\in I} A_i$. Modul A' je potom inverzní limitou systému modulů (A_i, f_{ij}).

Se znalostí explicitního tvaru inverzní limity můžeme snadno učinit následující pozorování.

Pozorování 3.11. *Buď (A_i, f_{ij}) inverzní systém množin indexovaný množinou $\mathbb{N}$ takový, že zobrazení f_{ji} jsou surjektivní. Potom $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.*

Důkaz. Stačí vzít libovolný prvek $a_1 \in A_1$ a indukcí sestrojit posloupnost $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takovou, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $a_{i+1} \in f^{-1}_{i(i+1)}(a_i) \neq \emptyset$.

□

3.3 Limity jako funktory

Tak jako většina modulových konstrukcí, i limity dávají vzniknout funktoru. Vlastnosti těchto funktorů budou důležité v pozdějších částech této práce.

Buď I nahoru usměrněná množina a (A_i, f_{ji}) a (B_i, g_{ji}) buďte direktní systémy. Mějme dále množinu homomorfismů $\{h_i : A_i \to B_i;\ i \in I\}$ takových, že pro každá $i \leq j \in I$ platí $g_{ji} \circ h_i = h_j \circ f_{ji}$. Potom zřejmě $\varinjlim_{B_i}$ spolu se zobrazeními $f_i \circ h_i$ splňuje podmínku pro limitu systému (A_i, f_{ji}) a existuje tedy jediný homomorfismus $h : \varinjlim_{i\in I} A_i \to \varinjlim_{i\in I} B_i$ splňující pro každé $i \in I$ rovnost $h \circ f_i = g_i \circ h$. Tento homomorfismus označíme $\varinjlim_{i\in I} h_i$.

Pro inverzní systémy (A_i, f_{ji}) a (B_i, g_{ji}) a množinu homomorfismů $\{h_i : A_i \to B_i;\ i \in I\}$ splňující podobnou podmínku sestrojíme podobnou úvahou homomorfismus $\varprojlim_{i\in I} h_i : \varprojlim_{i\in I} A_i \to \varprojlim_{i\in I} B_i$.

Snadno se ověří, že obě tyto konstrukce zachovávají skládání homomorfismů.

Tímto jsme ukázali, že direktní a inverzní limita jsou skutečně funktory. Následující tvrzení se vyjadřuje k exaktnosti těchto funktorů.

Tvrzení 3.12. *Direktní limita je exaktní funktor, tedy je-li I nahoru usměrněná množina, (A_i, f_{ji}), (B_i, g_{ji}), (C_i, h_{ji}) jsou direktní systémy modulů a pro každé i máme krátkou exaktní posloupnost*

$$0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$$

jejichž homomorfismy splňují vzhledem k daným direktním systémům podmínky z předchozího odstavce, potom

$$0 \to \varinjlim_{i\in I} A_i \to \varinjlim_{i\in I} B_i \to \varinjlim_{i\in I} C_i \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost.

Důkaz. Vynecháváme, je například v [12, 24.6]

□

Inverzní limita naproti tomu není exaktní funktor, je ale alespoň zleva exaktní.

Tvrzení 3.13. *Je-li I nahoru usměrněná množina, (A_i, f_{ij}), (B_i, g_{ij}), (C_i, h_{ij}) jsou inverzní systémy modulů a pro každé i máme krátkou exaktní posloupnost*

$$0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$$

jejichž homomorfismy splňují vzhledem k daným direktním systémům podmínky z předchozího odstavce, potom

$$0 \to \varprojlim_{i\in I} A_i \to \varprojlim_{i\in I} B_i \to \varprojlim_{i\in I} C_i \to 0$$

je exaktní posloupnost.

Důkaz. Vynecháváme, je například v [12, 29.4]

□

4. Tenzorový součin

Další standardní konstrukcí modulů je tenzorový součin. Pro tuto práci je jeho znalost zásadní, neboť jsou skrze něj definován důležitý pojem plochých modulů.

Definice 4.1. *Buď R okruh, buďte dále M pravý R-modul a N levý R-modul, A buď abelovská grupa. Homomorfismus abelovských grup $b : M \times N \to A$ nazveme* R-balancované zobrazení*, platí-li pro každé $r \in R$, m, $m' \in M$ a n, $n' \in N$ následující.*

1. $b(m + m', n) = b(m, n) + b(m', n)$ *a* $b(m, n + n') = b(m, n) + b(m, n')$ *a*
2. $b(m \cdot r, n) = b(m, r \cdot n)$.

Definice 4.2. *Buď R okruh, buďte dále M pravý R-modul a N levý R-modul. Potom* tenzorovým součinem *modulů M a N nad okruhem R rozumíme abelovskou grupu T spolu s R-balancovaným zobrazením $t : M \times N \to T$ takovou, že pro libovolnou abelovskou grupu T' a balancované zobrazení $t' : M \times N \to T'$ existuje právě jeden homomorfismus $f : T \to T'$ takový, že $t' = f \circ t$.*

Poznámka. Podobně jako v předchozích případech definice skrz univerzální vlastnost se snadno dokáže, že tenzorový součin, existuje-li, je určen jednoznačně až na izomorfismus.

4.1 Konstrukce a základní vlastnosti

Existence se podobně jako v dalších případech dokáže skrze explicitní konstrukci. Tuto konstrukci zde v kostce popíšeme, důkaz její správnosti vynecháme; je všeobecně známý a není pro tuto práci stěžejní.

Buďte R, M a N jako v předchozí definici. Označme F volnou abelovskou grupu generovanou množinou $M \times N$. Označme G její podmodul generovaný prvky tvaru

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$

$$(m \cdot r, n) - (m, r \cdot n)$$

pro libovolná m, $m' \in M$, n, $n' \in N$ a $r \in R$. Označme konečně $M \otimes_R N = F/G$. Prvky tvaru $(m, n) + G$ značíme $m \otimes n$ a nazýváme je *elementární tenzory.* Grupa $M \otimes_R N$ spolu se zobrazením $t : M \times N \to M \otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ je tenzorovým součinem modulů M a N nad okruhem R.

Nahléděme nyní, že popsaná konstrukce působí také na homomorfismy mezi moduly

Definice 4.3. *Buď R okruh, $f : M \to M'$ homomorfismus pravých R-modulů a $f : N \to N'$ homomorfismus levých R-modulů. Potom označíme $f \otimes_R g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ homomorfismus abelovských grup definovaný na elementárních tenzorech $M \otimes_R N$ takto.*

$$(f \otimes_R g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

Tvrzení 4.4. *Buď N levý R-modul. Buďte M_1, M_2, M_3 pravé R-moduly a $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ buďte modulové homomorfismy. Potom máme homomorfismy* $\mathrm{id}_N \otimes_R \mathrm{id}_N : M_1 \otimes_R N \to M_2 \otimes_R N$ *a* $g \otimes_R \mathrm{id}_N : M_2 \otimes_R N \to M_3 \otimes_R N$ *a platí*

$$(g \otimes_R \mathrm{id}_N) \circ (f \otimes_R \mathrm{id}_N) = (g \circ f) \otimes_R \mathrm{id}_N.$$

Důkaz. Z definic se snadno ověří platnost rovnosti po složkách.

□

Tímto jsme ověřili, že tenzorový součin s fixovaným levým R-modulem M dává vzniknout funktoru. Tento funktor značíme $- \otimes_R M$. Tento funktor je navíc zprava exaktní a komutuje s direktními sumami a direktními limitami. Podobně můžeme fixovat pravý modul M a zavést funktor $M \otimes_R -$, který bude mít stejné vlastnosti, důkazy proběhnou stejně, přejdeme-li k tenzorovému součinu nad opačným okruhem.

Nahlédněme několik základních vlastností tenzorového součinu.

Tvrzení 4.5. *Pro libovolný pravý R-modul M platí $M \otimes_R R \cong M$.*

Důkaz. Izomorfismus je definován předpisem $m \otimes r \mapsto m \cdot r$.

□

Tvrzení 4.6. *Je-li M pravý R-modul a N je (R,S)-bimodul, potom $M \otimes_R N$ má strukturu pravého S-modulu.*

Důkaz. Akce okruhu S je definována jako

$$(m \otimes n) \cdot s = (m \otimes n \cdot s).$$

□

Poznámka. Máme-li okruhový homomorfismus $R \to S$, získává okruh S přirozeně strukturu (R,S)-bimodulu a pro pravý R-modul M je potom $M \otimes_R S$ pravý S-modul. Připojíme-li navíc R-homomorfismus $M \to M \otimes_R S$, $m \mapsto m \otimes 1$, dostáváme rozšíření okruhu skalárů pro modul M.

Tvrzení 4.7. *Je-li M_1 pravý R-modul, M_2 je (R,S)-bimodul a M_3 je levý S-modul, potom platí $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_S M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_S M_3)$.*

Důkaz. Izomorfismus je definován předpisem $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$

□

Tvrzení 4.8. *Je-li M pravý R-modul a N je levý R-modul, potom $M \otimes_R N \cong N \otimes_{R^{\mathrm{op}}} M$ jako abelovské grupy.*

Důkaz. Izomorfismus je definován jako $m \otimes n \mapsto n \otimes m$, všechny pojmy jsou dobře definovány neboť M a N mají strukturu druhostranných modulů nad opačným okruhem.

□

Poznámka. Předchozí tvrzení nás opravňuje vynechávat v několikanásobném tenzorovém součinu závorky, z dalšího zase vyplývá, že nad komutativním okruhem lze zaměňovat pořadí činitelů. Nelze však obecně provádět obojí zároveň, uvažujeme-li tenzorové součiny nad více než jedním okruhem. Je-li $R \to S$ okruhový homomorfismus komutativních okruhů, M je R-modul a N je S-modul, potom máme izomorfismy

$$M \otimes_R N \cong M \otimes_R S \otimes_S N \cong (S \otimes_R M) \otimes_S N,$$

ale vynechání závorek v posledním výrazu by mělo za výsledek výraz $S \otimes_R M \otimes_S N$, který je nesmyslný, neboť M nemá strukturu S-modulu.

4.2 Tenzorový součin ve vztahu k ostatním konstrukcím

V této části ukážeme vztah tenzorového součinu a ostatních modulových konstrukcí, potažmo funktorů. Jak bylo komentováno v předchozí části, tenzorový součin nabízí způsob, jako konstruovat moduly nad rozšířenými okruhy. Příkladem takové konstrukce byla lokalizace. Skutečně lokalizaci modulu lze konstruovat jako tenzorový součin s lokalizovaným okruhem.

Tvrzení 4.9. *Buď R komutativní okruh, $S \subseteq R$ buď multiplikativní množina a M buď R-modul. Potom $MS^{-1} \cong M \otimes_R RS^{-1}$ jako RS^{-1}-moduly. Tento izomorfismus je přirozený.*

Důkaz. Izomorfismus je definován předpisem $\frac{m}{s} \mapsto m \otimes \frac{1}{s}$, inverzním izomorfismem je $m \otimes \frac{r}{s} \mapsto \frac{m \cdot r}{s}$.

□

Dále dokážeme, že tenzorový součin komutuje s direktními sumami a že je zprava exaktní.

Tvrzení 4.10. *Buď $(M_i; i \in I)$ množina pravých R-modulů a N buď levý R-modul. Potom platí $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I}(M_i \otimes_R N)$.*

Důkaz. Izomorfismem je zobrazení $f : (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \to \bigoplus_{i \in I}(M_i \otimes_R N)$ dané předpisem $(m_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}$, inverzní zobrazení je dáno předpisem $(m_i \otimes n_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \nu_i(m_i \otimes n_i)$, kde ν_i je i-té kanonické vnoření.

□

Tvrzení 4.11. *Buď R okruh a M buď fixovaný levý R-modul. Potom funktor $- \otimes_R M$ je zprava exaktní, tedy je-li*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

krátká exaktní posloupnost levých R-modulů, potom

$$A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M \to 0$$

je exaktní posloupnost abelovských grup.

Poznámka. V důkazu tohoto tvrzení využijeme grupu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Tento objekt je takzvaný *injektivní kogenerátor* to jest funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ je věrně exaktní. Je-li M levý R-modul, potom $\mathrm{Hom}_Z(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ má strukturu pravého R-modulu. Tento modul se někdy nazývá duální. V této práci ho budeme nadále značit M^d.

Dále použijeme tak zvanou *Tenzor-Hom adjunkci* - fakt, že pro pravý R-modul A, (R,S)-bimodul B a pravý S-modul C existuje přirozený izomorfismus

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C))$$

Důkaz. (Tvrzení 4.11) Uvažujme posloupnost

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,M^d) \to \mathrm{Hom}_R(B,M^d) \to \mathrm{Hom}_R(A,M^d) \to 0,$$

která je jistě zleva exaktní, neboť $\mathrm{Hom}_R(-,M^d)$ je zleva exaktní. Aplikací Tenzor-Hom adjunkce dostáváme zleva exaktní posloupnost

$$0 \to (C \otimes_R M)^d \to (B \otimes_R M)^d \to (A \otimes_R M)^d \to 0,$$

a protože funktor $-^d$ je věrně exaktní, je posloupnost

$$0 \to A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M \to 0$$

exaktní zprava.

$\square$

Důsledek. Tenzorový součin komutuje s kojádrem, tedy je-li f homomorfismus pravých R-modulů a N je levý R-modul, platí $\mathrm{Coker}(f \otimes_R \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{Coker}(f) \otimes_R N$.

Izomorfismus dostaneme okamžitě aplikací $- \otimes_R M$ na exaktní posloupnost

$$A \xrightarrow{f} B \to \mathrm{Coker}\, f \to 0.$$

Poznámka. Direktní suma je konstrukcí, která se v teorii kategorií nazývá koprodukt a jde o příklad kolimity. Podobně je kojádro příkladem koekvalizátoru. Zajímavým poznatkem z teorie kategorií je, že jakákoliv kolimita lze sestrojit jen za použití těchto dvou konstrukcí. Proto z předchozích dvou tvrzení plyne, že tenzorový součin komutuje s libovolnou kolimitou. Příkladem dalších kolimit jsou direktní limity a pushout a komutování tenzorového součinu s těmito konstrukcemi v této práci několikrát využijeme. Že veškeré kolimity lze konstruovat pomocí koproduktů a koekvalizátorů je duální tvrzení k [7, s. 113, Corollary 2]

5. Ploché moduly a čisté monomorfismy

V této kapitole zavedeme pojem plochého a věrně plochého modulu a s ním související pojem plochého a věrně plochého homomorfismu, který je pro tuto práci stěžejní. Ukážeme některé charakterizace plochých modulů, pomocí relací a jako direktních limit systémů konečně generovaných volných modulů. Nakonec definujeme v jistím smyslu duální a v této práci také užívaný pojem čistého monomorfismu.

5.1 Ploché moduly

Je-li M levý modul nad okruhem R, dostáváme spolu s ním funktor $- \otimes_R M$. Jak bylo předvedeno v kapitole o tenzorovém součinu, je tento funktor zprava exaktní. Exaktnost zleva ovšem obecně neplatí. Moduly pro něž tento funktor zleva exaktní je, se nazývají ploché.

Definice 5.1. *Buď R okruh a M buď levý R-modul. Modul M nazýváme* plochý*, je-li funktor $- \otimes_R M$ exaktní. Modul M nazveme* věrně plochý*, je-li funktor $- \otimes_R M$ věrně exaktní.*

Poznámka. Pro pravé moduly definujeme pojem plochosti stejně, jen s použitím funktoru $M \otimes_R -$. Alternativně můžeme ploché pravé moduly nad okruhem R definovat jako moduly, jež jsou ploché jako levé R^{op}-moduly. Důkazy v této části budou prováděny typicky pro levé moduly, v pozdějších částech nicméně bez poznámky přejdeme k modulům pravým. Na mnoha místech práce potom používáme okruhy komutativní, pro něž je toto rozlišení bezpředmětné.

Vzhledem k tomu, že je funktor $- \otimes_R M$ vždy exaktní zprava, je pro plochost postačující, pokud zachovává prostá zobrazení.

Mezi ploché moduly patří například moduly volné, a jak dokážeme v kapitole o projektivních modulech, také moduly projektivní. Tato třída je ovšem výrazně širší. Příklad modulu, který je plochý ale nikoliv projektivní uvedeme v příští kapitole.

Podívejme se nyní na interakci plochých modulů a modulových konstrukcí.

Tvrzení 5.2. *Buď (M_i, f_{ji}) direktní systém levých R-modulů a buď pro každé $i \in I$ modul M_i plochý. Potom modul $\varinjlim M_i$ je plochý.*

Důkaz. Toto vyplývá z faktu, že tenzorový součin komutuje s direktními limitami a toho, že direktní limita systému exaktních posloupností je exaktní posloupnost. □

Tvrzení 5.3. *Buď M (R,S)-bimodul, který je jako R-modul (věrně) plochý a buď N (věrně) plochý levý S-modul. Potom $M \otimes_S N$ je (věrně) plochý R-modul.*

Důkaz. Funktor $- \otimes_R M \otimes_S N$ je jistě exaktní, neboť jde o složení exaktních funktorů $- \otimes_R M$ a $- \otimes_S N$. Podobnou úvahou dokážeme i případ věrné plochosti. □

Poznámka. Odtud vyplývá, že tenzorový součin plochých modulů nad komutativním okruhem je opět plochý modul.

Tvrzení 5.4. *Buď $(M_i;\ i \in I)$ množina levých R-modulů. Potom $\bigoplus_{i\in I} M_i$ je plochý modul právě tehdy, je-li pro každé $i \in I$ plochý modul M_i. Je-li navíc pro nějaké $j \in I$ modul M_j věrně plochý, je věrně plochý i modul $\bigoplus_{i\in I} M_i$.*

Důkaz. Ekvivalence plyne z faktu, že tenzorový součin komutuje s direktními sumami, a toho, že je-li $(f_i : M_i \to M_i';\ i \in I)$ množina modulových homomorfismů, potom $\mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I} f_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(f_i)$, a $\mathrm{Im}(\bigoplus_{i\in I} f_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Im}(f_i)$ a exaktnost posloupnosti tedy lze a je nutné ověřovat po složkách a direktní suma je tedy věrně exaktní funktor. Buď nyní pro nějaké $j \in I$ modul M_j věrně plochý a buď

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

taková posloupnost, že posloupnost

$$0 \to A \otimes_R \bigoplus_{i\in I} M_i \to B \otimes_R \bigoplus_{i\in I} M_i \to C \otimes_R \bigoplus_{i\in I} M_i \to 0$$

je exaktní. Potom je však vzhledem k věrné exaktnosti direktní sumy exaktní i posloupnost

$$0 \to A \otimes_R M_j \to B \otimes_R M_j \to C \otimes_R M_j \to 0$$

a vzhledem k věrné plochosti modulu M_j i posloupnost původní.

□

Poznámka. Opačná implikace neplatí, stačí uvažovat direktní sumu věrně plochého modulu a modulu, který je plochý, ale ne věrně.

Příklad. Nyní už můžeme dokázat, že volné moduly jsou ploché, dokonce věrně ploché. Je-li $R^{\oplus\kappa}$, potom je i plochý, podle předchozího tvrzení a toho, že je zřejmě věrně plochý regulární modul R. Z předchozího tvrzení také plyne, že jsou ploché projektivní moduly, neboť jsou direktními sčítanci ve volných modulech.

Příklad. Direktní součin plochých modulů na rozdíl od direktní sumy obecně plochý není. Jde ovšem o poměrně netriviální výsledek, zvaný *Chaseova věta*. Ta říká, že třída plochých modulů nad okruhem R je uzavřená na direktní součiny právě tehdy, je-li okruh R *koherentní*.

Pro tuto práci je důležitým faktem, že lokalizace jsou plochými moduly.

Tvrzení 5.5. *Buď R komutativní okruh a buď $S \subseteq R$ multiplikativní množina. Potom RS^{-1} je plochý R-modul.*

Důkaz. Toto tvrzení vyplývá z přirozeného izomorfismu $MS^{-1} \cong M \otimes_R RS^{-1}$ (Tvrzení 4.9) a toho, že lokalizace je exaktní funktor (Tvrzení 2.22 a Tvrzení 4.11)

□

Pro důkazy využívající ploché moduly jsou užitečné jiné charakterizace než přes exaktnost funktorů $-\otimes_R M$. Charakterizací plochých modulů existuje mnoho, následující věta shrnuje několik z nich.

Věta 5.6. *Buď R okruh a M bud levý R-modul. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Modul M je plochý.*

(2) *Jsou-li $m_i \in M$ a $r_i \in R$ takové, že*

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot m_i = 0,$$

potom nalezneme prvky $n_j \in M$ a $s_{ij} \in R$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{l} s_{ij} \cdot n_j = m_i$$

pro každé $1 \leq i \leq k$ a

$$\sum_{i=1}^{k} r_i s_{ij} = 0$$

pro každé $1 \leq j \leq l$.

(3) *Je-li $f : R^n \to M$ homomorfismus a $N \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ je konečně generovaný podmodul, potom existuje volný modul R^m a homomorfismy $g : R^n \to R^m$ a $h : R^m \to M$ takové, že $f = h \circ g$ a $N \subseteq \operatorname{Ker}(g)$.*

(4) *Pro konečně prezentovaný levý R-modul P a homomorfismus $f : P \to M$ existují konečně generovaný volný modul F a homomorfismy $g : P \to F$ a $h : F \to M$ takové, že $f = h \circ g$.*

(5) *Existuje direktní systém (M_i, f_{ji}) konečně generovaných volných modulů takový, že $\varinjlim M_i \cong M$.*

Důkaz. Dokažme nejprve, že (1) implikuje (2). Mějme tedy přirozené číslo k a pro $1 \leq i \leq k$ prvky $m_i \in M$ a $r_i \in R$ takové, že $\sum r_i \cdot m_i = 0$. Uvažujme nyní homomorfismus $f : R^k \to R$ daný předpisem $e_i \mapsto r_i$ pro $1 \leq i \leq k$, kde e_i je i-tý prvek kanonické báze R^k. Označme K jádro tohoto homomorfismu. Dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to K \to R^k \to R.$$

Tenzorovým součinem s M dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to K \otimes_R M \to M^k \to M,$$

neboť M je plochý modul. Nahlédněme, že $(f \otimes_R \mathrm{id}_M)((m_i)_{i=1}^k) = \sum r_i \cdot m_i = 0$. Vzhledem k exaktnosti dané posloupnosti tedy nalezneme vzor prvku (m_i), $\sum_{j=1}^{l} (s_{ij})_{i=1}^k \otimes n_j \in K \otimes_R M$. zobrazením tohoto prvku do M^k potom dostáváme rovnost $(m_i)_{i=1}^k = (\sum s_{ij} \cdot n_j)_{i=1}^k$. Porovnáním složek dostaneme kýženou rovnost. Vzhledem k tomu, že $(s_{ij})_{i=1}^k$ leží v jádru f, máme také pro $1 \leq j \leq l$ rovnost $\sum r_i s_{ij} = 0$.

Dokažme nyní že (2) implikuje (3). Všimněme si nejprve, že převedením (2) do řeči zobrazení dostáváme tvrzení, že pro libovolný homomorfismus $f : R^k \to M$

a $(r_i)_{i=1}^k \in \operatorname{Ker}(f)$ existují volný modul R^l a homomorfismy $g : R^k \to R^l$ a $h : R^l \to M$ takové, že $f = h \circ g$ a $x \in \operatorname{Ker}(g)$.

Máme-li dále pro nějaký podmodul $N' \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ už modul $R^{m'}$ a homomorfismy $g' : R^n \to R^{m'}$ a $h' : R^{m'} \to M$ splňující zadané podmínky, potom pro zadaný prvek $x \in \operatorname{Ker}(f)$ nalezneme modul R^m a homomorfismy $g : R^n \to R^m$ a $h'' : R^m \to R^{m'}$ splňující $g' = g \circ h''$ a $x \in \operatorname{Ker}(g)$, neboť modul $R^{m'}$ je plochý. Potom už ovšem stačí volit $h = h' \circ h''$ a dostáváme homomorfismy splňující $f = h \circ g$ a $N' + Rx \subseteq \operatorname{Ker}(g)$.

Pro zadaný konečně generovaný modul $N \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ potom kýžené homomorfismy sestrojíme indukcí podle počtu generátorů, opakováním předchozí úvahy.

Dokažme dále že z (3) plyne (4). Uvažujme prezentaci $R^{n'} \to R^n \xrightarrow{p} P \to 0$. Zřejmě $\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(f \circ p)$ a $\operatorname{Ker}(p)$ je konečně generovaný modul. Podle (3) tedy dostáváme volný modul R^m a homomorfismy g' a h takové, že diagram

$$\begin{tikzcd} R^{n'} \arrow[r] & R^n \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g'"'] & P \arrow[d, "f"] \\ & R^m \arrow[r, "h"] & M \end{tikzcd}$$

komutuje a $\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$. Potom však podle věty o homomorfismu dostáváme homomorfismus $g : P \to R^m$ tak, že horní trojúhelník v diagramu komutuje. Platí tedy rovnosti $f \circ p = h \circ g' = h \circ g \circ p$. Ovšem p je epimorfismus a proto už nutně $f = h \circ g$.

Ukažme konečně, že za předpokladu (4) platí (5). Uvažujme volný modul $R^{\oplus I}$, kde za I bereme množinu $M \times \mathbb{Z}$ a označme $x_{(m,z)}$ prvky jeho kanonické báze. Uvažujme dále homomorfismus $p : R^{\oplus I} \to M$ daný na prvcích báze jako $x_{(m,z)} \to m$. Homomorfismus p je jistě na, můžeme tedy sestrojit direktní systém modulů konečně prezentovaných modulů $(M_d = M_{(J,N)} = R^{\oplus J}/N,\ f_{dd'};\ d \in D)$ jehož limitou je právě modul M jako v Tvrzení 3.10. Ukážeme, že takové indexy d, že M_d je konečně generovaný volný modul tvoří v D kofinální podmnožinu. Zvolme tedy $(J,\ N) \in D$ libovolně. Označme $f : R^{\oplus J}/N \to M$ homomorfismus z definice direktní limity. Podle (4) existují volný modul R^n a homomorfismy $g : R^{\oplus J}/N \to R^n$ a $h : R^n \to M$ takové, že $f = h \circ g$. Označme y_l prvky kanonické báze R^n. Nalezněme nyní množinu $J' = \{(m_l,z_l) \in I\ ;\ 1 \leq l \leq n\}$ takovou, že $m_l = h(y_l)$ a $(m_l,z_l) \notin J$. To jistě lze, neboť J je konečná množina, ale množina $\{(m,z) \in I;\ m = h(y_i),\ z \in \mathbb{Z}\}$ je nekonečná. Uvažujme nyní modul $R^{\oplus(J \cup J')}$ a homomorfismus $g' : R^{\oplus(J\cup J')} \to R^n$ definovaný na prvcích báze následovně. $g'(x_{(m,z)}) = g(x_{(m,z)} + N))$ pro $(m,z) \in J$ a $g'(x_{(m_l,z_l)} = y_l$ pro $1 \leq l \leq n$. Označme $N' = \operatorname{Ker}(h')$. Množina $J \cup J'$ je konečná podmnožina I. Homomorfismus g' je na, dostáváme tedy izomorfismus $R^n \cong R^{\oplus(J\cup J')}/N'$. Navíc N' je nutně konečně generovaný modul, neboť krátká exaktní posloupnost $N' \to R^{\oplus(J\cup J')} \to R^n$ je štěpitelná a dostáváme epimorfismus $R^{\oplus(J\cup J')} \to N'$. Platí také $N' \subseteq \operatorname{Ker}(p)$ neboť p a g' se shodují na $R^{\oplus(J\cup J')} \subseteq R^{\oplus I}$. Tak jsme ověřili, že $R^n \cong M_{(J\cup J',N')}$. Navíc jistě $J \subseteq J \cup J'$ a $N \subseteq N'$, protože se na $R^{\oplus J} \subseteq R^{\oplus J\cup J'}$ shodují homomorfismy h' a $h \circ \pi$, kde $\pi : R^{\oplus J} \to R^{\oplus J}/N$ je kanonická projekce.

Tak jsme pro libovolné $(J,N) \in D$ nalezli $(J',N') \in D$, tak že $(J,N) \leq (J',N')$ a $M_{(J',N')}$ je konečně generovaný volný modul. Za systém (M_i, f_{ji}) ze znění věty potom zvolíme podsystém indexovaný touto kofinální podmnožinou D.

To, že z (5) plyne (1) je důsledkem faktu, že volné moduly jsou ploché a direktní limita plochých modulů je plochý modul.

□

Poznámka. Podmínka (2) z Věty 5.6 se nazývá *rovnicové kriterium plochosti* (anglicky *Equational Criterion of Flatness*) a má zajímavou interpretaci. Výrazy tvaru $\sum r_i \cdot m_i = 0$ se nazývají relace a lze je neformálně chápat jako přítomnost jisté torze v modulu (například v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ je relace $n \cdot 1 = 0$). Relace, pro něž lze najít prvky n_j a skaláry s_{ij} jako v podmínce (2) se nazývají triviální a lze neformálně říci, že vycházejí z relací v okruhu. Ploché moduly jsou tedy potom takové moduly, v nichž jsou všechny relace triviální, tedy takové, v nichž je veškerá torze vynucena již okruhem, nad nímž jsou uvažovány. V tomto světle získává smysl název *ploché.*

Poznámka. Ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (5) z Věty 5.6 se nazývá *Lazardova věta* a takto se na ni budeme ve zbytku práce odkazovat. Později definujeme Mittag-Lefflerovy moduly také jako limity jistých speciálních direktních systémů a Lazardova věta nám umožní charakterizovat ploché Mittag-Lefflerovy jako limity těchto speciálních systémů, které jsou navíc tvořeny konečně generovanými volnými moduly.

Připomeneme-li si důkaz pravé exaktnosti funktoru tenzorového součinu z předchozí kapitoly, vyvstane ještě jedna charakterizace plochých modulů. Tato charakterizace není pro tuto práci zvlášť užitečná, je však poměrně zajímavá.

Tvrzení 5.7. *Levý R-modul M je plochý právě tehdy, je-li pravý R-modul $M^d = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ injektivní.*

Poznámka. Tvrzení 5.7 přináší zajímavou asymetrii mezi pojmy injektivních a projektivních modulů. Již jsme konstatovali, že projektivní moduly jsou ploché, duální modul projektivního modulu je tedy injektivní. Ovšem ne všechny ploché moduly jsou projektivní. Neplatí tedy možná očekávané tvrzení, že injektivní moduly jsou právě duální moduly modulů projektivních.

Ukažme na závěr této části ještě jednu charakterizaci věrně plochých modulů.

Tvrzení 5.8. *Buď M plochý levý S-modul. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Modul M je věrně plochý.*

(2) *Pro každý pravý R-modul N platí, že je-li $N \otimes_R M = 0$ potom už $N = 0$.*

Důkaz. Pro přímou implikaci stačí uvážit posloupnost $0 \to N \to 0$. Je-li M věrně plochý modul a $N \otimes_R M = 0$, pak posloupnost $0 \to N \otimes_R M \to 0$ je exaktní, ale potom je exaktní i posloupnost $0 \to N \to 0$ a nutně $N = 0$.

Ať nyní naopak M splňuje podmínku (2). Uvažujme posloupnost

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

takovou, že

$$A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M$$

je exaktní posloupnost. Potom $(g \circ f) \otimes_R \mathrm{id}_M = 0$ a vzhledem k plochosti M už $\mathrm{Im}(g \circ f) \otimes_R M = \mathrm{Im}((g \circ f) \otimes_R \mathrm{id}_M) = 0$ a podle předpokladu tedy $\mathrm{Im}(g \circ f) = 0$. Vidíme tedy, že skutečně $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Uvažujme dále modul $\mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f)$. Vzhledem k plochosti M platí $\mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f) \otimes_R M \cong (\mathrm{Ker}(g) \otimes_R M)/(\mathrm{Im}(f) \otimes_R M) = \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_M)/\mathrm{Im}(g \otimes_R \mathrm{id}_M) = 0$. Potom však podle předpokladu už platí $\mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f) = 0$ a posloupnost $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ je exaktní.

□

5.2 Ploché homomorfismy

Je-li $f : R \to S$ okruhový homomorfismus, potom okruh S získává strukturu R-modulu. Má tedy smysl zkoumat, je-li jako R-modul plochý, či dokonce věrně plochý. Příslušně potom označujeme i daný homomorfismus. Ploché a věrně ploché homomorfismy se objevují v algebraické geometrii, a v následující kapitole skrze ně budou definovány AD-vlastnosti.

Definice 5.9. *Buď $f : R \to S$ okruhový homomorfismus. Homomorfismus f označujeme jako* (věrně) plochý okruhový homomorfismus, *je-li S (věrně) plochý R-modul.*

Tvrzení 5.10. *Buď $f : R \to S$ věrně plochý okruhový homomorfismus. Potom f je prostý.*

Důkaz. Uvažujme homomorfismus $f \otimes_R \mathrm{id}_S : S \to S \otimes_R S$. Ten je prostý, neboť k němu existuje levý inverzní homomorfismus $S \otimes_R S \to S$ daný předpisem $s \otimes s' \mapsto ss'$. Protože S je věrně plochý R-modul, je už homomorfismus f prostý.

□

Uveďme několik příkladů plochých homomorfismů.

Příklad. Lokalizační homomorfismy jsou ploché. Již jsme dokázali, že lokalizace okruhu je plochý modul, toto je přímým důsledkem. Lokalizační homomorfismy však nejsou obecně věrně ploché. To plyne z předchozího tvrzení a toho, že lokalizační homomorfismus není obecně prostý. Příkladem budiž případ, kdy multiplikativní množina v níž lokalizaci provádíme obsahuje nějaký netriviální dělitel nuly.

Příklad. Pro libovolný okruh R je okruhový homomorfismus $R \to R \times R$ věrně plochý, neboť okruh $R \times R$ je jako R-modul volný.

Uvažujme nyní komutativní okruh R a zvolme v něm bez újmy na obecnosti konečnou množinu $\{r_i \in R;\ 1 \leq i \leq n\}$ takovou, že $(\{r_i \in R;\ 1 \leq i \leq n\}) = R$. Uvažujme potom homomorfismus

$$R \to \prod_{1 \leq i \leq n} R_{r_i}$$

definovaný po složkách jako lokalizační homomorfismus. Tento homomorfismus je věrně plochý.

Že je $\prod_{1 \leq i \leq n} R_{r_i}$ plochý R-modul je zřejmé, neboť jde o konečný součin a tedy direktní sumu lokalizací, což jsou ploché moduly.

Že jde o věrně plochý homomorfismus dokážeme v následující části, využijeme charakterizace věrně plochých okruhových homomorfismů jako plochých čistých monomorfismů.

5.3 Čisté monomorfismy

Ploché moduly jsou právě ty moduly, které zachovávají monomorfismy. Nabízí se otázka, existují-li naopak monomorfismy, které odolají tenzorovému součinu s jakýmkoliv modulem. Odtud vychází následující definice.

Definice 5.11. *Buď R okruh, $\nu : M \hookrightarrow M'$ prostý homomorfismus (monomorfismus) R-modulů. Monomorfismus ν nazýváme* čistý monomorfismus*, je-li pro libovolný R-modul N homomorfismus $\nu \otimes \mathrm{id}_N$ také monomorfismem.*

Zřejmě štěpitelné monomorfismy jsou čisté. Dalším příkladem jsou věrně ploché okruhové homomorfismy, nahlížené jako modulové homomorfismy. Věrně ploché okruhové homomorfismy jsou dokonce charakterizovány jako ploché okruhové homomorfismy, které jsou zároveň čistými monomorfismy.

Tvrzení 5.12. *Buď $f : R \to S$ prostý plochý okruhový homomorfismus. Potom f je věrně plochý právě tehdy, je-li čistým monomorfismem R-modulů.*

Důkaz. Buď nejprve f věrně plochý. Součinem s libovolným modulem M dostáváme homomorfismus $M \to M \otimes_R S$. Součinem s S potom dostáváme homomorfismus $M \otimes_R S \to M \otimes_R S \otimes_R S$, který je prostý, neboť k němu existuje zprava inverzní homomorfismus daný předpisem $m \otimes s \otimes s' \mapsto m \otimes ss'$.

Buď nyní f čistý monomorfismus. Potom součinem s libovolným modulem M dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to M \to M \otimes_R S.$$

Je-li $M \otimes_R S = 0$ pak už je nutně $M = 0$. Podle Tvrzení 5.8 je tedy S věrně plochý R-modul a f věrně plochý homomorfismus.

□

Příklad. Nyní můžeme dokončit důkaz, že homomorfismus

$$R \to \prod_{1 \le i \le n} R_{r_i}$$

je věrně plochý. Stačí ukázat, že je to čistý monomorfismus. Uvažujme tedy libovolný modul M. Tenzorovým součinem dostáváme homomorfismus

$$M \to M \otimes \prod_{1 \le i \le n} R_{r_i}$$

Dále máme izomorfismus R-modulů $\prod_{1 \le i \le n} R_{r_i} \cong \oplus_{1 \le i \le n} R_{r_i}$ a díky komutování tenzorového součinu s direktní sumou a izomorfismu $M \otimes_R R_r \cong M_r$ dostáváme homomorfismus

$$g : M \to \bigoplus_{1 \le i \le n} M_{r_i}.$$

daný předpisem $m \mapsto \left(\frac{m}{1}\right)_{1\le i\le n}$, tedy definovaný v i-té složce jako lokalizační homomorfismus $l_{r_i} : M \to M_{r_i}$. Ukážeme, že je tento homomorfismus prostý. Jeho jádro má tvar

$$\mathrm{Ker}(g) = \bigcap_{1\le i\le n} \mathrm{Ker}(l_{r_i}) = \{s \in R;\ sr_i = 0,\ 1 \le i \le n\}.$$

Protože $(\{r_i \in R;\ 1 \le i \le n\}) = R$, existují pro $1 \le i \le n$ prvky $s_i \in R$ takové, že $\sum_{1\le i\le n} r_i s_i = 1$. Uvažujeme-li libovolné $s \in \mathrm{Ker}(l_A)$, platí $s\cdot 1 = \cdot \sum_{1\le i\le n} r_i s_i = \sum_{1\le i\le n} s r_i s_i = 0$. Platí tedy $\mathrm{Ker}(l_A) = 0$ a l_A je prostý homomorfismus.

Tím jsme ovšem ověřili, že je

$$R \to \prod_{1\le i\le n} R_{r_i}$$

čistým monomorfismem a podle předchozího tvrzení tedy jde o věrně plochý okruhový homomorfismus.

Na závěr této kapitoly zavedeme pojem čisté exaktní posloupnosti. Jde o pojem překvapivě blízký plochým modulům. Podobně jako pro ploché moduly existuje pro čisté exaktní posloupnosti řada ekvivalentních kritérií, která jsou navíc svým tvarem podobná kritériím pro ploché moduly. Zde se však omezíme na jediné tvrzení, které bude později užitečné pro hlavní důkaz práce. Plnou charakterizaci lze nalézt v [4, Lemma 2.19]

Definice 5.13. *Krátkou exaktní posloupnost*

$$0 \to A \xrightarrow{\nu} B \to C \to 0$$

nazveme čistě exaktní*, je-li ν čistý monomorfismus.*

Je zřejmé, že každá štěpitelná krátká exaktní posloupnost je čistá. V následujících částech této práce budeme používat následující tvrzení, které říká, za jakých podmínek je již čistě exaktní posloupnost štěpitelná.

Tvrzení 5.14. *Buď*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

krátká exaktní posloupnost R-modulů a buď C konečně prezentovaný modul. Taková posloupnost je čistě exaktní právě tehdy, je-li štěpitelná.

Důkaz. Toto je reformulace [8, Theorem 7.14].

□

6. Lokální vlastnosti

V této kapitole zavedeme pojem lokálních vlastností modulů a takzvaných AD-vlastností. Tyto pojmy vycházejí z potřeb algebraické geometrie a využívají Zariského topologii. Navrhneme několik různě silných definic pro rozšiřování lokálních vlastností modulů a ukážeme, v jakém smyslu se rozšiřují či nerozšiřují různé modulové vlastnosti, především projektivita. Definici a základní vlastnosti Zariského topologie přebíráme z [8]. Definice a základní fakta o AD-vlastnostech potom z [2]. Všechny okruhy v této kapitole jsou komutativní.

6.1 Zariského topologie.

Systém prvoideálů okruhu R nazýváme spektrum a značíme $\mathrm{Spec}(R)$. Na spektru zavedeme následovně tzv. Zariského topologii. Uvažujme množiny tvaru $V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R);\ I \subseteq P\}$, kde I je ideálem okruhu R. Všimněme si, že pro ideály I, J je $V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$ a pro systém ideálů $\{J_i; i \in I\}$ je $V(\sum_{i\in I} J_i) = \bigcap_{i\in I} V(J_i)$. Systém množin tedy splňuje podmínky systému uzavřených množin topologie. To umožňuje následující definici.

Definice 6.1. *Buď R okruh. Topologii na* $\mathrm{Spec}(R)$*, jejíž systém uzavřených množin je tvořen množinami tvaru $V(I)$ pro nějaký ideál $I \subseteq R$, nazýváme* Zariského topologie.

Dále můžeme ve spektru uvažovat množiny tvaru $d(f) = \{P \in \mathrm{Spec}(R);\ f \notin P\}$. Tyto množiny tvoří bázi $\mathrm{Spec}(R)$ jako topologického prostoru – snadno nahlédneme, že $d(f)^C = V(\bigcap\{P \in \mathrm{Spec}(R);\ f \in P\}) = V((f))$ a $V(I)^C = \bigcup\{d(f);\ f \in I\}$ a tedy $\bigcup_{i\in I} d(f_i) = V((f_i)_{i\in I})^C$. Navíc je tento systém uzavřený na konečné průniky. Pro $f,\ f' \in R$ platí $d(f) \cap d(f') = d(ff')$.

Pro některé úvahy v této kapitole je užitečné následující tvrzení,

Tvrzení 6.2. *Spektrum je jako topologický prostor kvazikompaktní, tedy pro libovolné pokrytí bázovými množinami $d(f)$ existuje konečné podpokrytí.*

Důkaz. Pro množinu $\{f_i;\ i \in I\} \subseteq R$ platí $\bigcup_{i\in I} d(f_i) = \mathrm{Spec}(R)$ právě když $(\{f_i;\ i \in I\}) = R \ni 1$. Potom už ovšem existuje $I' \subseteq I$ konečná, že $1 \in (\{f_i; i \in I'\})$ a tedy už $(\{f_i; i \in I'\}) = R$ a $\bigcup_{i\in I'} d(f_i) = \mathrm{Spec}(R)$ a máme tedy konečné podpokrytí.

□

Je zajímavé zkoumat, jak se Zariského topologií interagují běžné okruhové konstrukce, konkrétně faktorizace a lokalizace.

Tvrzení 6.3. *Pro ideál $I \subseteq R$ je* $\mathrm{Spec}(R/I)$ *homeomorfní $V(I)$ s topologií podprostoru.*

Důkaz. Homeomorfismem je zobrazení $\pi_* : P \mapsto P/I$.

□

Tvrzení 6.4. *Pro prvek $f \in R$ je* $\mathrm{Spec}(R_f)$ *homeomorfní $d(f)$ s topologií podprostoru.*

Důkaz. Homeomorfismem je $l_* : P \mapsto P \cdot R_f$.

□

Poznámka. Připomeňme si, že pro prvky $f_1, \dots, f_n \in R$ platí

$$\bigcap_{i=1}^{n} d(f_i) = d(\prod_{i=1}^{n} f_i).$$

Snadno se však ověří, že

$$R_{\prod_{i=1}^{n} f_i} \cong RS^{-1},$$

kde S je multiplikativní uzávěr množiny $\{f_i; 1 \leq i \leq n\}$. Tuto konstrukci však můžeme s klidem provést pro libovolně velkou množinu $\{f_i \in R;\ i \in I\}$. To nám umožňuje smysluplně přiřadit lokalizace okruhu R i nekonečným průnikům bázových množin, v extrémním případě jednotlivým bodům spektra.

Zvolme prvoideál $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Systém bázových množin obsahujících bod P v Zariského topologii je $\{d(f);\ d \notin P\}$. Přiřadíme-li výše uvedeným způsobem průniku tohoto systému lokalizaci okruhu R, dostaneme právě okruh R_P.

Poznámka. Předchozí dvě tvrzení a poznámka ukazují, že existuje souvislost mezi otevřenými podmnožinami v Zariského topologii a lokalizacemi, uzavřenými podmnožinami a faktorizacemi a lokalizacemi v prvoideálech a body. Tato souvislost se objevuje například v afinní algebraické geometrii, která zkoumá algebraické množiny skrze okruhy polynomiálních funkcí, jež jsou na nich definovány. Konstrukce tohoto okruhu je funktor. Ukáže se potom, že vnoření uzavřených podmnožin, což jsou v afinní geometrii právě algebraické podmnožiny, odpovídají faktorizace a vnoření otevřených podmnožin odpovídají právě lokalizace těchto okruhů. Skutečně také lokální vlastnosti algebraické množiny na okolí určitého bodu jsou zkoumány pomocí tak zvaných lokálních okruhů, které jsou skutečně lokalizacemi okruhu příslušného dané množině v jistém prvoideálu. Připomeňme si, že okruhy R_P jsou lokální ve smyslu Pozorování 2.11. Tato souvislost je skutečným původem názvu *lokální okruhy.* Úvod do afinní algebraické geometrie lze nalézt například ve skriptech [3].

Poznámka. Spektrum komutativního okruhu, jehož bázovým množinám $d(f)$ přiřadíme okruhy R_f, se nazývá *afinní schéma.* Jako *schéma* potom označujeme topologický prostor, pro nějž existuje pokrytí otevřenými množinami homeomorfními afinním schématům. Zafixujeme-li R-modul M a přiřadíme-li bázovým množinám $d(f) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ moduly M_f dostáváme *kvazikoherentní svazek asociovaný* R-modulu M. Pro definici kvazikoherentního svazku nad obecným schématem by bylo nutné zavést definici obecného svazku modulů, pro účely této práce postačí vědět, že pro každou afinní podmnožinu tvoří moduly přiřazené jejím podmnožinám asociovaný kvazikoherentní svazek pro nějaký modul.

6.2 Lokální vlastnosti modulů

S topologií na systému prvoideálů se nabízí možnost definovat lokalitu vlastností okruhů a modulů.

S vědomím souvislostí mezi podmnožinami $\mathrm{Spec}(R)$ a lokalizacemi okruhu R můžeme vyslovit následující definici.

Poznámka. Uvažujme nějakou vlastnost modulů $\mathfrak{P}$. Třídu modulů nad okruhem R s touto vlastností označujme $\mathfrak{P}_R$.

Definice 6.5. *Buď $\mathcal{R}$ nějaká třída komutativních okruhů uzavřená na lokalizace a $\mathfrak{P}$ buď vlastnost modulů. Potom řekneme, že se $\mathfrak{P}$ ve třídě $\mathcal{R}$*

(a) zužuje*, platí-li, že je-li $M \in \mathfrak{P}_R$ pro okruh $R \in \mathcal{R}$, pak i $MS^{-1} \in \mathfrak{P}_{MS^{-1}}$ pro libovolnou multiplikativní množinu $S \subseteq R$,*

(b) rozšiřuje z prvoideálů*, platí-li, že je-li pro $R \in \mathcal{R}$ pro R-modul M pro každý prvoideál P splněno $M_P \in \mathfrak{P}_{R_P}$, pak také $M \in \mathfrak{P}_R$,*

(c) rozšiřuje z pokrytí*, platí-li následující. Buď $R \in \mathcal{R}$ okruh a M buď R-modul. Buď $U \subseteq R$ množina, taková že $(U) = R$ a pro každý $f \in U$ je $M_f \in \mathfrak{P}_{R_f}$. Potom $M \in \mathfrak{P}_R$.*

Pokud se vlastnost $\mathfrak{P}$ v $\mathcal{R}$ zužuje a rozšiřuje z pokrytí, řekneme, že je v $\mathcal{R}$ lokální*.*

Pokud se vlastnost $\mathfrak{P}$ v $\mathcal{R}$ zužuje a rozšiřuje z prvoideálů, řekneme, že je v $\mathcal{R}$ silně lokální*.*

Poznámka. Tato definice lokálních vlastností je v souladu s popisem lokálních vlastností z úvodu, tedy jako vlastností, jež stačí ověřit pro konečné pokrytí (souřadnice), aby je měly všechny moduly svazku. Pro kvazikoherentní svazky nad afinními schématy je to zřejmé. Pro obecné kvazikoherentní svazky stačí pro libovolnou afinní podmnožinu přejít k jejímu pokrytí průniky s množinami původního pokrytí.

Mohlo by se zdát, že rozšiřování z pokrytí je slabší podmínkou, neboť stačí ověřovat vlastnost na konečné množině lokalizací, oproti typicky nekonečné množině lokalizací v prvoideálu. Za předpokladu zužování je tomu však naopak, jak říká následující tvrzení. Jeho okamžitým důsledkem je, že silně lokální vlastnosti jsou lokální.

Tvrzení 6.6. *Buď $\mathcal{R}$ třída komutativních okruhů uzavřená na lokalizace. Buď $\mathfrak{P}$ vlastnost modulů, která se na $\mathcal{R}$ zužuje. Potom pokud se $\mathfrak{P}$ na $\mathcal{R}$ rozšiřuje z prvoideálů, pak se rozšiřuje i z pokrytí.*

Důkaz. Buď $R \in \mathcal{R}$ okruh. Mějme dále R-modul M takový, že pro nějakou konečnou množinu U takovou, že $(U) = R$ platí $M_f \in \mathfrak{P}_{R_f}$ pro $f \in U$. Zvolme libovolně prvoideál $P \subseteq R$. Jistě existuje $f \in U \setminus P$, protože $P \subseteq R$ je vlastní. Potom však PR_f je prvoideál okruhu R_f a $R_P \cong (R_f)_{PR_f}$ je lokalizace okruhu R_f. Protože se $\mathfrak{P}$ v $\mathcal{R}$ zužuje, je $M_P \in \mathfrak{P}_{R_P}$. Prvoideál P byl volen libovolně. Vlastnost $\mathfrak{P}$ se v $\mathcal{R}$ rozšiřuje z prvoideálů, proto už $M \in \mathcal{P}_R$. $\square$

Poznámka. Opačná implikace neplatí, jak je vidět na příkladu projektivity v následující části.

6.3 Příklady lokálních vlastností

Tvrzení 6.7. *Trivialita modulu se rozšiřuje z prvoideálů. Tedy je-li R komutativní okruh a M je R-modul takový, že pro každý prvoideál $P \in \operatorname{Spec}(R)$ je $M_P = 0$, potom $M = 0$.*

Důkaz. Dokážeme, že dokonce stačí $M_P = 0$ pro každý $P \in \operatorname{Spec} R$ maximální. Buď pro spor $m \in M$ nenulový prvek. Potom $\operatorname{Ann}(m)$ je vlastní ideál okruhu R, neboť jistě $1 \notin \operatorname{Ann}(m)$. Existuje tedy maximální ideál I takový, že $\operatorname{Ann}(m) \subseteq I$. Potom ovšem není $M_I = 0$. Jinak by v M_I platila rovnost $\frac{0}{1} = \frac{m}{1}$. Tato rovnost nastává podle konstrukce M_I právě tehdy, existuje-li prvek $s \in R \setminus I$ takový, že $(m - 0) \cdot s = 0$. Pak jsme ovšem nalezli prvek $s \in \operatorname{Ann}(m) \setminus I$, ale $\operatorname{Ann}(m) \subseteq I$. Máme tedy spor.

□

Důsledek. Trivialita se zřejmě zužuje. Je tedy silně lokální.

Tvrzení 6.8. *Plochost se rozšiřuje z prvoideálů.*

Důkaz. Buď R komutativní okruh a M buď R-modul takový, že M_P je plochý R_P-modul pro každý prvoideál $P \in \operatorname{Spec}(R)$. Buď $\nu : N \to N'$ prostý homomorfismus R-modulů. Označme $K = \operatorname{Ker}(\nu \otimes_R \operatorname{id}_M)$. Máme tedy exaktní posloupnost

$$0 \to K \to N \otimes_R M \to N' \otimes_R M.$$

Buď nyní $P \in \operatorname{Spec}(R)$ libovolné prvoideál. Vzhledem k plochosti R_P jako R-modulu a přirozenému izomorfismu $M_P \cong M \otimes_R R_P$ dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to K_P \to N \otimes_R M_P \to N' \otimes_R M_P$$

a vzhledem k přirozenému izomorfismu $N \otimes_R M_P \cong N \otimes_R R_P \otimes_{R_P} M_P \cong N_P \otimes_{R_P} M_P$ dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to K_P \to N_P \otimes_{R_P} M_P \to N'_P \otimes_{R_P} M_P,$$

kde homomorfismus vpravo je $\nu \otimes_R \operatorname{id}_{R_P} \otimes_{R_P} \operatorname{id}_{M_P}$. Ovšem vzhledem k tomu, že ν je prostý homomorfismus R-modulů, R_P je plochý R-modul a M_P je plochý R_P-modul je $\nu \otimes_R \operatorname{id}_{R_P} \otimes_{R_P} \operatorname{id}_{M_P}$ prostý a $K_P = 0$. Prvoideál P byl volen libovolně a podle Tvrzení 6.7 je už $K = 0$ a homomorfismus $\nu \otimes_R M$ je prostý. Modul M je tedy plochý.

□

Důsledek. V příští části ukážeme, že se plochost zužuje. Je tedy silně lokální vlastností.

Příklad. Projektivita ani volnost se nerozšiřují z prvoideálů. Uvažujme $\mathbb{Z}$-modul

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ \frac{a}{b} \text{ je v základním tvaru a } b \text{ je bezčtvercové číslo} \right\}.$$

Snadno nahlédneme, že je A podmodulem $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subseteq A$. Uvažujme homomorfismus $A \to \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ daný předpisem $\frac{a}{b} \to (i_p)_{p \in \mathbb{P}} \cdot a$, kde $i_p = 1$ právě když $p|b$, jinak $i_p = 1$. Jádro tohoto homomorfismu je $\mathbb{Z}$ a odtud dostáváme izomorfismus $A/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Každý nenulový prvoideál $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ je tvaru (p) pro nějaké prvočíslo p. Nahlédněme, jak vypadá lokalizace A v prvoideálu (p).

$$A_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ \frac{a}{b} \text{ je v základním tvaru a } p^2 \nmid b \right\}.$$

Uvažme nyní homomorfismus $A_{(p)} \to \mathbb{Q},\ q \mapsto q \cdot p$. To je jistě dobře definovaný homomorfismus, protože jde o zúžení endomorfismu $\mathbb{Q}$. Navíc je jistě prostý, neboť $\mathbb{Q}$ je obor integrity. Jeho obrazem je potom právě množina

$$\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ \frac{a}{b} \text{ je v základním tvaru a } p \nmid b \right\},$$

což je právě nosná množina oboru $\mathbb{Z}_{(p)}$ jako podoboru $\mathbb{Q}$, dostáváme tedy izomorfismus $A_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$. To je izomorfismus $\mathbb{Z}$-modulů, ale snadno se ověří, že jde také o izomorfismus $\mathbb{Z}_{(p)}$-modulů. Konečně pro $P = 0 \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ je $A_P \cong \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}_P$. Dokázali jsme tedy, že pro libovolný prvoideál $P \in \operatorname{Spec}(R)$ je A_P volný a tedy i projektivní a plochý $\mathbb{Z}_P$-modul. Modul A je tedy plochý, ovšem není projektivní, neboť nad oborem integrity hlavních ideálů je každý projektivní modul již volný a A jako $\mathbb{Z}$-modul volný není. To plyne například z následujícího pozorování. Modul A není izomorfní $\mathbb{Z}$, neboť faktor $A/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}}$ není cyklický (1-generovaný) modul. Ovšem libovolný homomorfismus $\mathbb{Z}^2 \to A$ má nutně netriviální jádro a pokud by byl modul A volný, byl by již izomorfní $\mathbb{Z}$.

Tento příklad nepostačí k vyvrácení toho, že se projektivita či volnost rozšiřují z pokrytí (a později se ukáže, že se projektivita skutečně z pokrytí rozšiřuje). Lokalizace A v libovolném prvku $z \in \mathbb{Z}$ má tvar

$$A_z = \left\{ \frac{a}{bz^k} \in \mathbb{Q};\ \frac{a}{bz^n} \text{ je v základním tvaru a } b \text{ je bezčtvercové číslo a } k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Podobnou úvahou jako v předchozím odstavci zjistíme, že tento $\mathbb{Z}_z$-modul není volný a nad oborem integrity hlavních ideálů $\mathbb{Z}_z$ tedy ani projektivní. Konečná množina $U \subseteq R$ taková, že $(U) = R$ a M_f je pro každé $f \in U$ projektivní tedy neexistuje a rozšiřování projektivity z pokrytí skutečně vyvráceno není.

Hlavním cílem zbytku této práce bude dokázat, že se projektivita je jako modulová vlastnost lokální.

6.4 AD-vlastnosti modulů

Lokalizace je vždy vybavena lokalizačním homomorfismem. Proto lze následujícím způsobem zesílit definici zužování z předchozí části.

Definice 6.9. *Řekneme, že se vlastnost $\mathfrak{P}$ ve třídě $\mathcal{R}$* zužuje po okruhových homomorfismech, *pokud pro okruhový homomorfismus $R \to S$ mezi okruhy z $\mathcal{R}$ platí, že je-li $M \in \mathfrak{P}_R$, pak $M \otimes S \in \mathfrak{P}_S$.*

Obdobně se rozšiřuje definice rozšiřování, požaduje se ovšem věrně plochý homomorfismus.

Definice 6.10. *Řekneme, že se že se vlastnost $\mathfrak{P}$ ve třídě $\mathcal{R}$* rozšiřuje po věrně plochých homomorfismech, *pokud pro věrně plochý okruhový homomorfismus $R \to S$ mezi okruhy z $\mathcal{R}$ platí, že je-li $M \otimes S \in \mathfrak{P}_S$, pak $M \in \mathfrak{P}_R$.*

Definujme ještě pojem kompatibility vlastnosti s konečnými okruhovými součiny.

Definice 6.11. *Buď $\mathfrak{P}$ vlastnost modulů. Řekneme, že $\mathfrak{P}$ je* kompatibilní s direktním součinem okruhů*, platí-li následující. Buď n přirozené číslo a mějme okruh R_i a R_i-modul M_i pro $1 \leq i \leq n$. Pokud pro každé $1 \leq i \leq n$ platí $M_i \in \mathfrak{P}_{R_i}$, potom $\prod_{1 \leq i \leq n} M_i \in \mathfrak{P}_{\prod_{1 \leq i \leq n} R_i}$*

Zužování vlastností po okruhových homomorfismech se v angličtině označuje jako *ascent*, rozšiřování po věrně plochých okruhových homomorfismech se nazývá *descent*. Z prvníh písmen těchto slov potom vzniká označení pro vlastnosti, které se zužují i rozšiřují.

Definice 6.12. *Buď $\mathfrak{P}$ vlastnost modulů. Je-li $\mathfrak{P}$ kompatibilní s okruhovými součiny a v nějaké třídě komutativních okruhů $\mathcal{R}$ se zužuje po okruhových homomorfismech a rozšiřuje po věrně plochých okruhových homomorfismech, potom řekneme, že je $\mathfrak{P}$ na $\mathcal{R}$* AD-vlastnost*.*

Následující tvrzení ukazuje souvislost mezi AD-vlastnostmi a lokálními vlastnostmi popsanými v předchozí části. Ukáže se, že se AD-vlastnosti rozšiřují z pokrytí.

Tvrzení 6.13. *Buď $\mathfrak{P}$ AD-vlastnost ve třídě $\mathcal{R}$ komutativních okruhů uzavřené na lokalizace. Potom $\mathfrak{P}$ se v $\mathcal{R}$ zužuje a rozšiřuje z pokrytí, tedy je lokální.*

Důkaz. Zužovaní je zřejmé, neboť lokalizace je plochý homomorfismus. K důkazu rozšiřování uvažujme okruh $R \in \mathcal{R}$ a dále R-modul M a množinu $U \subseteq R$ takovou, že $(U) = R$ a pro každý prvek $f \in U$ je $M_f \in \mathfrak{P}_{R_f}$. Množinu U lze bez újmy na obecnosti uvažovat konečnou, jak plyne z úvahy v Tvrzení 6.2. Homomorfismus $R \to \prod_{f \in U} R_f$, je věrně plochý. Dále platí $M \otimes \prod_{f \in U} \cong \prod_{f \in U} M \otimes R_f = \prod_{f \in U} M_f$. Jelikož $\mathfrak{P}$ je kompatibilní s direktními součiny okruhů, je $\prod_{f \in U} M_f \in \mathfrak{P}_{\prod R_r}$. Ovšem $\mathfrak{P}$ je AD-vlastností v třídě $\mathcal{R}$, a tedy i $M \in \mathfrak{P}_R$. Vlastnost $\mathfrak{P}$ se na $\mathcal{R}$ rozšiřuje z pokrytí.

$\square$

Obsahem zbytku této práce bude důkaz, že projektivita je AD-vlastností ve třídě komutativních okruhů. K tomu bude zaveden pojem Mittag-Lefflerových modulů. Důležitým poznatkem pro tento důkaz bude, že je AD-vlastností plochost. Je třeba ověřit nejprve kompatibilitu s direktním produktem okruhů.

Tvrzení 6.14. *Plochost je kompatibilní s konečnými okruhovými součiny.*

Důkaz. Buďte $R_1, \ldots, R_n$ okruhy, označme $R = \prod_{1 \leq i \leq n}$ a mějme pro $1 \leq i \leq n$ plochý R_i-modul M_i. Připomeňme, že pro každé j má M_j strukturu R-modulu; akcí okruhu je $(r_i)_{1 \leq i \leq n} \cdot m = r_j \cdot m$, označme R-modul $M = \prod_{1 \leq i \leq n}$. Pro libovolný modul A existuje přirozený izomorfismus R-modulů $\prod_{1 \leq i \leq n} (A \otimes_{R_i} M_i) \cong A \otimes_R M$, určený předpisem $(a_i \otimes m_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \otimes m_i'$, kde m_i' je prvek, který má ve všech složkách 0, jen v i-té složce m_i. Toto je skutečně izomorfismus, snadno se ověří, že homomorfismus $A \otimes_R M \to \prod_{\leq i \leq n} (A \otimes_{R_i} M_i)$, $a \otimes (m_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto$

$(a \otimes m_i)_{1 \leq i \leq n}$ je inverzním izomorfismem. Snadno se také ověří přirozenost, tedy to, že pro homomorfismus $f : A \to B$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
\prod_{1 \leq i \leq n}(A \otimes_{R_i} M_i) \arrow[r, "(f \otimes_{R_i} \mathrm{id}_{M_i})"] \arrow[d] & \prod_{1 \leq i \leq n}(B \otimes_{R_i} M_i) \arrow[d] \\
A \otimes_R M \arrow[r, "f \otimes_R \mathrm{id}_M"] & B \otimes_R M
\end{tikzcd}.$$

Vzhledem k tomu, že direktní součin modulů je exaktní a moduly M_i jsou ploché, je už M plochý R-modul.

□

Tvrzení 6.15. *Plochost je AD-vlastnost.*

Důkaz. Dokažme nejprve zužování se po okruhových homomorfismech. Buď $R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů a M buď plochý R-modul. Ukážeme, že $M \otimes_R S$ je plochý S-modul. Mějme krátkou exaktní posloupnost S-modulů

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Zkoumáme potom exaktnost posloupnosti

$$0 \to A \otimes_S (M \otimes_R S) \to B \otimes_S (M \otimes_R S) \to C \otimes_S (M \otimes_R S) \to 0,$$

ovšem odtud vzhledem k přirozenému izomorfismu $N \otimes_S (M \otimes_R S) \cong N \otimes_S S \otimes_R M \cong N \otimes_R M$ pro S-modul N dostáváme posloupnost

$$0 \to A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M \to 0,$$

která nutně exaktní je, neboť M je jako R-modul plochý.

Ověřme nyní rozšiřování. Buď tedy $R \to S$ věrně plochý homomorfismus a M buď R-modul takový, že $M \otimes_R S$ je plochý S-modul. Mějme potom krátkou exaktní posloupnost R-modulů

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Z plochosti S dostáváme krátkou exaktní posloupnost S-modulů

$$0 \to A \otimes_R S \to B \otimes_R S \to C \otimes_R S \to 0$$

a vzhledem k plochosti $M \otimes_R S$ dostáváme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to A \otimes_R S \otimes_S (M \otimes_R S) \to B \otimes_R S \otimes_S (M \otimes_R S) \to C \otimes_R S \otimes_S (M \otimes_R S) \to 0.$$

Přirozený izomorfismus $N \otimes_R S \otimes_S (M \otimes_R S) \cong N \otimes_R (M \otimes_R S) \cong N \otimes_R M \otimes_R S$ potom dává krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to A \otimes_R M \otimes_R S \to B \otimes_R M \otimes_R S \to C \otimes_R M \otimes_R S \to 0$$

a protože S je věrně plochý R-modul, je posloupnost

$$0 \to A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M \to 0$$

exaktní a M je tedy plochý R-modul.

□

7. Mittag-Lefflerovy moduly

V této kapitole zavedeme pojem *Mittag-Lefflerových modulů.* Přestože jejich konstrukce nesouvisí zásadně s lokalizací, ukážeme nakonec, že být Mittag-Lefflerovým modulem se jako vlastnost modulů, alespoň pro ploché moduly, zužuje a také rozšiřuje po věrně plochých homomorfismech, a tedy i z pokrytí. Definice a důkazy většiny tvrzení jsou přejaty z [9, část 6].

7.1 Mittag-Lefflerovy inverzní systémy

Definice 7.1. *Buď I nahoru usměrněná uspořádaná množina a $(A_i,\ f_{ji} : A_i \to A_j;\ i \geq j)$ inverzní systém množin. Pro $i \in I$ tvoří množiny $f_{ij}(A_j) \subseteq A_i$ nerostoucí systém podmnožin. Inverzní systém nazveme* Mittag-Lefflerův*, pokud se pro každé $i \in I$ tato posloupnost stabilizuje, tedy existuje-li pro každé $i \in I$ nějaké $j \geq i$ takové, že pro každé $k \geq j$ je $f_{ij}(A_j) = f_{ik}(A_k)$.*

Jak bylo dokázáno předchozích kapitolách, inverzní limita systému exaktních posloupností nemusí být nutně exaktní posloupností. Jde-li však o spočetný systém , pak Mittag-Lefflerova podmínka na systém jader těchto posloupností už je postačující k tomu, aby inverzní limita exaktní posloupností byla. Nejprve jednoduché lemma.

Lemma 7.2. *Buď (A_i,f_{ij}) spočetný inverzní Mittag-Lefflerův systém neprázdných množin, potom $\varprojlim(A_i) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že můžeme přejít k systému $(A'_i,f_{ij}|_{A'_j})$, kde $A'_i = \mathrm{Im}(f_{ij})$ pro $j \geq i$, pro něž je pro každé $k \geq j$ už $\mathrm{Im}(f_{ij}) = \mathrm{Im}(f_{ik})$. Zobrazení $f_{ij}|_{A'_j} : A'_j \to A'_i$ jsou na a z konstrukce inverzní limity snadno nahlédneme, že $\varprojlim A_i = \varprojlim A'_i$.

Podle Tvrzení 3.3 nalezneme v (A'_i,f_{ij}) kofinální podsystém indexovaný přirozenými čísly. Hledáme tedy inverzní limitu inverzního systému neprázdných množin a surjektivních zobrazení indexovaného přirozenými čísly. Podle Pozorování 3.11 je taková limita neprázdná.

□

Tvrzení 7.3. *Buď*

$$0 \to A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \to 0$$

exaktní posloupnost spočetných inverzních systémů a systém (A_i) je inverzní Mittag-Lefflerův. Potom posloupnost

$$0 \to \varprojlim A_i \to \varprojlim B_i \to \varprojlim C_i \to 0$$

je exaktní.

Důkaz. Z vlastností direktní limity plyne, že je posloupnost zleva exaktní. Stačí tedy ověřit, že pravý homomorfismus je surjektivní. Zvolme libovolný prvek $(c_i) \in \varprojlim C_i$. Označme $E_i = g^{-1}(c_i)$, jde jistě o neprázdnou množinu, neboť g_i je na.

Označme $\phi_{ij} : B_i \to B_j$ homomorfismy inverzního systému. Restrikcí dostáváme inverzní systém množin $(E_i, \phi_{ij}|_{E_j})$. Za vzor (c_i) stačí vzít libovolný prvek $\varprojlim E_i$, je-li tato limita neprázdná. Dokážeme nyní, že je $(E_i, \phi_{ij}|_{E_j})$ Mittag-Lefflerův inverzní systém a vzhledem ke spočetnosti daného systému bude už podle Předchozího lemmatu $\varprojlim E_i \neq \emptyset$.

Díky prostosti f_i můžeme považovat A_i za podmodul B_i. Zvolme nyní libovolný index i. Protože systém (A_i) je Mittag-Lefflerův, najdeme už $j \geq i$ takové, že pro každé $k \geq j$ je $\phi_{ik}(A_k) = \phi_{ij}(A_j)$. Ukážeme, že potom už pro každé $k \geq j$ platí $\phi_{ik}(E_k) = \phi_{ij}(E_j)$. Inkluze $k \geq j$ platí $\phi_{ik}(E_k) \subseteq \phi_{ij}(E_j)$ je zřejmá. Pro opačnou inkluzi zvolme $e \in \phi_{ij}(E_j)$, dostáváme tedy $e_j \in E_j$ takové, že $\phi_{ij}(e_j) = e$. Zvolme dále libovolně $e_k \in E_k$, potom $g_j(e_j - \phi_{jk}(e_k)) = c_j - c_j = 0$ a proto je $e_j - \phi_{jk}(e_k) \in A_j$ a $\phi_{ij}(e_j - \phi_{jk}(e_k)) \in \phi_{ij}(A_j) = \phi_{ik}(A_k)$. Nalezneme tedy $a_k \in A_k$ takové, že $\phi_{ik}(a_k) = \phi_{ij}(e_j - \phi_{jk}(e_k))$. Potom ovšem pro prvek $a_k + e_k$ platí $\phi_{ik}(a_k + e_k) = \phi_{ij}(e_j - \phi_{jk}(e_k)) + \phi_{ik}(e_k) = \phi_{ij}(e_j) - \phi_{ij} \circ \phi_{jk}(e_k)) + \phi_{ik}(e_k) = e$. Tedy $e \in \phi_{ik}(E_k)$. Tím jsme dokázali zbylou inkluzi. Ověřili jsme takto, že systém $(E_i, \phi_{ij}|_{E_j})$ je Mittag-Lefflerův inverzní systém. Tím je důkaz dokončen.

□

7.2 Mittag-Lefflerovy direktní systémy

Definice 7.4. *Buď I nahoru usměrněná množina a $(M_i,\ f_{ij} : M_j \to M_i;\ i \geq j)$ direktní systém konečně prezentovaných modulů. Tento systém nazveme* Mittag-Lefflerův direktní systém*, pokud je pro každý modul N inverzní systém*

$$(\mathrm{Hom}(M_i{,}N), \mathrm{Hom}(f_{ij}{,}N))$$

inverzní Mittag-Lefflerův systém.

Následuje lemma uvádějící užitečné ekvivalentní podmínky pro Mittag-Lefflerův direktní systém. Nejprve musíme ovšem dokázat pomocné lemma, které chytře využívá dříve definovaného pojmu čistých monomorfismů.

Lemma 7.5. *Buďte M, M' a N moduly nad okruhem R. Mějme dále homomorfismy $f : M \to M'$ a $g : M \to N$, navíc buď kojádro f konečně prezentovaný modul. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Pro libovolný R-modul Q platí* $\mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_Q) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_Q)$.

(2) *Existuje homomorfismus $h : M' \to N$ takový, že $g = h \circ f$.*

Důkaz. Uvažujme pushout

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ N & \xrightarrow{f'} & N' \end{array} .$$

Modul N' získáme jako $(M' \oplus N)/K$, kde K je podmodul generovaný prvky tvaru $(f(m), -g(m))$ pro $m \in M$. S použitím univerzální vlastnosti pushoutu lze dokázat, že kojádro f' je konečně prezentovaný modul.

Dokážeme, že obě tvrzení jsou ekvivalentní tomu, že je f' čistý monomorfismus. Z konstrukce N' dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(f') \to 0.$$

Protože pushout je kolimita, komutuje s tenzorovým součinem. Tenzorovým součinem s libovolným modulem Q tedy dostáváme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_Q) \cap \mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_Q) \to \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_Q) \xrightarrow{g \otimes_R \mathrm{id}_Q} \mathrm{Ker}(f' \otimes_R \mathrm{id}_Q) \to 0.$$

Zřejmě f' je čistý monomorfismus právě tehdy, je-li $\mathrm{Ker}(f' \otimes_R \mathrm{id}_Q) = 0$ pro každý modul Q. Z druhé exaktní posloupnosti je zřejmé, že toto nastává právě tehdy, je-li splněna podmínka (1).

Je-li f' čistý monomorfismus, dostáváme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to N \xrightarrow{f'} N' \to \mathrm{Coker}(f') \to 0.$$

$\mathrm{Coker}(f')$ je konečně prezentovaný modul, podle Tvrzení 5.14 je tedy tato posloupnost štěpitelná a existuje homomorfismus $h' : N' \to N$ takový, že $h \circ f' = \mathrm{id}_{M'}$. Za h z podmínky (2) potom stačí vzít $h' \circ g'$.

Existuje-li naopak h jako z podmínky (2), potom existuje homomorfismus $h' : N' \to N$ takový, že $h \circ f' = \mathrm{id}_{M'}$ díky univerzální vlastnosti pushoutu a f' je štěpitelný a tedy čitý monomorfismus.

$\square$

Lemma 7.6. *Buď $(M_i,\ f_{ij})$ direktní systém konečně prezentovaných modulů indexovaný množinou I a $M = \varinjlim M_i$, $f_i : M_i \to M$ kanonická zobrazení. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Pro každé $i \in I$ existuje $j \in I$, $j \geq i$, takové, že pro každé $k \geq i$ platí $f_{ji} = g \circ f_{ki}$ pro vhodný homomorfismus g.*

(2) *Systém $(M_i,\ f_{ji})$ je direktní Mittag-Lefflerův.*

(3) *Pro $N = \prod_{i \in I} M_i$ je systém $(\mathrm{Hom}(M_i,\ N),\ \mathrm{Hom}(f_{ji}, N))$ inverzní Mittag-Lefflerův.*

(4) *Pro každé $i \in I$ existuje $j \geq i$ takové, že pro libovolný R-modul N je $\mathrm{Ker}(f_i \otimes \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ji} \otimes \mathrm{id}_N)$*

Důkaz. Ukažme, že (1) implikuje (2). Zvolme libovolný R-Modul N. Zafixujme i a nalezneme j podle (1). Nyní ukažme, že pro libovolné $k \geq j$ je $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N))$. Tím už bude implikace dokázána. Inkluze $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N))$ je zřejmá. Ukažme inkluzi $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N)) \supseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N))$. Zvolme $\varphi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N))$. Podle (1) existuje homomorfismus g takový, že $f_{ji} = g \circ f_{ki}$. Potom ovšem

$$\varphi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(g \circ f_{ki},N)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N) \circ \mathrm{Hom}(g,N)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N)).$$

Máme tedy žádanou inkluzi i rovnost.

Zřejmě (2) implikuje (3). Ukažme nyní, že (3) implikuje (1). Zvolme libovolné $i \in I$. Z definice inverzního Mittag-Lefflerova systému nalezneme j takové, že pro každé $k \geq j$ už $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N))$. Ukažme nyní, že pro libovolné $k \geq i$ existuje homomorfismus $g : M_k \to M_j$ takový, že $g \circ f_{ki} = f_{ji}$. Pro $k \leq j$ stačí brát $g = f_{jk}$. Buď nyní $k > j$. Uvažujme homomorfismus $h : M_j \to N$ takový, že $\pi_j \circ h = \mathrm{id}_{M_j}$ a $\pi_i \circ h = 0$ pro $i \neq j$, kde $\pi_i : N \to M_i$ jsou kanonické projekce. Zřejmě $h \circ f_{ji} \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},N)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ki},N))$. Existuje tedy $g' \in \mathrm{Hom}(M_k,N)$ takové, že $h \circ f_{ji} = \mathrm{Hom}(f_{ki},N)(g') = g' \circ f_{ki}$. Potom ovšem $g = \pi_j \circ g'$ je hledaný homomorfismus, neboť

$$g \circ f_{ki} = \pi_j \circ g' \circ f_{ki} = \pi_j \circ h \circ f_{ji} = \mathrm{id}_{M_j} \circ f_{ji} = f_{ji}.$$

K dokončení důkazu stačí dokázat ekvivalenci mezi (1) a (4). Dokažme nejprve přímou implikaci. Zvolme tedy $i \in I$ a podle (1) nalezněme $j \geq i$, takové, že pro $k \geq i$ existuje $g_k : M_k \to M_j$ pro něž $f_{ji} = g_k \circ f_{ki}$. Potom podle univerzální vlastnosti direktní limity existuje homomorfismus $g : M \to M_j$ takový, že pro každé $k \geq i$ platí $g_k = g \circ f_k$. Pak ovšem pro libovolné $k \geq i$ platí

$$f_{ji} = g \circ f_k \circ f_{ki} = g \circ f_i$$

a pro libovolný modul N už

$$f_{ji} \otimes \mathrm{id}_N = g \otimes \mathrm{id}_N \circ f_i \otimes \mathrm{id}_N$$

a tedy $\mathrm{Ker}(f_i \otimes \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ji} \otimes \mathrm{id}_N)$.

Dokažme nyní zpětnou implikaci. Zvolme $i \in I$ libovolně a nalezněme k němu j podle (4). Potom pro každé $k \in I$, $k \geq i$ platí $f_i = f_k \circ f_{ki}$ a tedy díky volbě j už pro každý R-modul N platí

$$\mathrm{Ker}(f_{ki} \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_i \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ji} \otimes \mathrm{id}_N).$$

Moduly M_i a M_k jsou podle předpokladu konečně prezentované, kojádro homomorfismu f_{ki} je tedy také konečně prezentované. Podle Lemmatu 7.5 tedy existuje homomorfismus $g : M_k \to M_j$ takový, že $f_{ji} = g \circ f_{ji}$. Nalezli jsme tedy hledaný index j a dokázali platnost podmínky (1). Tím je dokázána ekvivalence (1) a (4) a tedy i celé lemma.

□

7.3 Mittag-Lefflerovy moduly

Mittag-Lefflerovy moduly definujeme jako direktní limity Mittag-Lefflerových systémů. Následující tvrzení nabízí alternativní definici a především poskytuje nezávislost definice na zvoleném systému, neboť podmínka (1) o takovém systému nemluví.

Tvrzení 7.7. *Buď M modul nad okruhem* $\mathbf{R}$. *Buď (M_i,f_{ji}) direktní systém konečně prezentovaných modulů indexovaný množinou I takový, že $M = \varinjlim M_i$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Pro každý konečně prezentovaný modul P a každý homomorfismus $f : P \to M$ existuje konečně prezentovaný modul Q a homomorfismus $g : P \to Q$ takový, že pro každý modul N platí* $\mathrm{Ker}(f \otimes_{\mathbf{R}} \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(g \otimes_{\mathbf{R}} \mathrm{id}_N)$.

(2) *Systém (M_i, f_{ji}) je direktní Mittag-Lefflerův systém.*

Důkaz. Ukažme nejprve přímou implikaci. Předpokládejme platnost (1) a ověříme podmínku (4) Lemmatu 7.6. Zvolme libovolně $i \in I$. Jelikož modul M_i je konečně prezentovaný, nalezneme podle (1) konečně prezentovaný modul Q a homomorfismus $g : M_i \to Q$ takové, že pro libovolný modul N je $\mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f_i \otimes_R \mathrm{id}_N)$. Speciálně tedy $\mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_i \otimes_R \mathrm{id}_N)$. Protože M_i a Q jsou konečně prezentované moduly, je konečně prezentované i kojádro homomorfismu g a podle Lemmatu 7.5 existuje homomorfismus $h : Q \to M$ takový, že $f_i = h \circ g$. Protože Q je konečně prezentovaný modul, existují podle Lemmatu 3.9 $j \in I$, $j \geq i$ a homomorfismus $h' : Q \to M_j$ takové, že $h = f_j \circ h'$. Dostáváme tedy diagram

$$\begin{tikzcd} & M & \\ M_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "g"'] & & M_j \arrow[ul, "f_j"'] \\ & Q \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

v němž platí $f_j \circ f_{ji} = f_j \circ h' \circ g$. Modul M_i je konečně generovaný a podle Tvrzení 3.8 tedy existuje $k \in I$ takové, že $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji} = f_{kj} \circ h' \circ g$. Potom už zřejmě pro libovolný modul N platí $\mathrm{Ker}(f_i \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ki} \otimes_R N)$. Podle Lemmatu 7.6 (4) je tedy (M_i, f_{ji}) direktní Mittag-Lefflerův systém.

Předpokládejme nyní, že je systém (M_i, f_{ji}) direktní Mittag-Lefflerův. Zvolme libovolný konečně prezentovaný modul P a homomorfismus $f : P \to M$. Vzhledem ke konečné prezentovanosti P existuje $i \in I$ takové, že $f = f_i \circ h$ pro vhodný homomorfismus $h : P \to M_i$. Nalezněme nyní $j \in I$, $j \geq i$ podle podmínky (4) Lemmatu 7.6. Dostáváme tedy následující komutativní diagram.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \\ M_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_{ji}"] & M_j \arrow[u, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

Pro libovolný modul N nyní platí $\mathrm{Ker}(f_i \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ji} \otimes_R \mathrm{id}_N)$ odtud však vzhledem k rovnosti $f = f_i \circ h$ už $\mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f_i \circ h \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{ji} \circ h \otimes_R \mathrm{id}_N)$. Ovšem také $f = f_j \circ f_{ji} \circ h$ a tedy $\mathrm{Ker}(f_{ji} \circ h \otimes_R \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_N)$. Potom už ovšem platí pro libovolný modul N rovnost $\mathrm{Ker}(f_{ji} \circ h \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_N)$. Platnost podmínky (1) je ověřena, vezmeme-li $Q = M_j$ a $g = f_{ji} \circ h$.

□

Definice 7.8. *Modul splňující ekvivalentní podmínky z Tvrzení 7.7 nazveme* Mittag-Lefflerův modul*.*

Poznámka. Jak již bylo zmíněno v kapitole o plochých modulech, je jistá podobnost mezi definicí Mittag-Lefflerových modulů jako direktních limit Mittag-Lefflerových systémů a charakterizací plochých modulů pomocí Lazardovy věty. Je však také zajímavé, že ekvivalentní definice Mittag-Lefflerových modulů popisuje jejich vztah k homomorfismům, jež do nich vedou z konečně prezentovaných modulů, podobně, jako to dělá podmínka (4) v Tvrzení 5.6 pro moduly ploché.

Jak se ukáže v kapitole o projektivních modulech, být Mittag-Lefflerovým modulem je jednou z vlastností jejichž kombinace zajišťuje projektivitu modulu. K nahlédnutí faktu, že projektivní moduly jsou Mittag-Lefflerovy bude užitečný následující fakt.

Tvrzení 7.9. *Buď $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Potom M je Mittag-Lefflerův modul právě tehdy, je-li pro každé $i \in I$ modul M_i Mittag-Lefflerův.*

Důkaz. Dokažme zpětnou implikaci. Předpokládejme nejprve, že I je konečná. Předpokládejme, že pro všechna $i \in I$ je M_i Mittag-Lefflerův modul. Buď P libovolný konečně prezentovaný modul a $f : P \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ homomorfismus. Potom pro $j \in I$ dostáváme homomorfismus $\pi_j \circ f : P \to M_j$, kde $\pi_j : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_j$ jsou kanonické projekce (připomeňme, že $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$, neboť I je konečná). Protože modul M_j je Mittag-Lefflerův, existují podle definice konečně prezentovaný modul Q_j a homomorfismus $g_j : P \to Q_j$ takové, že $\operatorname{Ker}(g_j \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}((\pi_j \circ f) \otimes \mathrm{id}_N)$ pro libovolný modul N.

Uvažujme nyní homomorfismus $(g_i)_{i\in I} : P \to \prod_{i\in I} Q_i = \bigoplus_{i\in I} Q_i$. Modul $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ je konečně prezentovaný. Navíc díky konečnosti I pro libovolný modul N platí $f \otimes \mathrm{id}_N = (\pi_i \circ f)_{i\in I} \otimes \mathrm{id}_N = ((\pi_i \circ f) \otimes \mathrm{id}_N)_{i\in I}$ a $(g_i)_{i\in I} \otimes \mathrm{id}_N = (g_i \otimes \mathrm{id}_N)_{i\in I}$ a tedy

$$\operatorname{Ker}(f \otimes \mathrm{id}_N) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}((\pi_i \circ f) \otimes \mathrm{id}_N) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(g_i \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}((g_i)_{i\in I} \otimes \mathrm{id}_N).$$

Modul $\bigoplus_{i\in I} M_i$ je tedy Mittag-Lefflerův.

Buď nyní I libovolná, M_i Mittag-Lefflerův pro každé $i \in I$, P konečně prezentovaný modul a $f : P \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ homomorfismus. Zobrazení f se rozkládá jako $P \xrightarrow{f'} \bigoplus_{i\in I'} M_i \overset{\nu}{\hookrightarrow} \bigoplus_{i\in I} M_i$, kde $I' \subseteq I$ je konečná podmnožina. Zobrazení ν je štěpitelné prosté zobrazení a jde tedy o čistý monomorfismus. Podle předchozího důkazu je $\bigoplus_{i\in I'} M_i$ Mittag-Lefflerův modul a existuje tedy konečně prezentovaný modul Q a zobrazení $g : P \to Q$ takové, že pro každý modul N je $\operatorname{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}(f' \otimes \mathrm{id}_N)$. Ovšem potom už $\operatorname{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}(f' \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}(\nu \otimes \mathrm{id}_N \circ f' \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}((\nu \circ f') \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}(f \otimes \mathrm{id}_N)$. Modul $\bigoplus_{i\in I} M_i$ je tedy Mittag-Lefflerův.

Dokažme nyní přímou implikaci. Buď tedy $\bigoplus_{i\in I} M_i$ Mittag-Lefflerův modul. Zvolme $j \in I$, konečně prezentovaný modul P a homomorfismus $f : P \to M_j$. Složením s kanonickým vnořením dostáváme homomorfismus $\nu_j \circ f : P \to \bigoplus_{i\in I} M_i$. Jelikož $\bigoplus_{i\in I} M_i$ je Mittag-Lefflerův modul, existuje konečně prezentovaný modul Q a homomorfismus $g : P \to Q$ takový, že $\operatorname{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Ker}((\nu_j \circ f) \otimes \mathrm{id}_N)$. Protože ν_j je štěpitelné prosté zobrazení a tedy čistý monomorfismus, je už

$\mathrm{Ker}((\nu_j \circ f) \otimes \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f \otimes \mathrm{id}_N)$ a modul M_j je Mittag-Lefflerův.

□

Příklad. Volné moduly jsou Mittag-Lefflerovy, neboť splňují podmínku (1) Tvrzení 7.7. Zvolíme-li volný modul $R^{\oplus I}$, konečně prezentovaný modul P a homomorfismus $f : P \to R^{\oplus I}$, potom existuje jistě konečná podmnožina $I' \subseteq I$ taková, že $\mathrm{Im}(f) \subseteq R^{\oplus I'}$. Platí tedy $f = \nu \circ g$, kde ν je vnoření $R^{\oplus I'} \subseteq R^{\oplus I}$. Modul $R^{\oplus I'}$ je jistě konečně prezentovaný a vnoření ν je štěpitelné a tedy čistý monomorfismus. Pro libovolný R-modul N tedy skutečně platí $\mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(\nu \otimes_R \mathrm{id}_N \circ g \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(g \otimes_R \mathrm{id}_N)$.

7.4 Zužování a rozšiřování

Je rychlým důsledkem definice, že se vlastnost býti Mittag-Lefflerovým modulem zužuje po okruhových homomorfismech.

Tvrzení 7.10. *Buď $R \to S$ okruhový homomorfismus a M buď Mittag-Lefflerův R-modul. Potom modul $M \otimes_R S$ je Mittag-Lefflerův S-modul.*

Důkaz. Uvážíme M jako limitu Mittag-Lefflerova direktního systému (M_i, f_{ji}). Potom $M \otimes_R S$ je direktní limitou systému $(M_i \otimes_R S, f_{ji} \otimes_R \mathrm{id}_S)$, který splňuje podmínku (1) Lemmatu 7.6.

□

Předtím, než ukážeme, že vlastnost býti plochým Mittag-Lefflerovým modulem se jako vlastnost modulů zužuje a rozšiřuje po plochých respektive věrně plochých okruhových homomorfismech, dokažme následující poznámku, která pro ploché moduly značně zjednodušuje ověřování Mittag-Lefflerovy podmínky, což se ukáže užitečným při důkazu rozšiřování.

Tvrzení 7.11. *Buď $(M_i,f_{ji}; i \leq j \in I)$ direktní systém konečně generovaných volných R-modulů. Potom tento systém je direktním Mittag-Lefflerovým systémem právě tehdy, je-li systém $(\mathrm{Hom}(M_i,R), \mathrm{Hom}(f_{ji},R))$ inverzním Mittag-Lefflerovým systémem.*

Důkaz. Pro konečně generovaný volný modul F a pro libovolný fixovaný modul N platí následující přirozený izomorfismus

$$\mathrm{Hom}(F,R) \otimes_R N \cong \mathrm{Hom}(F, N)$$

daný předpisem $f \otimes n \mapsto (x \mapsto f(x) \cdot n)$. Inverzním izomorfismem je $g \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n}(\pi_i \otimes g(x_i))$, kde x_i jsou prvky báze a π_i jsou kanonické projekce při ztotožnění $F = R^I$, $I = \{r_i;\ 1 \leq i \leq n\}$.

Je-li nyní $(\mathrm{Hom}(M_i,R), \mathrm{Hom}(f_{ji},R))$ inverzním Mittag-Lefflerovým systémem, je jím i $(\mathrm{Hom}(M_i,N), \mathrm{Hom}(f_{ji},N)) = (\mathrm{Hom}(M_i,R) \otimes_R N, \mathrm{Hom}(f_{ji},N) \otimes_R \mathrm{id}_N)$, neboť pro libovolné homomorfismy $f : B \to A$, $g : C \to A$ platí, že pokud $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ pak $\mathrm{Im}(f \otimes_R \mathrm{id}_N) = \mathrm{Im}(g \otimes_R \mathrm{id}_N)$ pro libovolný R-modul N. Direktní systém $(M_i,f_{ji}; i \leq j \in I)$ je tedy Mittag-Lefflerův.

□

Následující tvrzení je klíčové.

Tvrzení 7.12. *Buď $R \to S$ věrně plochý okruhový homomorfismus. Buď M modul nad okruhem R. Potom je-li S-modul $M \otimes_R S$ plochý Mittag-Lefflerův, je také M plochý Mittag-Lefflerův R-modul.*

Důkaz. Podle Tvrzení 6.15 je už modul M plochý. Podle Lazardovy věty je tedy $M = \varinjlim_{i \in I} M_i$, kde (M_i,f_{ji}) je direktní systém konečně generovaných volných modulů indexovaný množinou I. Stačí ukázat, že je inverzní systém

$$(\mathrm{Hom}(M_i,R), \mathrm{Hom}(f_{ji},R))$$

Mittag-Lefflerův, potom je podle Tvrzení 7.11 už systém (M_i,f_{ji}) direktní Mittag-Lefflerův systém a M je Mittag-Lefflerův modul.

Vzhledem k tomu, že tenzorový součin komutuje s direktními limitami, platí už $M \otimes_R S = \varinjlim_{i \in I} M_i \otimes_R S$. Systém

$$(\mathrm{Hom}(M_i \otimes_R S,S), \mathrm{Hom}(f_{ji} \otimes_R \mathrm{id}_S,S))$$

je inverzní Mittag-Lefflerův systém, neboť $M \otimes_R S$ je Mittag-Lefflerův.

Pro konečně generovaný volný modul F existuje přirozený izomorfismus

$$\mathrm{Hom}_S(F \otimes_R S, S) \cong \mathrm{Hom}_R(F,R) \otimes_R S$$

daný předpisem $g \mapsto \sum_{1 \le i \le n}(\pi_i \otimes g(x_i \otimes 1))$ kde x_i jsou prvky báze a π_i jsou kanonické projekce při ztotožnění $F = R^I$, $I = \{r_i;\ 1 \le i \le n\}$, inverzní izomorfismus je $f \otimes s \mapsto (x_i \otimes s' \mapsto (h \circ f)(x_i)ss')$, kde h je okruhový homomorfismus $R \to S$.

Zvolme nyní libovolné $i \in I$. Protože $(\mathrm{Hom}(M_i \otimes_R S,S), \mathrm{Hom}(f_{ji} \otimes_R \mathrm{id}_S,S))$ je inverzní Mittag-Lefflerův systém, víme, že se stabilizuje systém

$$\{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji} \otimes_R \mathrm{id}_S,S));\ j \ge i\}.$$

Vzhledem k výše zmíněnému přirozenému izomorfismu se tedy stabilizuje systém

$$\{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},R) \otimes_R \mathrm{id}_S);\ j \ge i\}.$$

Protože S je plochý modul, platí pro libovolný homomorfismus f rovnost $\mathrm{Im}(f \otimes_R \mathrm{id}_S) = \mathrm{Im}(f) \otimes_R S$. Stabilizuje se tedy i systém

$$\{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},R)) \otimes_R S;\ j \ge i\}.$$

Věrná plochost S potom zaručuje, že je-li $N \otimes_R S = N' \otimes_R S$, potom už $N = N'$. Proto se stabilizuje i systém

$$\{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f_{ji},R));\ j \ge i\}.$$

Inverzní systém $(\mathrm{Hom}(M_i,R), \mathrm{Hom}(f_{ji},R))$ je tedy Mittag-Lefflerův. Tím je důkaz dokončen.

□

7.5 Další vlastnosti Mittag-Lefflerových modulů

Přestože v této práci jsou stejně jako v článku [9] Mittag-Lefflerovy moduly zavedeny jako prostředek k charakterizaci projektivních modulů a důkazu toho, že projektivita je AD-vlastnost, jde ve skutečnosti o zajímavý a zkoumaný pojem. Uveďme zde alespoň jednu další charakterizaci, Mittag-Lefflerových modulů, která přichází z docela jiného směru

Připomeňme nejprve, že tenzorový součin nekomutuje s nekonečným direktním součinem. Pro daný R-modul M a množinu R-modulů $\{Q_i;\ i \in I\}$ existuje kanonický homomorfismus

$$M \otimes_R \prod_{i \in I} Q_i \to \prod_{i \in I} (M \otimes_R Q_i)$$

daný předpisem $m \otimes (q_i)_{i \in I} \mapsto (m \otimes q_i)_{i \in I}$, nemusí však být obecně injektivní ani surjektivní.

Příklad. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$, neboť pro libovolné prvky $q \in \mathbb{Q}$ a $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ platí

$$q \otimes m = \frac{q}{n} \cdot n \otimes m = \frac{q}{n} \otimes n \cdot m = 0.$$

Proto $\prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)) = 0$. Máme ovšem vnoření $\mathbb{Z} \to \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dané předpisem $1 \mapsto (1)_{n \in \mathbb{N}}$. Modul $\mathbb{Q}$ je plochý a proto tenzorovým součinem dostáváme vnoření $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$. Jistě tedy neplatí $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n = 0$. Homomorfismus

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

tedy není ani na, ani prostý.

Úvahy, za jakých podmínek je tento homomorfismus prostý, surjektivní či izomorfismem vedou na následující tvrzení.

Tvrzení 7.13. *Mějme R-modul M. Potom kanonický homomorfismus*

$$M \otimes_R \prod_{i \in I} Q_i \to \prod_{i \in I} (M \otimes_R Q_i)$$

je pro libovolnou množinu R-modulů $\{Q_i;\ i \in I\}$

(i) *na, právě tehdy, když M je konečně generovaný,*

(ii) *prostý, právě tehdy když je M Mittag-Lefflerův,*

(iii) *izomorfismus, právě tehdy když je M konečně prezentovaný.*

Důkaz. Vynecháváme, lze najít v [4, Lemma 3.8, Theorem 3.14]. □

Tato charakterizace nám umožňuje přidat k příkladům Mittag-Lefflerových modulů všechny konečně prezentované moduly. Naopak dostáváme příklady modulů které Mittag-Lefflerovy nejsou. Takové budou všechny konečně generované moduly, které nejsou konečně prezentované. Z předchozího příkladu potom plyne, že $\mathbb{Q}$ není Mittag-Lefflerův modul, tím dostáváme příklad modulu, který není Mittag-Lefflerův, ale je plochý.

8. Projektivní moduly

V následující kapitole se budeme věnovat třídě projektivních modulů, především ukážeme, že projektivní moduly jsou právě ploché Mittag-Lefflerovy moduly připouštějící rozklad na direktní sumu spočetně generovaných modulů. Zužování a rozšiřování pro vlastnost být plochým Mittag-Lefflerovým modulem jsme již dokázali. V závěru této kapitoly dokážeme, že pro projektivní moduly se takto rozšiřuje i rozložitelnost na direktní sumu spočetně generovaných modulů. Tím již bude dokázán hlavní závěr této práce, a sice že projektivita je AD-vlastností komutativních okruhů a tedy že se rozšiřuje z pokrytí.

Definice 8.1. *Buď R okruh, P buď R-modul. Řekneme, že P je* projektivní*, je-li funktor* $\mathrm{Hom}(P,-)$ *exaktní, tedy platí-li, že je-li*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

krátká exaktní posloupnost R-modulů, pak

$$0 \to \mathrm{Hom}(P,A) \to \mathrm{Hom}(P,B) \to \mathrm{Hom}(P,C) \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost abelovských grup.

Poznámka. Protože funktor $\mathrm{Hom}(P,-)$ je vždy zleva exaktní, stačí pro projektivitu modulu P ověřit, že pro libovolný surjektivní homomorfismus π je $\mathrm{Hom}(P,\pi)$ surjektivní. Modul P je tedy projektivní právě tehdy, existuje-li pro libovolný surjektivní homomorfismus $\pi : A \to B$ a libovolný homomorfismus $f : P \to B$ homomorfismus $g : P \to A$ takový, že $f = \pi \circ g$.

Příklad. Je už zřejmé, že volné moduly jsou projektivní. Je-li F volný modul s bází $\{x_i;\ i \in I\}$, $\pi A \to B$ surjektivní homomorfismus a $f : F \to B$ homomorfismus, potom homomorfismus $g : F \to A$ definovaný na volné bázi jako $x_i \mapsto a_i$, kde a_i je voleno tak, aby $\pi(a_i) = f(x_i)$ je hledaným homomorfismem z předchozí poznámky.

Tvrzení 8.2. *Buď P projektivní R-modul, buď $\pi : M \to P$ epimorfismus. Potom π je štěpitelný epimorfismus a P je tedy v M direktním sčítancem.*

Důkaz. Aplikujeme poznatek z předchozí poznámky pro $f = \mathrm{id}_P$.

□

Tvrzení 8.3. *Buď R okruh. Potom R-modul P je projektivní právě tehdy, je-li direktním sčítancem ve volném modulu.*

Důkaz. Přímá implikace vyplývá z předchozího tvrzení a faktu že každý modul je faktorem volného modulu. Ukažme zpětnou implikaci. Buď F volný modul, v němž je P direktním sčítancem, označme $\subseteq$: $P \to F$ kanonické vnoření a $p : F \to P$ kanonickou projekci. Zvolme libovolný surjektivní homomorfismus $\pi : A \to B$ a homomorfismus $f : P \to B$. Dostáváme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi"] & B \\ F \arrow[u, "g'"] \arrow[r, two heads, shift left, "p"] & P \arrow[u, "f"'] \arrow[l, hook, shift left, "\subseteq"] \end{tikzcd},$$

v němž jsme g' zkonstruovali díky volnosti F tak, aby $\pi \circ g' = f \circ p$. Hledaným homomorfismem je potom $g = g' \circ \subseteq$.

□

Díky této charakterizaci snadno ověříme, že se projektivita přenáší na direktní sčítance a direktní sumy modulů.

Tvrzení 8.4. *Buď $(M_i;\ i \in I)$ množina R-modulů a buď $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Potom M je projektivní právě tehdy, je-li pro každé $i \in I$ modul M_i projektivní.*

Důkaz. Buď nejprve modul M projektivní. Existují tedy modul C a volný modul F takové, že $F = M \oplus C$. Ovšem pro libovolné $i \in I$ je $M = M_i \oplus \bigoplus_{i' \neq i} M_{i'}$ a tedy $F = M_i \oplus (\bigoplus_{i' \neq i} M_i \oplus C)$ a M_i je projektivní. Je-li naopak pro každé $i \in I$ modul M_i projektivní, potom nalezneme pro každé $i \in I$ modul C_i a volný modul F_i takové, že $F_i = M_i \oplus C_i$. Potom ovšem dostáváme izomorfismus

$$\bigoplus_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \oplus C_i) \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \oplus \bigoplus_{i \in I} C_i \cong M \oplus C.$$

Modul $\bigoplus_{i \in I} F_i$ je volný a M je tedy projektivní.

□

Důležitou a užitečnou vlastností projektivních modulů je, že je lze rozkládat na direktní sumy v jistém smyslu malých projektivních modulů. Je to právě tento fakt, co umožňuje hlavní důkazy ve zbytku této kapitoly. Tento fakt se nazývá *Kaplanského věta.*

Tvrzení 8.5. *Buď P projektivní R-modul. Potom $P \cong \bigoplus_{i \in I} P_i$ pro nějakou množinu I, kde P_i jsou spočetně generované projektivní moduly.*

Důkaz. Uvedeme jen část důkazu. Platí následující tvrzení. Mějme R-moduly A, B a M takové, že $A \oplus B \cong M$ a $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ pro nějakou množinu $\{M_i;\ i \in I\}$ spočetně generovaných modulů. Potom $A \cong \bigoplus_{j \in J} A_j$ pro nějakou množinu $\{A_j;\ j \in J\}$ spočetně generovaných modulů [12, 8.10].

Projektivní modul P je direktním sčítancem v nějakém volném modulu $R^{\oplus J}$. Regulární modul R je spočetně generovaný. Podle předchozího tvrzení je tedy už $P \cong \bigoplus_{i \in I} P_i$ pro nějakou množinu I, kde P_i jsou spočetně generované moduly. Moduly P_i jsou navíc direktními sčítanci v projektivním modulu a tedy jsou samy projektivní.

□

Jak se ukáže v následující části, Kaplanského věta je důležitou součástí charakterizace projektivních modulů.

8.1 Charakterizace projektivních modulů

Přikročme nyní k charakterizaci projektivních modulů. Díky Kaplanského větě je možné redukovat kritéria pro plochost na spočetně generované moduly. Pro spočetně generované moduly se již snadno ukáže, že projektivní jsou právě ploché Mittag-Lefflerovy moduly.

Lemma 8.6. *Buď M spočetně generovaný plochý Mittag-Lefflerův modul nad okruhem R. Potom M je projektivní.*

Důkaz. Podle Lazardovy věty je možné vyjádřit M jako direktní limitu systému konečně generovaných volných modulů. Vzhledem ke spočetné generovanosti lze tento systém volit spočetný. Označme zvolený systém (M_i, f_{ji}), indexová množina je I. Buď

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

exaktní posloupnost. Nyní stačí ukázat, že funktor $\mathrm{Hom}(M,-)$ exaktnost této posloupnosti zachovává. Vzhledem k tomu, že moduly M_i jsou volné a tedy projektivní, je nutně posloupnost

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_i,A) \to \mathrm{Hom}(M_i,B) \to \mathrm{Hom}(M_i,C) \to 0$$

exaktní pro každé $i \in I$. Protože M je Mittag-Lefflerův, je $\mathrm{Hom}(M_i,A)$ Mittag-Lefflerův inverzní systém a podle Tvrzení 7.3 je exaktní i posloupnost

$$0 \to \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,A) \to \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,B) \to \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,C) \to 0.$$

Konečně pro libovolný modul N je $\varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,N) \cong \mathrm{Hom}(M,N)$ přirozeným izomorfismem a posloupnost

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,A) \to \mathrm{Hom}(M,B) \to \mathrm{Hom}(M,C) \to 0$$

je exaktní a modul M je projektivní.

□

Věta 8.7. *Buď P modul nad okruhem R. Potom P je projektivní právě tehdy, jsou-li splněny následující podmínky.*

(i) *Modul P je plochý.*

(ii) *Modul P je Mittag-Lefflerův.*

(iii) *Modul P je direktní sumou spočetně generovaných modulů.*

Důkaz. Je-li P projektivní, je direktním sčítancem ve volném modulu. Volné moduly jsou jak ploché, tak Mittag-Lefflerovy, jak bylo dokázáno v příslušných kapitolách, a tyto vlastnosti přecházejí na direktní sčítance. Konečně fakt, že projektivní moduly jsou direktními sumami spočetně generovaných modulů je závěrem Kaplanského věty.

Nyní dokažme opačnou implikaci. Modul P se podle předpokladu rozkládá na direktní sumu spočetně generovaných modulů. Vlastnost býti plochým a Mittag-Lefflerovým modulem se přenáší na direktní sčítance. Podle Lemmatu 8.6 jsou tyto sčítance projektivními moduly, ovšem potom i P je projektivní.

□

8.2 Zužování a rozšiřování projektivity

V této části konečně ukážeme, že je projektivita modulů AD-vlastností. Všechny okruhy v této části jsou komutativní.

Ukažme nejprve, že projektivita kompatibilní s direktním součinem okruhů ve smyslu Definice 6.11.

Tvrzení 8.8. *Projektivita je kompatibilní s konečnými direktními součiny okruhů.*

Důkaz. Buď n přirozené číslo a mějme pro $1 \leq i \leq n$ okruh R_i a projektivní R_i-modul M_i. Potom nalezneme R_i-modul C_i a kardinál κ_i takové, že $M_i \oplus C_i \cong R_i^{\oplus \kappa_i}$. Označme κ maximum z κ_i pro $1 \leq i \leq n$. Potom pro každé $1 \leq i \leq n$ nalezneme modul C_i' takový, že $M_i \oplus C_i' \cong R_i^{\oplus \kappa}$. K dokončení důkazu stačí nahlédnout, že

$$\prod_{1 \leq i \leq n} M_i \oplus \prod_{1 \leq i \leq n} C_i' \cong (\prod_{1 \leq i \leq n} R_i)^{\oplus \kappa}.$$

Všechny moduly M_i, C_i a okruhy R_i mají strukturu $\prod_{1 \leq i \leq n} R_i$-modulu a konečné direktní produkty jsou izomorfní direktním sumám, hledaný izomorfismus tedy vyplývá z izomorfismu

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} M_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} C_i' \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (M_i \oplus C_i') \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq n} R_i^{\oplus \kappa} \cong (\bigoplus_{1 \leq i \leq n} R_i)^{\oplus \kappa}.$$

□

Zužování projektivity je rychlým důsledkem vlastností tenzorového součinu.

Věta 8.9. *Buď $R \to S$ okruhový homomorfismus a P projektivní R-modul. Potom $P \otimes_R S$ je projektivní S-modul.*

Důkaz. Modul P je direktním sčítancem ve volném modulu, existuje tedy volný modul F a modul C takové že $F \cong P \oplus C$. Vzhledem k tomu, že tenzorový součin komutuje s direktními sumami, máme už $P \otimes_R S \oplus C \otimes_R S \cong F \otimes_R S$ kde navíc $F \otimes_R S$ je volný S-modul. S-modul $P \otimes_R S$ je tedy projektivní.

□

Rozšiřování projektivity se nejprve snadno ukáže pro moduly spočetně generované, neboť spočetná generovanost se na rozdíl od Kaplanského rozkladu rozšiřuje po věrně plochých okruhových homomorfismech.

Lemma 8.10. *Buď $R \to S$ plochý okruhový homomorfismus a P buď R-modul. Potom je-li S-modul $P \otimes_R S$ spočetně generovaný a projektivní, je P spočetně generovaný projektivní R-modul.*

Důkaz. Podle Tvrzení 7.12 je již P plochý a Mittag-Lefflerův. Ukážeme-li, že je spočetně generovaný, je už podle Lemmatu 8.6 i projektivní a důkaz je dokončen. Díky spočetné generovanosti modulu $P \otimes_R S$ máme exaktní posloupnost

$$S^{\oplus \omega} \to P \otimes_R S \to 0,$$

kde navíc $S^{\oplus\omega} \cong R^{\oplus\omega} \otimes_R S$. Podle věrné plochosti homomorfismu $R \to S$ je ovšem exaktní i posloupnost

$$R^{\oplus\omega} \to P \to 0.$$

Odtud plyne, že modul P je spočetně generovaný.

□

Důkaz rozšiřování pro obecný projektivní modul provedeme pomocí metody dévissage. V modulu, jehož projektivitu zkoumáme zkonstruujeme nejprve systém podmodulů se speciálními vlastnostmi, které nám umožní tento modul poté rozložit jako direktní sumu spočetně generovaných podmodulů. Ke konstrukci tohoto systému využijeme pomocné lemma.

Lemma 8.11. *Buď $R \to S$ okruhový homomorfismus. Mějme dále R-modul M takový, že $M \otimes_R S = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ pro nějaký systém spočetně generovaných S-modulů $\{Q_i; i \in I\}$. Buď $N \subseteq M$ spočetně generovaný podmodul. Potom existuje spočetně generovaný podmodul $N' \subseteq M$ takový, že $N \subseteq N'$ a $(\nu \otimes_R \mathrm{id}_S)(N') = \bigoplus_{i \in I'} Q_i$ pro nějakou podmnožinu $I' \subseteq I$, kde ν je vnoření $N' \subseteq M$.*

Důkaz. Označme $N = N_0$ a indukcí sestrojme rostoucí posloupnost spočetně generovaných modulů N_l pro l přirozené, které splňují následující podmínku. Je-li $\pi_i((\nu_l \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_l)) \neq 0$, kde π_i je kanonická projekce $M \otimes_R S \to Q_i$ a ν_l je vnoření $N_l \subseteq M$, potom už $Q_i \subseteq (\nu_{l+1} \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_{l+1})$. Označme $I_l = \{i \in I;\ \pi_i((\nu_l \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_l)) \neq 0\}$. Protože N_l je spočetně generovaný modul, je I_l opět spočetná a stejně tak je spočetně generovaný modul $\bigoplus_{i \in I_l} Q_i \subseteq M \otimes_R S$. Uvažujme nějakou množinu jeho generátorů $\{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \otimes_{ij}; j \in J\}$ indexovanou spočetnou množinu J. Potom zvolme za N_{l+1} podmodul M generovaný prvky m_{ij} a prvky modulu N_l. Potom jistě $Q_i \subseteq (\nu_{l+1} \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_{l+1})$ pro každé $i \in I_l$.

Konečně vezměme $N' = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} N_l$ a $I' = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} I_l$ Snadno se ověří, že $(\nu \otimes_R \mathrm{id}_S)(N') = \bigoplus_{i \in I'} Q_i$.

□

Věta 8.12. *Buď $R \to S$ plochý okruhový homomorfismus a P buď R-modul. Potom je-li $P \otimes_R S$ projektivní S-modul, je P projektivní R-modul.*

Důkaz. Už víme, že je modul P plochý a Mittag-Lefflerův. Stačí tedy ukázat, že jej lze rozložit na direktní sumu spočetně generovaných podmodulů. Podle Kaplanského věty je $P \otimes_R S = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, kde $\{Q_i; i \in I\}$ je systém spočetně generovaných projektivních podmodulů.

Sestrojíme posloupnost modulů $M_\alpha \subseteq P$ tak, že $M_\alpha \otimes_R S = \bigoplus_{i \in I'} Q_i$ pro nějakou podmnožinu $I' \subseteq I$. Připomeňme, že pro $M_\alpha \subseteq P$ je skutečně $M_\alpha \otimes_R S \subseteq P \otimes_R S$, neboť S je jako R-modul plochý a předchozí požadavek má smysl.

Zvolme nyní na P dobré uspořádání. Nyní transfinitní indukcí sestrojíme modul M_α pro každý ordinál α následovně. Budiž $M_0 = 0$. Je-li β limitní ordinál, budiž $M_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha$. Je-li M_α již definován, sestrojíme $M_{\alpha+1}$ následovně. Je-li již $M_\alpha = P$, položme i $M_{\alpha+1} = P$. Jinak buď $m \in P$ nejmenší prvek mimo M_α vzhledem ke zvolenému dobrému uspořádání. Uvažujme nyní $m + M_\alpha \in P/M_\alpha$. Platí $P/M_\alpha \otimes_R S \cong (P \otimes_R S)/(M_\alpha \otimes_R S)$, neboť S je plochý

R-modul. Navíc podle indukčního předpokladu je $M_\alpha \otimes_R S = \bigoplus_{i\in I'} Q_i$ a tedy $(P \otimes_R S)/(M_\alpha \otimes_R S) \cong \bigoplus_{i\in I''} Q_i$, kde $I'' = I \setminus I'$.

Podle Lemmatu 8.11 existuje spočetně generovaný podmodul $N_\alpha \subseteq P/M_\alpha$ takový, že $m + M_\alpha \in N_\alpha$ a $(\subseteq \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_\alpha) = \bigoplus_{i\in J} Q_i$ pro nějakou podmnožinu $J \subseteq I''$. Vzhledem k plochosti S jako R-modulu je ovšem $(\subseteq \otimes_R \mathrm{id}_S)(N_\alpha) = N_\alpha \otimes_R S$. Modul $N_\alpha \otimes_R S$ je tedy coby direktní součet projektivních modulů projektivní a je spočetně generovaný. Podle Lemmatu 8.10 je N_α projektivní.

Za $M_{\alpha+1}$ zvolme vzor N_α při kanonické projekci. Potom $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong N_\alpha$ je projektivní. Krátká exaktní posloupnost $0 \to M_\alpha \to M_{\alpha+1} \to M_{\alpha+1}/M_\alpha \to 0$ se tedy štěpí a $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ je v $M_{\alpha+1}$ direktním sčítancem.

Dokažme nyní, že pro libovolný ordinál γ už je $M_\gamma \cong \bigoplus_{\alpha<\gamma} M_{\alpha+1}/M_\alpha$. Použijeme transfinitní indukci. Ať $\beta + 1$ je ordinál a platí $M_\beta \cong \bigoplus_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Potom ovšem $M_{\beta+1} \cong M_{\beta+1}/M_\beta \oplus \bigoplus_{\alpha<\beta} M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong \bigoplus_{\alpha<\beta+1} M_{\alpha+1}/M_\alpha$.

Buď dále γ limitní ordinál a pro každé $\beta < \gamma$ plať $M_\beta \cong \bigoplus_{\alpha<\beta} M_{\alpha+1}/M_\alpha$. Z konstrukce víme, že $M_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$. Odtud jistě pro každé $\alpha < \gamma$ už $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ je izomorfní podmodulu M_γ, neboť je už izomorfní podmodulu modulu $M_{\alpha+1} \subseteq M_\gamma$. Navíc jistě $M_\gamma = \sum_{\alpha<\gamma} M_{\alpha+1}/M_\alpha$. Dále pro spor předpokládejme, že pro nějaké $\alpha < \gamma$ je průnik $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\alpha'<\gamma} M_{\alpha'+1}/M_{\alpha'}$ netriviální. Existuje tedy nějaký prvek $0 \neq m \in M_{\alpha+1}/M_\alpha$, přirozené číslo n, ordinály $\alpha_1, \ldots \alpha_n < \gamma$ a prvky $0 \neq m_i \in M_{\alpha_i+1}/M_{\alpha_i}$ takové, že $m = \sum_{i\leq n} m_i$. Potom ovšem máme již netriviální průnik $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\alpha'\leq\beta} M_{\alpha'}$, kde β je maximum z hodnot $\alpha,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. To je ovšem spor s indukčním předpokladem, neboť $M_\beta \cong \bigoplus_{\alpha<\beta} M_{\alpha+1}/M_\alpha$. Tedy průnik $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\alpha'<\gamma} M_{\alpha'+1}/M_{\alpha'}$ je pro libovolné $\alpha < \gamma$ triviální. Tak jsme dokázali, že $M_\gamma \cong \bigoplus_{\alpha<\gamma} M_{\alpha+1}/M_\alpha$.

Konečně existuje jistě ordinál κ takový, že $M_\kappa = P$, neboť jsme každý prvek $x \in P$ přidali nejpozději v modulu M_α, kde α je pořadí prvku x vzhledem k fixovaném dobrému uspořádání na P. Potom $P \cong \bigoplus_{\alpha<\kappa} M_{\alpha+1}/M_\alpha$ a jako direktní suma projektivních modulů je projektivní.

□

Tímto jsme dokázali, že projektivita modulů je AD-vlastností. Můžeme nyní dokázat závěr této práce

Tvrzení 8.13. *Projektivita je lokální vlastnost modulů.*

Důkaz. Podle Věty 8.12 a Věty 8.9 je projektivita AD-vlastnost. Podle Tvrzení 6.13 je tedy lokální vlastností modulů.

□

Závěr

V této práci jsme prezentovali důkaz faktu, že projektivita je lokální vlastností modulů a Grothendieckův problém zmíněný v úvodu tedy má pozitivní řešení. V důkazu jsme využili charakterizaci projektivních modulů jako plochých Mittag-Lefflerových modulů, které lze rozložit na direktní sumu spočetně generovaných modulů a fakt, že tyto vlastnosti se zužují po okruhových homomorfismech a rozšiřují po plochých okruhových homomorfismech.

Důležitá byla pro práci skutečnost, že AD-vlastnosti jsou již ve smyslu Definice 6.5 lokální (Tvrzení 6.13). Jiným pojmem, z nějž již plynula lokalita vlastností, byl pojem silné lokality. Ten nabízel alternativní důkaz faktu, že plochost modulů je lokální vlastnost. To, že je plochost AD-vlastností bylo však nezbytné pro další důkazy. Bylo by zajímavé najít přesný vztah mezi pojmy AD-vlastností a silně lokálních vlastností.

Je také zajímavé nahlédnout, jak různé vlastnosti ovlivňují věrně ploché rozšiřování jiných vlastností. Ze tří vlastností charakterizujících projektivní moduly jsme pouze pro plochost dokázali, že se rozšiřuje po věrně plochých okruhových homomorfismech. Z uvedených důkazu potom plyne pouze, že se vlastnost býti Mittag-Lefflerovým modulem rozšiřuje za přítomnosti plochosti a Kaplanského rozklad za přítomnosti projektivity.

Zájem o nekonečně dimenzionální vektorové bandly v nedávné době oživil článek Vladimira Drinfelda [1]. Technika dévissage byla zobecněna například pro studium Drinfeldových vektorových bandlů v [2] a lokálně vychylujících kvazikoherentních svazků v [6].

Seznam použité literatury

[1] Drinfeld, V. (2006). Infinite dimensional vector bundles in algebraic geometry. In *The Unity of Mathematics*, pages 263–304. Birkäuser, Boston.

[2] Estrada, S., Asensio, P. G. a Trlifaj, J. (2014). Descent of restricted flat Mittag–Leffler modules and generalized vector bundles. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**(9), 2973–2981. ISSN 1088-6826.

[3] Fulton, W. (2008). Algebraic curves. URL `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf`.

[4] Göbel, R. a Trlifaj, J. (2012). *Approximations and endomorphism algebras of modules*, volume 1. Walter De Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin. ISBN 978-3-11-021810-7.

[5] Gruson, L. (1973). Dimension homologique des modules plats sur an anneau commutatif noethérien. *Symposia mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, 1971)*, **13**, 1–89.

[6] Hrbek, M., Šťovíček, J. a Trlifaj, J. (2017). Zariski locality of quasi-coherent sheaves associated with tilting (preprint). *ArXiv e-prints.* URL `https://arxiv.org/abs/1712.08899v1`.

[7] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics).* Springer, New York. ISBN 0-387-98403-8.

[8] Matsumura, H. (1989). *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).* Cambridge University Press, Cambridge (England). ISBN 978-0521367646.

[9] Perry, A. (2010). Faithfully flat descent for projectivity of modules. URL `http://arxiv.org/abs/1011.0038v1`.

[10] Raynaud, M. a Gruson, L. (1971). Critères de platitude et de projectivité. techniques de "platification"d'un module. *Invent. Math.*, pages 1–89. ISSN 0020-9910.

[11] The Stacks Project Authors. Stacks project. URL `https://stacks.math.columbia.edu`.

[12] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research.* Gordon and Breach Science Publishers, Reading. ISBN 978-2881248054.